Томский политехнический университет

**Доцент, к.ф.м.н.**

**Богданов Олег Викторович**

# Аналитическая геометрия в пространстве Ч.1

**2022**

# Аналитическая геометрия в пространстве Ч.1

-Плоскость в 3D

-Прямая в 3D

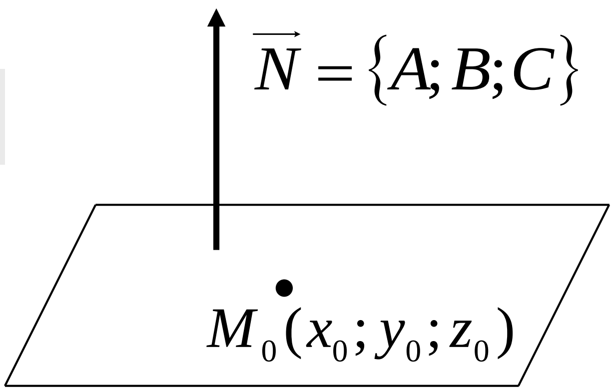
-Примеры решения задач.

# 1. Плоскость

## Основные уравнения плоскости

1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\vec{N}=\{A;B;C\}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$



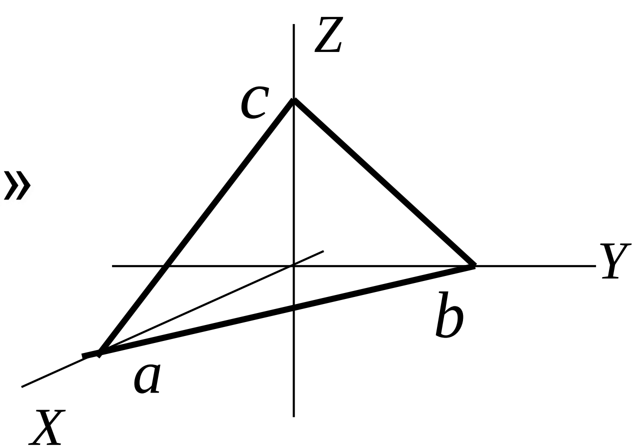

2. Общее уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$\vec{N}=\{A;B;C\}$ - вектор нормали

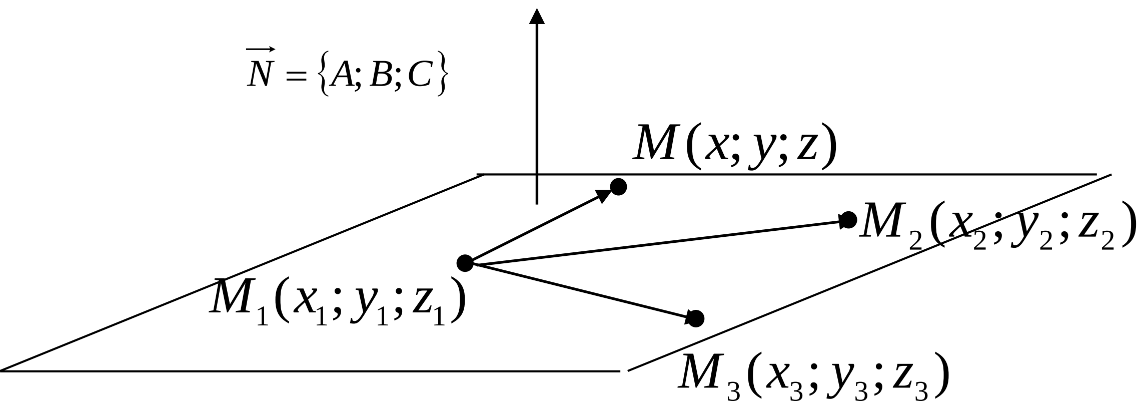
3. Уравнение плоскости « в отрезках»

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



## Уравнения плоскости

4. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$




$$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Условие компланарности векторов $(\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$

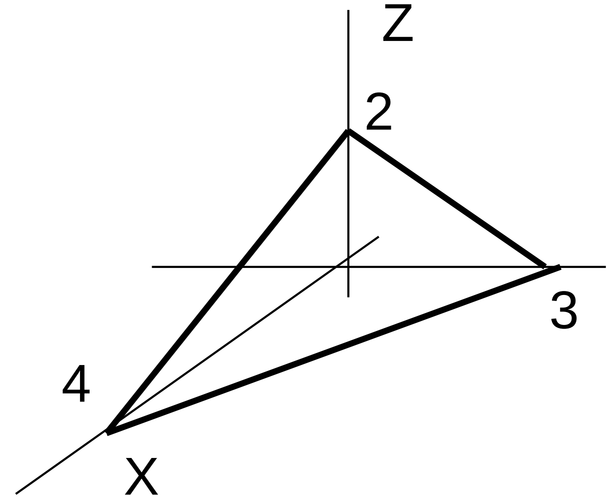
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

# Построение плоскостей

1. Построить плоскость $3x+4y+6z-12=0$

Находим координаты точек пересечения плоскости с осями координат.

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 4 |
| y | 0 | 3 | 0 |
| z | 2 | 0 | 0 |




Можно привести уравнение плоскости к уравнению «в отрезках»

1) Переносим вправо свободный член уравнения $3x+4y+6z=12$

2) Делим на 12, чтобы получить единицу в правой части $\frac{3x}{12}+\frac{4y}{12}+\frac{6z}{12}=1$

3) Убираем коэффициенты из числителей $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$

Числа, стоящие в знаменателях, являются длинами отрезков, которые плоскость отсекает на осях координат

# Построение плоскостей

2. Построить плоскость $3x - 5y - 10 = 0$

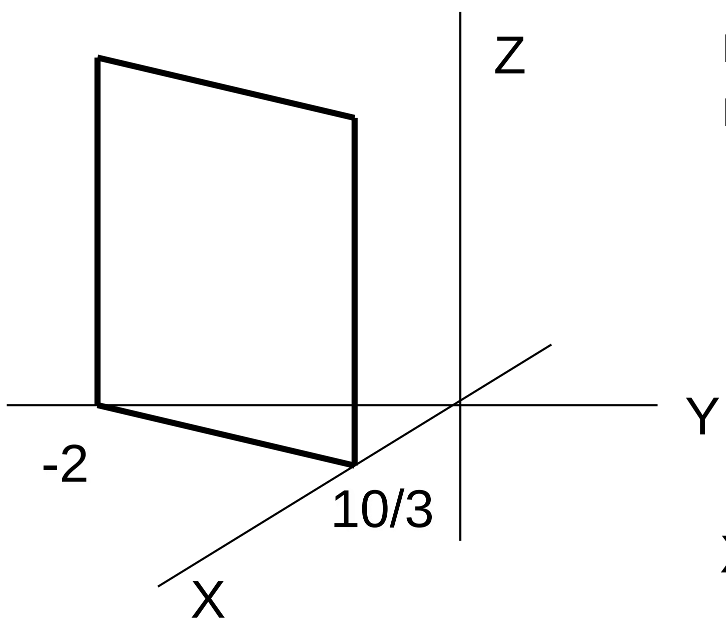
В уравнении отсутствует переменная z.

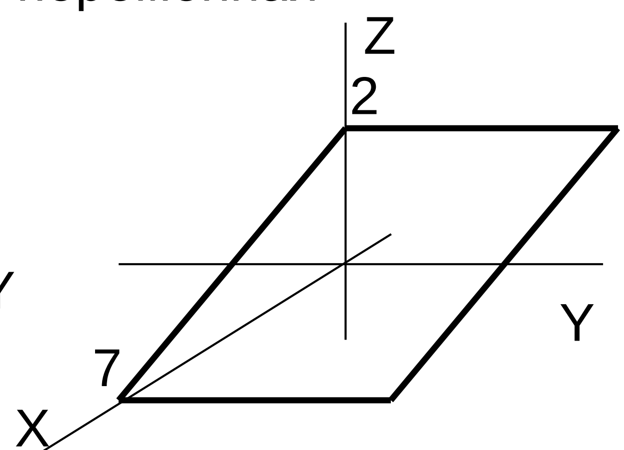
Находим точки пересечения плоскости с осями OX и OY.

| | | |
|---|---|---|
| X | 0 | 10/3 |
| y | -2 | 0 |

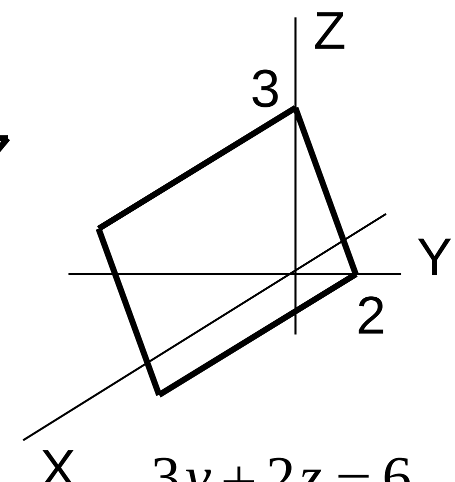
Соединяем точки прямой линией и получаем след плоскости на плоскости XOY.
Теперь из точек пересечения проводим прямые, параллельные оси OZ.

Аналогично строятся все плоскости, в уравнении которых отсутствует одна переменная




$2x + 7z - 14 = 0$

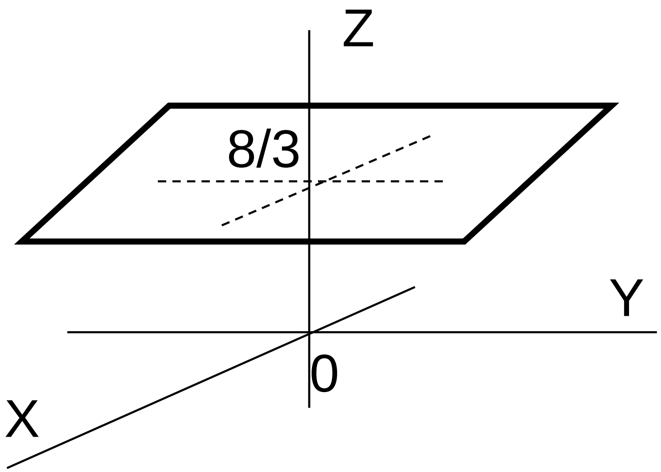



$3y + 2z = 6$

# Построение плоскостей

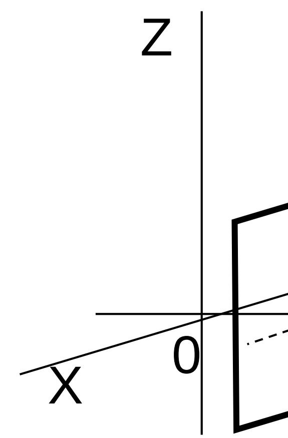
3. Построить плоскость $$3z-8=0$$

В уравнении отсутствуют две переменные x и y. Такая плоскость проходит параллельно и оси OX , и оси OY, т.е. она проходит параллельно координатной плоскости XOY через точку z=8/3 на оси OZ.

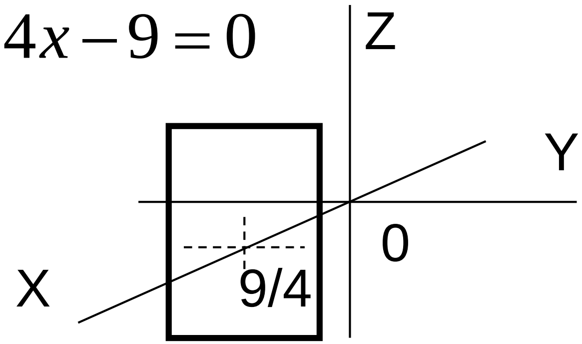



Аналогично строятся плоскости, в уравнениях которых отсутствуют две переменные

$$5y-3=0$$




$$4x-9=0$$



Таким образом, ***если в уравнении плоскости отсутствует одна переменная, то плоскость проходит параллельно той оси координат, переменной которой нет в уравнении.***

***Если в уравнении плоскости отсутствует свободный член, то плоскость проходит через начало координат.***

***Если в уравнении плоскости отсутствуют две переменные, то плоскость проходит параллельно координатной плоскости, переменных которой нет в уравнении.***

***Уравнения координатных плоскостей***

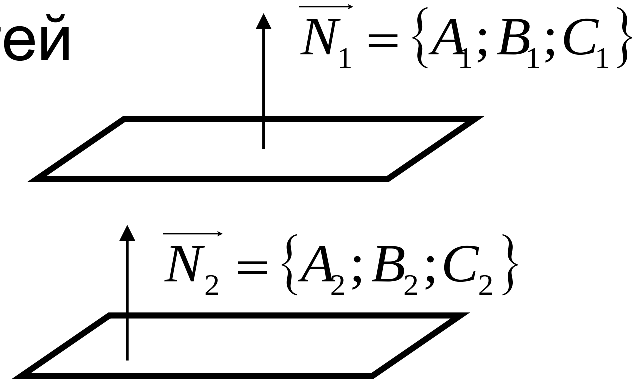
$x = 0$ - уравнение плоскости YOZ

$y = 0$ - уравнение плоскости XOZ

$z = 0$ - уравнение плоскости XOY

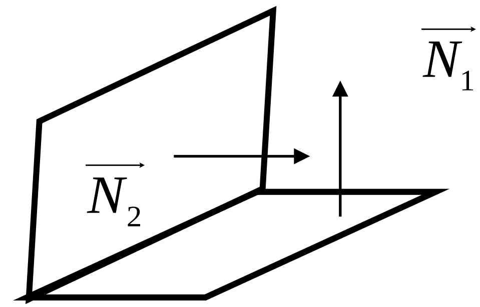
# Взаимное расположение плоскостей

## 1. Условие параллельности плоскостей




$$\overrightarrow{N_1} \parallel \overrightarrow{N_2} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

## 2. Условие перпендикулярности плоскостей




$$\overrightarrow{N_1} \perp \overrightarrow{N_2} \qquad (\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}) = 0$$

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0$$

## 3. Косинус угла между плоскостями

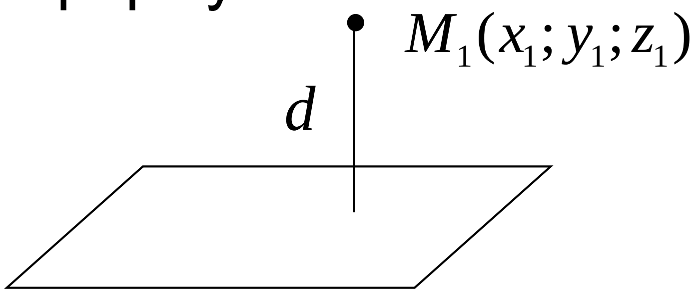
Угол между плоскостями – это угол между векторами нормалей этих плоскостей

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}) = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

# Расстояние от точки до плоскости

Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$




Расстояние – это длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость

***Правило**: для нахождения расстояния от точки до плоскости нужно координаты точки подставить в левую часть уравнения плоскости, разделить на длину вектора нормали плоскости и полученное значение взять по абсолютной величине.*

! Расстояние – величина всегда положительная

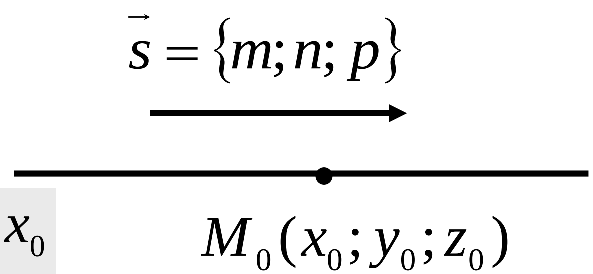
# 2. Прямая в пространстве. Основные уравнения

1. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s}=\{m;n;p\}$

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

- канонические уравнения

$\vec{s}=\{m;n;p\}$ - направляющий вектор




2. Параметрические уравнения

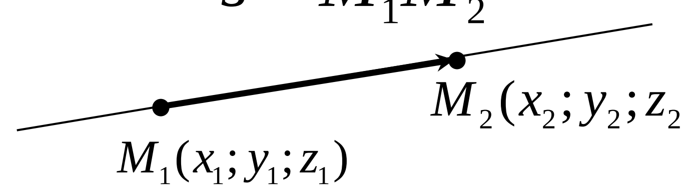
$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}$$

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$

$$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$$

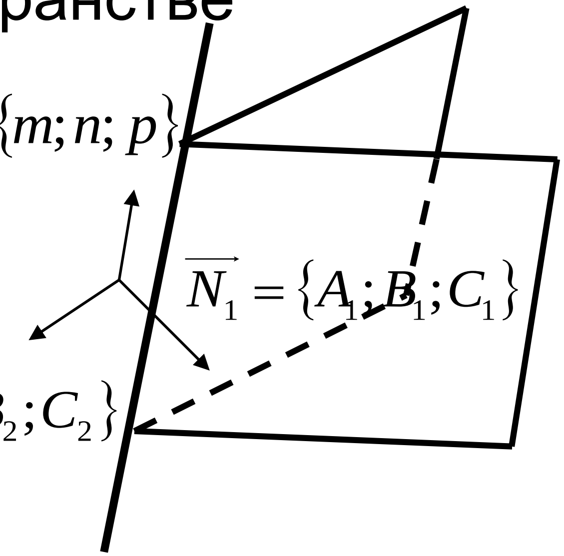
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$



# Прямая в пространстве. Основные уравнения

## 4. Общее уравнение прямой в пространстве

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$




а) Направляющий вектор

$$\vec{s} = \left[\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

б) Нахождение точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ на прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_0 - D_1 \\ A_2x + B_2y = -C_2z_0 - D_2 \end{cases}$$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

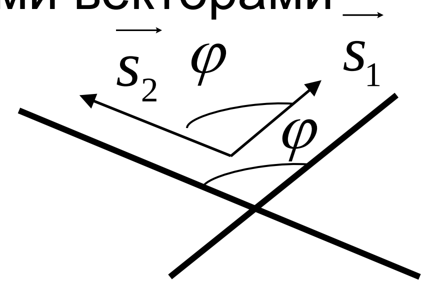
- канонические уравнения прямой

# Взаимное расположение прямых в пространстве

## 1. Нахождение угла между прямыми.

Прямые в пространстве заданы каноническими уравнениями, поэтому угол между прямыми – это угол между направляющими векторами

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{s_1}\cdot\vec{s_2})}{\left|\vec{s_1}\right|\cdot\left|\vec{s_2}\right|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^{\ 2} + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^{\ 2} + n_2^2 + p_2^2}}$$

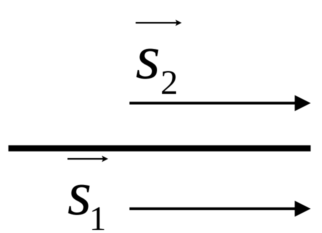



## 2. Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

Условие параллельности прямых

$$\vec{s_1} \parallel \vec{s_2}$$

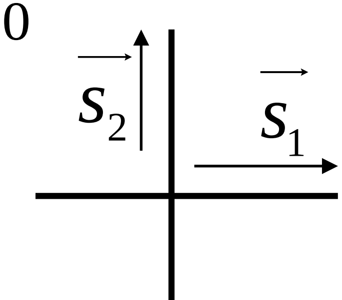
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$




Условие перпендикулярности прямых

$$\vec{s_1} \perp \vec{s_2} \qquad (\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}) = 0$$

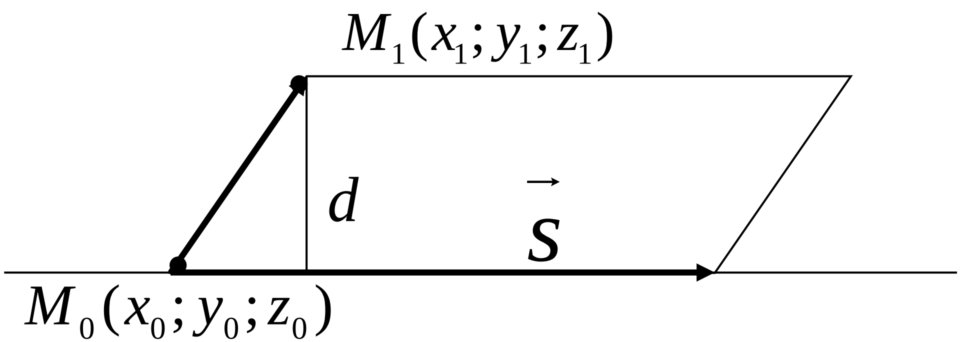
$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$



# Расстояние от точки до прямой в пространстве

Задача о нахождении расстояния от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до прямой $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

решается так же, как в векторной алгебре находилась высота параллелограмма, построенного на двух известных векторах.




На векторах $\overrightarrow{M_0M_1} = \{x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0\}$ и $\vec{s} = \{m; n; p\}$ строим параллелограмм.

Высота этого параллелограмма и есть искомое расстояние.

Высоту находим как отношение площади параллелограмма к длине основания. Площадь параллелограмма – это модуль векторного произведения векторов, а длина основания – это длина вектора $\vec{s}$

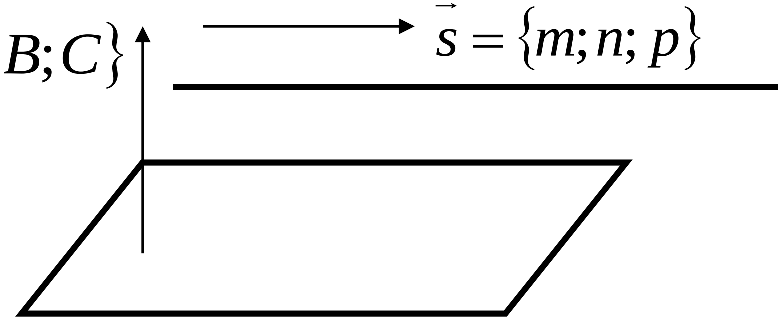
$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|}$$

# Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

1. Условие параллельности прямой и плоскости

$\overrightarrow{N} = \{A; B; C\}$

$\vec{s} = \{m; n; p\}$



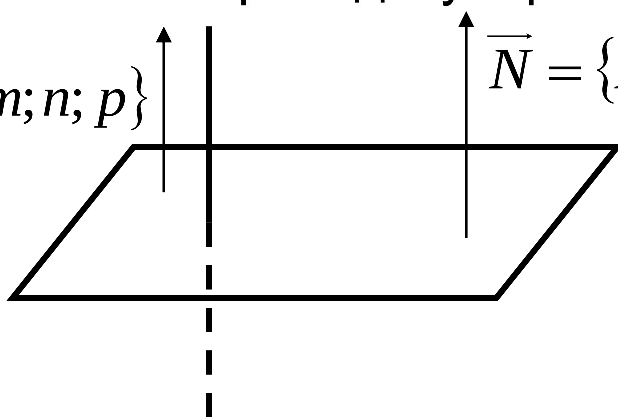
$\overrightarrow{s} \perp \overrightarrow{N}$ $\qquad (\overrightarrow{N} \cdot \vec{s}) = 0$

$$Am + Bn + Cp = 0$$

2. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$\vec{s} = \{m; n; p\}$

$\overrightarrow{N} = \{A; B; C\}$

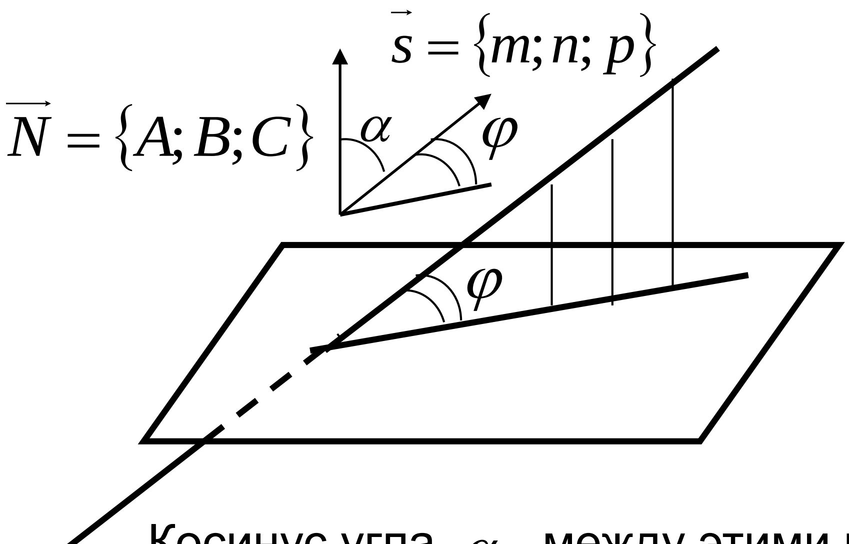


$\overrightarrow{N} \parallel \vec{s}$

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

# Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

## 3. Нахождение угла между прямой и плоскостью




Углом между прямой и плоскостью считается угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость. На рисунке это угол $\varphi$.

Из уравнений прямой и плоскости известны направляющий вектор прямой и вектор нормали плоскости.

Косинус угла $\alpha$ между этими векторами легко можно найти.
Легко заметить, что углы $\varphi$ и $\alpha$ в сумме дают 90 градусов, а значит
$\cos\alpha=\sin\varphi$

Поэтому при нахождении угла между прямой и плоскостью находят не косинус, а синус угла. Кроме того, в формуле стоит модуль, так как синус угла в данной ситуации может быть только положительным

$$\sin\varphi=\frac{|(\overrightarrow{N}\cdot\vec{s})|}{\left|\overrightarrow{N}\right|\cdot\left|\vec{s}\right|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

# Нахождение точки пересечения прямой и плоскости

Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости нужно составить систему из уравнений прямой и плоскости

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

$$Ax+By+Cz+D=0$$

Для того, чтобы решить систему, переводим уравнение прямой в параметрический вид

$$\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt+y_0 \\ z=pt+z_0 \end{cases}$$

Подставляем эти уравнения в уравнение плоскости

$$A(mt+x_0)+B(nt+y_0)+C(pt+z_0)+D=0$$

Из этого уравнения находим параметр $t$ и подставляем его значение в параметрические уравнения , получим координаты точки пересечения

# Составление уравнений плоскости

- Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;3;-5)$ перпендикулярно вектору $\vec{a}=\{3;-2;4\}$

Исходное уравнение:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Подставляем координаты точки и вектора

$$3(x+1)-2(y-3)+4(z+5)=0$$

Раскрываем скобки

$$3x+3-2y+6+4z+20=0$$

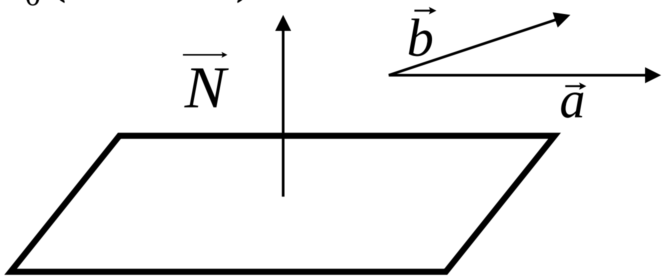
Приводим подобные

$$3x-2y+4z+29=0$$

Получили общее уравнение плоскости.

# Решение типовых задач контрольной работы № 4

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;3;-5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}=\{2;-7;5\}$ $\vec{b}=\{-3;0;-4\}$




Используем уравнение

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Координаты точки нам известны. Необходимо найти координаты вектора нормали. Из рисунка видно, что в качестве вектора нормали можно взять вектор, являющийся векторным произведением данных в условии задачи векторов, так как такой вектор перпендикулярен каждому из данных векторов, а значит перпендикулярен и плоскости.

$$\vec{N}=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -7 & 5 \\ -3 & 0 & -4 \end{vmatrix}=28\vec{i}-7\vec{j}-21\vec{k}$$

Итак, $N=\{28;-7;-21\}$

Подставляем все данные в уравнение плоскости

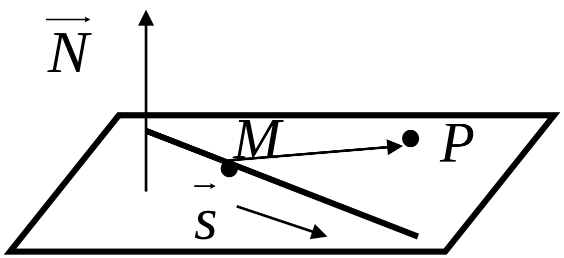
$$28(x+1)-7(y-3)-21(z+5)=0$$

$$4(x+1)-(y-3)-3(z+5)=0$$

$$4x-y-3z-8=0$$

Аналогично решаются задачи с такими условиями:

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(2;-3;1)$ и прямую $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+6}{-3}$




Из уравнения прямой можно определить координаты направляющего вектора и точки

$$\vec{s}=\{0;4;-3\} \qquad M(5;1;-6)$$

Чтобы найти вектор нормали плоскости, нужно знать два вектора, параллельных этой плоскости. Один из этих векторов – направляющий вектор прямой, а другой вектор можно получить, соединив две известные точки $\overrightarrow{MP}=\{-3;-4;7\}$

Итак, вектор нормали

$$\overrightarrow{N}=\left[\vec{s}\times\overrightarrow{MP}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 4 & -3\\ -3 & -4 & 7\end{vmatrix}=16\vec{i}+9\vec{j}+12\vec{k}$$

$$16(x-2)+9(y+3)+12(z-1)=0$$

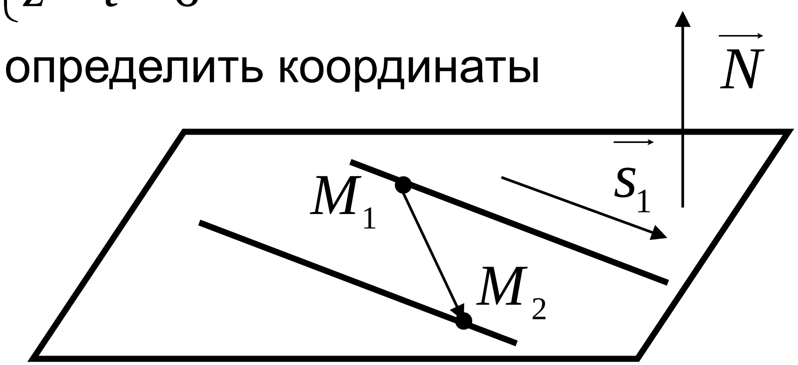
Раскрываем скобки и упрощаем

$$16x+9y+12z-17=0$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{1} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=5t+1 \\ y=-2t+3 \\ z=t-6 \end{cases}$$

Из уравнения каждой прямой можно определить координаты направляющего вектора и точки

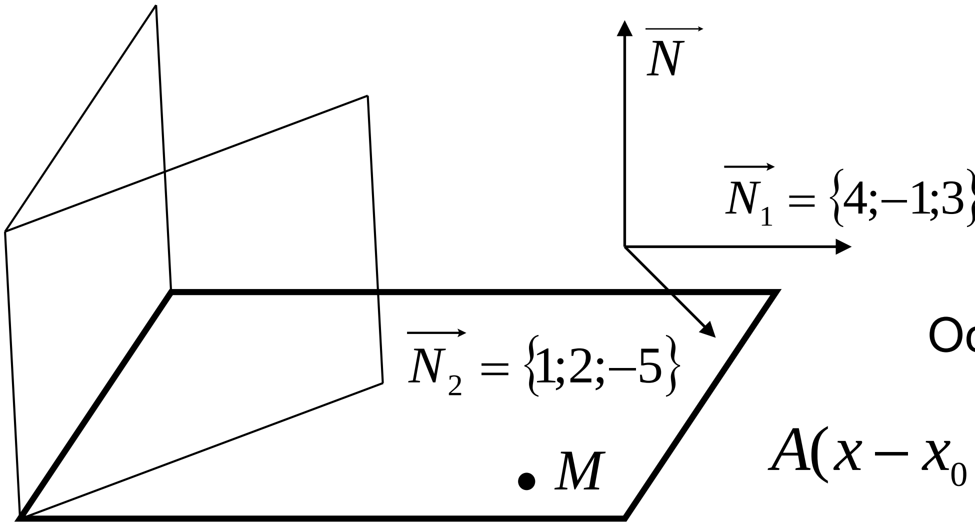



$\vec{s_1}=\{5;-2;1\}$ $M_1(3;-2;0)$

$\vec{s_2}=\{5;-2;1\}$ $M_2(1;3;-6)$

Задача сводится к предыдущей, если образовать вектор, соединяющий две известные точки на прямых. Тогда для нахождения вектора нормали будут известны координаты двух векторов в этой плоскости. Точку для составления уравнения плоскости можно взять любую.

4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;5)$ перпендикулярно двум плоскостям $4x - y + 3z + 2 = 0$ и $x + 2y - 5z - 3 = 0$




Основное уравнение:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Для составления уравнения плоскости есть точка $M(2;-1;5)$.
Вектором нормали может являться вектор, равный векторному произведению векторов нормалей данных плоскостей.

$$\vec{N} = \left[\vec{N_1} \times \vec{N_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 23\vec{j} + 9\vec{k}$$

Остается только подставить все данные в уравнение.

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

$$M_1(-1;3;-5),\quad M_2(2;-1;0),\quad M_3(0;-4;7)$$

В данном случае можно воспользоваться готовой формулой уравнения плоскости, проходящей через три точки

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Подставляем в это уравнение координаты точек и раскладываем определитель по элементам первой строки

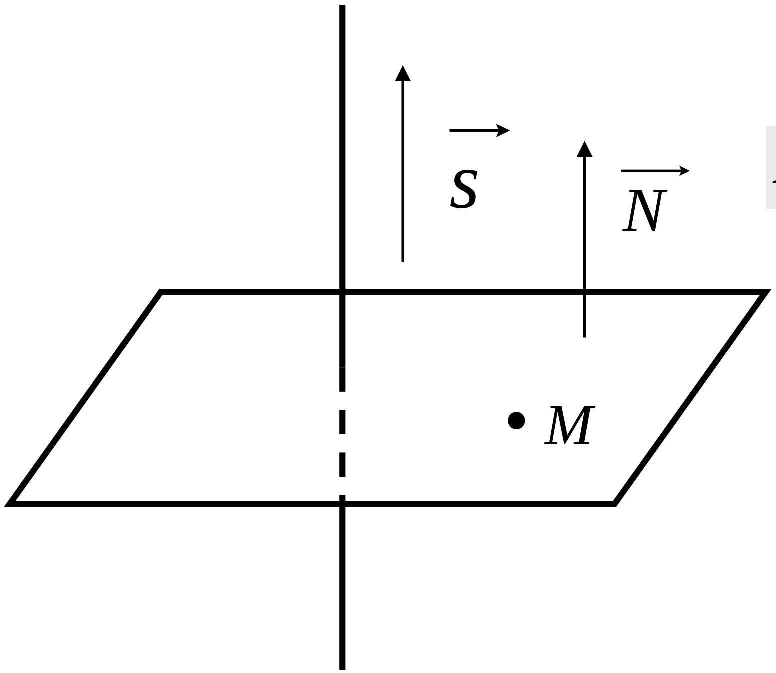
$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 2+1 & -1-3 & 0+5 \\ 0+1 & -4-3 & 7+5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z+5 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -7 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

$$-13(x+1)-31(y-3)-17(z+5)=0$$

$$13x+31y+17z+5=0$$

6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;-1;3)$ перпендикулярно прямой

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z}{-4}$$




Основное уравнение плоскости

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Из рисунка видно, что в качестве вектора нормали плоскости можно взять направляющий вектор прямой

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{s}=\{5;3;-4\}$$

Таким образом, для составления уравнения плоскости есть все данные: координаты точки и вектора нормали

$$5(x-2)+3(y+1)-4(z-3)=0$$

$$5x+3y-4z+5=0$$

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;-2;-1)$ и отсекающую на осях координат одинаковые отрезки

Для решение задачи используем уравнение плоскости «в отрезках»

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

Отрезки на осях одинаковые, поэтому

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1 \quad \text{или} \quad x+y+z=a$$

Для нахождения $a$ подставляем в это уравнение координаты точки $M$

$$4-2-1=a \qquad a=1$$

Итак, уравнение плоскости $x+y+z=1$

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;-6;2)$ параллельно вектору $\vec{s}=\{-2;5;-7\}$

Требуется составить канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

Подставляем исходные данные $\frac{x-4}{-2}=\frac{y+6}{5}=\frac{z-2}{-7}$

9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(4;-6;2)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} x=-7t+2 \\ y=13t-3 \\ z=9t \end{cases}$$

Для все параллельных прямых можно использовать один направляющий вектор. Поэтому для искомой прямой имеем точку и направляющий вектор $\vec{s}=\{-7;13;9\}$

Уравнения прямой $\frac{x-4}{-7}=\frac{y+6}{13}=\frac{z-2}{9}$

10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;-1;5)$ параллельно оси OY.

В качестве направляющего вектора можно использовать любой вектор, параллельный оси OY. Самый простой вектор – это орт оси OY

$$\vec{s} = \vec{j} = \{0;1;0\}$$

Канонические уравнения прямой $$\frac{x+3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{0}$$

11. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(3;-2;0)$ и $M_2(0;6;-4)$

В качестве направляющего вектора можно использовать вектор, соединяющий эти точки.

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{-3;8;-4\}$$

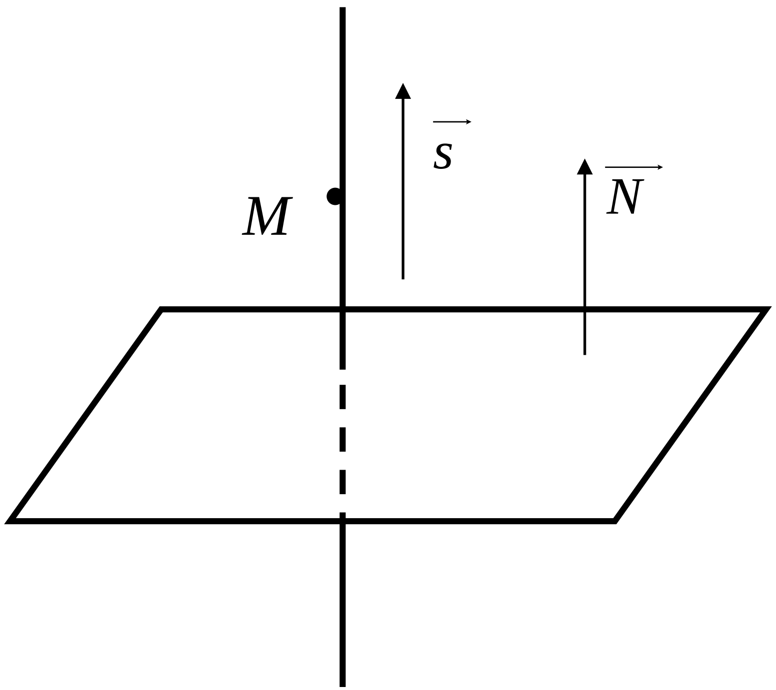
Уравнения прямой $$\frac{x-3}{-3} = \frac{y+2}{8} = \frac{z}{-4}$$

Точку можно подставить любую.

12. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(-3;5;-2)$ перпендикулярно плоскости $4x - y + 3z + 1 = 0$

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$




Из рисунка видно, что в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор нормали плоскости

$$\vec{s} = \vec{N} = \{4;-1;3\}$$

Таким образом, для составления уравнения прямой есть все данные: координаты точки и направляющего вектора

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z+2}{3}$$

13. Перейти от общего уравнения прямой к каноническому виду

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 7 = 0 \\ x + 4y - 5z + 10 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \overrightarrow{N_1} = \{2;-1;3\} \\ \overrightarrow{N_2} = \{1;4;-5\} \end{matrix}$$

Как уже отмечалось, для перехода к каноническому виду

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

нужно знать точку на прямой и направляющий вектор

а) Находим направляющий вектор

$$\vec{s} = \left[\overrightarrow{N_1} \times \overrightarrow{N_2}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 13\vec{j} + 9\vec{k}$$

Итак, направляющий вектор

$$\vec{s} = \{-7;13;9\}$$

б) Находим точку на прямой. Для этого можно положить в системе уравнений одну из координат равной нулю. Итак, $z = 0$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 4y = -10 \end{cases}$$

Решая ее, найдем $x = 2$, $y = -3$

Точка $M(2;-3;0)$

и канонические уравнения

$$\frac{x - 2}{-7} = \frac{y + 3}{13} = \frac{z}{9}$$

Получим параметрические уравнения

$$\frac{x - 2}{-7} = \frac{y + 3}{13} = \frac{z}{9} = t$$

$$\begin{cases} x = -7t + 2 \\ y = 13t - 3 \\ z = 9t \end{cases}$$

14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-4;1)$ и составляющую с осями координат углы $\alpha = 45^0$ и $\beta = 120^0$

Направляющим вектором в данном случае может являться единичный вектор – орт, координатами которого являются направляющие косинусы

Нам известны углы, которые вектор образует с осями OX и OY соответственно. Для нахождения косинуса угла с осью OZ используем основное свойство направляющих косинусов вектора

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\cos\alpha = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\beta = \cos 120^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1, \qquad \frac{2}{4} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1, \qquad \cos^2\gamma = \frac{1}{4}, \qquad \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$$

Направляющий вектор $\vec{s} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}\right\}$ или $\vec{s} = \left\{\sqrt{2}; -1; \pm 1\right\}$

Канонические уравнения прямых

(получили уравнения двух прямых)

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-1}{\pm 1}$$

15. Найти точку пересечения и угол между прямой

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+2}{3}$$

и плоскостью $5x+3y-4z+2=0$

Для нахождения точки пересечения преобразуем канонические уравнения прямой к параметрическому виду

$$\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+2}{3}=t, \qquad \begin{cases} x=4t-3 \\ y=-t+5 \\ z=3t-2 \end{cases}$$

Подставляем в уравнение плоскости и находим параметр *t*

$$5(4t-3)+3(-t+5)-4(3t-2)+2=0$$

$$20t-3t-12t-15+15+8+2=0$$

$$5t+10=0, \qquad t=-2$$

Подставляем *t* в параметрические уравнения

$$\begin{cases} x=-8-3=-11 \\ y=2+5=7 \\ z=-6-2=-8 \end{cases}$$

Итак, координаты точки пересечения

$$M(-11;7;-8)$$

Угол между прямой и плоскостью находим по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|(\overrightarrow{N}\cdot\vec{s})|}{|\overrightarrow{N}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$\overrightarrow{N} = \{5;3;-4\}$ - вектор нормали плоскости

$\vec{s} = \{4;-1;3\}$ - направляющий вектор прямой

Подставляем в формулу

$$\sin\varphi = \frac{|(\overrightarrow{N}\cdot\vec{s})|}{|\overrightarrow{N}|\cdot|\vec{s}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} =$$

$$= \frac{|20-3-12|}{\sqrt{5^2+3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{26}} = \frac{5}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{52}} = \frac{1}{2\sqrt{13}}$$

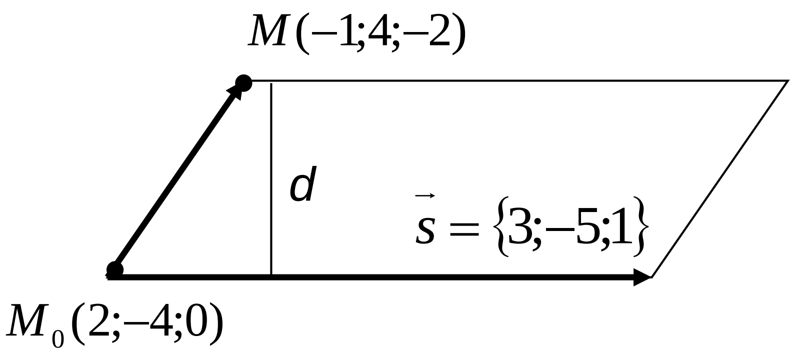
16. Найти расстояние от точки $M(5;3;-2)$ до плоскости $3x-4y-z-9=0$

Используем формулу расстояния от точки до плоскости

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d=\frac{|3\cdot 5-4\cdot 3-1\cdot(-2)-9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+(-1)^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{26}}=\frac{4}{\sqrt{26}}$$

17. Найти расстояние от точки $M(-1;4;-2)$ до прямой в пространстве $\frac{x-2}{3}=\frac{y+4}{-5}=\frac{z}{1}$




Искомое расстояние – это высота параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{s}=\{3;-5;1\} \text{ и } \overrightarrow{M_0M}=\{-3;8;-2\}$$

Площадь параллелограмма находим, используя векторное произведение

$$S=\left|\left[\vec{s}\times\overrightarrow{M_0M}\right]\right|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -5 & 1\\ -3 & 8 & -2\end{matrix}\right\|=\left|2\vec{i}+3\vec{j}+9\vec{k}\right|=\sqrt{2^2+3^2+9^2}=\sqrt{94}$$

Длина основания – это длина вектора $\vec{s}=\{3;-5;1\}$

$$\left|\vec{s}\right|=\sqrt{3^2+(-5)^2+1^2}=\sqrt{35}$$

Расстояние от точки до прямой $\quad d=\frac{S}{\left|\vec{s}\right|}=\frac{\sqrt{94}}{\sqrt{35}}$

Спасибо за внимание