Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Аналитическая геометрия на плоскости Ч.1

2022

Аналитическая геометрия на плоскости Ч.1

-Прямая на плоскости. Основные уравнения.

-Задачи на составление уравнений прямой , определение параметров уравнений

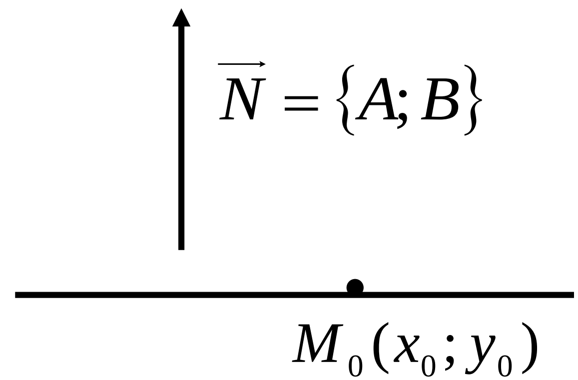
-Примеры решения задач.

Прямая на плоскости

- Основные уравнения прямой на плоскости

1. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно заданному вектору $\overrightarrow{N}=\{A;B\}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$



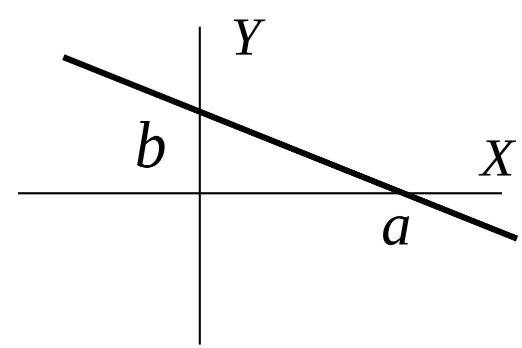
2. Общее уравнение прямой

$$Ax+By+C=0$$

$\overrightarrow{N}=\{A;B\}$ - вектор нормали

3. Уравнение прямой « в отрезках»

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

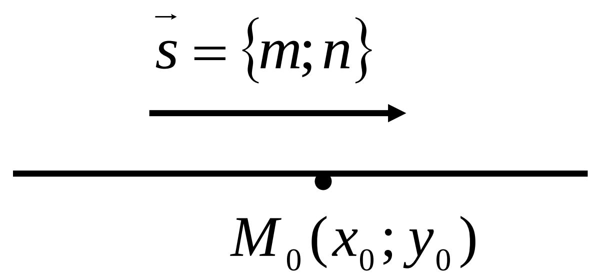


Прямая на плоскости. Основные уравнения

4. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно заданному вектору $\vec{s} = \{m; n\}$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$$ - каноническое уравнение

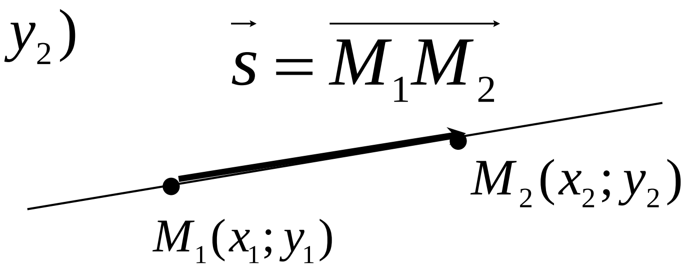
$\vec{s} = \{m; n\}$ - направляющий вектор



5. Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \end{cases}$$

6. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$



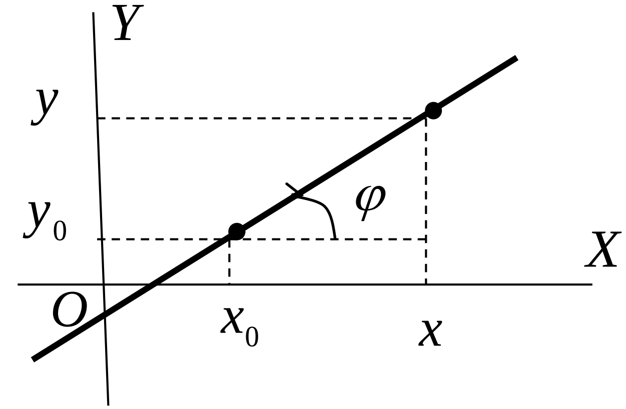
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Прямая на плоскости. Основные уравнения

7. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0)$ с заданным угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

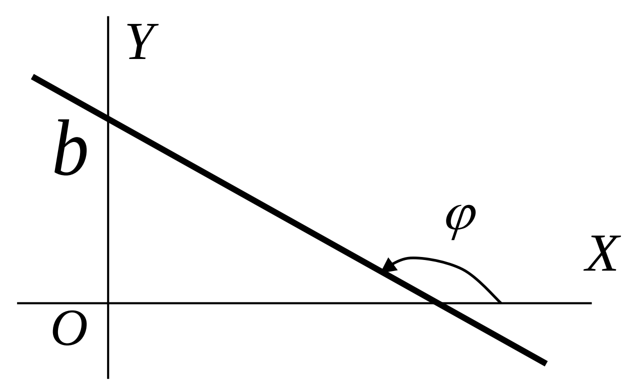
$$k = tg\varphi$$



Угловой коэффициент k - это тангенс угла наклона прямой.
Угол φ отсчитывается от положительного направления оси OX

8. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b$$



Задачи на составление уравнений прямой , определение параметров уравнений

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;4)$ параллельно прямой $5x-3y+15=0$. Построить прямую.

Решение. Нам задано уравнение прямой общего вида

$$Ax+By+C=0 \qquad \vec{N}=\{A;B\}$$ -вектор нормали

Сравнивая с заданным уравнением, получаем координаты вектора нормали $\vec{N}=\{5;-3\}$ Так как все параллельные прямые можно охарактеризовать одним вектором нормали, то можно составить уравнение параллельной прямой, проходящей через данную в условии точку. За основу берем уравнение $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$

$$5(x-2)-3(y-4)=0$$

$$5x-10-3y+12=0$$

$$5x-3y+2=0$$

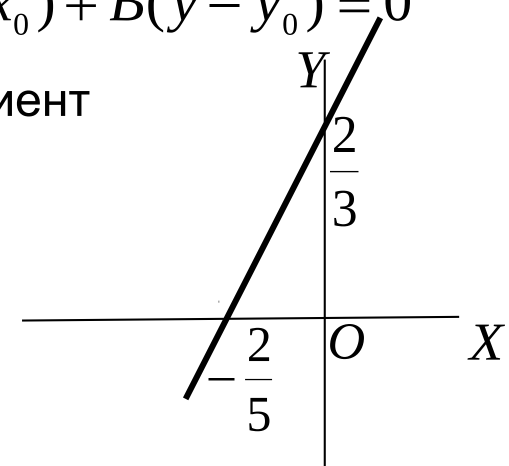
$$\vec{N}=\{5;-3\}$$

$\vec{s}=\{3;5\}$ -направляющий вектор

Найдем угловой коэффициент

$$5x+2=3y$$

$$y=\frac{5}{3}x+\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad k=\frac{5}{3}$$



2. Составить уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(-3;4)$ параллельно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{-5}$

Из канонического уравнения заданной прямой можно определить ее направляющий вектор $\vec{s}=\{2;-5\}$

Поскольку для всех параллельных прямых можно взять один и тот же направляющий вектор, то берем за основу каноническое уравнение

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$$

и подставляем в него координаты точки и направляющего вектора

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-4}{-5}$$

x	0	$-\frac{7}{5}$
y	$-\frac{7}{2}$	0

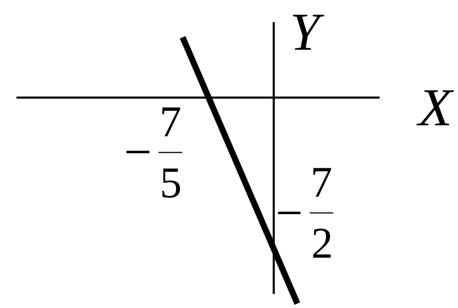
Это уравнение можно преобразовать к уравнению общего вида и к уравнению с угловым коэффициентом

$$-5(x+3)=2(y-4)$$

$$-5x-15=2y-8$$

$$5x+2y+7=0$$

$$(y-4)=-\frac{5}{2}(x+3)$$



угловой коэффициент $k=-\dfrac{5}{2}$

$\overrightarrow{N}=\{5;2\}$ - вектор нормали

3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-5;2)$ параллельно прямой $y = 3x + 5$.

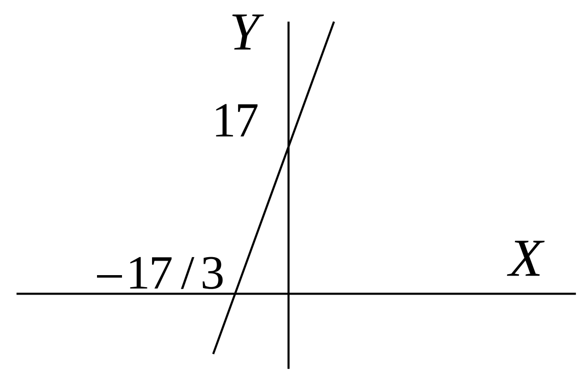
В данном случае прямая задана уравнением с известным угловым коэффициентом y=kx+b. K=3

Все параллельные прямые имеют один угловой коэффициент.
Т.о. нам известна точка на прямой и угловой коэффициент.
Берем уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$

$$y - 2 = 3(x + 5)$$

$$y - 2 = 3x + 15$$

$$y = 3x + 17$$



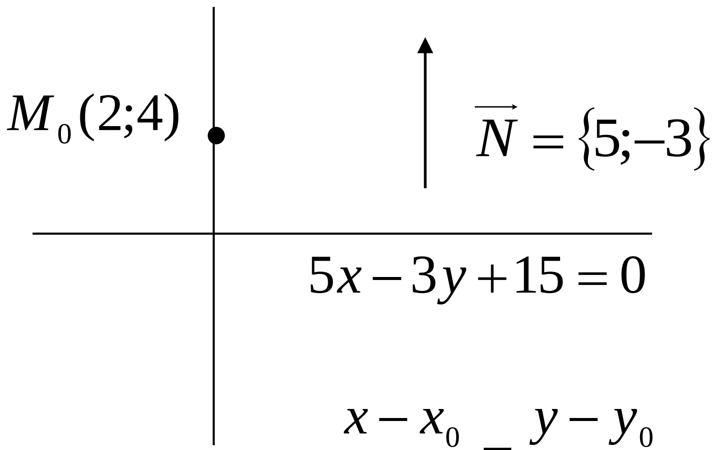
Записав уравнение в виде $3x - y + 17 = 0$, определим вектор нормали

$\overrightarrow{N} = \{3;-1\}$ и направляющий вектор $\vec{s} = \{1;3\}$

Для построения прямой используем таблицу

x	0	-17/3
y	17	0

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;4)$ перпендикулярно прямой $5x-3y+15=0$



Из рисунка видно, что вектор нормали известной прямой является направляющим для искомой прямой, поэтому используем каноническое уравнение

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n} \qquad \frac{x-2}{5}=\frac{y-4}{-3}$$

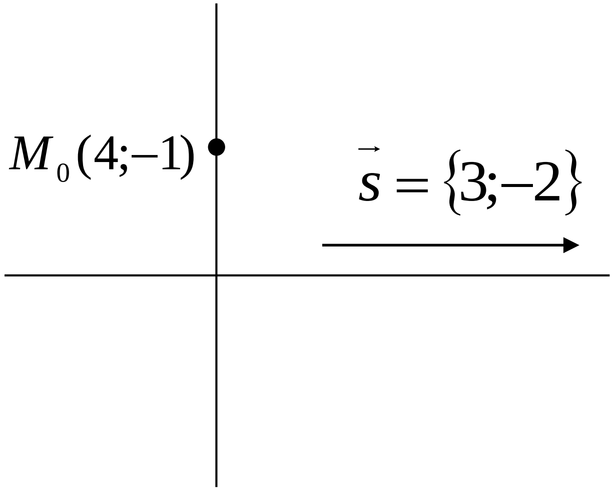
$$-3(x-2)=5(y-4) \qquad -3x+6=5y-20 \qquad 3x+5y-26=0$$

Таким образом, получили общее уравнение прямой, из которого определяем вектор нормали $\vec{N}=\{3;5\}$

Из канонического уравнения можно перейти к уравнению с угловым коэффициентом

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-4}{-3} \qquad -\frac{3}{5}x=y-4 \qquad y=-\frac{3}{5}x+4 \qquad k=-3/5$$

5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4;-1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t - 5 \end{cases}$



Прямая задана параметрическими уравнениями, из которых найдем направляющий вектор $\vec{s} = \{3;-2\}$

Из рисунка видно, что направляющий вектор известной прямой является вектором нормали для искомой прямой, поэтому
используем уравнение прямой с известной точкой и вектором нормали

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$3(x-4) - 2(y+1) = 0 \qquad 3x - 12 - 2y - 2 = 0 \qquad 3x - 2y - 14 = 0$

Получили общее уравнение прямой, из которого $\vec{N} = \{3;-2\}$, $\vec{s} = \{2;3\}$

Записав уравнение в виде

$(y+1) = \frac{3}{2}(x-4)$, найдем угловой коэффициент $k = \frac{3}{2}$

6. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;2)$ перпендикулярно прямой $y = -\frac{1}{5}x + 3$

Из уравнения заданной прямой можно взять угловой коэффициент

$$k = -\frac{1}{5}$$

Из условия перпендикулярности прямых можно найти угловой коэффициент перпендикулярной прямой

$$k_1 \cdot k_2 = -1$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{(-1/5)} = 5$$

Теперь берем уравнение прямой с угловым коэффициентом и подставляем координаты точки и значение углового коэффициента

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$y - 2 = 5(x - 3)$ $\quad y - 2 = 5x - 15$ $\quad y = 5x - 13$

Или $5x - y - 13 = 0$ - общее уравнение $\quad \vec{N} = \{5;-1\}, \quad \vec{s} = \{1;5\}$

Взаимное расположение прямых на плоскости

Задачи на взаимное расположение прямых включают слежующие вопросы:

1. Нахождение точки пересечения.
2. Нахождение угла между прямыми
3. Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

Для нахождения точки пересечения нужно решить систему, составленную из уравнений этих прямых, например

$$\begin{cases} 2x-5y+4=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases}$$

Систему можно решить методом Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4-(-15)=19 \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-8-(-5)=-3$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2-(-12)=14 \qquad x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-3}{19} \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{14}{19}$$

Точка пересечения $M\left(\frac{-3}{19};\frac{14}{19}\right)$

Нахождение угла между прямыми

1. Если прямые заданы общими уравнениями, то угол между прямыми – это угол между векторами нормалей и используется формула косинуса угла между векторами

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2})}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^{\ 2} + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^{\ 2} + B_2^2}}$$

2. Если прямые заданы каноническими уравнениями, то угол между прямыми – это угол между направляющими векторами

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{s_1} \cdot \overrightarrow{s_2})}{\left|\overrightarrow{s_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{s_2}\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^{\ 2} + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^{\ 2} + n_2^2}}$$

3. Если прямые заданы угловыми коэффициентами, то находят тангенс угла

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Проверка условий параллельности и перпендикулярности прямых

1. Условия параллельности прямых

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \qquad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad k_1 = k_2$$

2. Условия перпендикулярности прямых

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \qquad m_1m_2 + n_1n_2 = 0 \qquad 1 + k_1 \cdot k_2 = 0$$

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Для нахождения расстояния от точки до прямой нужно координаты точки Подставить в левую часть уравнения прямой, разделить на длину вектора нормали и полученное значение взять по абсолютной величине.

Уравнение прямой должно быть приведены к общему виду

1. Найти угол между прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $\frac{x-4}{5} = \frac{y+9}{4}$

Из уравнения первой прямой определяем вектор нормали $\overrightarrow{N_1} = \{2;-1\}$

Из уравнения второй прямой находим направляющий вектор $\vec{s} = \{5;4\}$

Тогда вектор нормали этой прямой $\overrightarrow{N_2} = \{4;-5\}$

Используем формулу

$$\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2})}{|\overrightarrow{N_1}| \cdot |\overrightarrow{N_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 4 + (-1)\cdot(-5)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+25}} = \frac{13}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{41}}$$

2. Найти расстояние от точки $M_0(-1;-4)$ до прямой $\frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1$

Приведем сначала уравнение прямой к общему виду $7x + 5y = 35$

или $7x + 5y - 35 = 0$. Теперь можно использовать формулу

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|7(-1) + 5(-4) - 35|}{\sqrt{7^2 + 5^2}} = \frac{|-62|}{\sqrt{74}} = \frac{62}{\sqrt{74}}$$

Пример: Составьте уравнения прямых проходящих через точку A(-1;2) :

a) параллельно прямой $\dfrac{x}{10} - \dfrac{y}{2} = 1$

b) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+6}{2} = \dfrac{y-4}{5}$

c) под углом 45^0 к прямой $y - x = 0$

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$

направляющий вектор $\vec{S}$ и угловой коэффициент k, для каждой прямой.

а) Вектор нормали данной прямой:

$$0{,}1x - 0{,}5y - 1 = 0$$

$$\overrightarrow{N} = \{0{,}1;0{,}5\}$$

Т.к. искомая прямая параллельна данной, то вектор нормали данной может служить и вектором нормали искомой прямой

$$\overrightarrow{N} = \{0{,}1;0{,}5\}$$

Фиксированная точка на исходной прямой дана

$$M_0(x_0; y_0) = A(-1;2)$$

$$A = (x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \Rightarrow 0{,}1(x+1) - 0{,}5(y-2) = 0 \Rightarrow 0{,}1x - 0{,}5y + 1{,}1 = 0$$

вектор нормали

$$\overrightarrow{N} = \{0{,}1; -0{,}5\}$$

направляющий вектор

$$\vec{s} = \{0{,}5; 0{,}1\}$$

угловой коэффициент

$$k = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$$

b) Прямая задана в канонической и ее направляющий вектор

$$\vec{s} = \{2;5\}$$

может служить вектором нормали искомой прямой, т.к. прямые перпендикулярны
Таким образом, имея точку (-1;2) и вектор нормали

$$\overrightarrow{N} = \{2;5\}$$

записываем уравнение прямой:

$$2(x+1)+5(y-2)=0$$

$$2x+5y-8=0$$

$$y=-\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}$$

вектор нормали $\overrightarrow{N} = \{2;5\}$.

направляющий вектор $\vec{s} = \{5;-2\}$

угловой коэффициент $k=-\frac{2}{5}$

c) Данная прямая $y - x = 0$

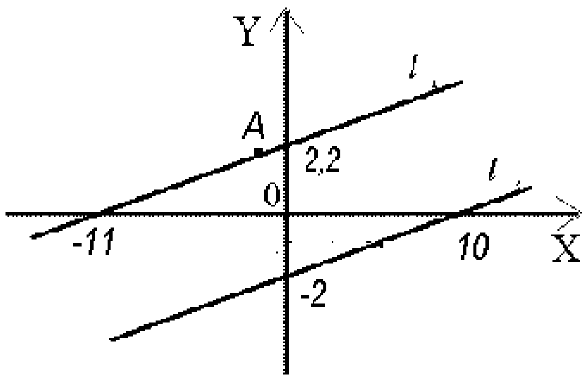
проходит через начало координат O(0;0) и составляет с осью OX угол 45^0. Под углом 45^0 к ней через заданную точку можно провести одну прямую, которая будет составлять с осью OX угол 45^0 и следовательно, ее угловой коэффициент $k = tg 45^0 = 1$

$$y - y_0 = k(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = 1(x + 1) \Rightarrow y - x - 3 = 0$$

вектор нормали $\vec{N} = \{1; -1\}$

направляющий вектор $\vec{s} = \{1; 1\}$

угловой коэффициент $k = 1$



Даны вершины треугольника A(1;1), B(-15;11), C(-8;13).

Пример:

Составить:

a) уравнение стороны BC и найти ее длину,
b) уравнение медианы BM и найти ее длину,
c) уравнение высоты AH и найти ее длину,
d) косинус угла между медианой BM и высотой AH.

Решение:

a) Для составления уравнения стороны BC воспользуемся уравнением прямой через две точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Rightarrow \frac{x+15}{-8+15}=\frac{y-11}{13-11} \Rightarrow 2x-7y+107=0$$

Длину стороны BC найдем как расстояние между двумя точками

$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{49+4}=\sqrt{53}$$

b) Вектор медианы треугольника равен полусумме векторов его сторон т.е.:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\{16;-10\} + \{7;2\}) = \{11{,}5;-4\}$$

Длина медианы есть модуль вектора медианы:

$$\left|\overrightarrow{BM}\right| = \sqrt{132{,}25 + 16} = \sqrt{148{,}28}$$

Направляющему вектору медианы $\overrightarrow{BM} = \{11{,}5;-4\}$

будет соответствовать вектор нормали медианы

$$\overrightarrow{N_{BM}} = \{4;11{,}5\}$$

с) Уравнение высоты АН найдем как уравнение прямой через точку M_0=А (1;1) с вектором нормали

$$\vec{N}_{AH} = \overline{BC} = \{7;2\}$$

$$7(x-1)+2(y-1)=0 \Rightarrow 7x+2y-9=0$$

Чтобы найти длину высоты АН, воспользуемся формулой вычисления расстояния от точки А до стороны ВС. Согласно этой формуле:

$$h = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|\vec{N}|} = \frac{2\cdot 1 - 7\cdot 1 + 107}{\sqrt{53}} = \frac{102}{\sqrt{53}}$$

d) Косинус угла между медианой BM и высотой AH найдем как косинус угла между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{(N_1,\ N_2)}{|N|_1|N_2|} = \frac{7\cdot 4 + 2\cdot 11{,}5}{\sqrt{148{,}25}\cdot\sqrt{53}} = \frac{51}{\sqrt{7857{,}25}}$$

Спасибо за внимание