Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Элементы теории функций комплексного переменного (Пр.2)

Комплексные числа

Понятие комплексного числа.

В множестве действительных чисел действие извлечения корня четной степени из отрицательного числа невыполнимо. Выражения $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt[4]{-7}$ не имеют смысла и, поэтому, уравнения

$$x^2+1=0,\quad x^4+16=0,\quad x^2+6x+25=0$$

на этом множестве решений не имеют.

Для того, чтобы сделать возможным извлечение корня четной степени из отрицательного числа множество действительных чисел было расширено добавлением к нему множества мнимых чисел.

О п р е д е л е н и е 1. *Число, квадрат которого равен* -1, называется мнимой единицей и обозначается буквой i.

$$i^2=-1\ .$$

Итак, используя мнимую единицу, можно записать корни квадратных уравнений:

$$x^2+1=0,\qquad x^2=-1,\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{-1}=\pm i$$

$$x^2+4=0,\quad x^2=-4,\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{-4}=\pm\sqrt{4\cdot(-1)}=\pm 2\sqrt{-1}=\pm 2i$$

$$x^2+6x+25=0,\quad x_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-25}=-3\pm\sqrt{-16}=$$
$$=-3\pm\sqrt{16\cdot(-1)}=-3\pm 4\sqrt{-1}=-3\pm 4i$$

$$x^2+x+2=0,\quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{2}=$$
$$=\frac{-1\pm\sqrt{7\cdot(-1)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{7}\cdot i}{2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\cdot i$$

О п р е д е л е н и е 2. *Число вида* $z = x + iy,$ *где*

$x, y -$ *действительные числа, а* i *~~м~~нимая единица,*

называется комплексным числом.

Число x *называется действительной частью* *комплексного числа*

и обозначается $x = \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}(x + iy)$

Число $y -$ *называется мнимой частью* *числа и обозначается*

$$y = \mathrm{Im}z = \mathrm{Im}(x + iy)$$

Запись комплексного числа в виде $z = x + iy,$

называется *алгебраической формой записи* комплексного числа.

Число $z = iy$, не содержащее действительной части,

называется чисто мнимым числом.

О п р е д е л е н и е 3. *Комплексное число, имеющее ту же действительную и противоположную по знаку мнимую часть, называется комплексно-сопряженным с числом* $z = x + iy$ *и обозначается*

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

О п р е д е л е н и е 4. *Число* $\sqrt{x^2+y^2}$ *называется* *модулем* *числа* $z = x + iy$ *и обозначается* $|z|$, *или* r:

$$|z| = r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Очевидно, что $|z| \geq 0$

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

1. Условие равенства комплексных чисел: два комплексных числа

$$z_1 = x_1 + i\,y_1 \qquad и \qquad z_2 = x_2 + i\,y_2$$

равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части

$$z_1 = z_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2,\; y_1 = y_2.$$

2. Сложение и вычитание комплексных чисел:

при сложении и вычитании комплексных чисел складываются и вычитаются их действительные и мнимые части

- $(2-3i)+(1+4i)=(2+1)+i(-3+4)=3+i,$
- $(3-5i)-(2+4i)=(3-2)+i(-5-4)=1-9i,$
- $(1+4i)-(\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot i)=(1-\sqrt{3})+i\cdot(4+\sqrt{2}).$

3. Умножение комплексных чисел на постоянное число:

при умножении комплексных чисел на постоянное число нужно умножить на это число его действительную и мнимую части

- $2(3-i)=6-2i,$
- $5(4+2i)=20+10i,$
- $i(1-2i)=i-2i^2=i+2$, так как $i^2=-1$.

Можно совместить два действия

- $2(3-i)+5(4+2i)=6-2i+20+10i=26+8i,$
- $4(2+i)+i(1-2i)=8+4i+i-2i^2=8+5i+2=10+5i.$

4. Умножение комплексных чисел :

при умножении двух комплексных чисел нужно умножить их как обычные многочлены, учесть, что $i^2 = -1$ и привести подобные

- $(2-3i)(1+4i) = 2+8i-3i-12i^2 = 2+5i+12 = 14+5i,$
- $(3-5i)(2+4i) = 6+12i-10i-20i^2 = 6+2i+20 = 26+2i,$
- $(4-3i)^2 = 16-24i+9i^2 = 16-24i-9 = 7-24i$

Найдем произведение двух комплексно-сопряженных чисел

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Итак, произведение $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

есть действительное число, равное сумме квадратов действительной и мнимой части комплексного числа. Или: произведение двух комплексно-сопряженных чисел равно квадрату модуля комплексного числа

- $(3+2i)\cdot(3-2i) = 3^2+2^2 = 13.$
- $(1-i)\cdot(1+i) = 1^2+1^2 = 2.$
- $(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2}i) = (\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2 = 3+2 = 5.$

З а м е ч а н и е. Используя результат произведения комплексно- сопряженных чисел, можно проводить разложение на множители суммы квадратов действительных чисел

- $x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy).$
- $x^2 + 25 = (x+5i)\cdot(x-5i).$
- $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1 = (x+2+i)(x+2-i).$

5. Деление комплексных чисел :

при делении двух комплексных чисел нужно умножить числитель и знаменатель дроби на сопряженное знаменателю выражение, провести умножение в числителе и упростить с учетом, что в знаменателе будет произведение сопряженных чисел, т.е. действительное число

- $(2-3i):(1+4i) = \dfrac{2-3i}{1+4i} = \dfrac{(2-3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \dfrac{2-3i-8i+12i^2}{1+16} =$

$= \dfrac{-10-11i}{1+16} = -\dfrac{10}{17} - \dfrac{11}{17}i.$

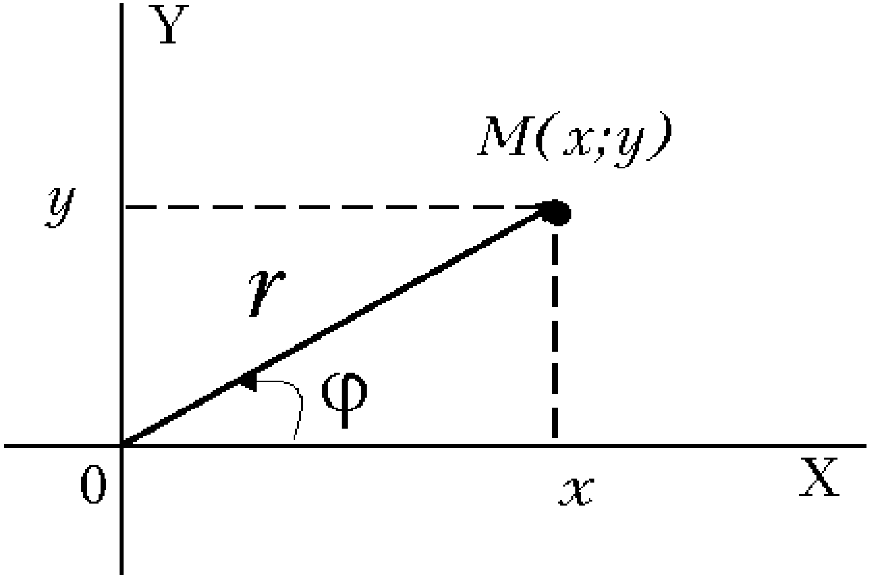
- $(4+5i):i = \dfrac{4+5i}{i} = \dfrac{(4+5i)(-i)}{i(-i)} = |-i^2 = 1| = -4i - 5i^2 = 5 - 4i.$
- $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \dfrac{-i}{+1} = -i \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{i} = -i.$

Построение комплексных чисел на плоскости

В декартовой системе координат на плоскости на оси OX откладывается действительная часть комплексного числа, и ось OX называется действительной осью, а на оси OY откладывается мнимая часть комплексного числа, и ось OY называется мнимой осью комплексной плоскости XOY.

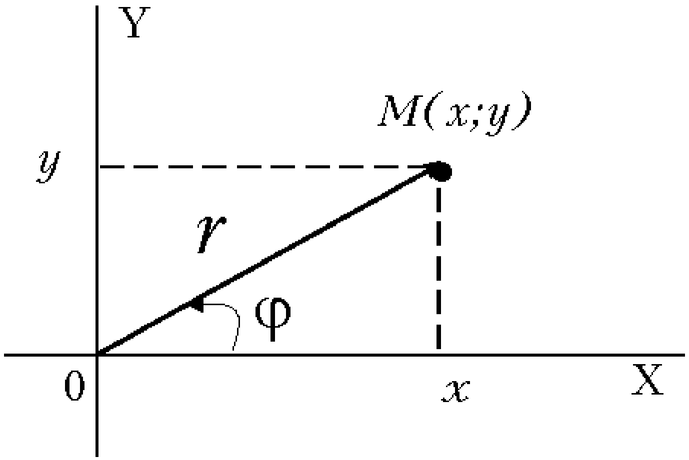
Тогда комплексное число изображается точкой на плоскости с координатами x и y, а также радиус-вектором этой точки $\overleftarrow{OM} = \{x, y\}.$

Длина радиуса-вектора точки есть модуль комплексного числа



$$|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Тригонометрическая форма записи комплексного числа



Положение точки $z = x + iy$

комплексной плоскости определяется не только декартовыми (x, y),

но и полярными координатами (r, φ)

где $r -$ расстояние от точки до начала координат, т.е. длина или модуль радиус-вектора,

$\varphi -$ угол между положительным направлением действительной оси и радиусом-вектором. Этот угол называется

аргументом комплексного числа и определяется с точностью до $2\pi k,\ k = 1,2,3,\ldots$

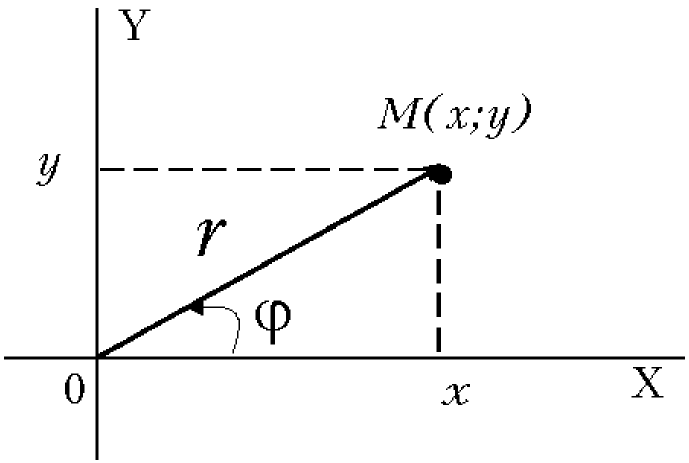
Множество всех значений угла обозначается $\mathrm{Arg}\, z$

При работе с комплексными числами обычно используется так называемое *главное значение* аргумента $\varphi = \arg z$

которое удовлетворяет условию $-\pi \le \arg z \le \pi,$

Таким образом, $\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k.$

Из рисунка видно, что



$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$
$$z = x + iy = r\cos\varphi + i\cdot r\sin\varphi$$

и любое комплексное число

можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Подобная запись называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.
Число, комплексно-сопряженное к данному, запишется в виде

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Любое число можно перевести из тригонометрической формы записи в алгебраическую и обратно. Кроме того, из тригонометрической формы записи можно получить еще показательную форму записи комплексного числа.

Принято определять аргумент числа в зависимости от знаков действительной и мнимой частей числа следующим образом:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & x > 0,\ (\mathrm{I},\quad IV\ ), \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi & x < 0,\ y \geq 0,\ (\mathrm{II}), \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi & x < 0,\ y \leq 0,\ (\mathrm{III}) \end{cases}$$

Приведем значения арктангенсов некоторых углов

$$\operatorname{arctg} 0 = 0, \qquad \operatorname{arctg} \infty = \pi/2, \qquad \operatorname{arctg} (-\infty) = -\pi/2.$$

$$\operatorname{arctg} (1/\sqrt{3}) = \pi/6, \qquad \operatorname{arctg} (-1/\sqrt{3}) = -\pi/6,$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \pi/4, \qquad \operatorname{arctg} (-1) = -\pi/4,$$

$$\operatorname{arctg} (\sqrt{3}) = \pi/3, \qquad \operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = -\pi/3.$$

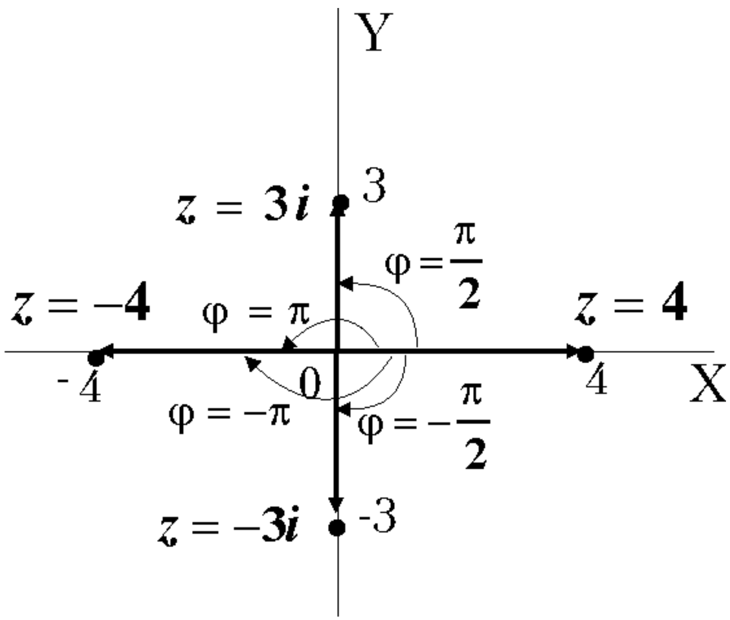
Зачастую в расчетах далеко не всегда участвуют основные острые углы, тангенсы которых известны. В случае произвольного угла используем калькулятор, который с некоторой степенью точности даст значение угла в радианах или в градусах:

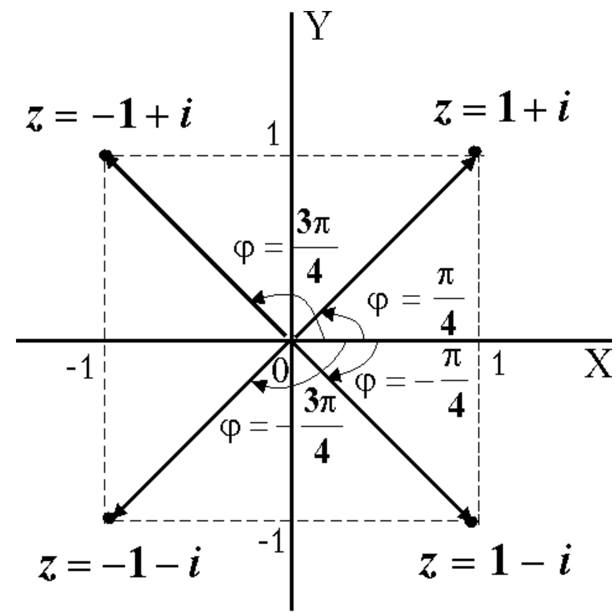
- $\mathrm{a}rctg\,(2{,}835) \approx 1.23 \approx 70{,}6^{o},$
- $\mathrm{a}rctg\,(67{,}83) \approx 1.56 \approx 89{,}2^{o},$
- $\mathrm{a}rctg\,(-0{,}324) \approx -0{,}31 \approx -18^{o}.$

Для правильного определения аргумента следует всегда изобразить число на комплексной плоскости для того, чтобы определить, в какой четверти находится данное число. .

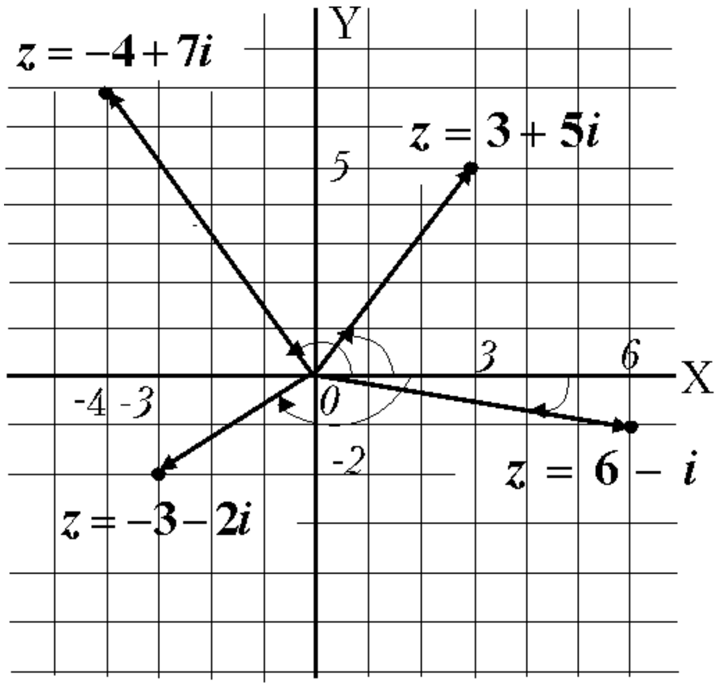
Рассмотрим примеры нахождения аргумента комплексных чисел.

- $z = 4, \quad \arg(4) = \arg(4 + 0 \cdot i) = \mathrm{arctg}\,(0/4) = \mathrm{arctg}\,0 = 0,$
- $z = -4, \quad \arg(-4) = \arg(-4 + 0 \cdot i) = \mathrm{arctg}\,(0/(-4)) = \mathrm{arctg}\,0 + \pi = \pi,$
- $z = 3i, \quad \arg(3i) = \arg(0 + 3i) = \mathrm{arctg}\,(3/0) = \mathrm{arctg}\,\infty = \pi/2,$
- $z = -3i, \quad \arg(-3i) = \arg(0 - 3i) = \mathrm{arctg}\,(-3/0) = \mathrm{arctg}(-\infty) = -\pi/2,$
- $z = 1 + i, \quad \arg(1 + i) = \mathrm{arctg}\,(1/1) = \mathrm{arctg}\,1 = \pi/4$
- $z = 1 - i, \quad \arg(1 - i) = \mathrm{arctg}\,(-1/1) = \mathrm{arctg}(-1) = -\pi/4,$
- $z = -1 + i, \quad \arg(-1 + i) = \mathrm{arctg}\,(1/(-1)) = \mathrm{arctg}(-1) + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4,$
- $z = -1 - i, \quad \arg(-1 - i) = \mathrm{arctg}\,(-1/(-1)) = \mathrm{arctg}\,1 - \pi = \pi/4 - \pi = -3\pi/4.$





Если значения аргумента не являются табличными, то вычисления арктангенсов выполняются с помощью калькулятора и аргумент записывается с учетом четверти, в которой находится комплексное число.



- $\arg(3+5i) = \operatorname{arctg}(5/3) =$
$= \operatorname{arctg} 1{,}667 \approx 1{,}030 \approx 59^o$

- $\arg(-4+7i) = \operatorname{arctg}(-7/4) + \pi =$
$= \operatorname{arctg}(-1{,}75) + \pi \approx -1{,}05 + 3{,}14 \approx 2{,}09$

$\approx -60{,}3^o + 180^o \approx 119{,}7^o$

- $\arg(-3-2i) = \operatorname{arctg}(2/3) - \pi =$
$= \operatorname{arctg} 0{,}667 - \pi \approx 0{,}588 - 3{,}14 \approx -2{,}55$

$\approx 33{,}7^o - 180^o \approx -146{,}3^o$

- $\arg(6-i) = \operatorname{arctg}(-1/6) =$
$= \operatorname{arctg}(-0{,}167) \approx -0{,}165 \approx -9{,}5^o.$

Комплексное число в показательной форме

Пусть комплексное число записано в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Воспользуемся формулой Эйлера

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Тогда получим $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$

Выражение $z = re^{i\varphi}$ - *показательная форма* записи числа .

Отметим, что комплексно-сопряженное число в показательной форме будет иметь вид

$$\bar{z} = re^{-i\varphi}.$$

Показательная и тригонометрическая формы записи комплексного числа применяется для выполнения операций умножения, деления комплексных чисел, а также для возведения в целую положительную степень и извлечения корня.

Действия над комплексными числами в показательной и тригонометрической формах

Пусть $$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

$$z_1 : z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} : r_2 e^{i\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

a) При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

b) При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

- $3e^{3\pi i/4} \cdot 2e^{2\pi i/3} = 6e^{i(3\pi/4+2\pi/3)} = 6e^{(17\pi/12)i}$,
- $4e^{\pi i/4} \cdot 5e^{-\pi i/3} = 20e^{i(\pi/4-\pi/3)} = 20e^{-\pi i/12}$,
- $\dfrac{3e^{3\pi i/4}}{2e^{2\pi i/3}} = \dfrac{3}{2}e^{i(3\pi/4-2\pi/3)} = \dfrac{3}{2}e^{\pi i/12}$,

Отметим ряд интересных результатов

Число i имеет модуль равный единице, и аргумент $\frac{\pi}{2}$, т.е. $i = e^{i\pi/2}$.

Поэтому, при умножении на число i некоторого числа $z = r\,e^{i\,\varphi}$

к аргументу прибавится $\frac{\pi}{2}$, что приведет к повороту вектора,

изображающего число z, на 90^o в положительном направлении без изменения длины.

Перевод числа из одной формы записи в другую

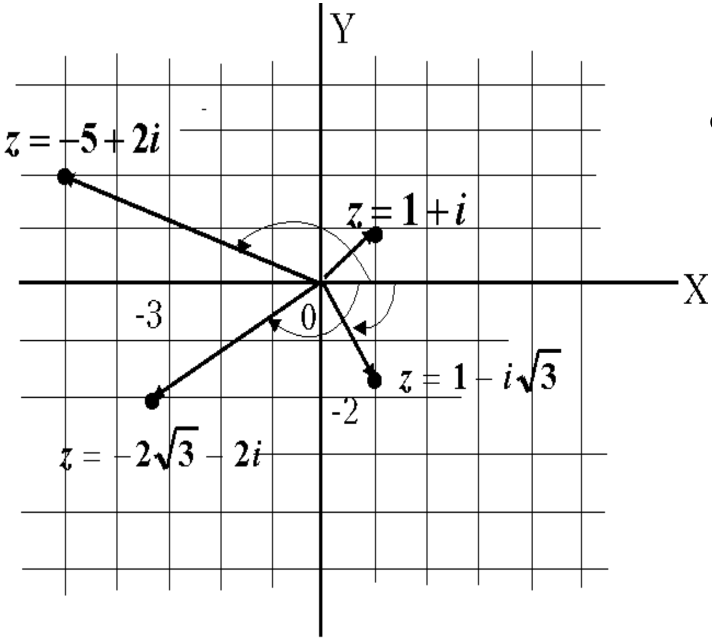
1. *От алгебраической к тригонометрической и показательной*

Для перехода к тригонометрической и показательной форме представления комплексного числа находим:

1) модуль числа по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

2) аргумент числа $\varphi = \arg z$

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z = r\cdot e^{i\varphi}$$



- 1. $z = 1 + i = \left| \begin{matrix} r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 \end{matrix} \right|$

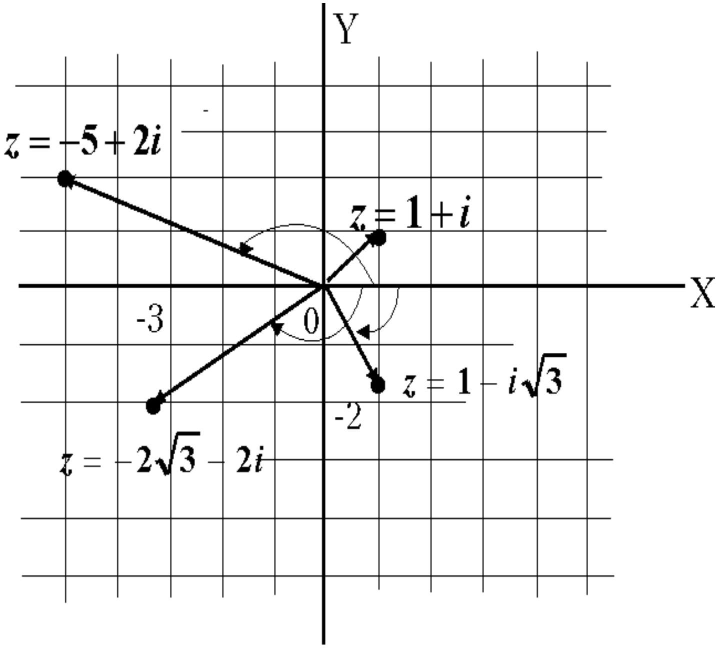
$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}},$$

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

- 2. $z = 1 - i\sqrt{3} = \left| \begin{matrix} r = |z| = \sqrt{1+3} = 2 \\ \varphi = \arg z = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\pi/3 \end{matrix} \right|$

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$



- 3. $z=-5+2i=$

$$\left| \begin{array}{l} r=|z|=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}, \quad \varphi=\arg z= \\ =\operatorname{arctg}(-0.4)+\pi\approx-0{,}38+3{,}14=2{,}76 \\ \operatorname{arctg}(-0.4)+\pi\approx-21{,}8^o+180^o=158{,}2^o \end{array} \right|$$

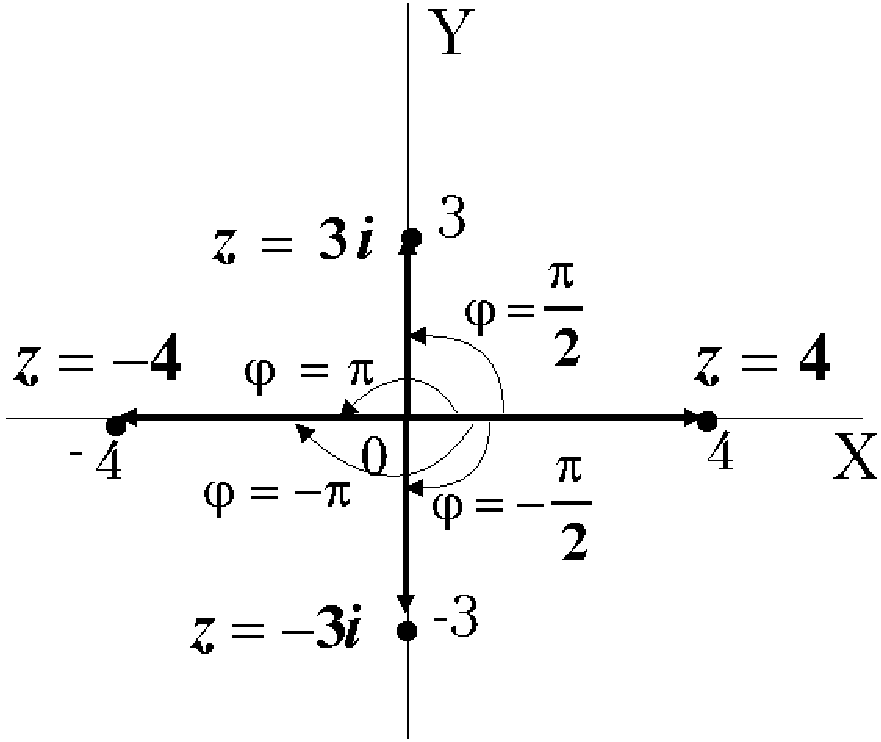
$$z=-5+2i=\sqrt{29}e^{2{,}76i}.$$

$$z=-5+2i=\sqrt{29}\left(\cos 2{,}76+i\sin 2{,}76\right).$$

$$z=-5+2i=\sqrt{29}\left(\cos 158{,}2^o+i\sin 158{,}2^o\right).$$

- 4. $z=-2\sqrt{3}-2i=\left| \begin{array}{l} r=|z|=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4, \quad \varphi=\arg z= \\ =\operatorname{arctg}\dfrac{-2}{-2\sqrt{3}}-\pi=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\pi= \\ =\dfrac{\pi}{6}-\pi=-\dfrac{5\pi}{6} \end{array} \right|$

$$z=-2\sqrt{3}-2i=4e^{-\frac{5\pi}{6}i}. \qquad z=-2\sqrt{3}-2i==4\left(\cos\frac{5\pi}{6}-i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$



- $z=4,\ \ |z|=4,\ \arg(4)=0 \ \Rightarrow\ z=4e^{0\,i}=4(\cos 0+i\sin 0).$
- $z=-4,\ \ |z|=4,\ \arg(-4)=\pi \Rightarrow z=4e^{\pi\, i}=4(\cos\pi+i\sin\pi).$
- $z=3i,\ |z|=3, \arg(3i)=\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z=3e^{\pi/2\, i}=3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right).$
- $z=-3i, |z|=3, \arg(-3i)=-\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z=3e^{-\pi/2\, i}=3\left(\cos\dfrac{\pi}{2}-i\sin\dfrac{\pi}{2}\right).$

2. ***От показательной к алгебраической***

Пусть комплексное число задано в показательной форме $z = re^{i\varphi}$

Для перехода к алгебраической форме:

1) сначала переходим к тригонометрическому представлению числа

$$z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\cos\varphi + ir\sin\varphi.$$

2) Вычисляем $\cos\varphi,\ \sin\varphi.$

3) Находим действительную $x = r\cos\varphi$ и мнимую $y = r\sin\varphi$

части числа и записываем окончательно число в алгебраической форме

$z = x + iy$

- $z = e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 + i \cdot 0 = 1.$

- $z = e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$

- $z = 2e^{\pi i} = 2[\cos \pi + i \sin \pi] = 2(-1 + i \cdot 0) = -2.$

- $z = e^{\frac{\pi i}{2}} = [\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}] = (0 + i) = i.$

- $z = e^{\frac{-\pi i}{2}} = [\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2}] = (0 - 1 \cdot i) = -i.$

- $z = 3e^{-\frac{2\pi i}{3}} = 3[\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i \sin(-\frac{2\pi}{3})] = 3(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$

- $z = 7e^{-2{,}015 i} = 7[\cos(-2{,}015) + i \sin(-2{,}015)] \approx$

$\approx 7(-0{,}43 - 0{,}90\, i) = -3{,}01 - 6{,}32 i.$

Возведение в степень и извлечение корня

Показательная и тригонометрическая форма записи комплексных чисел
Удобна для выполнения действий возведения в большую степень
и извлечения корня

$$z^n = \left(r\, e^{i(\varphi+2\pi k)}\right)^n = r^n\, e^{i(n\varphi+2\pi nk)} = r^n\, e^{in\varphi}.$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\, e^{i(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n}\right)},\ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Соответствующие формулы в тригонометрической форме называются формулами Муавра

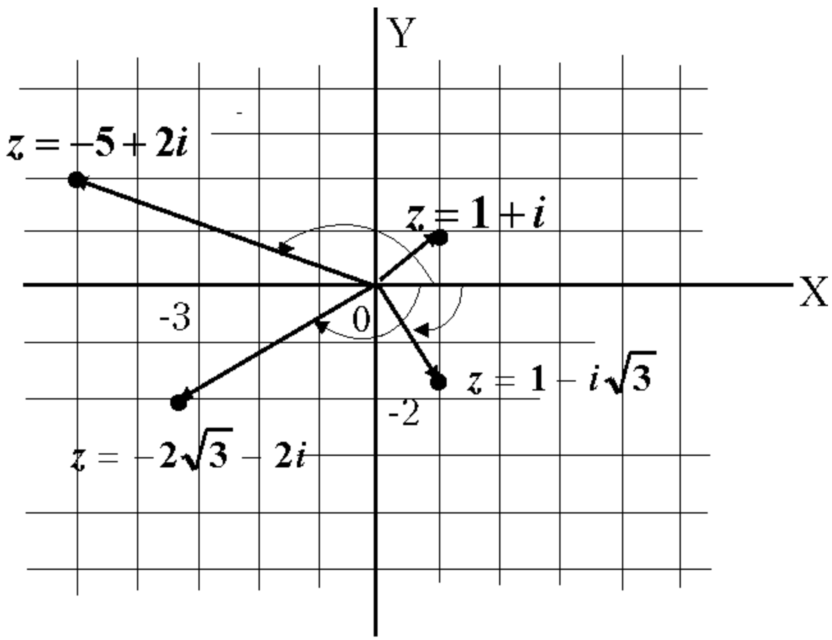
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Задача. Выполнить действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

- 1. $(-2\sqrt{3}-2\cdot i)^6.$

Перейдем к показательной форме записи. Изобразим число на комплексной плоскости. Оно находится в 3-ей четверти.



1) Находим модуль числа

$$|-2\sqrt{3}-2i|=\sqrt{4\cdot 3+4}=\sqrt{16}=4.$$

2) Находим аргумент

$$\arg(-2\sqrt{3}-2i)=\operatorname{arctg}\frac{-2}{-2\sqrt{3}}-\pi=$$

$$=\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}-\pi=\frac{\pi}{6}-\pi=-\frac{5\pi}{6}.$$

3) Записываем число $z=4e^{-5\pi i/6}.$

4) Возводим в степень

$$z^6=\left(4e^{-5\pi i/6}\right)^6=4^6e^{(-5\pi i/6)\cdot 6}=2^{12}e^{-5i\pi}=$$

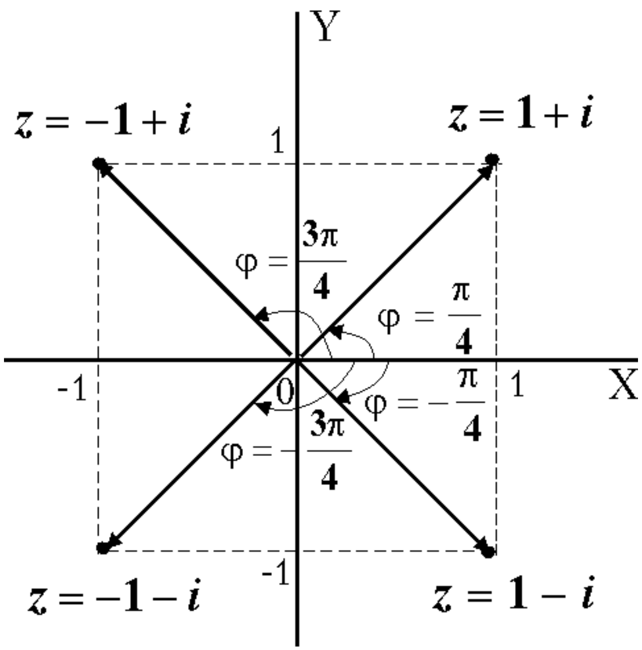
$$=4^{12}(\cos(-5\pi)+i\sin(-5\pi))=4^{12}\cos(-5\pi)=-4^{12}.$$

- 2. $\sqrt[3]{-2+2i}.$

Записываем число в показательной форме

$$|-2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}.$$

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt{8}\,e^{i(3\pi/4+2\pi k)}.$$



При извлечении корня 3-ей степени получим 3 значения корня.
Записываем выражение для вычисления всех корней

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\,e^{\frac{i(3\pi/4+2\pi k)}{3}} = \sqrt{2}\,e^{i(\pi/4+2\pi k/3)}$$

и перебираем значения k от $k=0$

до $k=(n-1)=3-1=2.$

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \begin{cases} k=0: \; = \sqrt{2}\,e^{i(\pi/4)} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \\ = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i. \\ \\ k=1: \; \sqrt{2}\,e^{i(\pi/4+2\pi/3)} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12} + i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right) \approx \\ \approx 1{,}4(-0{,}97+0{,}26i) \approx -1{,}36+0{,}36i. \\ \\ k=2: \; \sqrt{2}\,e^{i(\pi/4+4\pi/3)} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{12} + i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right) \\ \approx 1{,}4(0{,}26-0{,}97i) \approx 0{,}36-1{,}36i. \end{cases}$$

- 3. Вычислить $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$, если $z_1 = 1 - 2i, \quad z_2 = -3 + 4i.$

Выполним сложение и умножение чисел в алгебраической форме

$$\frac{(1-2i)\cdot(-3+4i)}{(1-2i)+(-3+4i)} = \frac{3+6i+4i-8i^2}{-2+2i} =$$

$$= \frac{3+6i+4i+8}{-2+2i} = \frac{11+10i}{-2+2i},$$

а затем деление

$$\frac{(11+10i)(-2+2i)}{(-2+2i)(-2+2i)} = \frac{(-22-20i+22i+20i^2)}{(-2)^2+2^2} = \frac{-22+2i-20}{4+4} =$$

$$= \frac{-42+2i}{8} = -\frac{42}{8} + i\frac{2}{8} = -\frac{21}{4} + i\frac{1}{4} = -5{,}25 + 0{,}25i,$$

Функции комплексного переменного

О п р е д е л е н и е. *Если каждому значению комплексной переменной* $z = x + iy$ *соответствует определенное значение комплексной переменной* $w = u + iv$, *то говорят, что переменная* w *есть функция независимой переменной* z *и пишут* $w = f(z)$

Аналогично тому, что задание комплексного числа равносильно заданию пары действительных чисел, задание функции комплексной переменной z равносильно заданию двух функций пары действительных переменных x и y

А именно: $$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} w(z), \qquad v(x, y) = Jm\, w(z),$$

Преобразования, целью которых служит нахождение функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, называется выделением действительной и мнимой частей функции комплексного переменного.

- 1. $w = z^2 \Rightarrow u + iv = (x + iy)^2 \Rightarrow$

$$u + iv = x^2 + 2ixy + (iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy, \Rightarrow u = x^2 - y^2,\ v = 2xy.$$

- 2. $w = \dfrac{z}{z - 3i}.$

$$\frac{z}{z-3i} = \frac{x+iy}{x+iy-3i} = \frac{x+iy}{x+i(y-3)} = \frac{(x+iy)(x-i(y-3))}{x^2+(y-3)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + ixy - ix(y-3) - i^2 y(y-3)}{x^2+(y-3)^2} = \frac{x^2 + y(y-3)}{x^2+(y-3)^2} + i\frac{3x}{x^2+(y-3)^2}.$$

$$u = \frac{x^2 + y(y-3)}{x^2+(y-3)^2}, \quad v = \frac{3x}{x^2+(y-3)^2}.$$

Основные элементарные функции

1. Степенная функция $w = z^n$

$$w = z^3 = (x + i\,y)^3 = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 =$$

$$= x^3 + i3x^2y - 3xy^2 + i^3y^3 =$$

$$= x^3 - 3xy^2 + i3x^2y - i\,y^3 = (x^3 - 3xy^2) + i\,(3x^2y - y^3),$$

$$u(x;y) = x^3 - 3xy^2, \quad v(x;y) = 3x^2y - y^3.$$

Отметим, что при $n \leq 3$ можно пользоваться алгебраическим представлением комплексного числа, а при больших значениях показателя степени -- тригонометрическим или показательным.

2. Показательная функция $w = e^z$

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y).$$

Выделяем действительную и мнимую части функции

$$\mathrm{Re}\, e^z = e^x \cos y, \quad \mathrm{Im}\, e^z = e^x \sin y,$$

а также находим модуль и аргумент

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = y.$$

Основные правила

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}. \qquad e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \qquad \left(e^z\right)^n = e^{nz}.$$

Вычислим значения функции в некоторых точках

- 1. $e^{i\pi/2} = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i.$
- 2. $e^{-i} = \cos 1 - i \sin 1 = 0{,}54 - 0{,}84i.$
- 3. $e^{2+5i} = e^2 (\cos 5 + i \sin 5) \approx 7.39(0{,}28 - 0{,}96i) \approx 2{,}07 - 7{,}09i.$

3. Логарифмическая функции $w = \ln z$ и $w = \mathrm{L}nz$

Если комплексную переменную $z = x + iy$ представить в показательной форме

$$z = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z} = |z|\cdot e^{i(\varphi+2\pi k)}$$, где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, модуль

$\varphi = \arg z -$ аргумент числа

$$w = \mathrm{L}nz = \mathrm{L}n|z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z} = \ln\left(|z|\cdot e^{i(\varphi+2\pi k)}\right) = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k).$$

$$w = \ln z = \ln\left(|z|\cdot e^{i\arg z}\right) = \ln|z| + i\arg z = \ln|z| + i\varphi.$$

$$\mathrm{L}nz = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), \qquad \ln z = \ln|z| + i\arg z$$

Действительная часть функции $u(x;y) = \ln|z|,$

мнимая -- $v(x;y) = Argz.$

$w = \ln z$ *-- главное значение логарифма* при $k = 0$

Свойства логарифмов:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad \ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2 \quad \ln z^{\alpha} = \alpha \ln z.$$

Задача. Вычислить значения логарифмов

- 1. $\mathrm{L}n(-1+\sqrt{3}i) = \left| \begin{array}{l} |-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2, \\ \mathrm{a}rg(-1+\sqrt{3}i) = 2\pi/3 \end{array} \right| =$

$$= \ln 2 + i(2\pi/3 + 2\pi k) \approx 0{,}69 + i(2{,}09 + 6{,}28k), \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

- 2. $\ln(-6) = \left| \begin{array}{l} |-6| = 6, \\ \mathrm{a}rg(-6) = \pi \end{array} \right| = \ln 6 + i\pi \approx 1{,}79 + 3{,}14i.$

4. **Тригонометрические функции**

$$w = \sin z,\ \ w = \cos z,\ \ w = \operatorname{tg} z,\ \ w = \operatorname{ctg} z.$$

Эти функции определяются через функцию $w = e^{z}$

по формулам Эйлера

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}.$$

Функции $w = \sin z$ и $w = \cos z$ не являются ограниченными и в этом их самое существенное отличие от обычных тригонометрических функций.

Вычислим значения тригонометрических функций.

- $$\sin(\pi i) = \frac{e^{i(\pi i)} - e^{-i(\pi i)}}{2i} = \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2i} \approx -\frac{i}{2}(0{,}04 - 23{,}10) \approx -11{,}58i.$$

- $$\cos(3-2i) = \frac{e^{i(3-2i)} + e^{-i(3-2i)}}{2} = 0{,}5[e^{2}e^{3i} + e^{-2}e^{-3i}] =$$

$$= 0{,}5[e^{2}(\cos 3 + i\sin 3) + e^{-2}(\cos 3 - i\sin 3)] =$$
$$= 0{,}5[\cos 3(e^{2} + e^{-2}) + i\sin 3(e^{2} - e^{-2})] = -3{,}72 + 0{,}51i.$$

5. Гиперболические функции

$$w = \mathrm{sh} z,\ \ w = \mathrm{ch} z,\ \ w = \mathrm{th} z,\ \ w = \mathrm{cth} z.$$

$$\mathrm{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2},\ \ \mathrm{ch} z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2},\ \ \mathrm{th} z = \frac{\mathrm{sh} z}{\mathrm{ch} z},\ \ \mathrm{cth} z = \frac{\mathrm{ch} z}{\mathrm{sh} z}.$$

Справедливы следующие соотношения

$$\sin(iz) = i\,\mathrm{sh}z, \qquad \cos(iz) = \mathrm{ch}z,$$

$$\mathrm{sh}(iz) = i\sin z, \qquad \mathrm{ch}(iz) = \cos z,$$

$$\mathrm{tg}(iz) = i\,\mathrm{th}z, \qquad \mathrm{ctg}(iz) = -i\,\mathrm{cth}z,$$

$$\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1, \qquad \mathrm{sh}^2 z + \mathrm{ch}^2 z = \mathrm{ch}2z.$$

С помощью гиперболических функций можно записать формулы

$$\sin z = \sin(x + iy) = \sin x\,\mathrm{ch}y + i\cos x\,\mathrm{sh}y,$$

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x\,\mathrm{ch}y - i\sin x\,\mathrm{sh}y,$$

Эти формулы применяются для вычислений тригонометрических и гиперболических функций

Вычислить значения:

- 1. $\mathrm{s}h\dfrac{i\pi}{2} = i\sin\dfrac{\pi}{2} = i,$

- 2. $\mathrm{c}hi\pi = \cos\pi = -1.$

- 3. $sh(1-2i) = \dfrac{e^{(1-2i)} - e^{-(1-2i)}}{2} = \dfrac{e^{1}e^{-2i} - e^{-1}e^{2i}}{2} =$

$$= \frac{e^{1}(\cos 2 - i\sin\, 2) - e^{-1}(\cos 2 + i\sin\, 2)}{2} \approx$$

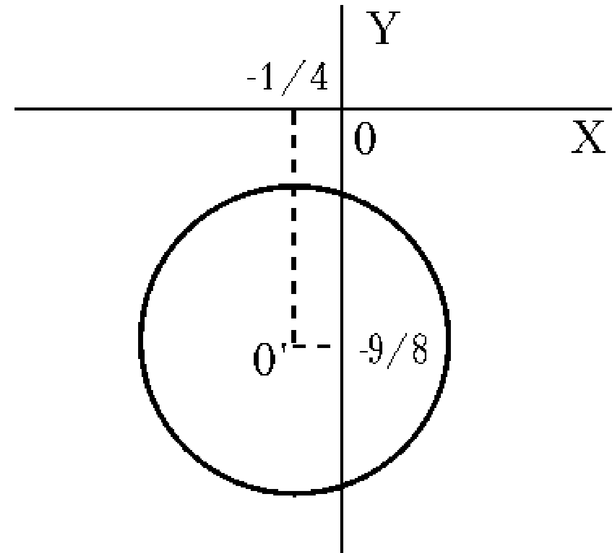
$$\approx \frac{-0{,}98 - 2{,}81i}{2} \approx -0{,}49 - 1{,}4i.$$

- 4. $\cos(3-2i) = \cos 3\cdot ch2 - i\sin\, 3\cdot sh2 \approx$

$\approx -0{,}99\cdot 3{,}76 - i\cdot 0{,}14\cdot 3{,}63 \approx -3{,}72 + 0{,}51i.$

Линии и области на комплексной плоскости

Задача. Построить линии, заданные соотношениями



- $1.\ \left|\dfrac{z-2}{z+i}\right| = 3.$

$$\left|\frac{z-2}{z+i}\right| = 3 \Rightarrow |z-2| = 3|z+i|$$

$$|z-2| = 3|z+i| \Rightarrow |x+iy-2| = 3|x+iy+i| \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= 3\sqrt{x^2+(y+1)^2} \Rightarrow x^2-4x+4+y^2 = 9(x^2+y^2+2y+1)$$

$$\Rightarrow 8x^2+8y^2+4x+2y-4=0 \Rightarrow (x+1/4)^2+(y+9/8)^2 = 45/64.$$

Центр окружности $O'(-1/4;-9/8)$ Радиус $\sqrt{45/64} \approx 0{,}84.$

- 2. $\mathrm{Im}(z^2 - 3z) = -1.$

Проведем преобразования

$$z^2 - 3z = (x + iy)^2 - 3(x + iy) = \; x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3iy =$$

$$= x^2 - 3x - y^2 + i(2xy - 3y).$$

Выделим мнимую часть выражения и приравняем к единице

$$\mathrm{Im}(z^2 - 3z) = -1 \Rightarrow 2xy - 3y = -1 \Rightarrow y = \frac{-1/2}{x - 3/2}.$$

Линия представляет собой гиперболу