Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Элементы теории операционного исчисления (Лк.4)

Элементы теории операционного исчисления

-Элементы операционных исчислений.

-Свойства преобразования Лапласа.

-Интеграл Дюамеля.

-Таблица оригиналов и изображений.

-Приложения.

Вариант № 1

1. Найти изображения следующих функций:

1) $f(t)=\cos^2 t.$ 2) $f(t)=t+\frac{1}{2}e^{-t}.$

2. Найти оригиналы функций по заданным изображениям:

1) $F(p)=\frac{p}{(p-1)(p-2)}.$ 2) $F(p)=\frac{e^{-p/2}}{p(p^2+1)}.$

3. Найти решение задачи Коши операционным методом:

1) $x''-2x'+x=\sin t,$ $x(0)=0,\quad x'(0)=0.$

2) $x''+7x'+6x=3t+1,$ $x(0)=0,\quad x'(0)=0.$

3) $9x''+x=e^{3t}+2,$ $x(0)=0,\quad x'(0)=0.$

4. Решить уравнения, используя формулу Дюамеля:

$$x''-36x=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & 0\le t\le 2,\\ -2, & 2<t\le 4,\\ 0, & t>4,\end{cases}\qquad x(0)=0,\quad x'(0)=0.$$

5. Найти решение систем операционным методом:

1) $\begin{cases}x'=7x-2y\\ y'=-x+3y\end{cases},\ \begin{matrix}x(0)=0,\\ y(0)=2.\end{matrix}$ 2) $\begin{cases}x'=6x+5y\\ y'=-2x+4y\end{cases},\ \begin{matrix}x(0)=1,\\ y(0)=0.\end{matrix}$

Элементы операционных исчислений

Оригинал и изображение

ОПР 1. Функцией-оригиналом будем называть любую функцию действительного аргумента t: $f(t) = u(t) + i\,v(t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $f(t)$ и $f'(t)$ или всюду непрерывны, или имеют на любом конечном промежутке лишь конечное число точек разрыва первого рода;

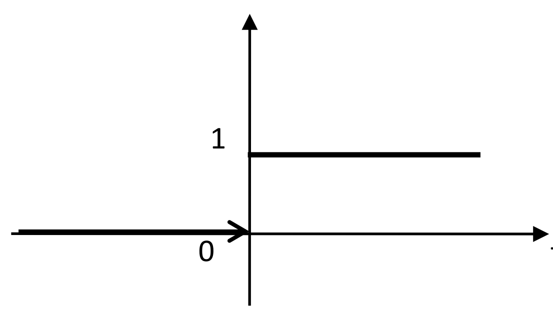
2) $f(t) = 0$ для всех $t < 0$;

3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие числа $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что для всех t $\quad |f(t)| \leq Me^{s_0 t}$,

s_0 – показатель роста функции $f(t)$

Единичная функция Хевисайда $\eta(t)$

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



ОПР 2. Изображением функции $f(t)$ (по Лапласу) называют функцию комплексной переменной $F(p)$ $(p = s + i\tau)$, определяемую соотношением :

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt \qquad (1.1)$$

Интеграл обозначают $F(p)$ или $L[f(t)]$

(путем интегрирования является вещественная положительная полуось).

«функция $f(t)$ *имеет своим изображением* $F(p)$ *»* записывают $f(t) \risingdotseq F(p)$

Интеграл в формуле (1.1) называют *интегралом Лапласа* для функции $f(t)$

переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ – *преобразованием Лапласа*.

Теорема 1.1. (Условия существования изображения)

Если оригинал $f(t)$ имеет порядок роста s_0 (выполняется условие 3), то изображение этого оригинала $F(p)$ существует для всех p, для которых $\operatorname{Re} p = s > s_0$, и является при этом условии аналитической функцией (т.е. интеграл 1.1 сходится абсолютно).

Замечание. 1.1.

В дальнейшем будем полагать $\operatorname{Re} p > s_0$, т.е. рассматривать изображение $F(p)$ лишь для тех p, для которых обеспечено существование этого изображения.

Замечание. 1.2.

Если $s \to \infty$, $s = \operatorname{Re} p$, то $\dfrac{M}{s - s_0} = 0$, т.е. $\lim\limits_{p \to \infty} F(p) = 0$ иначе говоря, если изображение $F(p)$ аналитично в бесконечно удаленной точке, то оно обязательно имеет там нуль.

Основные свойства преобразования Лапласа.

I. Свойство линейности.

Если $f(t) \risingdotseq F(p),\ \varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$ и a, b – любые постоянные,

то $a f(t) + b\varphi(t) \risingdotseq a F(p) + b\Phi(p)$

II. Свойство подобия .

Если $f(t) \risingdotseq F(p),$ то для любого $\omega > 0$ $f(\omega t) \risingdotseq \dfrac{1}{\omega} F\left(\dfrac{p}{\omega}\right)$

III. Дифференцирование оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p),$ и $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ – оригиналы, то

$$f'(t) \risingdotseq p F(p) - f(0), \qquad (1.2)$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2 F(p) - p f(0) - f'(0),\ \ldots,$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

IV. Интегрирование оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$ (1.3)

Операции интегрирования в пространстве оригиналов соответствует операция деления в пространстве изображений.

V. Дифференцирование изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$,

то $F'(p) \risingdotseq (-t)\,f(t),\ F''(p) \risingdotseq (-t)^2 f(t),\ \ldots,\ F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t)$ (1.4)

Дифференцированию в пространстве изображений соответствует операция умножения оригинала на аргумент с отрицательным знаком в пространстве оригиналов.

VI. Интегрирование изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\dfrac{f(t)}{t}$ – оригинал, а интеграл $\int\limits_p^\infty F(z)dz$ сходится, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(z)\,dz \qquad (1.5)$$

операции деления на аргумент в пространстве оригиналов соответствует операция интегрирования в пределах от p до ∞ в пространстве изображений.

Следствие

$$\boxed{\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt \risingdotseq \int\limits_0^\infty F(z)\,dz} \qquad (1.5^*)$$

VII. Смещение в аргументе изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, и α – комплексное число, то

$$e^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p+\alpha) \tag{1.6}$$

VIII. Смещение в аргументе оригинала (запаздывание)

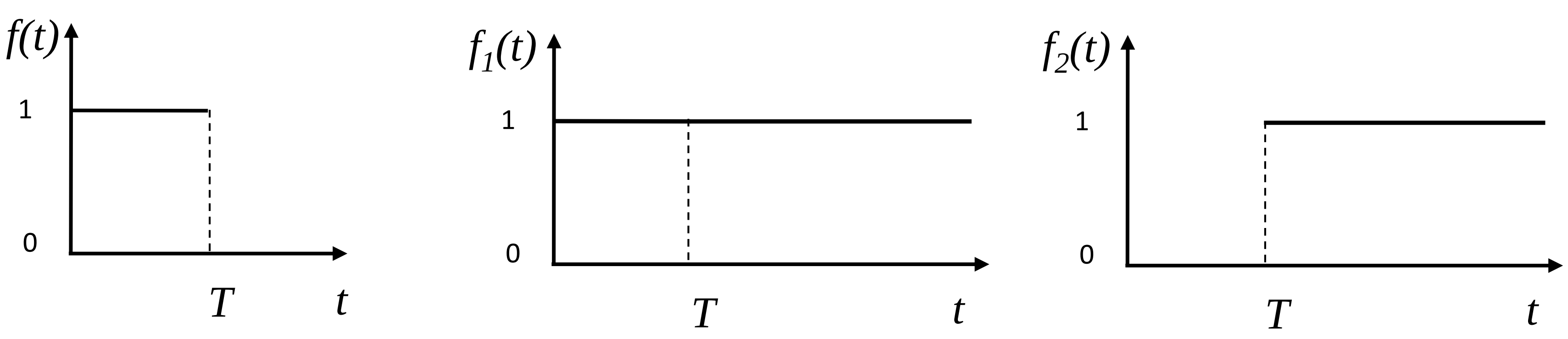
Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, и $f(t-a) = 0$ при значениях $t < a$, то для всякого $a > 0$

$$f(t-a) \risingdotseq e^{-pa} F(p) \qquad (1.8)$$

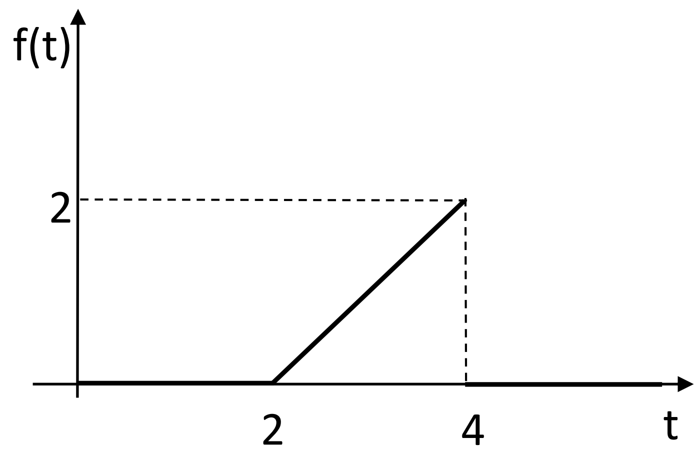
если процесс в простр. оригинала опаздывает на время a по сравнению с первоначальным t то изображение умножается на функцию e^{-pa}

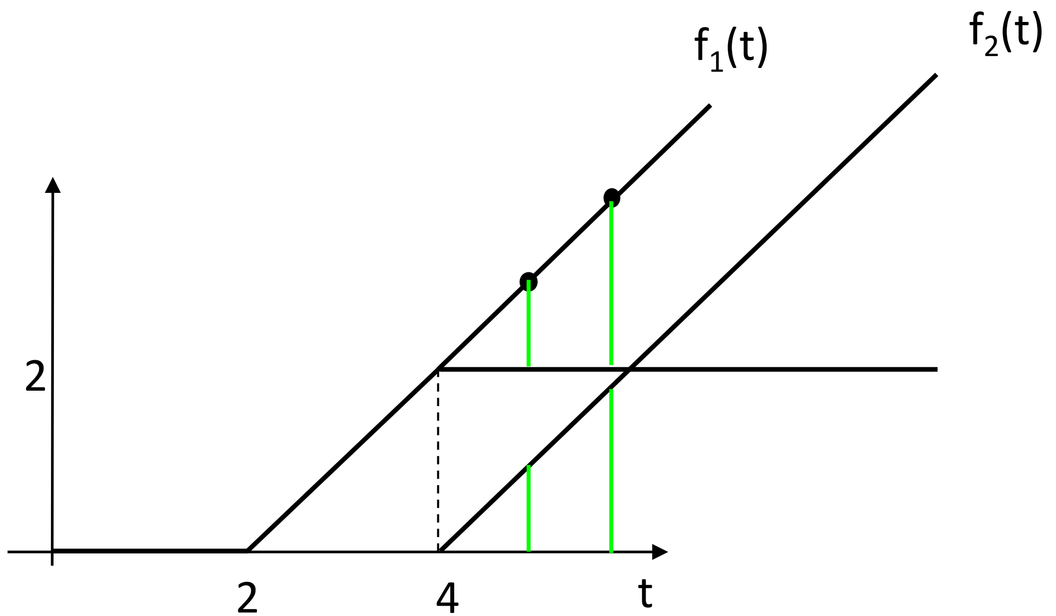
Опр. 3. Ступенчатые функции – это кусочно-непрерывные функции, которые на каждом участке непрерывности имеют постоянные значения.

Пример некоторых ступенчатых функций



Пример. Оригинал $f(t)$ задан графически. Найти его изображение.





IX. Изображение периодического оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, и $f(t)$ – периодическая функция с периодом $T > 0$, то

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt \qquad (1.9)$$

X. Свёртка функций. Теорема умножения

Пусть $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны для значений $t > 0$.
Свёрткой этих функций называется интеграл

$$f * \varphi = \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi(t-\tau) d\tau \qquad (1.10)$$

Теорема 1.2.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то произведение изображений $F(p) \cdot \Phi(p)$ является изображением свёртки оригиналов:

$$F(p) \cdot \Phi(p) \risingdotseq f(t) * \varphi(t) \qquad (1.11)$$

умножение изображений равносильно свёртыванию оригиналов этих изображений

XI. Интеграл Дюамеля

Если $f(t) \risingdotseq F(p),\ \varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то

$$p \cdot F(p) \cdot \Phi(p) \risingdotseq f(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau) f'(t-\tau)d\tau \qquad (1.12)$$

Замечание

В силу симметричности операции свертки $f(t) * \varphi(t) = \varphi(t) * f(t)$

$$f(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau) f'(t-\tau)d\tau = f(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(t-\tau) f'(\tau)d\tau$$

IX. Изображение периодического оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, и $f(t)$ – периодическая функция с периодом $T > 0$, то

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt \qquad (1.9)$$

X. Свёртка функций. Теорема умножения

Пусть $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны для значений $t > 0$.
Свёрткой этих функций называется интеграл

$$f * \varphi = \int_0^t f(\tau) \cdot \varphi(t-\tau) d\tau \qquad (1.10)$$

Теорема 1.2.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то произведение изображений $F(p) \cdot \Phi(p)$ является изображением свёртки оригиналов:

$$F(p) \cdot \Phi(p) \risingdotseq f(t) * \varphi(t) \qquad (1.11)$$

умножение изображений равносильно свёртыванию оригиналов этих изображений

XI. Интеграл Дюамеля

Если $f(t) \risingdotseq F(p),\ \varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$, то

$$p \cdot F(p) \cdot \Phi(p) \risingdotseq f(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau) f'(t-\tau)d\tau \qquad (1.12)$$

Замечание

В силу симметричности операции свертки $f(t) * \varphi(t) = \varphi(t) * f(t)$

$$f(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(\tau) f'(t-\tau)d\tau = f(0)\varphi(t) + \int_0^t \varphi(t-\tau) f'(\tau)d\tau$$

Таблица оригиналов и изображений

№	$f(t)$	$F(p)$	№	$f(t)$	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$	6	$ch(\beta t)$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$
2	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	7	$sh(\beta t)$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$
3	$e^{\alpha t}$	$\dfrac{1}{p-\alpha}$	8	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$
4	$cos(\beta t)$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	9	$\sqrt{t}$	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$
5	$sin(\beta t)$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	10	$-\ln t - C$	$\dfrac{\ln p}{p}$

Нахождение оригинала по изображению

Теорема 2.1. (единственности).

Если функция $F(p)$ является изображением оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы равны во всех точках t, где функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны

I. Линейная комбинация.

II. Представление изображение рядом.

Теорема 2.2. (Первая теорема разложения).

Если функция $F(p)$ аналитическая в бесконечно удалённой точке $p=\infty$ и разложение её в ряд Лорана в окрестности указанной точки имеет вид:

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\frac{a_2}{p^3}+\ldots\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}}$$

то $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, определяемого степенным рядом

$$f(t)=a_0+\frac{a_1}{1!}t+\frac{a_2}{2!}t^2+\ldots+\frac{a_n}{n!}t^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n \qquad (2.1)$$

сходящимся для всех $t>0$

Теорема 2.3. (Вторая теорема разложения).

Если $F(p)=\dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$ – правильная несократимая рациональная дробь,

и знаменатель имеет корни $p_1, p_2, \ldots, p_k$ кратностей $r_1, r_2, \ldots, r_k$ ($r_1 + r_2 + \ldots + r_k = n$), то оригиналом служит функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{e}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\left[(p-p_k)^{r_k}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}e^{p_k t}\right]_p^{(r_k-1)} \qquad (2.2)$$

В частности

есть простой корень

$$\lim_{p\to p_s}(p-p_s)\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\cdot e^{pt} \qquad (2.3)$$

все корни знаменателя простые

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)}e^{p_k t} \qquad (2.3^*)$$

Теорема 2.4. (Теорема обращения).

Если функция $f(t)$ –оригинал с показателем роста s_0 , и $F(p)$ – её изображение, то в любой точке непрерывности $f(t)$ имеет место формула

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c} F(p) \cdot e^{pt} dp \qquad (2.4)$$

где C – любая прямая, параллельная мнимой оси и отстоящая от неё на расстоянии $s > s_0$.

Замечание. Так как интеграл вычисляется по прямой, то формулу (2.4) записывают в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp \qquad (2.5)$$

и называют формулой обращения преобразования Лапласа

Условия изображения

Функция $F\ (p\ )$ будет изображением оригинала, если:

а) $F(\ p\ )-$ аналитическая функция в полуплоскости $Re\ p = s > s_0$, где s_0 – некоторое положительное число;

б) $F\ (\ p\ ) \longrightarrow 0$ при значениях $Re\ p = s > s_0$ и $|\ p\ | \longrightarrow \infty$;

в) сходится интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left| F\left(s + i\omega\right) \right| d\omega$

Пусть изображение $F\ (\ p\ )$ есть аналитическая функция всюду кроме конечного числа изолированных особых точек: и $p_1, p_2, \ldots, p_k$ $\lim\limits_{p\to\infty} F\left(p\right) = 0$

тогда при всех $t > 0$

$$f\,(t) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)\cdot e^{p\,t} dp \ = \sum_{k=1}^{n} res\,[F\,(p_k)e^{p_k\,t}] \qquad (\ 2.5\ )$$

Приложение операционного исчисления к решению дифференциальных и интегральных уравнений и систем

Решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t), \qquad x(0)=x_0, \quad x'(0) = x'_0$$

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p), \; f(t) \risingdotseq F(p)$

операторное уравнение относительно $X(p)$

$$p^2 X - px_0 - x'_0 + a_1 [pX - x_0] + a_2 X = F(p)$$

$$X(p) = \frac{px_0 + x'_0 + a_1 x_0 + F(p)}{p^2 + a_1 p + a_2} \risingdotseq x(t)$$

Замечание. Полученное решение $x(t)$ справедливо при $t \geq 0$. .

Использование интеграла Дюамеля

Пусть $$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t)$$

при нулевых н. у. $x(0)=0,\ x'(0)=0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=0$

Решение в пространстве изображений $$X(p) = \frac{F(p)}{D_n(p)} \qquad (*)$$

где $F(p) \risingdotseq f(t),\quad D_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$

Рассмотрим $$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = \eta(t)$$ при тех же н. у.

Решение в пространстве изображений $$Y(p) = \frac{1}{p \cdot D_n(p)} \Rightarrow pY(p) = \frac{1}{D_n(p)}$$

На основании (*) $$X = pF \cdot Y$$ Используя формулу Дюамеля, имеем

$$x(t) = f(t) \cdot y(0) + \int_0^t f(t) \cdot y'(t-\tau)\, d\tau$$

где $y(t) \risingdotseq Y(p)$, решение вспомогательного уравнения.

С учётом н. у. $$x(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot y'(t-\tau)\, d\tau$$

Интегральное уравнение – уравнение Вольтера типа свертки

Уравнении вида

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)\,dt \qquad (*)$$

называется уравнением Вольтерра типа свертки.

Пусть $F(p) \risingdotseq f(x), \quad \Phi(p) \risingdotseq \varphi(x), L(p) \risingdotseq K(x)$

Тогда операторное уравнение $\Phi(p) = F(p) + L(p)\Phi(p)$

Решение в пространстве изображений $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{1 - L(p)}$

Дискретные преобразования

Z – преобразование

Пусть дана последовательность действительных или комплексных чисел

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots = \{a_n\}$$

ОПР 1. Z – преобразованием последовательности $\{ a_n \}$ называется функция комплексного переменного $F(z)$, определенная рядом

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots \qquad (4.1)$$

Обозначают $\mathcal{F}[\{a_n\}]$

Условие сходимости: если $|a_n| \leq M e^{\alpha n}$, (4.2)

то (4.1) сходится при $|z| > R$, где $R = e^{\alpha}$

Тогда $F(z)$ аналитическая ф. и (4.1) – ее ряд Лорана.

$z = \infty$ - правильная точка $F(\infty) = a_0$.

D – преобразование

Введем новую переменную в (4.1) $z = e^{q}$, обозначим $F(z) = F(q)$. Тогда

$$F(q) = a_0 + a_1 e^{-q} + a_2 e^{-2q} + \ldots + a_n e^{-nq} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nq} \qquad (4.3)$$

ОПР 2. Функция $F(q)$ называется дискретным преобразованием Лапласа (D – преобразование) последовательности $\{a_n\}$

ОПР 3. Рассмотрим функцию $f(t),\quad t \in R, t \geq 0$ Будем предавать переменной t только целые значения. Полученная последовательность $\{f(n)\}$ называется решетчатой функцией.

Обозначают просто $f(n)$

Говорят: всякая функция – оригинал $f(t)$ «порождает» решетчатую функцию $f(n)$ для которой определено дискретное преобразование Лапласа

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-nq} \qquad (4.4)$$

Записывают: $f(n) \risingdotseq F(q)$ или $f(n) \div F(q)$

Условия существования оригинала (из сходимости ряда (4.1))

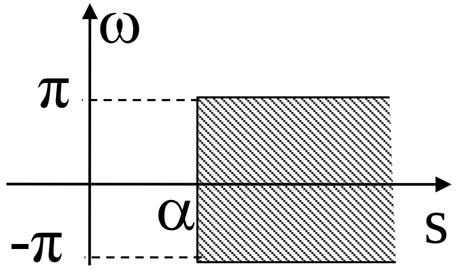
$f(n)$ определена для $n = 0, 1, 2, \dots$ и $f(n) = 0$ для $n = -1, -2, \dots$

$$|f(n)| \le M e^{\alpha n}$$

Условия существования изображения

1. $z = e^{q} = e^{q+2\pi k i} \Rightarrow F(q)$ – периодическая с мнимым периодом $2\pi i$ *2.* из сходимости z – преобразования: $|z| > e^{\alpha} \Rightarrow |z| = |e^{q}| = |e^{s+iw}| > e^{\alpha} \Rightarrow$ $F(q)$ аналитична в полуплоскости $s > \alpha$

Из 1) и 2) $F(q)$ аналитична в полуполосе $\begin{cases} -\pi < w < \pi \\ s > \alpha \end{cases}$



Свойства дискретного преобразования Лапласа

Пусть решетчатые функции $f(n)$ и $g(n)$ – оригиналы и

$$f(n) \risingdotseq F(q) \qquad g(n) \risingdotseq G(q)$$

1. Свойство линейности

$a\,f(n) + b\,\varphi(n) \risingdotseq a\,F(q) + b\,\Phi(q)$. Доказательство – из определения

2. Свойство затухания (смещение в аргументе изображения)

$e^{\alpha n} f(n) \risingdotseq F(q-\alpha)$. Доказательство – из определения (4.5)

3. Свойство запаздывания и опережения (смещение в аргументе оригинала)

$$f(n-k) \risingdotseq e^{-qk} F(q) \tag{4.6}$$

$$f(n+k) \risingdotseq e^{qk}\left[F(q) - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-qm}\right] \tag{4.6*}$$

4. Свойство дифференцирования изображения

$$-n\,f(n) \;\risingdotseq\; F'(q)$$

в общем случае: $$(-n)^k f(n) \;\risingdotseq\; F^{(k)}(q) \qquad (4.7)$$

Доказательство – из возможности почленного дифференцирования ряда

5. Свойство интегрирования изображения

Пусть $f(0)=0$ и $\left.\dfrac{f(n)}{n}\right|_{n=0}=0$, тогда $$\frac{f(n)}{n} \;\risingdotseq\; \int_q^{\infty} F(q)\,dq \qquad (4.8)$$

В общем случае, если $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{f(t)}{t^k}=0$ то $$\frac{f(n)}{n^k} \;\risingdotseq\; \int_q^{\infty}\ldots\int_q^{\infty} F(q)\,dq\ldots dq$$

Конечные разности

Пусть $f(t)$ – заданная функция,

$\Delta t = h$ – фиксированное приращение (шаг) по t

ОПР 4. Первой разностью, или разностью первого порядка называется выражение

$$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t) \tag{4.9}$$

для решетчатой функции $f(n)$ $h = 1$, т.е. $\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$

Для решетчатой функции $f(n)$ конечные разности играют роль производных

6. Изображение разностей решетчатой функции.

Если $f(n) \risingdotseq F(q)$, то $\Delta f(n) \risingdotseq (e^q - 1)F(q) - e^q f(0)$ (4.10)

ОПР 5. Суммой решетчатой функции $f(n)$ называется решетчатая функция $g(n)$, определенная следующим образом:

$$g(0) = 0 \qquad g(n) = \sum_{k=0}^{n-1} f(k)\ , \ (n=1,2,\ldots) \tag{4.11}$$

7. Изображение суммы решетчатой функции

Если $f(n) \risingdotseq F(q)$, то $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \risingdotseq \frac{F(q)}{e^q - 1}$ (4.12)

ОПР 6. Сверткой решетчатых функций $f(n)$ и $g(n)$ называется

$$f(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k)g(k) \tag{4.13}$$

8. Теорема умножения изображений.

Произведению изображений соответствует свертка оригиналов

$$f(n) * g(n) = F(q) \cdot G(q) \tag{4.14}$$

Переход от изображения к оригиналу

Функция-изображение – рациональная функция от e^q

$$F(q) = \frac{C(q)}{B(q)} = \frac{c_0 e^{qm} + c_1 e^{q(m-1)} + \ldots + c_m}{b_0 e^{qr} + b_1 e^{q(r-1)} + \ldots + b_r} \qquad (4.15)$$

В терминах z - преобразования $(\, e^{q} = z \,)$ эта формула имеет вид:

$$F(z) = \frac{C(z)}{B(z)} = \frac{c_0 z^{m} + c_1 z^{(m-1)} + \ldots + c_m}{b_0 z^{r} + b_1 z^{(r-1)} + \ldots + b_r} \qquad (4.15^*)$$

причем $m < r$ так как $z = \infty$ – правильная точка для $F(z)$

Если $m = r$ то можно выделить целую часть и $F(z) = a_0 = f(0)$

(из определения Z- преобразования (4.1) $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = a_0 \neq f(0)$

Вспомним формулы для вычисления коэффициентов ряда Лорана

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C'} \frac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}} \qquad c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} f(t)(t-a)^{n-1}dt \qquad 8.2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} F(z) z^{n-1} dz \qquad (4.16)$$

$$f(n) = \sum_{k=1}^{l} \operatorname*{Res}_{z=z_k} \left[F(z) \cdot z^{n-1} \right] \qquad (4.17)$$

где

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} \left[F(z) \cdot z^{n-1} \right] = \frac{1}{(\gamma-1)!} \lim_{z \to z_k} \frac{d^{\gamma-1}}{dz^{\gamma-1}} \left[F(z) \cdot (z-z_k)^{\gamma} \cdot z^{n-1} \right] \qquad (4.18)$$

Решение разностных уравнений

ОПР 7. Уравнение вида

$$\Phi[n,\ f(n),\ f(n+1),\ldots,\ f(n+k)] = 0 \qquad (4.19)$$

или

$$\overline{\Phi}[n,\ f(n),\Delta f(n),\ldots,\Delta^k f(n)] = 0 \qquad (4.19^*)$$

где $f(n)$ – искомая решетчатая функция, называется разностным уравнением или уравнением в конечных разностях.

Линейное разностное уравнение *k*-го порядка с постоянными коэффициентами

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \ldots + a_k f(n) = \varphi(n) \qquad (4.20)$$

здесь $f(n)$ – искомая, $\varphi(n)$ – заданная решетчатая функция .

Если $\varphi(n) = 0$ (4.20) – однородное, при $\varphi(n) \neq 0$ (4.20) – не однородное.

Для перехода в пространство изображения для уравнения вида (4.19) используется свойство (4.6) – смещение в аргументе оригинала

$$f(n+k) \doteqdot e^{qk}\left[F(q) - \sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-qm}\right] \qquad (4.6^*)$$

Для перехода в пространство изображения для уравнения вида (4.19*) используется свойство (4.10) – изображение конечных разностей

$$\Delta^k f(n) \doteqdot (e^q - 1)^k F(q) - e^q\left[(e^q-1)^{k-1} f(0) + (e^q-1)^{k-2}\Delta f(0) + \ldots + (e^q-1)\Delta^{k-2} f(0) + \Delta^{k-1} f(0)\right]$$

Спасибо за внимание