



Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Элементы теории функций комплексного
переменного (Лк.2)



Элементы теории функций комплексного переменного

- Основные определения.
- Функции комплексного переменного (КП).
- Дифференцирование функций КП.
- Интегрирование функций (КП).
- Ряды в комплексной плоскости.

Вариант № 1

1. Даны числа $z_1 = -2 + 5i$, $z_2 = 3 - i$.

Выполнить действия в алгебраической форме:

$$1) 2z_1 - 3z_2, \quad 2) z_1 \cdot z_2, \quad 3) \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Даны числа $z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 5 + 5i$, $z_3 = 3 - 2i$.

Построить числа на комплексной плоскости и перевести в тригонометрическую и показательную форму записи. Выполнить указанные действия в показательной форме, результаты представить в алгебраической и в показательной форме:

$$1) (z_2)^8, \quad 2) \sqrt[4]{z_1}, \quad 3) \frac{z_2 \cdot z_3}{z_2 + z_3}.$$

3. Даны числа $z_1 = -\sqrt{3} + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$.

Вычислить значения функций:

$$1) \ln z_1, \quad 2) e^{-z_2}, \quad 3) \sin z_2.$$

Результаты представить в алгебраической форме.

4. Определить и построить на комплексной плоскости семейства линий, заданных уравнениями:

$$1) \operatorname{Im} \frac{1}{z+i} = C, \quad 2) \operatorname{Re} z^2 = C.$$

5. Найти модуль и аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке $z = z_0$

$$f(z) = \frac{2z + 3i}{iz + 4}, \quad z_0 = -2$$

6. Вычислить интегралы:

$$1) \int_{(L)} \frac{dz}{\sqrt{z}}, \quad \text{где } L: \{ |z|=1, \operatorname{Im} z < 0 \};$$

$$2) \int_{(L)} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz, \quad \text{где } L - \text{ломаная } (0; 1; 1 + 2i).$$

7. Вычислить, используя интегральную формулу Коши:

$$\oint_{(L)} \frac{z+3}{z^2-5z+6} dz, \quad \text{где } L: \begin{cases} 1) |z|=1; \\ 2) |z-1|=1,5; \\ 3) |z|=4. \end{cases}$$



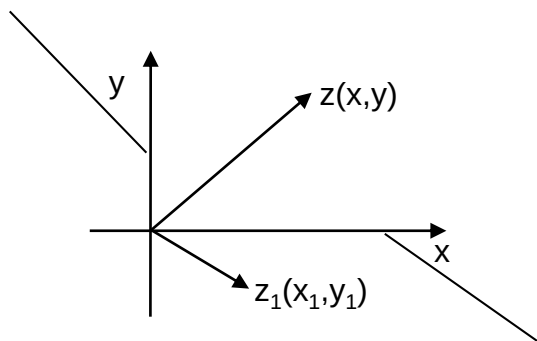
Основные определения

ОПР 1. Комплексным числом z называется упорядоченная пара чисел $z=(x,y)$ с определенными операциями над ними.

x – действительная часть числа z : $x=\operatorname{Re}z$

y – мнимая часть: $y=\operatorname{Im}z$

мнимая ось



действительная ось

$$z_1 = z_2 \quad \text{если} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Действия над комплексными числами

Пусть $z_1(x_1, y_1)$, $z_2(x_2, y_2)$ и $z_3(x_3, y_3)$

Сумма: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ 1.1

а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

б) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

в) $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ – разность

г) Существует единственное комплексное число $0 = (0, 0)$ такое, что $z + 0 = z$

Произведение: $z = z_1 * z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2)$ (1.2)

а) $z_1 * z_2 = z_2 * z_1$

б) $(z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$

в) $(z_1 + z_2) * z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

Любое действительное число можно считать комплексным $x = (x, 0)$

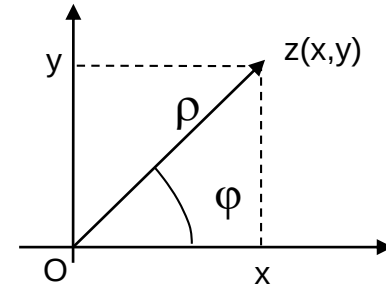
г) умножение на действительную единицу не изменяет значения числа $z * (1, 0) = z$

ОПР 2. Комплексное число вида $z = (0, 1)$ называется мнимой единицей и обозначается $i = (0, 1)$.

Алгебраическая форма комплексного числа: $z = x(1, 0) + y(0, 1) = x + i y$ (1.3)

Число $z^* = x - i y$ называется комплексно сопряженным (1.4)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow$$



Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (1.5)

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*} \quad - \text{модуль числа } z \quad (1.6)$$

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & x > 0 \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} & x < 0, y \geq 0 \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x} & x < 0, y < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \pi/2, x=0, y > 0 \\ -\pi/2, x=0, y > 0 \end{matrix} \quad - \text{аргумент числа } z:$$

Формула Эйлера $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$

Показательная форма комплексного числа: $z = \rho \cdot e^{i \varphi}$ (1.7)

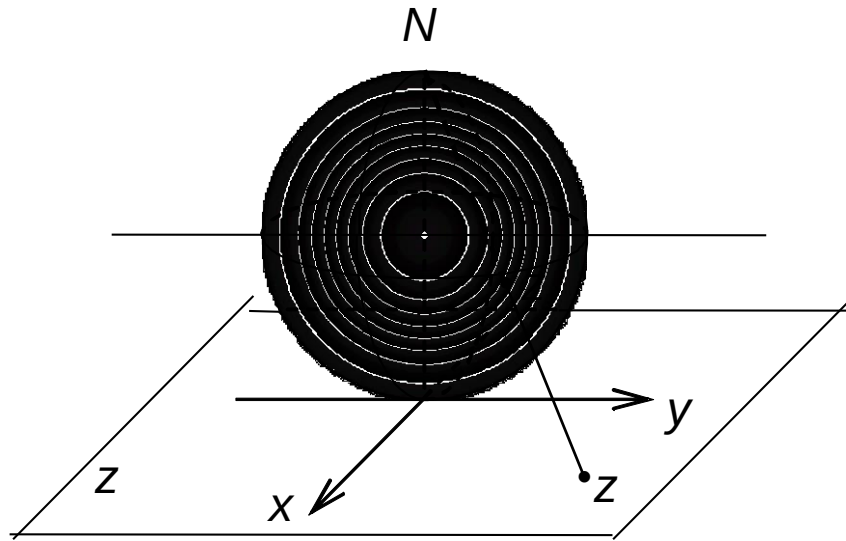
ОПР 3. Комплексное число w называется корнем n -ой степени из числа z ,
если $z = w^n$. Обозначают $w = \sqrt[n]{z} = z^{1/n}$ (1.8)

Теорема. $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i}$ (1.9)

Доказать

.

Стереографическая проекция и $z = \infty$



ОПР 4. Окрестностью бесконечно удаленной точки $z = \infty$ называется внешность круга с центром в точке $z = 0$ радиуса R , т.е. множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R$. Окрестностью точки $z = \infty$ будет достаточно мала, если радиус R достаточно большой: $|z| > 1/\varepsilon$.

Последовательность комплексных чисел

ОПР 5. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие некоторое комплексное число z_n , то говорят, что на множестве комплексных чисел задана последовательность, отображающая множество N в C , и обозначают $\{z_n\}$.

ОПР 6. Число z называется пределом последовательности $\{z_n\}$

и обозначается $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$

если по любому $\varepsilon > 0$ всегда найдется такой номер последовательности $N(\varepsilon)$, что для всех последующих номеров $n > N(\varepsilon)$ будет справедливо неравенство $|z - z_n| < \varepsilon$.

Теорема 2.1.

Последовательность $\{z_n\} = \{x_n\} + i\{y_n\}$ имеет своим пределом число $z = x + iy$ тогда и только тогда, когда

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{и} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \quad (2.1)$$

Доказать

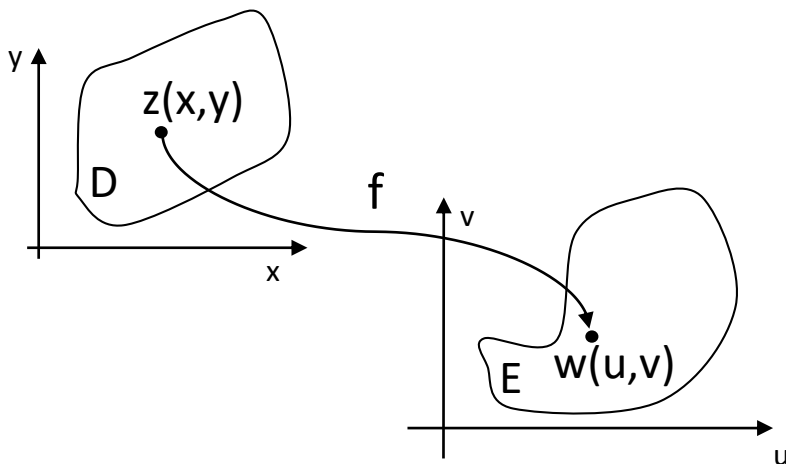


Функция комплексной переменной

ОПР 7.

Пусть на комплексной плоскости или сфере задано множество D .

Если каждому комплексному числу $z \in D$ поставлено в соответствие одно или несколько значений w (к ним может принадлежать и $w = \infty$), то говорят, что на D определена функция комплексной переменной z и записывают: $w = f(z)$ или $f: z \rightarrow w$.



Основные элементарные функции

$w=f(z)$	Доказательство	$w = u + iv$
$w = z^n$	$w = z ^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$	
$w = e^z$	$w = e^x e^{iy} =$	$e^x (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$
$w = \operatorname{Ln} z$	заполнить	$\ln z + i(\arg z + 2\pi k)$
$w = z^p, p \in \mathbb{C}$	заполнить	$e^{p(\ln z + i \arg z)}$
$w = \sin z$ $w = \cos z$	заполнить	$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
$w = \operatorname{tg} z$ $w = \operatorname{ctg} z$	$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$	$\operatorname{ctg} z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$
$w = \operatorname{sh} z$ $w = \operatorname{ch} z$	заполнить	$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh} x \cdot \cos y + i \operatorname{ch} x \cdot \sin y$ $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} x \cdot \cos y + i \operatorname{sh} x \cdot \sin y$
$w = \operatorname{Arcsin} z$ $w = \operatorname{Arccos} z$	заполнить	$= -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$ $= -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
$w = \operatorname{Arctg} z$ $w = \operatorname{Arcctg} z$	$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}$	$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}$

Предел и непрерывность функции

Пусть функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки z_0 , кроме, быть может, самой точки z_0 .

ОПР 8. Комплексное число w_0 называется пределом функции $w = f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall z: \quad 0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon) \quad |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

Записывают

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \quad (3.1)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0, \\ \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0; \end{cases} \quad (3.1^*)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |w_0|, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \arg f(z) = \arg w_0, \end{cases} \quad \text{для } w_0 \neq 0, w_0 \neq \infty \quad (3.1^{**})$$

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и ее некоторой окрестности.

ОПР 9. Функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ его значение совпадает с $f(z_0)$ т.е.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

ОПР 9*.(на языке приращений) Функция непрерывна в точке z_0 если малому приращению аргумента соответствует малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0$$

Здесь $z - z_0 = \Delta z$ (приращение аргумента)

$f(z) - f(z_0) = \Delta w$ (приращение функции)

ОПР 10. Функция непрерывна на множестве E , если она непрерывна в каждой его точке.



Дифференцирование функции комплексной переменной

Пусть функция $w = f(z)$ определена в области D .

ОПР 11. Функция $w = f(z)$ называется дифференцируемой или моногенной в точке $z_0 \in D$, если при $\Delta z \rightarrow 0$ ($\Delta z = z - z_0$) существует конечный предел разностного отношения

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z) \quad (4.1)$$

Этот предел называется производной функции $w = f(z)$ в точке z и обозначается

$$f'(z)$$

Теорема 4.1 Условия Коши-Римана. (Необходимые условия дифференцируемости)

Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z , то её действительная и мнимая части обладают частными производными первого порядка, которые удовлетворяют условиям Коши – Римана:

Доказать

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.2)$$

Теорема 4.2 (Достаточные условия дифференцируемости)

Если действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части функции $w = f(z)$ в точке z имеют полные дифференциалы и удовлетворяют условиям Коши – Римана, то функция $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ дифференцируема в точке z .

ОПР 12. Функция $f(z)$ называется дифференцируемой в области D , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Теорема 4.3 (Эквивалентность условий Коши-Римана и условия

Условия Коши-Римана и $\frac{\partial f}{\partial z^*}$ эквивалентны

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$$

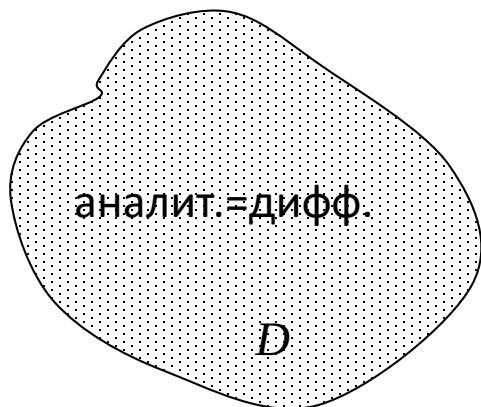
Доказать

Аналитическая функция

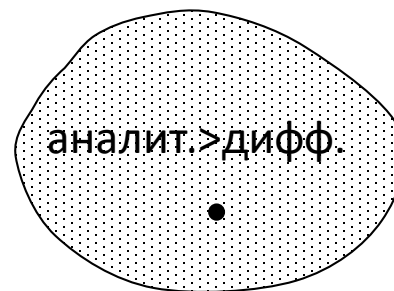
ОПР 13. Функция $w = f(z)$, однозначная и дифференцируемая во всех точках области D , называется аналитической в этой области.

ОПР 13*. Функция $w = f(z)$ называется аналитической в точке z , если существует окрестность этой точки, в которой $f(z)$ аналитична.

Обратить внимание!!!



В области



В точке

Свойства аналитических функций

1. Если f_1 и f_2 – аналитичны, то их сумма $(f_1 + f_2)$, произведение $(f_1 f_2)$ также аналитичны, а частное (f_1 / f_2) – аналитично всюду, где $f_2 \neq 0$.
2. Если $w = f(z)$ аналитична в D , а в области ее значений аналитична функция $t = \varphi(w)$, то сложная функция $t = \varphi(f(z))$ аналитична в D .
3. Если в окрестности z_0 определена аналитическая функция $w = f(z)$ такая, что $f'(z_0) \neq 0$, то в окрестности точки w_0 определена единственная обратная функция $z = \varphi(w)$, аналитическая в этой окрестности, и

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Это свойство локально, т.к. из условия $f'(z) \neq 0$ для единственной функции $f(z)$ не следует единственность обратной функции.

4. Если $w = f(z)$ аналитическая и ограниченная на всей комплексной плоскости, то $f(z) = \text{const}$ (теорема Лиувилля).

Гармонические функции

ОПР 14. Уравнение вида $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ называется уравнением Лапласа.

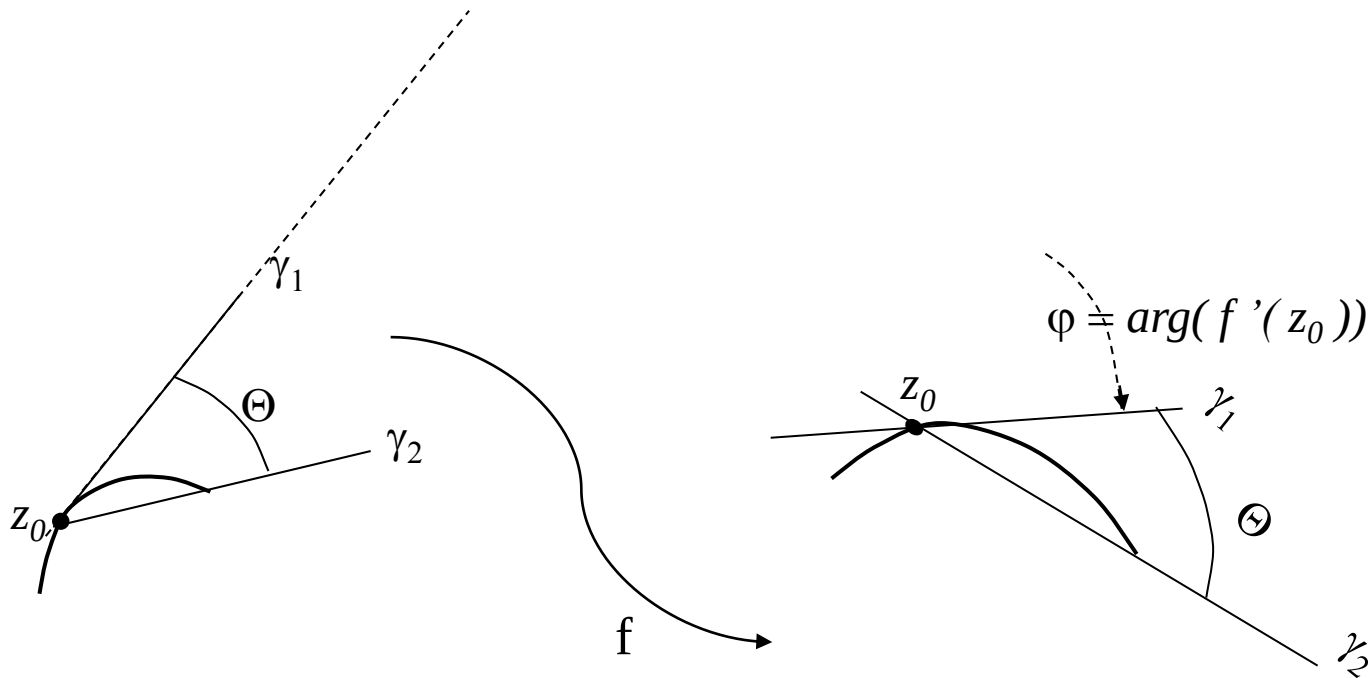
ОПР 14*. Действительная функция двух действительных переменных $\varphi(x, y)$, непрерывная в области D , имеющая непрерывные частные производные второго порядка, являющаяся решением уравнения Лапласа, называется гармонической в области D .

Теорема 5.1 Действительная и мнимая части аналитической функции в области D являются гармоническими в этой области. **ДОКАЗАТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО**

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Отображение f достаточно малой окрестности точки z_0 сводится к повороту на угол φ равный $\arg(f'(z_0))$ и к преобразованию подобия с коэффициентом подобия $k = |f'(z_0)|$.

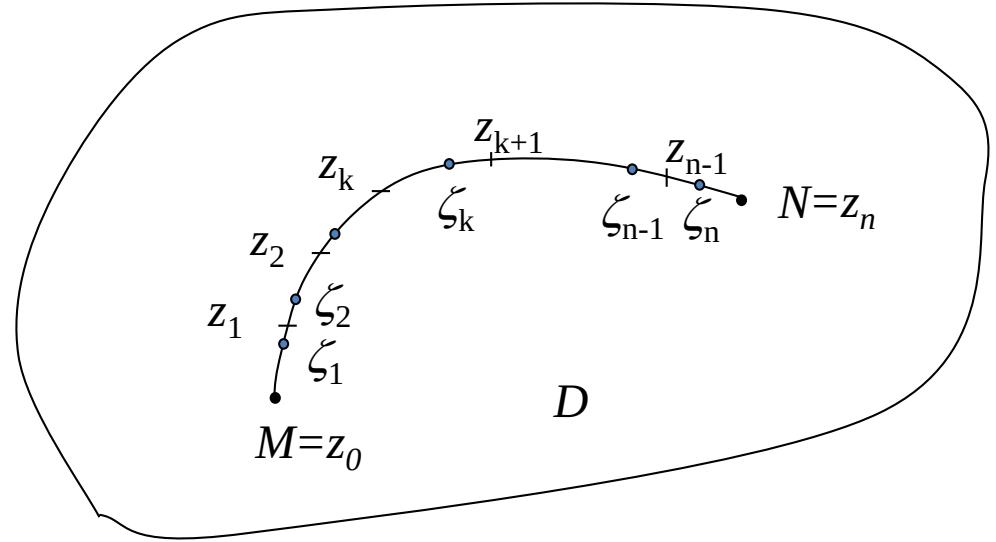
Показать





Интегрирование функции комплексной переменной

ОПР 17. Пусть в области D задана однозначная и непрерывная ф. к. п. $w = f(z)$ и пусть $\Gamma (MN)$ – произвольная кусочно-гладкая ориентированная кривая ($\Gamma \in D$).



а) $T \{M = z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = N\}$,

б) $\zeta_k \in (z_k, z_{k+1})$

в) $S_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \quad \Delta z_k = z_{k+1} - z_k$

г) $d = \max_{k=1}^n |z_k, z_{k+1}|$

Предел комплексной интегральной суммы при $d \rightarrow 0$ называется интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой Γ и обозначается

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\max_k |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$$

Теорема 6.1. (теорема существования)

Если функция $f(z)$ однозначна и непрерывна на кусочно-гладкой ориентированной кривой Γ , то предел комплексной интегральной суммы сущ. и не зависит ни от способа разбиения кривой, ни от выбора точек ζ_k .

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} u dx - v dy + i \int_{\Gamma} u dy + v dx \quad 6.2$$

Свойство интеграла фкп.

$$1) \int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz$$

$$2) \int_{z_1}^{z_2} dz = z_2 - z_1$$

$$3) \int_{\Gamma} \left[\sum_{k=1}^n c_k f_k(z) \right] dz = \sum_{k=1}^n c_k \int_{\Gamma} f_k(z) dz$$

$$4) \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz \quad \text{конец } \Gamma_1 \text{ совпадает с началом } \Gamma_2$$

$$5) \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| dl$$

6) Если функция $f(z)$ ограничена на Γ , т.е. $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Gamma$, то где l – длина кривой Γ

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq Ml$$

Теорема 6.2. (теорема Коши для односвязной области)

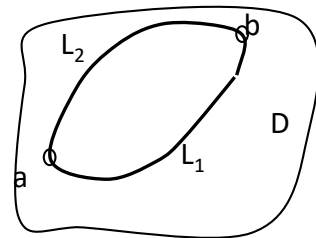
Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , а C – замкнутая, кусочно-гладкая кривая, лежащая в области D , то

$$\int_C f(z)dz = 0 \quad 6.3$$

Справедлива обратная теорема: если $f(z)$ непрерывна в D и для ЛЮБОГО замкнутого контура C , лежащего в D $\int_C f(z)dz = 0$, то $f(z)$ аналитична.

Теорема 6.3. (независимость интеграла от пути интегрирования)

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , то интеграл от неё вдоль любой дуги $L \in D$ не зависит от формы дуги L , а зависит только от начальной a и конечной b точки пути интегрирования



Следствие

1. Для аналитической в D функции интеграл не зависит от формы дуги L , а

только от начальной и конечной точек пути интегрирования $\int_L f(z)dz = \int_a^b f(z)dz$

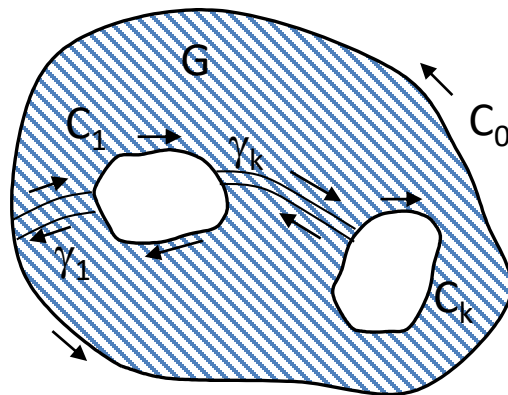
2. Если $\Phi(z)$ любая функция, для которой $\Phi'(z) = f(z)$, ($f(z)$ – аналитична), то

$$\int_a^b f(z)dz = \Phi(z) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Теорема 6.4. (теорема Коши для многосвязной области)

Если функция $f(z)$ аналитична в многосвязной области G , то

$$\int_{C_0} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z)dz \quad 6.4$$



Теорема 6.5. (интегральная формула Коши)

Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой односвязной области D и на ее границе C , и z_0 – внутренняя точка области D , то

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad 6.5$$

Выводы.

1) Интегральная формула Коши показывает, что многие свойства аналитических функций определяются свойствами простейшей из них:

$$K(z_0, z) = \frac{1}{z - z_0} \quad - \text{ядро Коши}$$

2) Интеграл Коши определяется лишь значениями $f(z)$ на границе C области D . Т.о. значения функции внутри области аналитичности задаются ее значениями на границе. Формула Коши позволяет вычислить значения функции во всех точках области, если известны граничные значения этой функции.

Теорема 6.6.

Функция $F(z)$, определенная интегралом типа Коши, аналитична в любой конечной точке z_0 , не лежащей на кривой Γ и

$$F'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

Следствие 1. $F(z)$ обладает производными любого порядка и

$$F^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Следствие 2. Любая аналитическая в замкнутой области D функция $f(z)$ обладает внутри этой области производными всех порядков, причем

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

6.5

§ 7. Ряды в комплексной плоскости

ОПР 17. Пусть дана последовательность комплексных чисел $a_1, a_2 \dots a_n$.

Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad 7.1$$

называется числовым рядом.

ОПР 18. Если сходится последовательность $\{ S_n \}$ частичных сумм, т. е.

существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ то ряд (7.1) называется сходящимся, а число S – суммой ряда. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует или равен ∞ , то ряд (7.1)

называется расходящимся.

Теорема 7.1. (Необходимый и достаточный признак сходимости ряда).

Для сходимости ряда (7.1), где $a_n = \alpha_n + i \beta_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

Теорема 7.2. (Достаточный признак сходимости ряда).

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то и данный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

ОПР 19. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Свойства.

1. Чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\beta_n$ сходиллся абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходились абсолютно.

2. Чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + i\beta_n$ сходиллся условно, необходимо и достаточно, чтобы оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ сходились, причем хотя бы один из них условно

Функциональные ряды

ОПР 20. Пусть в области D комплексных чисел задана последовательность функций $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad 7.2$$

называется функциональным рядом.

ОПР 21. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ называется **равномерно сходящимся** в области G , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \quad \forall z \in G \quad \forall n > N \quad |R_n(z)| < \varepsilon$$

Теорема 7.3. (Вейерштрасса. Достаточный признак равномерной сходимости).

Если для всех $z \in G$ функциональный ряд мажорируется числовым, т.е. $|f_n(z)| \leq b_n$, $n = 1, \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно в G .

Свойства равномерно сходящихся рядов.

1. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ – функции непрерывные в области G и ряд сходится равномерно в G , то сумма ряда $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ является непрерывной функцией в G .

2. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ – функции непрерывные на кривой Γ и ряд сходится равномерно на Γ , то он допускает почленное интегрирование вдоль Γ

$$\int_{\Gamma} S(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z) dz$$

3. Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ – функции аналитические в G и ряд равномерно сходится в любой замкнутой области G

а) сумма ряда $S(z)$ аналитична в G ,

б) ряд допускает почленное дифференцирование любое число раз, т. е

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z), \quad \text{где } k = \overline{1, \infty}$$

и равномерно сходится во всей области G

Степенные ряды

ОПР 22. Степенным называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n = c_0 + c_1 (z - a) + c_2 (z - a)^2 + \dots + c_n (z - a)^n + \dots \quad 7.3$$

где a, c_i – комплексные числа, z – комплексная переменная, a – центр ряда.

Теорема 7.4. (Абея. О строении области сходимости степенного ряда).

Если степенной ряд (7.3) сходится в точке $z_0 \neq a$, то он

1. сходится абсолютно в круге $|z - a| < |z_0 - a|$,
2. равномерно сходится в замкнутом круге $|z - a| \leq \rho$, где $\rho < |z_0 - a|$.

Если степенной ряд (7.3) расходится в точке z_1 , то он расходится в области, определяемой неравенством $|z - a| > |z_1 - a|$
(внешность круга радиуса $|z_1 - a|$)

ОПР 23. Максимальное значение $\rho = R$ называется радиусом сходимости, а множество $\{z: |z - a| < R\}$ называется кругом сходимости.

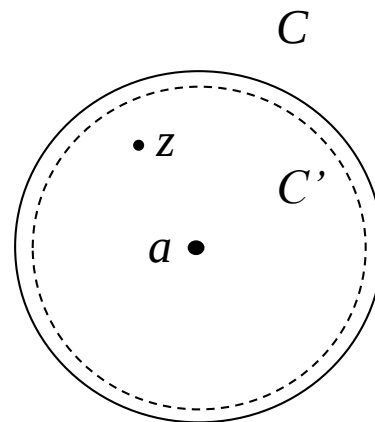
свойства аналогичны

Ряды Тейлора

Теорема 7.4. (существования)

Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - a| < R$, то в этом круге функция $f(z)$ представима в виде суммы степенного ряда.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n \quad 7.4$$



Этот ряд называется рядом Тейлора для функции $f(z)$

Теорема 7.5. (единственности)

Любой сходящийся в круге $|z - a| < R$ к функции $f(z)$ степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad \text{является рядом Тейлора для своей суммы.}$$

Стандартные разложения

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 + \dots$$

Уметь получать разложения и определять круг сходимости

Ряды Лорана

ОПР 24. Рядом Лорана называется ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \dots + c_{-n} (z-a)^{-n} + c_{-n+1} (z-a)^{-n+1} \dots + c_{-1} (z-a)^{-1} + c_0 + c_1 (z-a) + c_2 (z-a)^2 + \dots + c_n (z-a)^n + \dots$$

или

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad 8.1$$

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ называется правильной частью ряда Лорана. Область сходимости круг $|z-a| < R$ (включая $R=0$, $R=\infty$).

Ряд $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z-a)^{-n}$ называется главной частью ряда Лорана.

Теорема 8.1. (о представлении аналитической функции рядом Лорана).

Всякая функция, аналитическая в кольце $r < |z - a| < R$ может быть представлена в этом кольце рядом Лорана

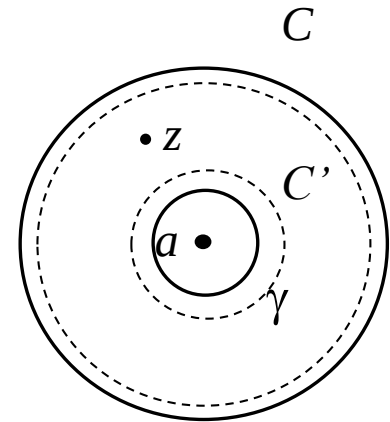
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(t)dt}{(t - a)^{n+1}}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(t)(t - a)^{n-1} dt$$

8.2



C' – любая окружность в кольце с центром в точке a .

Замечание. К интегралам (8.2) нельзя применять ни интегральную формулу Коши, ни формулу для производных, т.к. $f(z)$ аналитична не во всем круге C' , а только в кольце.

Теорема 8.2. (единственности разложения функции в ряд Лорана).

Если $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$ сходится к функции $f(z)$ в кольце $r < |z - a| < R$, то

коэффициенты $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C'} \frac{f(t)dt}{(t - a)^{n+1}}$ определяются однозначно

Разложение функций в ряд Лорана в окрестности ∞ .

Используем замену переменных $\xi = \frac{1}{z}$

получим ряд вида
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

сходящийся к $f(z)$ в кольце $R < |z - a| < \infty$.

Говорят: функция разложена в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$.



Вычеты и их применение

Нули функций

ОПР 25. Точка $z = a$, [$a \in D$ – области определения $f(z)$], называется нулем функции $f(z)$, если $f(a) = 0$.

ОПР 26. Точка $z = a$, называется нулем порядка m если в разложении $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности $z = a$ коэффициенты $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$, $c_m \neq 0$, т.е. ряд Тейлора имеет вид

$$f(z) = c_m(z - a)^m + c_{m+1}(z - a)^{m+1} + \dots$$

ИЛИ если $f(z)$ можно представить как $f(z) = (z - a)^m \varphi(z)$

удобное правило: Точка $z = a$ является нулем порядка $m \Leftrightarrow$
 $f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$, $f^{(m)}(a) \neq 0$.

или

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z - a)^m} = \text{const}$$

Особые точки

ОПР 27. Точка $z = a$ называется особой точкой для функции $f(z)$, если в ней нарушается аналитичность $f(z)$.

ОПР 28. Точка $z = a$ называется изолированной особой точкой (и.о.т.) для функции $f(z)$, если существует некоторая окрестность точки $z = a$ в которой нет других особых точек.

Таблица типов особых точек

Тип особой точки $z = a$ с	Определение	Признак
У.о.т. (устраняемая особая точка)	Лорановское разложение не содержит главной части $f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots, \quad 0 < z-a < R$	$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \text{const}$
Полюс порядка m	Главная часть лорановского разложения содержит конечное число членов $f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \quad r < z-a < R$ $c_{-m} \neq 0$	$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$
С.о.т. (существенно особая точка)	Главная часть лорановского разложения содержит бесконечное число членов $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$	$\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ не существует

удобное правило для вычисления порядка полюса:

Чтобы точка $z = a$ была полюсом порядка m функции $f(z)$ $\Leftrightarrow$ чтобы эта точка являлась нулём кратности m аналитической в $z = a$ функции

$$\frac{1}{f(z)}$$

ВЫЧЕТЫ

ОПР 29. Значение интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$ вдоль контура γ , обходящего в положительном направлении единственную особую точку $z = a$ функции $f(z)$ называется вычетом функции $f(z)$ относительно точки a .

Обозначают:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz \quad 9.1$$

Теорема 9.1. Вычет равен коэффициенту при первой отрицательной степени разложения Лорана функции $f(z)$ в окрестности $z = a$

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1} \quad 9.2$$

Способы вычисления вычетов относительно конечных особых точек

1) Если $z = a$ – устранимая особая точка, $C_{-1}=0 \Rightarrow \operatorname{res}_{z=a} f(z) = C_{-1} = 0$

2) Если $z = a$ – полюс порядка m . Тогда $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (f(z)(z-a)^m)$ **9.3**

в частности если $z = a$ – простой полюс, то $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z)$

3) Если $z = a$ – существенно особая точка функции $f(z)$, надо воспользоваться формулой $\operatorname{res}_{z=a} f(z) = C_{-1}$ и разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана.

У.о.т. (устранимая особая точка)	Лорановское разложение не содержит главной части $f(z) = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_n(z-a)^n + \dots,$	$\lim_{z \rightarrow a} f(z) =$ $= \mathbf{const}$
Полюс порядка m	Главная часть лорановского разложения содержит конечное число членов $f(z) = \frac{-m}{(z-a)^m} + \frac{-m+1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{-1}{z-a} + \sum_{n=0} c_n(z-a)^n, \quad 0 < z-a < R$	$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$
С.о.т. (существенно особая точка)	Главная часть лорановского разложения содержит бесконечное число членов $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$	$\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ не существует

Бесконечно удаленная особая точка

ОПР 30. Значение интеграла $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z) dz$ вдоль контура γ , обходящего в

отрицательном направлении особую точку $z = \infty$ функции $f(z)$ называется
вычетом функции $f(z)$ относительно бесконечно удаленной точки.

Обозначают: $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -b_{-1}$ 9.4

Теорема 9.2. (Основная теорема о вычетах).

Если $f(z)$ – функция, аналитическая в замкнутой области $\overline{G} = G \cup \Gamma$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, лежащих в области G (но не на Γ), то интеграл равен

$$\int_{\Gamma} f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) \quad 9.5$$

Теорема 9.3.

Если $f(z)$ – функция, аналитическая в расширенной комплексной плоскости, исключая конечное число изолированных особых точек $z_0 = \infty, z_1, z_2, \dots, z_n$ то сумма всех ее вычетов относительно особых точек, включая $z = \infty$, равна нулю

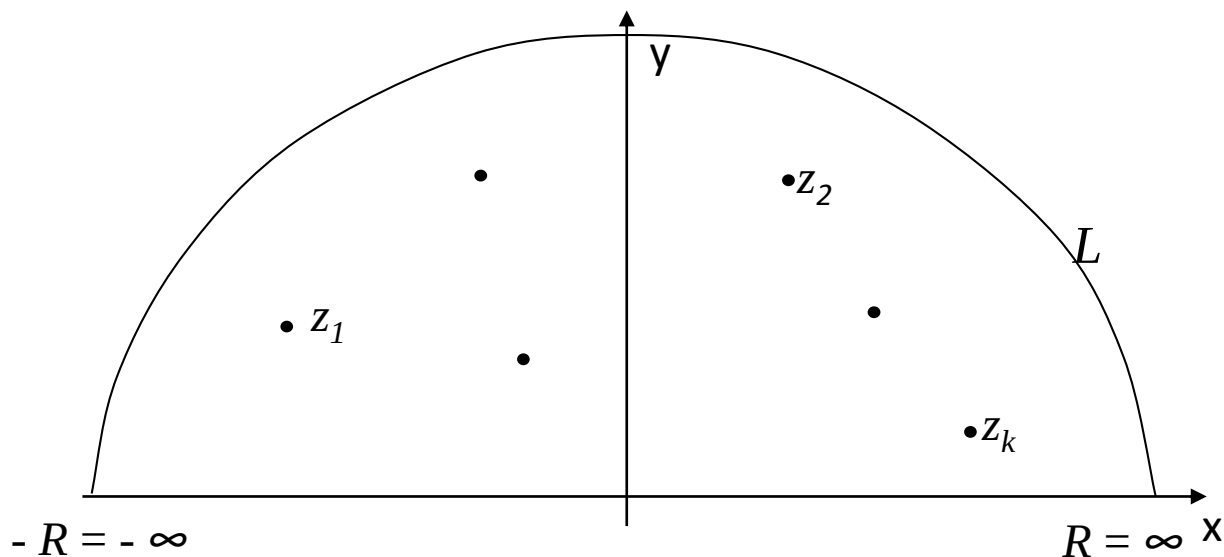
$$\sum_{k=0}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = 0 \quad 9.6$$

Вычисление несобственных интегралов I типа с помощью вычетов

Пусть $f(z)$ в точке $z = \infty$ является нулем порядка $m > 2$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = \oint_L f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz \quad \text{где}$$

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \sum_k \operatorname{res}_{z_k} f(z) \quad \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| dl \leq \frac{\rho}{R^{m-1}} = 0$$



Лемма Жордана

Пусть C_R – дуга окружности радиуса R в верхней полуплоскости с центром в точке z_0 .

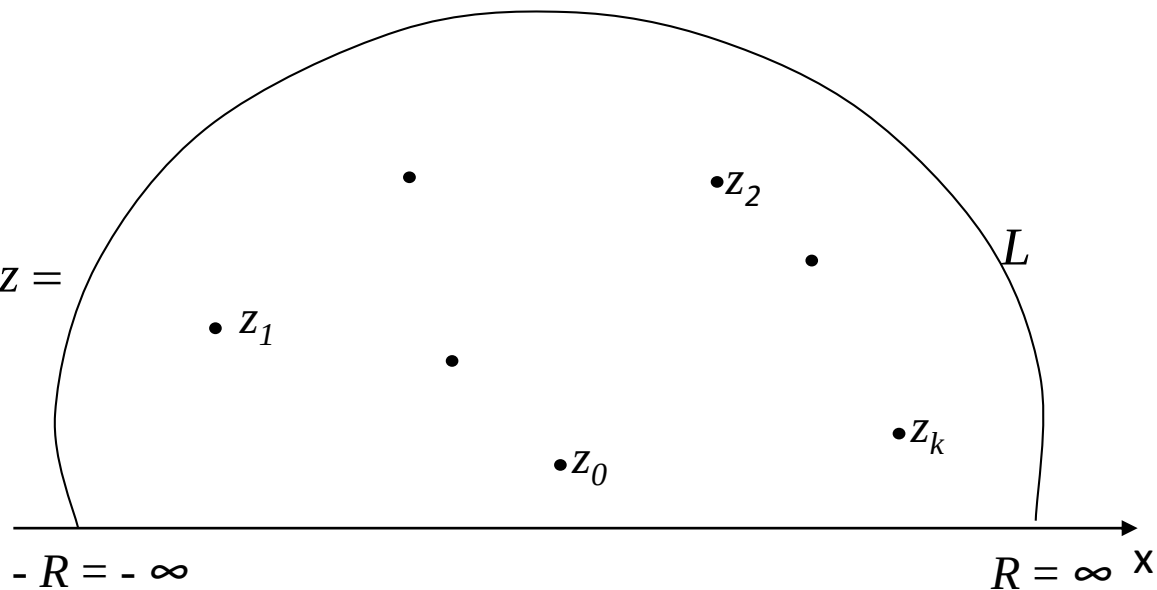
Пусть $f(z)$ имеет вид $f(z) = e^{i\alpha z} F(z)$ ($\alpha > 0$).

Если $F(z)$ аналитична на действительной оси, а в верхней полуплоскости имеет лишь конечное число особых точек, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = \oint_L f(z) dz - \int_{C_R} f(z) dz =$$

$$= 2\pi i \sum_k \operatorname{res}_{z_k} f(z)$$



Спасибо за внимание