Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Аналитическая геометрия на плоскости Ч.2

2022

Аналитическая геометрия на плоскости Ч.2

-Кривые второго порядка

-Окружность и эллипс

-Гипербола

-Парабола

Кривые 2-го порядка

Общее уравнение прямой на плоскости – есть уравнение линейное относительно переменных x и y

$$Ax + By + C = 0$$

Уравнение кривой 2-го порядка $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 -$ квадратичная часть

$Dx + Ey + F = 0 -$ линейная часть

В дальнейшем будем рассматривать уравнения кривых, в которых отсутствует произведение xy

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

К кривым 2-го порядка относятся :

окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Основная задача состоит в умении по уравнению определить тип кривой, привести само уравнение к каноническому виду и построить кривую в системе координат.

1. Окружность

Определение. *Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром*

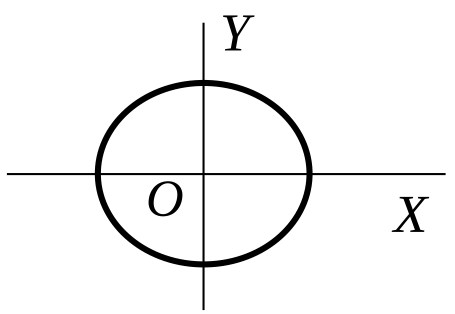
Уравнение окружности с центром в начале координат

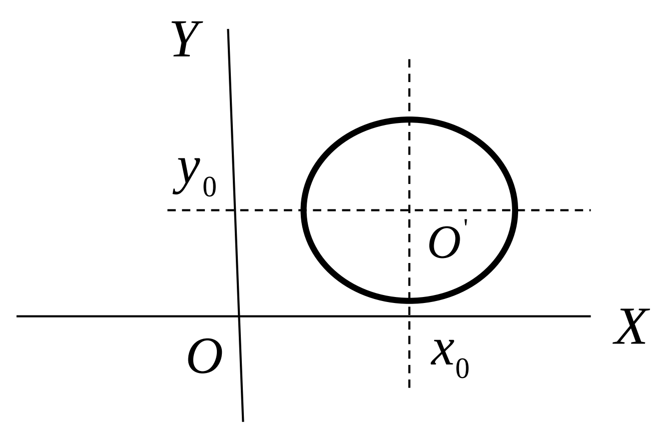
$$x^2 + y^2 = R^2$$

Уравнение окружности со смещенным центром $O'(x_0; y_0)$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

! В уравнение окружности входят квадраты переменных, причем коэффициенты при квадратах и знаки при них одинаковые.

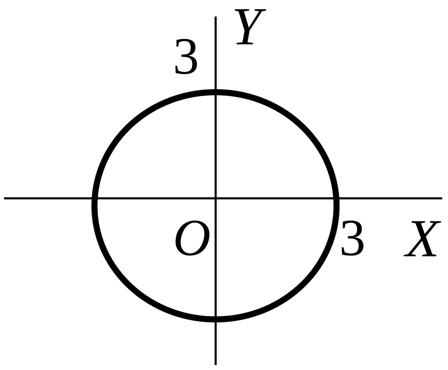




Построение окружностей

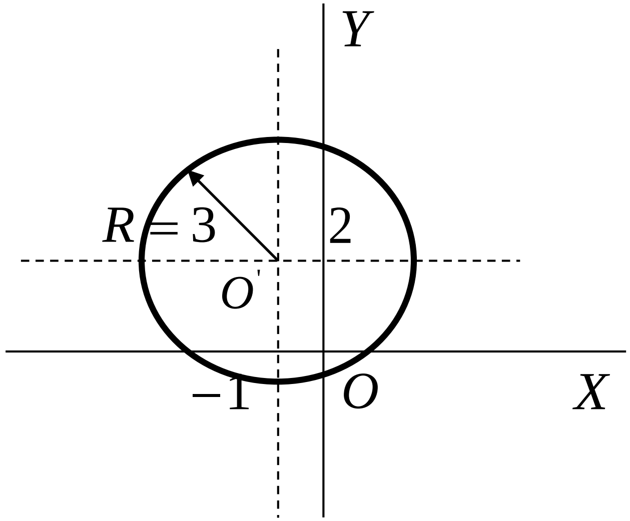
1. Построить окружность

$$x^2 + y^2 = 9$$



2. Построить окружность

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$



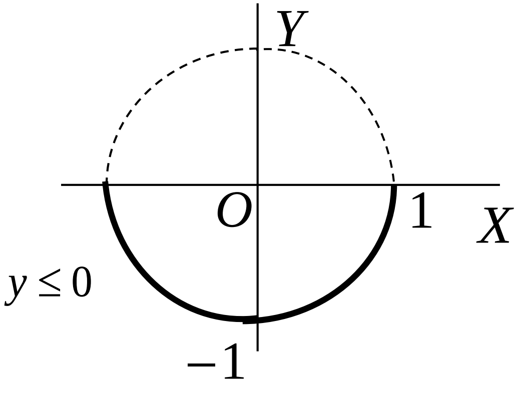
3. Построить кривую

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

$$y^2 = (-\sqrt{1-x^2})^2$$

$$y^2 = 1 - x^2$$

$$y^2 + x^2 = 1$$



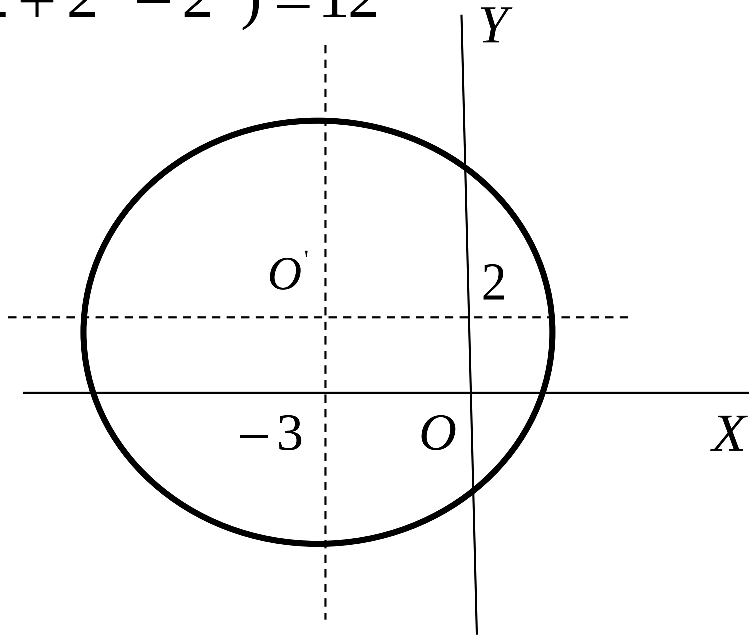
Построить окружность $x^2+6x+y^2-4y=12$

Каноническое уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

Формула квадрата суммы и разности двух чисел

$$(a\pm b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$

1. $(x^2+6x)+(y^2-4y)=12$
2. $(x^2+2x\cdot 3+3^2-3^2)+(y^2-2y\cdot 2+2^2-2^2)=12$
3. $[(x+3)^2-9]+[(y-2)^2-4]=12$
4. $(x+3)^2+(y-2)^2-9-4=12$
5. $(x+3)^2+(y-2)^2=25$
6. $(x+3)^2+(y-2)^2=5^2$

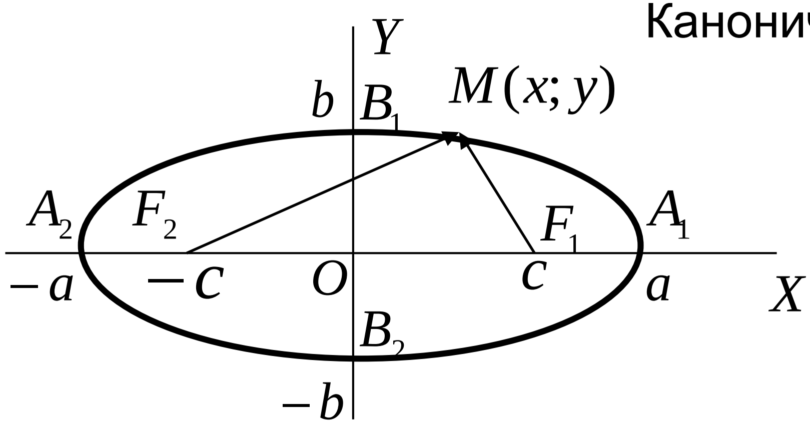


$O'(-3;2)-$ центр окружности,

$R=5-$ радиус окружности

2. Эллипс

Определение. *Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами , есть величина постоянная, равная длине большой оси* $2a$ *.*



Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$ причем

$$a^2=b^2+c^2$$

$A_1(a;0)$ $A_2(-a;0)$ вершины эллипса

$B_1(0;b)$ $B_2(0;-b)$

$F_1(c;0)$ $F_2(-c;0)$

фокусы эллипса

$A_1A_2=2a$ большая ось эллипса

$B_1B_2=2b$ малая ось эллипса

$F_1F_2=2c$ фокусное расстояние

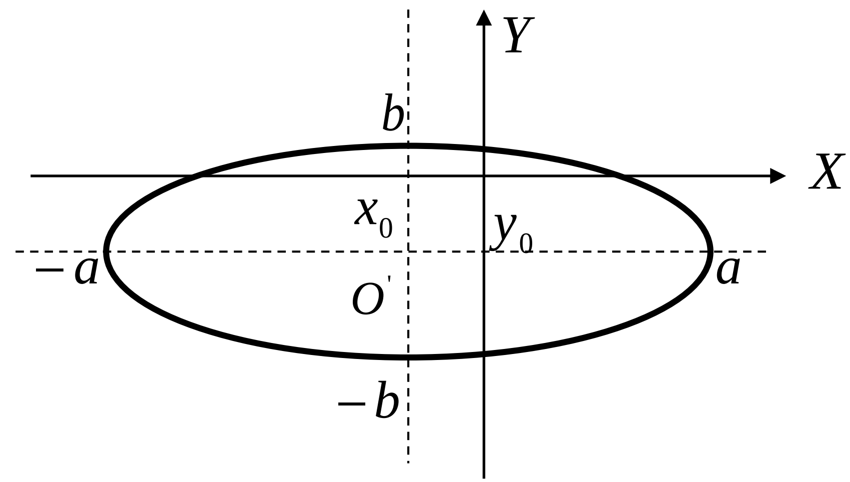
! В уравнение эллипса входят квадраты переменных, причем знаки при квадратах одинаковые, а коэффициенты при квадратах разные.

Разновидности эллипса

Уравнение эллипса со смещенным центром

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

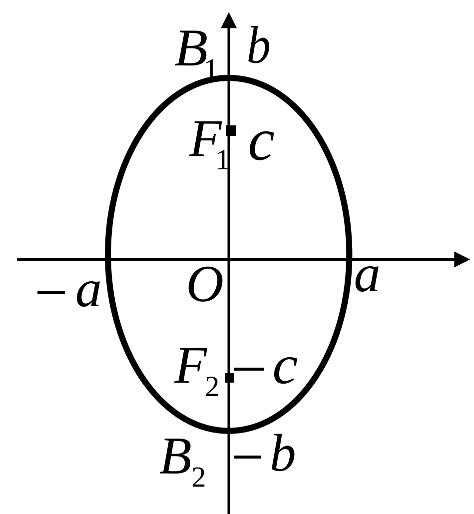
$O'(x_0;y_0)$ - центр эллипса



Если в уравнении эллипса $b > a$, то большой осью будет ось

$B_1B_2 = 2b$, фокусы эллипса будут лежать на этой оси и связь между параметрами эллипса будет такой:

$$b^2 = a^2 + c^2$$



Построение эллипса

1. Построить эллипс $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$

Для построения эллипса нужно знать координаты центра и размеры полуосей a и b

Центр эллипса $O(0;0)$

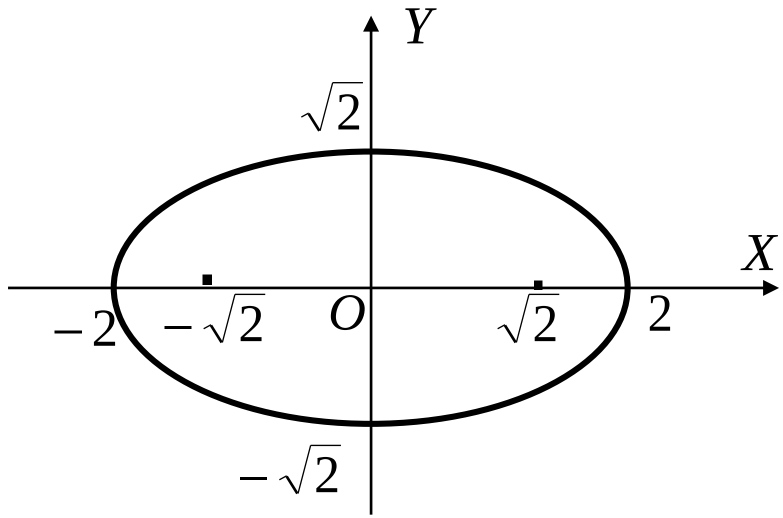
Полуоси $a^2=4 \Rightarrow a=2,$

$b^2=2 \Rightarrow b=\sqrt{2}$

Расстояние между фокусами

$c^2=a^2-b^2=4-2=2,$

$\Rightarrow c=\sqrt{2}$, т.е. $2c=2\sqrt{2}$



Можно найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом по формуле

$$S=\pi\cdot a\cdot b$$

Для данного примера получим $S=\pi\cdot 2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}\cdot\pi$

2. Построить эллипс $9x^2 + 5y^2 = 45$

Для получения канонического уравнения делаем некоторые преобразования:

1) Делим все члены уравнения на 45, так чтобы получит единицу в правой части уравнения

$$\frac{9x^2}{45} + \frac{5y^2}{45} = 1$$

2) Убираем в знаменатель коэффициенты из числителей

$$\frac{x^2}{45/9} + \frac{y^2}{45/5} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Получили уравнение эллипса, из которого определяем положение центра и размеры полуосей

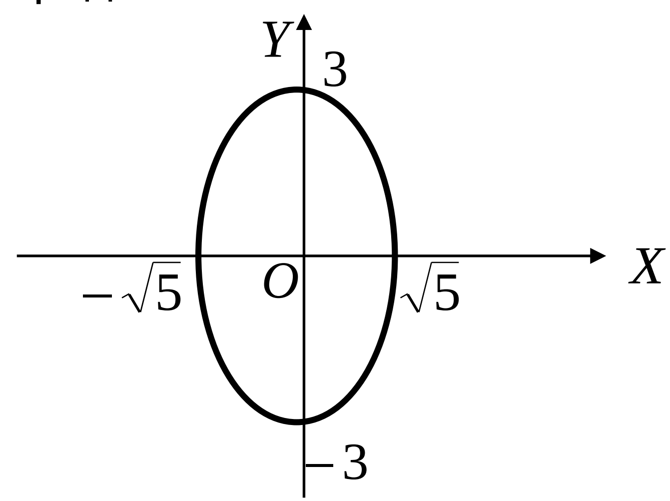
$O(0;0)$ - центр эллипса

$a^2 = 5 \quad \Rightarrow a = \sqrt{5},$

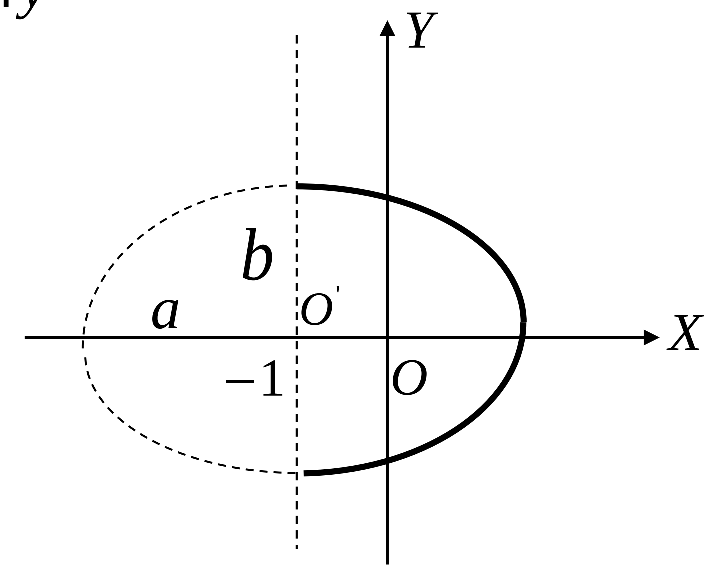
$b^2 = 9 \quad \Rightarrow b = 3$ - полуоси

$b > a$

3) Строим эллипс



3. Построить кривую $x = -1 + \sqrt{9 - 4y^2}$



1. $(x+1)^2 + 4y^2 = 9$

2. $x + 1 = \sqrt{9 - 4y^2}$

3. $(x+1)^2 = 9 - 4y^2$

4. $(x+1)^2 + 4y^2 = 9$

5. $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{4y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{y^2}{9/4} = 1$

Таким образом, центр эллипса имеет координаты $O'(-1;0)$

Полуоси эллипса

$a^2 = 9 \quad \Rightarrow a = 3,$

$b^2 = 9/4 \quad \Rightarrow b = 3/2$, т.е. $a > b$

При построении необходимо учесть, что уравнение определяет
Только правую половинку эллипса, так как по условию имеем $x \geq -1$

4. Построить кривую $3x^2+6x+2y^2-2y=0$

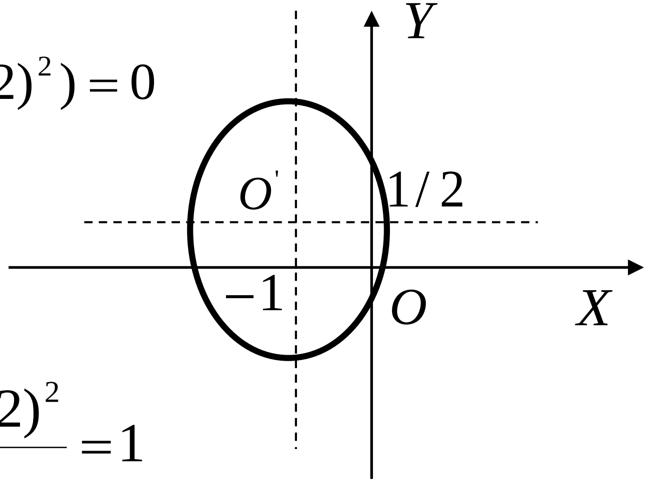
Данное уравнение определяет эллипс, так как есть квадраты переменных, знаки при которых одинаковые, а коэффициенты различные. Кроме того, наличие линейной части уравнения означает, что центр эллипса смещен от начала координат. Приводим уравнение к каноническому виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Используем прием выделения полного квадрата согласно формуле

$$(a\pm b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$$

1. $3(x^2+2x)+2(y^2-y)=0$
2. $3(x^2+2x\cdot 1+1^2-1^2)+2(y^2-2y\cdot 1/2+(1/2)^2-(1/2)^2)=0$
3. $3[(x+1)^2-1]+2[(y-1/2)^2-1/4]=0$
4. $3(x+1)^2+2(y-1/2)^2-3-1/2=0$
5. $3(x+1)^2+2(y-1/2)^2=7/2$
6. $\dfrac{3(x+1)^2}{7/2}+\dfrac{2(y-1/2)^2}{7/2}=1 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{7/6}+\dfrac{(y-1/2)^2}{7/4}=1$



$O'(-1;1/2)-$ центр , $a=\sqrt{7/6}$, $b=\dfrac{\sqrt{7}}{2}-$ полуоси

3. Гипербола

***Определение*.** Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний которых до двух данных точек, называемых фокусами, по абсолютной есть величина постоянная, равная длине действительной оси $2a$.

Каноническое уравнение гиперболы с центром в начале координат

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

В этом случае

$a-$ действительная полуось

$b-$ мнимая полуось

Фокусы гиперболы всегда лежат на действительной оси.

Связь между параметрами гиперболы определяется соотношением

$$c^2=a^2+b^2$$

! В уравнение гиперболы входят квадраты переменных, причем знаки при квадратах разные.

Асимптоты гиперболы – это прямые к которым гипербола неограниченно приближается на бесконечности.

Построение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

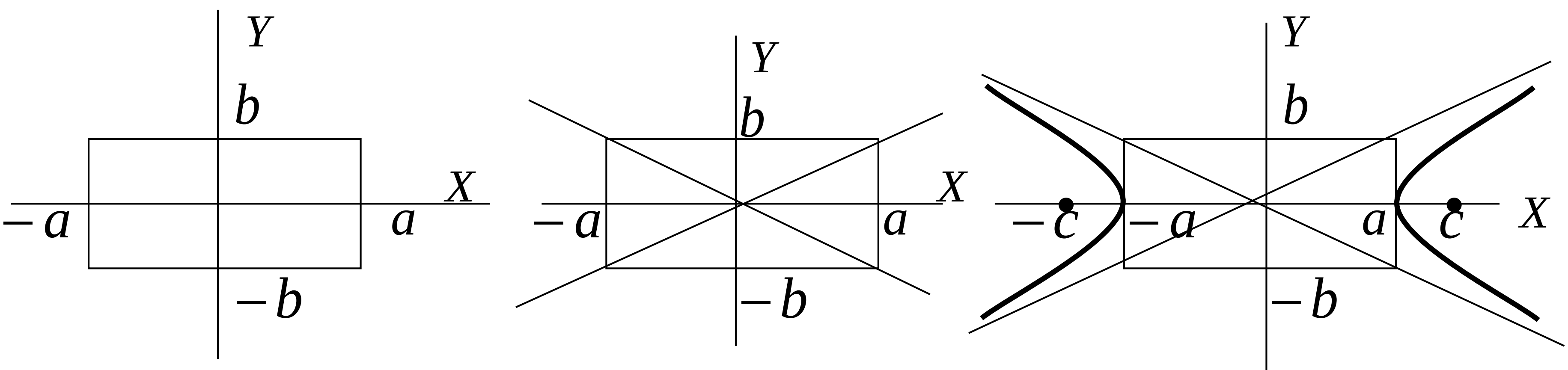
Для построения гиперболы удобно пользоваться вспомогательными построениями.

1. В системе координат строим прямоугольник с размерами $2a \times 2b$ на осях OX и OY соответственно.
2. Проводим диагонали этого прямоугольника.

Уравнения диагоналей – это уравнения асимптот гиперболы

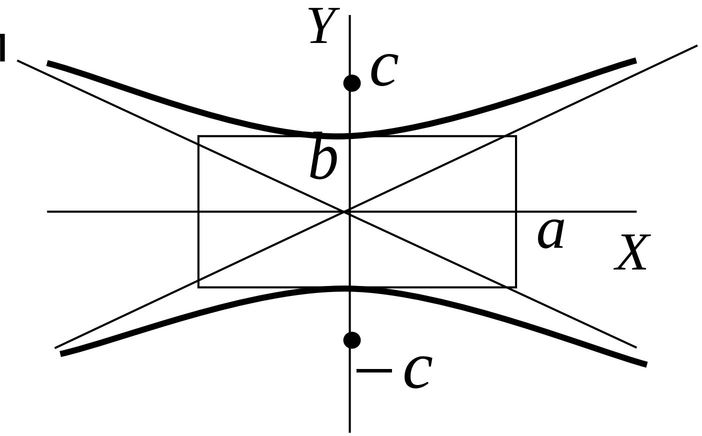
$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$$

3. На действительной оси отмечаем вершины гиперболы и от них ведем ветви гиперболы к асимптотам.



Виды гипербол

Рассмотрим другие виды гипербол



Сопряженная гипербола

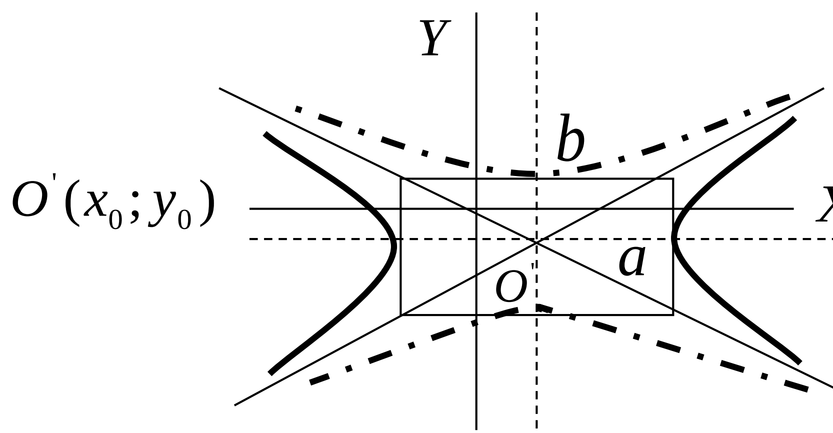
$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

b – действительная полуось

a – мнимая полуось

Равнобочная гипербола

$$x^2 - y^2 = a^2 \quad \text{или} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

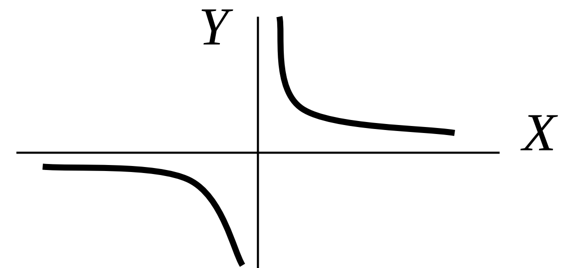


Гипербола со смещенным центром

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Гипербола, приведенная к своим асимптотам

$$xy=\pm a \quad \text{или} \quad y=\pm\frac{a}{x}$$



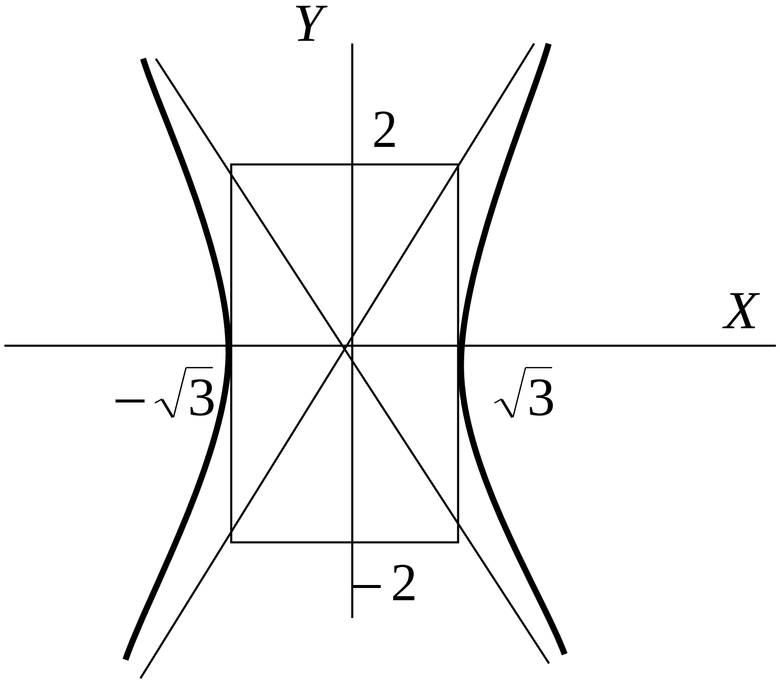
Рассмотрим примеры построения гипербол

1. Построить гиперболу $4x^2 - 3y^2 = 12$

$$\frac{4x^2}{12} - \frac{3y^2}{12} = 1$$

$$\frac{x^2}{12/4} - \frac{y^2}{12/3} = 1$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$$



$O(0;0)$ – центр гиперболы

$a^2 = 3 \quad \Rightarrow a = \sqrt{3}$ – действительная полуось

$b^2 = 4 \quad \Rightarrow b = 2$ – мнимая полуось

$c^2 = a^2 + b^2 = 3 + 4 = 7,$

$c = \sqrt{7} \quad \Rightarrow \quad 2c = 2\sqrt{7}$ – расстояние между фокусами

2. Построить кривую $y = -\sqrt{x^2 + 4}$

Возведем в квадрат обе части уравнения

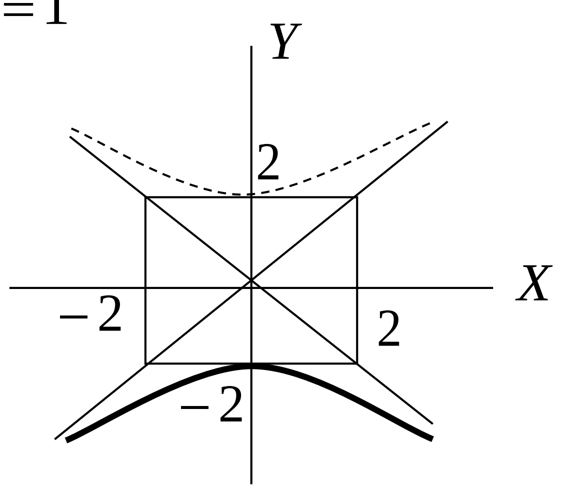
$$y^2 = x^2 + 4$$

Собираем квадраты переменных в левую часть уравнения

$$-x^2 + y^2 = 4$$

Данное уравнение определяет гиперболу, так как знаки при квадратах переменных разные. Кроме того, данная гипербола является сопряженной и равнобочной

Можно записать уравнение в виде $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$



$a^2 = 4 \quad \Rightarrow a = 2 -$ мнимая полуось

$b^2 = 4 \quad \Rightarrow b = 2 -$ действительная полуось

Оставляем только нижнюю ветвь гиперболы, так как по условию

$$y \leq 0$$

3. Построить кривую $4x^2 - 3y^2 = 12 - 8x + 12y$

Данное уравнение определяет гиперболу (знаки при квадратах переменных различные) со смещенным центром (есть линейная часть) Приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = \pm 1$$

$$4x^2 + 8x - 3y^2 - 12y = 12 \quad \Rightarrow \quad 4(x^2+2x) - 3(y^2+4y) = 12$$

$$4(x^2 + 2x\cdot 1 + 1^2 - 1^2) - 3(y^2 + 2y\cdot 2 + 2^2 - 2^2) = 12$$

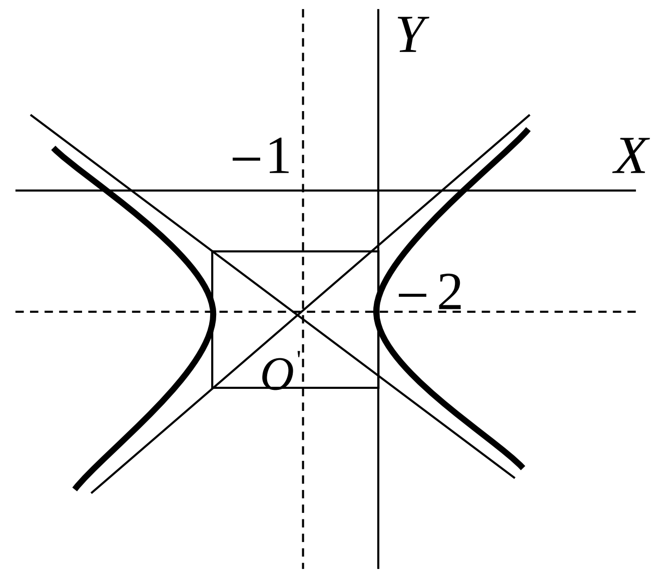
$$4[(x+1)^2 - 1] - 3[(y+2)^2 - 4] = 12$$

$$4(x+1)^2 - 4 - 3(y+2)^2 + 12 = 12$$

$$4(x+1)^2 - 3(y+2)^2 = 4$$

$$\frac{4(x+1)^2}{4} - \frac{3(y+2)^2}{4} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{(x+1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4/3} = 1$$



$O'(-1;-2)-$ центр гиперболы

$a = 1 -$ действительная полуось

$b = \sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} -$ мнимая полуось

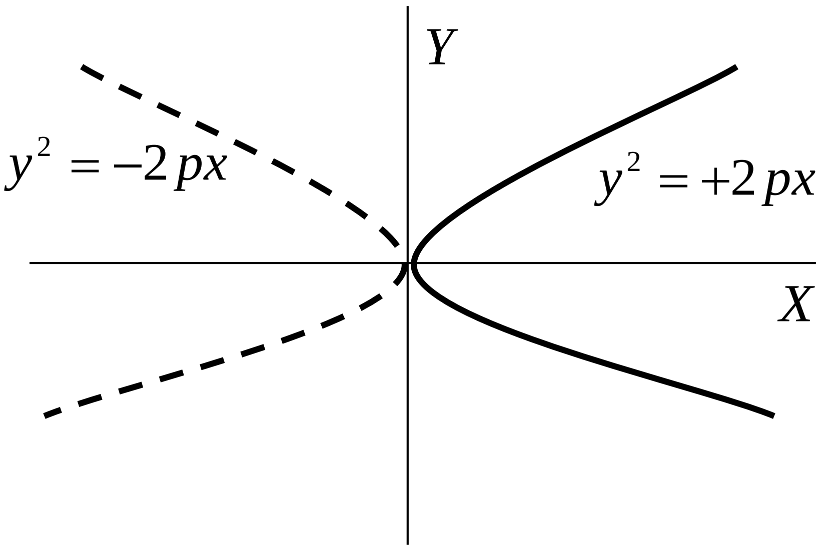
4. Парабола

Определение. *Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой фокусом, и от данной прямой, называемой директрисой*.

<u>Виды парабол</u>

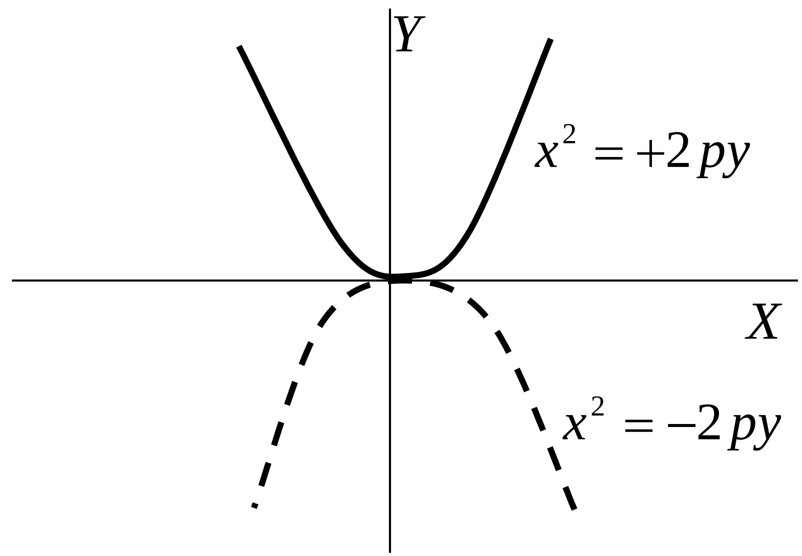
Парабола с осью симметрии OX

$$y^2 = \pm 2px$$



Парабола с осью симметрии OY

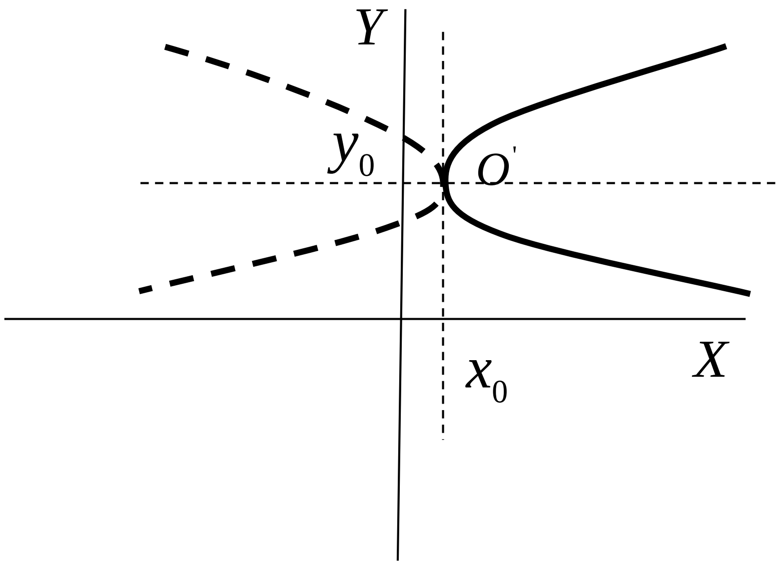
$$x^2 = \pm 2py$$



Парабола со смещенной вершиной $O'(x_0; y_0)$

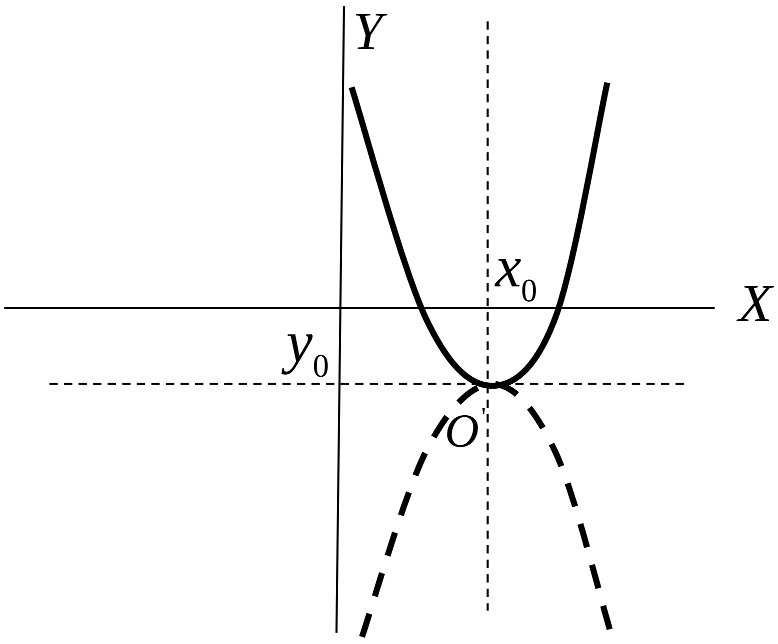
Парабола с осью симметрии OX

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0)$$



Парабола с осью симметрии OY

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$$



! *Отличительные признаки уравнения параболы: отсутствует квадрат одной переменной.*

Построение парабол

Для построения параболы нужно знать:

- Координаты вершины $O'(x_0; y_0)$.
- Ось симметрии параболы (определяется по той переменно, квадрат которой отсутствует в уравнении)
- Направление ветвей (определяется по знаку : если в правой части канонического уравнения знак плюс, то ветви параболы идут в положительном направлении оси симметрии, если знак минус, то в отрицательном)
- Параметр параболы p определяется по коэффициенту при переменной, стоящей в каноническом уравнении в первой степени, и определяет «ширину» параболы. Знание параметра помогает более качественно получить начальный участок параболы.

1. Построить параболу $(y-2)^2 = 4(x-1)$

Данное уравнение является каноническим уравнением параболы, так как отсутствует квадрат переменной x. Поэтому осью симметрии параболы будет ось OX.

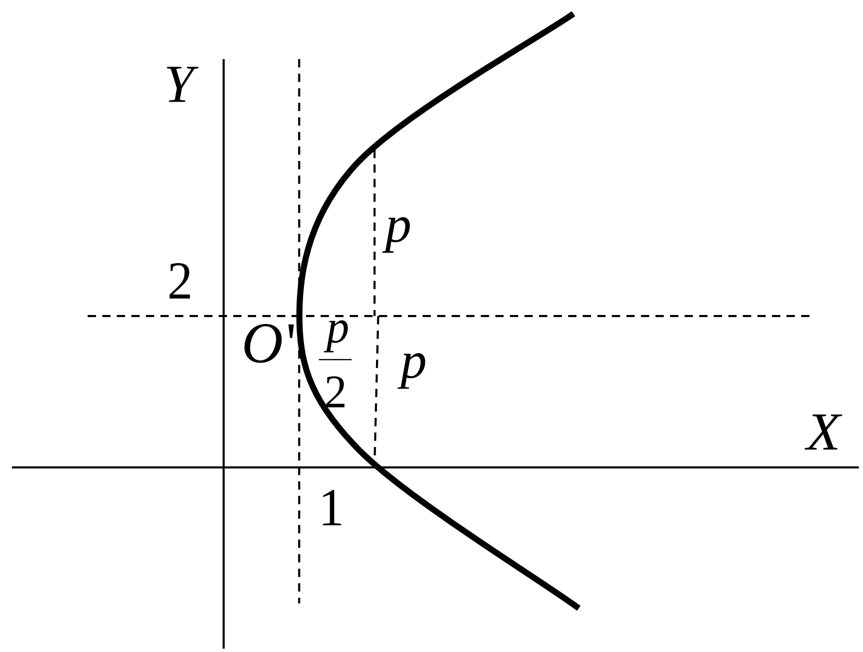
Вершина параболы в точке $O'(1;2)$

Ветви параболы направлены в положительном направлении оси OX, так как в правой части уравнения знак “плюс”.

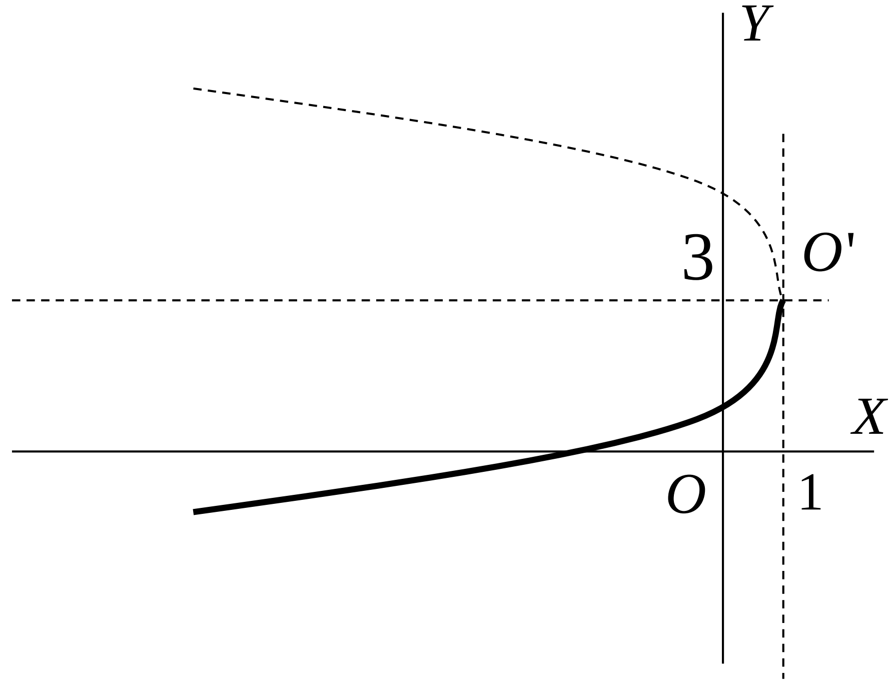
$2p = 4 -$ ширина параболы

$p = 2 -$ параметр параболы

$$\frac{p}{2} = 1$$



2. Построить кривую $y = 3 + 2\sqrt{1 - x}$



$$y - 3 = 2\sqrt{1 - x}$$

$$(y - 3)^2 = 4(1 - x)$$

$$(y - 3)^2 = -4(x - 1)$$

$$y \geq 3$$

$O'(1;3)$ – вершина параболы

Ось симметрии параболы OX, так как отсутствует квадрат переменной x

Ветви параболы направлены влево, так как в правой части уравнения получился знак "минус"

$p = 2$ – параметр параболы

Так как по условию $y \geq 3$, то уравнение определяет только верхнюю ветвь параболы

3. Построить кривую $y = 2 - x^2$

Преобразуем уравнение

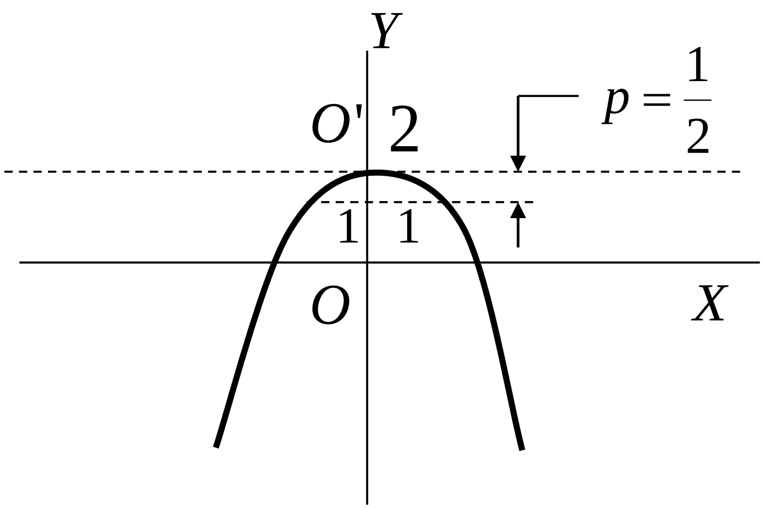
$$x^2 = 2 - y \qquad x^2 = -(y-2)$$

Уравнение определяет параболу. Сравнивая с уравнением

$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)$, определяем координаты вершины

$O'(0;2)$. Ось симметрии OY. Ветви направлены вниз.

$p = \frac{1}{2}$ – параметр параболы



4. Построить параболу $4x^2+6x+3y+2=0$

В уравнении отсутствует квадрат переменной у, поэтому оно определяет параболу с осью симметрии OY.
Проведем преобразования уравнения, чтобы привести его к каноническому виду
$$(x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0)$$

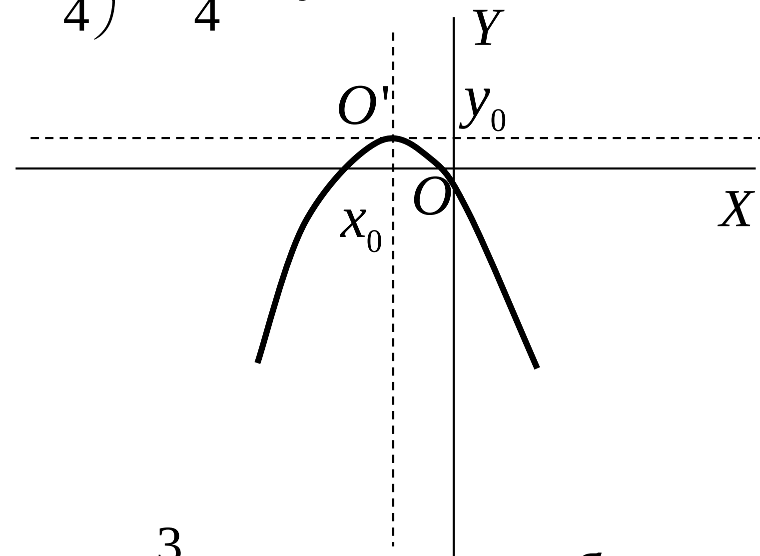
$$4\left(x^2+\frac{6}{4}x\right)+3y+2=0 \qquad 4\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{4}+(3/4)^2-(3/4)^2\right)+3y+2=0$$

$$4\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right]+3y+2=0 \qquad 4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{4}+3y+2=0$$

$$4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{1}{4}-3y$$

$$4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=-3\left(y-\frac{1}{12}\right)$$ или

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=-\frac{3}{4}\cdot\left(y-\frac{1}{12}\right)$$



$O'\left(-\frac{3}{4};\frac{1}{12}\right)$ – вершина параболы

$p=\frac{3}{8}$ – параметр параболы

Ветви параболы направлены вниз

Спасибо за внимание