Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Дифференциальные уравнения и системы. (Пр.1)

Виды дифференциальных уравнений

Уравнения 1-го порядка

1. Уравнения с разделяющимися переменными
2. Однородные уравнения
3. Линейные уравнения
4. Уравнения Бернулли
5. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнения высших порядков

1. Уравнения, допускающие понижение порядка
2. Линейные уравнения высших порядков
   а) однородные
   б) неоднородные
   в) неоднородные уравнения с правой частью специального вида

Системы дифференциальных уравнений

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, которое связывает независимую переменную, искомую функцию и производные искомой функции.

П о р я д о к дифференциального уравнения определяется порядком старшей производной, входящей в уравнение.

Дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее первую производную

$$y' = f(x; y)$$

$$y' + y = x \cdot \sqrt{y},$$

$$y'' + 4y = \cos 2x$$

$$(5x - 4y)dx + (3x + 2y)dy = 0$$

$$y''' + 2y'' - 3y' = 2x \cdot e^{2x}$$

Формы записи дифференциального уравнения 1-го порядка:

$y' = f(x;y)$ – явная,

$F(x;y;y') = 0$ – неявная,

$M(x;y)dx + N(x;y)dy = 0$ – дифференциальная.

Например:

$y' = y^2 - 2y$ – явная,

$x^2y' - 2xy + 1 = 0$ – неявная,

$(x^2 - y^2)dy - (2xy - 1)dx = 0$ – дифференциальная.

Нахождение решения дифференциального уравнения называется его интегрированием

Метод решения уравнения определяется типом уравнения.

Р е ш е н и е м дифференциального уравнения называется любая дифференцируемая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в уравнение *обращает его в тождество.*

Общим интегралом уравнения называется его решение, полученное в неявном виде.

Каждое дифференциальное уравнение первого порядка имеет бесконечное множество решений.
Все это множество можно описать одной функцией, которая называется *общим решением* или *общим интегралом* дифференциального уравнения.
Из этого множества можно выбрать конкретное (частное) решение, если задать начальное условие.

Н а ч а л ь н ы м у с л о в и е м для уравнения первого порядка является задание значения искомой функции при заданном значении независимой переменной, т.е. $y(x_0) = y_0.$

О б щ и м решением дифференциального уравнения 1-го порядка называется функция $y = y(x;C),$

З а д а ч а К о ш и -- нахождение частного решения, удовлетворяющего заданному начальному условию.

Основные типы уравнений 1-го порядка

Уравнение с разделенными переменными – это уравнение вида

$$f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0,$$

множителем при dx является функция x, а множителем при dy является функция y.

Решение таких уравнений заключается в почленном интегрировании левой и правой его частей

$$\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy = C.$$

- $1.\ \cos x\,dx = \sqrt{y}\,dy.$

$$\int \cos x\,dx = \int \sqrt{y}\,dy.$$

$$\sin x + C = \frac{2}{3}y^{3/2},\ \Rightarrow\ y = [\frac{3}{2}(\sin x + C)]^{2/3}.$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Это уравнения вида

$$y' = f_1(x)\cdot f_2(y) \quad \text{или} \quad y' = \frac{f_1(x)}{f_2(y)} \quad \text{или} \quad y' = \frac{f_2(y)}{f_1(x)}.$$

В уравнении с разделяющимися переменными правая часть представляет собой, или может быть представлена в виде произведения (или отношения) двух функций, одна из которых зависит только от x *, а другая -- только от* y.

Если уравнение изначально задано в дифференциальной форме

$$M(x;y)\,dx + N(x;y)\,dy = 0,$$

то оно будет уравнением с разделяющимися переменными, если его можно представить в виде

$$f_1(x)\,f_2(y)\,dx + g_1(x)\,g_2(y)\,dy = 0.$$

- 1. $y' = (3y+5)ctg\ x.$

1) Заменяем y': $y' = dy/dx.$

$$\frac{dy}{dx} = (3y+5)ctg\ x,$$

2) Умножаем обе части уравнения на dx

$$dy = (3y+5)ctg\ x\,dx.$$

3) Делим на "стоящую не у своего дифференциала" функцию $(3y+5),$

$$\frac{dy}{3y+5} = ctg\ x\,dx.$$

4) Интегрируем обе части уравнения $\int \frac{dy}{3y+5} = \int \mathrm{ctg}\, x\,dx + C,$

$$\frac{1}{3}\ln|3y+5| = \ln|\sin x| + \ln C$$

$\sqrt[3]{3y+5} = C \cdot \sin x$ - общий интеграл уравнения

- 2. $7^{x^2+y}\cdot y'+2x=0.$

1) Используя свойство показательной функции $a^{x+y}=a^x a^y$

и, заменяя $y'=\dfrac{dy}{dx},$ получим $7^{x^2}\cdot 7^y\cdot\dfrac{dy}{dx}+2x=0.$

2) Переносим $2x$ в правую часть, умножаем на dx и делим на $7^{x^2}.$

$$7^{x^2}\cdot 7^y\cdot\frac{dy}{dx}=-2x. \qquad 7^y\,dy=-7^{-x^2}2x\,dx.$$

3) Интегрируем и получаем общий интеграл

$$\int 7^y\,dy=\int 7^{-x^2}\,d(-x^2), \qquad \frac{7^y}{\ln 7}=\frac{7^{-x^2}}{\ln 7}+\frac{C}{\ln 7}.$$

Или, окончательно $7^y=7^{-x^2}+C.$

- 3. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$

1) Собираем слагаемые с dx одну часть уравнения, а слагаемые с dy в другую.

$$6xdx + 2xy^2dx = 6ydy + 3x^2ydy,$$

2) Выносим dx и dy за скобки. $(6x + 2xy^2)dx = (6y + 3x^2y)dy,$

3) Выносим $2x$ и $3y$ за скобки и получаем

$$2x(3 + y^2)dx = 3y(2 + x^2)dy,$$

делим на произведение $(2 + x^2)(3 + y^2)$ т.е. функций, «стоящих не у своих дифференциалов», и интегрируем

$$\frac{2x}{2 + x^2}dx = \frac{3y}{3 + y^2}dy, \quad \int \frac{2x}{2 + x^2}dx = \int \frac{3y}{3 + y^2}dy,$$

$$\ln|x^2 + 2| = \frac{3}{2}\ln|3 + y^2| + \ln C.$$

Ответ:

$$x^2 + 2 = C\sqrt{(3 + y^2)^3}.$$

- 4. $y\,y'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$

$$1)\; y'=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2)\; \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

$$3)\; dy=-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$4)\; -\frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$4)\; \sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C.$$

$$y=\pm\sqrt{1-(\arcsin x+C)^2}$$

Рассмотрим пример нахождения частного решения уравнения по заданному начальному условию.

- Решить задачу Коши $y' + 2y - y^2 = 0, \quad y(0) = -1/4.$

1) Находим сначала общее решение уравнения:

$$y' = y^2 - 2y, \quad \frac{dy}{dx} = (y^2 - 2y), \quad \frac{dy}{y^2 - 2y} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{y^2 - 2y} = \int dx, \quad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-2}{y}\right| = x + \frac{1}{2}\ln C.$$

Общее решение $\dfrac{y-2}{y} = Ce^{2x}. \quad 1 - \dfrac{2}{y} = Ce^{2x}, \quad \dfrac{2}{y} = 1 - Ce^{2x},$

2) Определим значение константы $C,$ исходя из начального условия.

Подставим в общее решение значения $x = 0, \; y = -1/4.$

$$\frac{-1/4 - 2}{-1/4} = C\,e^0, \quad 9 = C.$$

3) Полученное значение $C,$ подставляем в выражение для общего решения и записываем частное решение: $\dfrac{2}{y} = 1 - 9e^{2x}.$

Однородные уравнения 1-го порядка

О п р е д е л е н и е. *Дифференциальное уравнение*

$$y' = f(x; y)$$

называется однородным, если его правая часть есть однородная функция своих аргументов

$$f(x; y) = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Т.е. уравнение первого порядка будет являться однородным, если его можно представить в виде

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Как определить, что уравнение является однородным?

Возможны две основные ситуации:

Первая:

1. $x\,y' - y = x\sqrt[x]{e^{y}} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{y}{x} + e^{y/x}$

2. $y - x\,y' = x\,\mathrm{arctg}\,(y/x) \Rightarrow \dfrac{y}{x} - y' = \mathrm{arctg}\,(y/x), \qquad y' = \dfrac{y}{x} + \mathrm{arctg}\,(y/x).$

3. $x\,y' - y = (x+y)\ln\dfrac{x+y}{x} \Rightarrow y' - \dfrac{y}{x} = \left(1+\dfrac{y}{x}\right)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)$

Т.о. к однородным могут относиться уравнения, в которых отношения $\dfrac{y}{x}$ стоят под знаком какой-либо функции.

Вторая:

1. $(x+y)\,dy - (x-y)\,dx = 0.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\frac{x}{x} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{y}{x}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1 - y/x}{1 + y/x}$$

$$2.\ (x^2 y + y^3)\,dx + (x^3 - xy^2)\,dy = 0.$$

$$(x^2 y + y^3) + (x^3 - xy^2)\,y' = 0, \Rightarrow \quad y' = -\frac{x^2 y + y^3}{x^3 - xy^2}.$$

Все слагаемые числителя и знаменателя имеют третью степень, разделим на x^3

$$y' = -\frac{\dfrac{x^2 y}{x^3} + \dfrac{y^3}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3} - \dfrac{xy^2}{x^3}} \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{y/x + (y/x)^3}{1 - (y/x)^2}$$

Т.о. к однородным относятся дифференциальные уравнения, правая часть которых является отношением двух многочленов, причем все члены числителя и знаменателя имеют одинаковую суммарную степень переменных.

Тогда после деления числителя и знаменателя дроби на $x,\ x^2,\ x^3$ останутся только постоянные числа и отношения y/x в разных степенях.

РЕШЕНИЕ однородных уравнений

Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $\frac{y}{x} = t(x).$

$$\frac{y}{x} = t(x), \quad y = t(x) \cdot x, \quad y' = t' \cdot x + t,$$

- 1. $y' = \frac{y^2}{x^2} + \frac{3y}{x} + 2.$ Уравнение однородное и не требует никаких предварительных преобразований

1) Делаем замену $\frac{y}{x} = t(x)$ и все преобразования, которые необходимы

$$t' \cdot x + t = t^2 + 3t + 2, \qquad t' \cdot x = t^2 + 2t + 2,$$

2) Разделяем переменные.

$$x \cdot \frac{dt}{dx} = (t^2 + 2t + 2), \qquad \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \frac{dx}{x}.$$

3) Интегрируем обе части выражения.

$$\int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\mathrm{a}rctg\,(t+1) = \ln|x| + \ln C$$

4) Делаем обратную замену

$$\mathrm{a}rctg\,(\frac{y}{x}+1) = \ln(C\,x).$$

$$y = x[\mathrm{t}g(\ln(C\,x)-1].$$

Получили общее решение уравнения.

- 2. $(x^2 - x\,y)\,dy + y^2\,dx = 0.$

1) Разделим на dx и выразим в явном виде y',

затем разделим числитель и знаменатель правой части уравнение

на x^2. $(x^2 - x\,y)\,y' + y^2 = 0, y' = -\dfrac{y^2}{x^2 - xy}, \quad y' = \dfrac{y^2/x^2}{y/x - 1}.$

2) Сделаем замену $\dfrac{y}{x} = t(x), \quad y = t(x)\cdot x, \quad y' = t'\cdot x + t,$

Уравнение примет вид $t'x + t = \dfrac{t^2}{t-1}, \; t'x = \dfrac{t^2}{t-1} - t,$

$$t'\cdot x = \frac{t^2 - t^2 + t}{t-1}, \qquad x\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{t}{t-1}.$$

3) Разделяем переменные $\dfrac{(t-1)\,dt}{t} = \dfrac{dx}{x}, \quad (1 - \dfrac{1}{t})dt = \dfrac{dx}{x},$

4) Интегрируем $t - \ln|t| = \ln|x| + \ln C,$

5) Делаем обратную замену $\dfrac{y}{x} - \ln\dfrac{y}{x} = \ln(Cx),$

- 3. $x y' - y = \dfrac{x}{\cos\frac{y}{x}}$.

Уравнение однородное

Делаем замену

$$1)\, y' = \frac{1}{\cos\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}.$$

$$2)\, \frac{y}{x} = t, \quad y = t\,x, \quad y' = t'x + t.$$

$$3)\, t'\,x + t = \frac{1}{\cos t} + t, \qquad t'\,x = \frac{1}{\cos t}, \qquad x\,\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos t},$$

Разделяем переменные

$$\cos t\,dt = \frac{dx}{x}$$

$$4) \int \cos t\,dt = \int \frac{dx}{x},$$

$$5)\, \sin t = \ln|x| + C,$$

Общий интеграл

$$\underline{\sin\frac{y}{x} = \ln x + C.}$$

Линейные уравнения 1-го порядка

Уравнение 1-го порядка будет линейным, если искомая функция и ее производная входят в уравнение в первых степенях и не перемножаются.

Общий вид линейного уравнения

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Всякое линейное уравнение прежде, чем применять методы его решения, необходимо преобразовать к такому "классическому" виду.

Метод Бернулли (метод подстановки)

Этот метод позволяет с помощью подстановки $y = U(x) \cdot V(x)$

сводить любое линейное уравнение к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно функций $U(x)$ и $V(x)$.

- 1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

1) Решение уравнения ищем в виде произведения двух функций

$y = U(x) \cdot V(x).$ Тогда $y' = U' \cdot V + V' \cdot U$

2) Подставляем выражение для функции и ее производной в уравнение, группируем второе и третье слагаемые и выносим общий множитель

$$U'V + V'U + 2xUV = xe^{-x^2} \Rightarrow U'V + U(V' + 2xV) = xe^{-x^2}.$$

3) Функцию $V(x)$ ищем из условия, что выражение в скобках равно нулю. Тогда получаем систему двух дифференциальных уравнений для нахождения функций $U(x)$ и $V(x)$

$$\begin{cases} V' + 2xV = 0 \\ U'V = xe^{-x^2}. \end{cases}$$

4) Из 1-го уравнения находим функцию $V(x)$

$$V' + 2xV = 0,$$

$$\frac{dV}{dx} = -2xV,$$

$$\frac{dV}{V} = -2x\,dx,$$

$$\ln V = -x^2,$$

$$V = e^{-x^2}.$$

5) Полученное выражение для функции $V(x)$ подставляем во 2-е уравнение системы

$$U'V = xe^{-x^2}$$

и находим вторую функцию $U(x)$

$$U'e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

$$U' = x,$$

$$U = \int x\,dx,$$

$$U = \frac{x^2}{2} + C.$$

6) Записываем общее решение

$$\underline{y = U(x)V(x) = e^{-x^2}\left(x^2/2 + C\right)}.$$

- 2. $(xy' - 1)\ln x + 2y = 0.$

Преобразуем уравнение к классическому виду

$$xy' \cdot \ln x - \ln x + 2y = 0.$$

$$y' \cdot x\ln x + 2y = \ln x$$

$$y' + \frac{2}{x\ln x} \cdot y = \frac{\ln x}{x \cdot \ln x}$$

$$y' + \frac{2y}{x\ln x} = \frac{1}{x}.$$

Делаем замену

$$y = U(x) \cdot V(x). \qquad y' = U' \cdot V + V' \cdot U$$

$$U'V + V'U + \frac{2UV}{x\ln x} = \frac{1}{x} \Rightarrow U'V + U\left(V' + \frac{2V}{x\ln x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Составляем систему
$$\begin{cases} V' + \dfrac{2V}{x\ln x} = 0 \\ U'V = 1/x. \end{cases}$$

$$V' + \frac{2}{x\ln x}V = 0,$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{2}{x\ln x}dx,$$

$$\ln V = -2\ln\ln x,$$

$$V = \frac{1}{\ln^2 x}.$$

$$U'V = 1/x$$

$$U'\frac{1}{\ln^2 x} = \frac{1}{x},$$

$$\frac{dU}{dx} = \frac{\ln^2 x}{x},$$

$$U = \frac{\ln^3 x}{3} + C$$

Общее решение
$$y(x) = UV = \left(\frac{\ln^3 x}{3} + C\right)\frac{1}{\ln^2 x} = \underline{\frac{\ln x}{3} + \frac{C}{\ln^2 x}}.$$

Уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли- это уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^k$$

где $k -$ любое рациональное число, исключая случаи: $k = 0 \ , k = 1$

Уравнение Бернулли сводится к линейному, поэтому при решении конкретных примеров уравнение Бернулли решается так же как и линейное , т.е. рассмотренным выше методом Бернулли

- 1. $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\mathrm{t}g\ x}{x}\sqrt{y}.$

1) Решение уравнения ищем в виде:

$$y(x) = U(x)V(x); \qquad y' = U'V + V'U,$$

$$y' + \frac{2}{x} y = \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} \sqrt{y}.$$

$$2) U'V + UV' + \frac{2}{x} UV = \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} \sqrt{UV},$$

$$U'V + U\left(V' + \frac{2}{x} V\right) = \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} \sqrt{UV}.$$

3) Получаем систему

$$\begin{cases} V' + \frac{2}{x} V = 0 \\ U'V = \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} \sqrt{UV} \end{cases}$$

$$4) V' + \frac{2}{x} V,$$

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{2}{x},$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{2dx}{x},$$

$$\ln V = -2 \ln x,$$

$$V = \frac{1}{x^2}.$$

$$5) U' \frac{1}{x^2} = \frac{\mathrm{tg}\, x}{x} \sqrt{U \frac{1}{x^2}},$$

$$\frac{dU}{dx} = \mathrm{tg}\, x \sqrt{U}.$$

$$\frac{dU}{\sqrt{U}} = \mathrm{tg}\, x\, dx,$$

$$2\sqrt{U} = -\ln|\cos x| + 2\ln C$$

$$U(x) = \ln^2 \frac{C}{\sqrt{\cos x}}.$$

6) Общее решение

$$\underline{y(x) = UV = \frac{1}{x^2} \ln^2 \frac{C}{\sqrt{\cos x}}}.$$

2. Решить задачу Коши $y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 1.$

$$y(x) = U(x)V(x); \qquad y' = U'V + V'U$$

$$U' \cdot V + U \cdot V' + x \cdot U \cdot V = (1+x)e^{-x}y^2$$

$$U' \cdot V + U(V' + x \cdot V) = (1+x)e^{-x}U^2 \cdot V^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V' + xV = 0 \\ U' \cdot V = (1+x)e^{-x}U^2 \cdot V^2 \end{cases}$$

$$\frac{dV}{dx} = -xV$$

$$\frac{dV}{V} = -x \cdot dx$$

$$\int \frac{dV}{V} = -\int x dx$$

$$\ln V = -\frac{x^2}{2}$$

$$V = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$U' = (1+x)e^{-x}U^2 \cdot V$$

$$\frac{U'}{U^2} = (1+x)e^{-x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{dU}{U^2} = (1+x)e^{-x-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\int \frac{dU}{U^2} = \int (1+x)e^{-(x+\frac{x^2}{2})} \cdot dx = \int e^{-(x+\frac{x^2}{2})} \cdot d(x + \frac{x^2}{2})$$

$$-\frac{1}{U} = -e^{-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)} - C \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{e^{-\left(x+\frac{x^2}{2}\right)} + C}$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения

$$y = \frac{e^{-x^2/2}}{e^{-(x+x^2/2)} + C}.$$

Для получения частного решения подставим начальное условие в полученное общее решение

$$y(0) = 1$$

$$1 = \frac{e^0}{e^0 + C} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{1+C} \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Частное решение:

$$y = \frac{e^{-x^2/2}}{e^{-(x+x^2/2)}} = e^x.$$

З а м е ч а н и е. Дифференциальное уравнение может быть Линейным уравнением или уравнением Бернулли не только относительно переменной y, но и относительно x.

$$x' + P(y)x = Q(y). \qquad x' + P(y)x = Q(y)x^k.$$

Решение уравнения ищем в виде:

$$x(y) = U(y)V(y), \quad x' = U'V + V'U.$$

В остальном решение не отличается от стандартной ситуации.

Например, уравнение $e^{y^2}(dx - 2xy\,dy) = y\,dy$

не является линейным относительно y, но может быть приведено

к линейному относительно x.

$$e^{y^2}dx - 2xye^{y^2}dy = y\,dy,$$

Делим на dy

$$e^{y^2}\frac{dx}{dy} - 2xye^{y^2} = y,$$

Получаем линейное уравнение $x' - 2y\,x = ye^{-y^2}.$

Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $P(x;y)dx + Q(x;y)dy = 0$ *является уравнением в полных дифференциалах, если выполняется условие*

$$\frac{\partial P(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}.$$

Если условие выполняется, то левая часть уравнения есть полный дифференциал некоторой, пока неизвестной, функции $U(x,y)$,

т.е. $$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = d\,U(x;y).$$

Тогда, в соответствии с уравнением, $dU(x;y) = 0,$

и поэтому общий интеграл уравнения в полных дифференциалах запишется в виде $$U(x;y) = C.$$

Таким образом, решение уравнения сводится к нахождению функции $U(x,y)$

Для нахождения функции $U(x;y)$ сравним выражение для полного дифференциала функции двух переменных

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

с левой частью уравнения

$$dU = P(x;y)dx + Q(x;y)dy$$

Из этого сравнения видно, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x;y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y).$$

Эти соотношения используются для нахождения функции $U(x;y)$

- 1. $\left(3x^2y + 2y + 3\right)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)\,dy = 0.$

1) Проверяем условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y + 2y + 3\right) = 3x^2 + 2, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + 2x + 3y^2\right) = 3x^2 + 2.$$

Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

2) Находим функцию $U(x;y)$. Для этого интегрируем по x функцию $P(x;y)$. Переменная y при этом считается постоянной

$$U(x;y) = \int\left(3x^2 y + 2y + 3\right)dx = y \cdot \int 3x^2\,dx + 2y\int dx + 3\int dx =$$

$$= x^3 y + 2xy + 3x + \phi(y).$$

Здесь постоянная интегрирования записывается в виде функции $\phi(y)$ и эту функцию мы должны определить, используя для этого второе соотношение

$$\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x;y),$$

Полученное выражение для $U(x;y)$: $U(x;y) = x^3 y + 2xy + 3x + \phi(y)$ дифференцируем по переменной y и приравниваем к функции $Q(x;y)$.

$$U'_y(x;y) = \left(x^3 y + 2xy + 3x + \phi(y)\right)'_y = x^3 + 2x + \phi'_y$$

$$Q(x;y) = x^3 + 2x + 3y^2.$$

$$x^3 + 2x + \phi'_y = x^3 + 2x + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \phi'_y = 3y^2.$$

$$\phi(y) = \int 3y^2\, dy = y^3.$$

Тогда выражение для функции $U(x;y)$ примет вид

$$U(x;y) = x^3 y + 2xy + 3x + y^3,$$

и общий интеграл уравнения $U(x;y) = C$ или

$$x^3 y + y^3 + 2xy + 3x = C.$$

- 2. $(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0, \quad y(1)=1$

Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т.к.

$$\begin{cases} P'_y(x;y)=(3x^2+6xy^2)'_y=12xy, \\ Q'_x(x;y)=(6x^2y+4y^3)'_x=12xy, \end{cases} \Rightarrow \quad P'_y(x;y)=Q'_x(x;y)$$

Выполнение критерия означает, что существует некая функция

$U(x;y)$, для которой

$$\begin{cases} P(x;y)=3x^2+6xy^2=\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ Q(x;y)=6x^2y+4y^3=\dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

Из первого равенства, интегрируя по x, находим

$$U_1(x;y) = \int(3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2y^2,$$

Из второго равенства, интегрируя по y, находим

$$U_2(x;y) = \int(6x^2y + 4y^3)dy = 3x^2y^2 + y^4$$

Искомая функция

$U(x;y) = U_1 +$ (недостающие слагаемые из $U_2) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4$

Общий интеграл уравнения $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = c$

- 3. $xe^{y^2}dx+\left(x^2ye^{y^2}+\mathrm{tg}^2y\right)dy=0.$

Здесь $P(x;y)=xe^{y^2},\ \ Q(x;y)=x^2ye^{y^2}+\mathrm{tg}^2y.$

Проверяем критерий: $P'_y=2xye^{y^2},\ \ Q'_x=2xye^{y^2}.$

Частные производные равны. Данное уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Нужно найти функцию $U(x;y).$

Из $U'_x=P(x;y)=xe^{y^2}$ находим $U_1(x;y)=\int xe^{y^2}dx=\dfrac{x^2}{2}e^{y^2}.$

Из $U'_y=Q(x;y)=x^2ye^{y^2}+\mathrm{tg}^2y$ находим

$$U_2(x;y)=\int\left(x^2ye^{y^2}+\mathrm{tg}^2y\right)dy=x^2\frac{1}{2}e^{y^2}+\mathrm{tg}y-y.$$

вторая функция включает в себя первую, поэтому

$$U(x;y)=\frac{x^2}{2}e^{y^2}+\mathrm{tg}y-y.$$

Общий интеграл уравнения

$$\frac{x^2}{2}e^{y^2}+\mathrm{tg}y-y=C.$$

Уравнения высших порядков

Дифференциальным уравнением $2-$ *го порядка называется уравнение, которое содержит независимую переменную* x, *искомую функцию* y, *и ее производные 1-го и 2-го порядка.*

Уравнение $2-$го порядка может быть записано в явной форме

$$y'' = f(x; y; y'),$$

если оно разрешено относительно старшей производной

или в неявной

$$F(x; y; y'; y'') = 0.$$

Решением дифференциального уравнения $2-$ *го порядка называется любая дважды дифференцируемая функция* $y = y(x)$, *которая при подстановке в уравнение, обращает его в тождество.*

О б щ и м   р е ш е н и е м уравнения 2-го порядка называется функция

$$y = y(x; C_1; C_2)$$

Заметим, что количество констант в общем решении уравнения равно порядку уравнения.

З а д а ч а К о ш и для уравнения состоит в нахождении частного решения уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

Н а ч а л ь н ы м и у с л о в и я м и для уравнения $2-$ *го порядка являются задания значений искомой функции и ее производных при заданном значении* $x = x_0$.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Аналитический аппарат решения уравнений высшего порядка достаточно хорошо разработан для линейных уравнений. Нелинейные уравнения можно аналитически решить только, если удается понизить порядок уравнения до первого. Но понизить порядок уравнения возможно в следующих случаях.

Уравнения, допускающие понижение порядка

Тип I. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x).$

Решение такого уравнения находится путем последовательного интегрирования.

- 1. $y^{(4)} = \sin x - 2x.$

$$y''' = \int y^{(4)}\,dx = \int (\sin x - 2x)\,dx = -\cos x - x^2 + C_1.$$

$$y'' = \int y'''\,dx = \int (-\cos x - x^2 + C_1)\,dx = -\sin x - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2.$$

$$y' = \int y''\,dx = \int \left(-\sin x - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2\right) dx = \cos x - \frac{x^4}{12} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

$$y = \int y'\,dx = \int \left(\cos x - \frac{x^4}{12} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3\right) dx =$$

$$= \sin x - \frac{x^4}{60} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 -$$ общее решение уравнения

Тип II. $F(x; y'; y'') = 0.$

Уравнения второго порядка, не содержащие явно искомую функцию

Уравнения этого типа сводятся к уравнениям 1-го порядка с помощью подстановки

$$y' = z(x), \;\; y'' = (y')'_x = z'(x)$$

Уравнение примет вид $F(x; z(x); z'(x))=0,$ решая которое

находим сначала функцию $z(x, C_1) = y'_x,$

а затем, интегрируя эту функцию, находим искомую функцию

$$y(x; C_1; C_2)$$

$$y = \int y'_x \, dx = \int z(x; C_1) \, dx + C_2.$$

- 2. $y'' x \ln x - y' = 0.$

Уравнение второго порядка не содержит в явном виде функцию y

Делаем подстановку $y' = z(x),$ тогда $y'' = (y')'_x = z'(x).$

После подстановки получаем уравнение первого порядка

$$z' x \ln x - z = 0.$$

Это уравнение допускает разделение переменных

$$\frac{dz}{dx} x \ln x = z; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x \ln x}, \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x \ln x},$$

$$\ln|z| = \ln|\ln x| + \ln C_1, \quad z = C_1 \ln x.$$

Интегрируя, находим искомую функцию, т.е. получаем **общее решение**

$$y = \int y'_x\, dx = \int C_1 \ln x\, dx = C_1\, x(\ln x - 1) + C_2.$$

(Интеграл решался методом интегрирования по частям)

Тип III. Уравнения второго порядка вида $F(y; y'; y'') = 0.$

В уравнении отсутствует в явном виде независимая переменная x.

Порядок уравнения можно понизить до первого подстановкой

$$y'_x = p(y), \quad \text{тогда} \quad y''_{xx} = p'_y \cdot y'_x = p'_y \cdot p = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

- 3. $y'' - y'e^y = 0.$

$$y'' - y'e^y = 0 \Rightarrow \left| y'_x = p(y), \quad y'_x = p'_y\, p \right| \Rightarrow \begin{matrix} p'\,p - pe^y = 0 \quad \Rightarrow \\ p\,(p' - e^y) = 0. \end{matrix}$$

1) $p = 0, \quad y'_x = 0, \quad \underline{y = const}.$

2) $\dfrac{dp}{dy} = e^y \;\Rightarrow\; \int dp = \int e^y\, dy \;\Rightarrow\; p = e^y + C_1,$

$$y' = e^y + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^y + C_1 \Rightarrow \int \frac{dy}{e^y + C_1} = \int dx.$$

Интегрируя, получаем $\quad \dfrac{1}{C_1}\Big(y - \ln(C_1 + e^y)\Big) = x + C_2$

• 4. Решить задачу Коши $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \left| y'_x = p(y), \quad y'_x = p'_y\, p \right| \Rightarrow p'\, p = \frac{1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{dp}{dy}\, p = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$\int p\, dp = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{p^2}{2} = 2\sqrt{y} + \frac{C_1}{2} \Rightarrow p = \pm\sqrt{4\sqrt{y} + C_1}.$$

Так как $y'(0) = p(0) = 0$ и $y(0) = 0,$ то можно сразу найти C_1

$$0 = \pm\sqrt{4\sqrt{0} + C_1} \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Итак, имеем

$$y' = \pm\sqrt{4\sqrt{y} + 0} = \pm 2\sqrt[4]{y} \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm 2\sqrt[4]{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{2\sqrt[4]{y}} = \pm dx \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}\sqrt[4]{y^3} = \pm x + C_2.$$

Так как $y(0) = 0$, то $\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{0^3} = \pm 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$

Частное решение $x = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{y^3}.$ или $y = \left(\dfrac{3}{2}x\right)^{4/3}.$

Линейные уравнения *2* - го порядка

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение, в котором искомая функция $y(x)$ *и ее производные входят в первых степенях и не перемножаются.*

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка имеет вид

$$ay'' + b\,y' + c\,y = f(x).$$

Если $f(x) = 0,$ то уравнение называется о д н о р о д н ы м .

Если $f(x) \neq 0,$ то уравнение называется н е о д н о р о д н ы м .

Однородные линейные уравнения

Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения 2-го порядка

Если функции $y_1(x),\ y_2(x)$ *являются линейно независимыми решениями линейного однородного уравнения* $ay'' + b\,y' + c\,y = 0$ *то его общее решение является их линейной комбинацией*

$$Y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x).$$

Метод решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами – это метод Эйлера

Решение уравнения ищется в виде

$$y(x) = e^{kx} \;\Rightarrow\; y' = k \cdot e^{kx}, \quad y'' = k^2 \cdot e^{kx}.$$

После подстановки в уравнение получаем квадратное уравнение

$$ak^2 + b\,k + c = 0,$$

которое называется х а р а к т е р и с т и ч е с к и м уравнением

Характеристическое уравнение получается из данного дифференциального формальной заменой в нем

$$y'' \to k^2, \; y' \to k, \; y \to 1.$$

Формулы для нахождения корней квадратного уравнения

$$ak^2 + bk + c = 0 \qquad k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$k^2 + bk + c = 0 \qquad k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2},$$

$$ak^2 + 2bk + c = 0 \qquad k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

$$k^2 + 2bk + c = 0 \qquad k_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c}.$$

В зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ уравнения возможны три случая.

1. Если $D > 0$, уравнение имеет два различных действительных корня $k_1 \neq k_2$ и две линейно независимых функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$, из которых составляется общее решение однородного уравнения

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \qquad (1)$$

2. Если $D = 0$, уравнение имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2 = k$ и две линейно независимых функции $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ из которых составляется общее решение однородного уравнения

$$Y = e^{kx}(C_1 + C_2 x) \qquad (2)$$

3. Если $D < 0$,уравнение имеет пару комплексно-сопряженных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ и две линейно независимых функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ и общее решение уравнения имеет вид

$$Y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) \qquad (3)$$

- 1. $y'' - 3y' + 2y = 0.$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 1, \qquad (D > 0, \quad k_1 \neq k_2), \quad \underline{Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}.}$$

- 2. $2y'' + 5y' + 2y = 0.$

$$2y'' + 5y + 2y = 0 \Rightarrow 2k^2 + 5k + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5 \pm 3}{4} \Rightarrow k_1 = -1/2, \quad k_2 = -2,$$

$$(D > 0, \quad k_1 \neq k_2), \qquad Y = C_1 e^{-x/2} + C_2 e^{-2x}.$$

- 3. $y'' - 4y' = 0.$

$$y'' - y' = 40 \Rightarrow k^2 - 4k = 0 \Rightarrow k(k-4) = 0 \Rightarrow$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 4, \qquad (k_1 \neq k_2), \qquad Y = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

- 4. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-4} = -2,$$

или $(k+2)^2 = 0,\ \ k_1 = k_2 = -2,\quad (D=0),\quad Y = e^{-2x}(C_1 + C_2 x).$

- 5. $36y'' - 12y' + y = 0.$

$$36y'' - 12y' + y = 0 \Rightarrow 36k^2 - 12k + 1 = 0 \quad ,$$

или $(6k-1)^2 = 0,\ \ k_1 = k_2 = 1/6,\quad (D=0),\quad Y = e^{x/6}(C_1 + C_2 x).$

Рассмотрим случай отрицательного дискриминанта квадратного уравнения. Оно имеет в этом случае комплексно-сопряженные корни

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i.$$

Числа α и β – действительные, а i –мнимая единица, определяемая соотношением $i^2 = -1$ или $i = \pm\sqrt{-1}.$

Теперь можно записывать решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом:

$$x^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = -1 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \sqrt{-1} = \pm i, \;\; \alpha = 0, \; \beta = 1.$$

$$x^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = -4 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \sqrt{-4} = 2\sqrt{-1} = \pm 2i, \;\; \alpha = 0, \; \beta = 2.$$

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i, \;\; \alpha = -2, \; \beta = 1.$$

$$x^2 - x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i, \qquad \alpha = \frac{1}{2}, \; \beta = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

- 6. $y'' + 6y' + 13y = 0.$

$$y'' + 6y' + 13y = 0 \Rightarrow k^2 + 6k + 13 = 0 \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm 2i,$$

$$(D < 0, \quad k_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i), \qquad \alpha = -3, \ \beta = 2,$$

$$Y = e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

- 7. $y'' + 25y = 0.$

$$y'' + 25y = 0 \Rightarrow k^2 + 25 = 0 \Rightarrow k^2 = -25 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 5i,$$

$$(D < 0, \quad k_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i), \qquad \alpha = 0, \ \beta = 5,$$

$$Y = C_1 \cos 5x + C_1 \sin 5x.$$

- 8. $y'' - y' + y = 0.$

$$y'' - y' + y = 0 \Rightarrow k^2 - k + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i,$$

$$(D < 0, \quad k_{1,2} = \alpha \pm \beta\, i), \qquad \alpha = 1/2, \; \beta = \sqrt{3}/2,$$

$$Y = e^{x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Неоднородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнения вида $ay'' + b\,y' + c\,y = f(x),$

Теорема о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения.

Если Y^* *-- какое-либо частное решение данного неоднородного уравнения, а* $\overline{Y}$ *общее решение соответствующего однородного уравнения,*

то общее решение Y *неоднородного уравнения есть сумма*

$$Y = \overline{Y} + Y^*.$$

Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод позволяет находить частное решение неоднородного уравнения в случаях, когда правая часть уравнения имеет специальный вид $f(x) = e^{\alpha x}\left[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\right],$

где $P(x),\ Q(x) -$ многочлены.

Схема нахождения общего решения

1. Записываем и решаем соответствующее однородное уравнение $ay'' + by' + cy = 0 \Rightarrow \quad ak^2 + bk + c = 0.$ Находим корни и получаем общее решение однородного уравнения в виде

$$\overline{Y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

2. Находим частное решение неоднородного уравнения Y^*

Это частное решение должно повторять в общем виде выражение для правой части неоднородного уравнения $f(x)$.

3. Кроме того, определяем характерное число $z = \alpha \pm \beta i$
(в общем случае - комплексное), которое нужно сопоставить с корнями характеристического уравнения. При этом:

а) если это число не является корнем характеристического уравнения, то выражение для повторяет общий вид правой части уравнения,

б) если это число является однократным корнем характеристического уравнения, то это выражение необходимо умножить на X,

в) если это число является двукратным корнем характеристического уравнения, то выражение общего вида необходимо умножить на X^2.

4. После подстановки в уравнение и нахождения коэффициентов записываем выражение для Y^* и общее решение в виде

$$Y = \overline{Y} + Y^*.$$

Выражения для многочленов с неопределенными коэффициентами:

$A -$ многочлен нулевой степени,

$Ax + B -$ многочлен 1-ой степени,

$Ax^2 + Bx + C -$ многочлен 2-ой степени,

$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D -$ многочлен 3-ей степени и т.д.

Выражения для случая тригонометрических функций в правой части

$$A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

$$(Ax + B)\cos\beta x + (Cx + D)\sin\beta x$$

$$(Ax^2 + Bx + C)\cos\beta x + (Dx^2 + Ex + F)\sin\beta x$$

И т.п.

- 1. $y'' + 3y' + 2y = 3x.$

а) $y'' + 3y' + 2y = 0 \Rightarrow k^2 + 3k + 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = -2.$

$\overline{Y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ – общее решение однородного уравнения

б) $f(x) = 3x$

Проверяемое в этом случае число $z = \alpha \pm \beta i = 0$

не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение повторит в общем виде правую часть уравнения,

$$Y^* = Ax + B.$$

в) Общее решение:

$$Y = \overline{Y} + Y^* = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (Ax + B).$$

Неопределенные коэффициенты пока не нахдим.

- 2. $y'' - 4y' = 2x^2 - 1.$

a) $y'' - 4y' = 0, \Rightarrow k^2 - 4k = 0, \Rightarrow k_1 = 0, \quad k_2 = 4.$

$\overline{Y} = C_1 + C_2 e^{4x}$ – общее решение однородного уравнения

b) $f(x) = (2x^2 - 1)$

Проверяемое в этом случае число $z = \alpha \pm \beta i = 0$

совпадает с одним из корней характеристического уравнения, поэтому частное решение повторит в общем виде правую часть уравнения и дополнительно умножается на x^1

$Y^* = (Ax^2 + Bx + C) \cdot x$ – частное решение неоднородного уравнения

c) Общее решение:

$$Y = \overline{Y} + Y^* = C_1 + C_2 e^{4x} + (Ax^2 + Bx + C) \cdot x.$$

- 3. $y'' + y = 3e^x.$

a) $y'' + y = 0, \Rightarrow k^2 + 1 = 0, \Rightarrow k_{1,2} = \pm i.$

$\overline{Y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x -$ общее решение однородного уравнения

b) $f(x) = 3e^x$

Проверяемое в этом случае число $z = \alpha \pm \beta i = 1$

не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение повторит в общем виде правую часть уравнения

$$Y^* = A \cdot e^x.$$

c) Общее решение:

$$Y = \overline{Y} + Y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + Ae^x.$$

- 3. $y'' - 4y = (5x+1)e^{-2x}$.

a) $y'' - 4y = 0, \Rightarrow k^2 - 4 = 0, \Rightarrow k_1 = -2, \quad k_2 = 2.$

$\overline{Y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$ – общее решение однородного уравнения

b) $f(x) = (5x+1)e^{-2x}$

Проверяемое в этом случае число $z = \alpha \pm \beta i = \alpha = -2$

совпадает с одним из корней характеристического уравнения, поэтому частное решение, повторив в общем виде правую часть уравнения, дополнительно умножается на x

$Y^* = (Ax+B)e^{-2x} \cdot x$ – частное решение

Общее решение неоднородного уравнения

$$Y = \overline{Y} + Y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + (Ax+B) \cdot x e^{-2x}.$$

- 4. $y'' + 6y' + 9y = x^2 e^{-3x}.$

а) $y'' + 6y' + 9y = 0, \Rightarrow k^2 + 6k + 9 = 0, \Rightarrow k_1 = k_2 = -3.$

$\overline{Y} = (C_1 + C_2 x) e^{-3x} -$ общее решение однородного уравнения

б) $f(x) = x^2 e^{-3x}$

Проверяемое в этом случае число $\alpha = -3$

совпадает с обоими корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение, повторив в общем виде правую часть уравнения, дополнительно умножается на x^2

$$Y^* = (Ax^2 + Bx + C) e^{-3x} \cdot x^2.$$

Общее решение неоднородного уравнения

$$Y = \overline{Y} + Y^* = (C_1 + C_2 x) e^{-3x} + (Ax^2 + Bx + C) e^{-3x} \cdot x^2.$$

- 5. $y'' + 2y' = 3\cos 2x.$

a) $y'' + 2y' = 0, \Rightarrow k^2 + 2k = 0, \Rightarrow k_1 = 0, \quad k_2 = -2.$

$\overline{Y} = C_1 + C_2 e^{-2x}$ – общее решение однородного уравнения

b) $f(x) = 3\cos 2x$

Проверяемое в этом случае число $\pm\beta i = \pm 2i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение повторит в общем виде правую часть уравнения, т.е.

$$Y^* = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

c) Записываем общее решение неоднородного уравнения

$$Y = \overline{Y} + Y^* = C_1 + C_2 e^{-2x} + A\cos 2x + B\sin 2x.$$

- 6. $y'' + 16y = 2\sin 4x.$

a) $y'' + 16y = 0, \Rightarrow k^2 + 16 = 0, \Rightarrow k_1 = \pm 4i.$

$\overline{Y} = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$ общее решение однородного уравнения

b) $f(x) = x\sin x$

Проверяемое в этом случае число $\pm \beta i = \pm 4i$ совпадает с корнями

характеристического уравнения, поэтому частное решение

поэтому частное решение, повторив в общем виде правую часть уравнения, дополнительно умножается на x

$$Y^* = (A\cos 4x + B\sin 4x) \cdot x.$$

c) Записываем общее решение неоднородного уравнения

$$Y = \overline{Y} + Y^* = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + (A\cos 4x + B\sin 4x) \cdot x.$$

- 7. $y'' + y' - 2y = x\sin\ x.$

a) $y'' + y' - 2y = 0, \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0, \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = -2.$

$\overline{Y} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ – общее решение однородного уравнения

b) $f(x) = x\sin x$

Проверяемое в этом случае число $\pm\beta i = \pm 1\cdot i$ не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение повторит в общем виде правую часть уравнения, т.е.

$$Y^* = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin\ x.$$

c) Записываем общее решение неоднородного уравнения

$$Y = \overline{Y} + Y^* = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin\ x.$$

- 8. $y'' + 4y = e^{3x}\cos 2x.$

$$y'' + 4y = 0, \Rightarrow k^2 + 4 = 0, \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2i. \Rightarrow$$

$\overline{Y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x -$ общее решение однородного уравнения

$$f(x) = e^{3x}\cos 2x$$

Проверяемое в этом случае число $\pm\alpha \pm \beta i = 3 \pm 2 \cdot i$

не совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение повторит в общем виде правую часть уравнения,

$$Y^* = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Записываем общее решение неоднородного уравнения

$$Y = \overline{Y} + Y^* = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

- 9. $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin x.$

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \Rightarrow k^2 + 4k + 5 = 0, \Rightarrow k_{1,2} = -2 \pm i.$$

$\overline{Y} = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) -$ общее решение однородного уравнения

$$f(x) = e^{-2x} \sin x$$

Проверяемое в этом случае число $\alpha \pm \beta i = -2 \pm i$

совпадает с корнями характеристического уравнения, поэтому частное решение повторит в общем виде правую часть уравнения и дополнительно умножается на x

$$Y^* = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x) \cdot x.$$

Записываем общее решение неоднородного уравнения

$$Y = \overline{Y} + Y^* = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-2x}(A \cos x + B \sin x) \cdot x.$$

Рассмотрим примеры, в которых показаны приемы нахождения неопределенных коэффициентов

- 1. $y'' + 4y' + 4y = 5x + 3.$

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \Rightarrow k^2 + 4k + 4 = 0, \Rightarrow$$

$$(k+2)^2 = 0, \Rightarrow k_1 = k_2 = -2 \Rightarrow \overline{Y} = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}.$$

$$f(x) = 5x + 3.$$

Проверяемое в этом случае число "0" не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение повторит в общем виде правую часть уравнения, т.е.

$$Y^* = Ax + B.$$

Для нахождения пока неопределенных коэффициентов A, B

подставим это решение в исходное уравнение вместо y, найдя предварительно $(Y^*)' = A, (Y^*)'' = 0.$

Тогда

$$y'' + 4y' + 4y = 5x + 3, \Rightarrow 4A + 4(Ax + B) = 5x + 3, \Rightarrow$$

$$4Ax + (4A + 4B) = 5x + 3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x

в левой и правой частях равенства, имеем

$$\begin{matrix} x^1: & 4A = 5, \\ x^0: & 4A + 4B = 3 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 5/4, \\ B = -1/2. \end{cases}$$

Записываем частное решение

$$Y^* = \frac{5x}{4} - \frac{1}{2}.$$

c) Общее решение неоднородного уравнения:

$$Y = \overline{Y} + Y^* = (C_1 + C_2\,x)e^{-2x} + \frac{5x}{4} - \frac{1}{2}.$$

- 2. $y'' - 3y' = x^2 - x.$

$$y'' - 3y' = 0, \Rightarrow k^2 - 3k = 0, \Rightarrow \quad \overline{Y} = C_1 + C_2 e^{3x}.$$

Правая часть уравнения есть многочлен 2-ой степени и проверяемое число $z = 0$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, поэтому выражение для Y^* повторит общий вид правой части и будет содержать множитель x

$$Y^* = x \cdot (Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Подставим это выражение в исходное уравнение, найдя предварительно

$$(Y^*)' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad (Y^*)'' = 6Ax + 2B.$$

Имеем равенство двух многочленов

$$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 - x.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства

$$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) = x^2 - x.$$

$$x^2: \ -9A = 1 \quad A = -\frac{1}{9},$$

$$x^1: \ 6A - 6B = -1 \quad B = \frac{1}{18},$$

$$x^0: \ 2B - 3C = 0 \quad C = \frac{1}{27}.$$

Частное решение $\quad Y^* = x \cdot \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{18}x - \frac{1}{9}x^2 \right).$

Общее решение неоднородного уравнения

$$Y = \overline{Y} + Y^* = C_1 + C_2 e^{3x} + x \cdot \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{18}x - \frac{1}{9}x^2 \right).$$

- 3. $y'' - 2y' + y = (2x+3)\,e^{x}.$

$$y'' - 2y' + y = 0, \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = 0, \Rightarrow \quad (k-1)^2 = 0, \Rightarrow k_1 = k_2 = 1.$$

$\overline{Y} = (C_1 + C_2\,x)\,e^{x}$ – общее решение однородного уравнения

Находим частное решение Y^*

Правая часть $f(x) = (2x+3)\,e^{x}$ и число $z = \alpha = 1$

двукратным корнем характеристического уравнения, поэтому выражение для Y^* повторит общий вид правой части и будет содержать множитель x^2

$$Y^* = x^2 \cdot (Ax + B) \cdot e^{x} = (Ax^3 + Bx^2)\,e^{x}.$$

Подставим это выражение в исходное уравнение, найдя предварительно

$$y'' - 2y' + y = (2x+3)\,e^x.$$

$$(Y^*)' = (Ax^3 + (3A+B)x^2 + 2Bx)\,e^x,$$

$$(Y^*)'' = (Ax^3 + (6A+B)x^2 + (6A+4B)x + 2B)\,e^x.$$

Подставим $Y^*,\ (Y^*)',\ (Y^*)''$ в уравнение и сократим на e^x

$$[Ax^3 + (6A+B)x^2 + (6A+4B)x + 2B] -$$

$$-2[Ax^3 + (3A+B)x^2 + 2Bx] + [Ax^3 + Bx^2] = (2x+3),$$

раскрываем скобки и приводим подобные $6Ax + 2B = 2x + 3.$

Откуда имеем $6A = 2,\ A = \dfrac{1}{3},\ \ 2B = 3,\ \ B = \dfrac{3}{2}.$

Записываем частное решение $Y^* = x^2 \cdot e^x \left(\dfrac{1}{3}x + \dfrac{3}{2}\right).$

Общее решение неоднородного уравнения

$$Y = (C_1 + C_2\,x)\,e^x + x^2 \cdot e^x \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{3}x\right).$$

$Y^* = A\cos 4x + B\sin 4x.$

- 4. $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x.$

$$y'' + 4y' + 20y = 0, \;\Rightarrow\; k^2 + 4k + 20 = 0, \;\Rightarrow$$

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-20} = -2 \pm 4i, \qquad \overline{Y} = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x).$$

Составляем выражение для Y^*

Правая часть $f(x) = 4\cos 4x - 52\sin 4x.$

Проверяемое число $z = \pm\beta i = \pm 4i$

не является корнем характеристического уравнения, поэтому выражение для Y^* просто повторит общий вид правой части

$$Y^* = A\cos 4x + B\sin 4x.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов найдём первую и вторую производные от Y^*

$$(Y^*)' = -4A\sin 4x + 4B\cos 4x,$$

$$(Y^*)'' = -16A\cos 4x - 16B\sin 4x.$$

Подставим их в исходное уравнение

$$-16A\cos 4x-16B\sin 4x+4(-4A\sin 4x+4B\cos 4x)+20(A\cos 4x++B\sin 4x)=$$
$$=-4\cos 4x-52\sin 4x.$$

Приведем подобные члены:

$$(4A+16B)\cos 4x+(-16A+4B)\sin 4x=-4\cos 4x-52\sin 4x.$$

Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при синусах и косинусах имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \sin 4x: -16A+4B=-52 \\ \cos 4x: 4A+16B=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=3, \\ B=-1. \end{cases}$$

Частное решение: $Y^{*}=3\cdot\cos 4x-\sin 4x.$

Общее решение исходного уравнения

$$Y=\overline{Y}+Y^{*}=e^{-2x}(C_1\cos 4x+C_2\sin 4x)+3\cdot\cos 4x-\sin 4x.$$

Консультация к вебинару 14

Системы дифференциальных уравнений

Системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называются системы вида

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + f_1(t), \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + f_2(t) \end{cases} -$$ неоднородная система

$$2)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y, - \end{cases}$$ однородная система

Решение системы - это совокупность функций, обращающих каждое уравнение системы в тождество

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Метод исключения решения систем

Этот метод представляет собой метод сведения системы к одному уравнению высшего порядка. Метод достаточно прост и легко реализуем для системы 2-го порядка.

Найти общее решение однородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + 4y. \end{cases}$$

a) Продифференцируем первое уравнение по t

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

b) Значение $\dot{y}$ подставим из второго уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + 8x + 4y,$$

c) Значение y находим из первого уравнения

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x$$

и подставляем $\dfrac{d^2x}{dt^2} = 2\dfrac{dx}{dt} + 8x + 4(\dfrac{dx}{dt} - 2x),$

Окончательно система свелась к уравнению $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 6\dfrac{dx}{dt} = 0.$

Находим его общее решение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 6\frac{dx}{dt} = 0, \Rightarrow k^2 - 6k = 0, \Rightarrow k_1 = 0, \; k_2 = 6.$$

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{6t}.$$

Вторую функцию $y(t)$ находим согласно 1-му уравнению системы

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x = (C_1 + C_2 e^{6t})' - 2(C_1 + C_2 e^{6t}) = 6C_2 e^{6t} - 2C_1 - 2C_2 e^{6t}$$

$$y(t) = -2C_1 + 4C_2 e^{6t}.$$

Общее решение системы

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{6t} \\ y(t) = -2C_1 + 4C_2 e^{6t} \end{cases}$$

Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4y + 6\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

a) Продифференцируем первое уравнение по t

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4\frac{dy}{dt} - 6\sin t.$$

b) Значение $\dfrac{dy}{dt}$ подставим из второго уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 6\sin t.$$

Таким образом, имеем неоднородное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = -6\sin t.$$

Решаем сначала соответствующее однородное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

$$k^2 + 4 = 0,\ \ k_{1,2} = \pm 2i: \qquad \bar{x}(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Частное решение уравнения ищем по виду правой части

$$x^* = A\cos t + B\sin t.$$

$$(x^*)' = -A\mathrm{s}\,int + B\cos t, \qquad (x^*)'' = -A\cos t - B\sin t,$$

После подстановки в уравнение и нахождения неопределенных коэффициентов имеем

$$-A\cos t - B\sin t + 4(A\cos t + B\sin t) = -6\sin t,$$

$$3A\cos t + 3B\sin t = -6\sin t, \qquad A = 0,\quad B = -2,$$

Частное решение $\quad x^* = -2\sin t.$

Общее решение для первой функции

$$x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - 2\sin t.$$

Находим вторую функцию. Из первого уравнения системы имеем

$$y = \frac{1}{4}\left(-\frac{dx}{dt} + 6\cos t\right) = \frac{1}{4}(2C_1 \sin 2t - 2C_2 \cos 2t + 2\cos t + 6\cos t) =$$

$$= \frac{1}{2}(C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t + \cos t + 3\cos t).$$

Ответ:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - 2\sin t, \\ y(t) = \dfrac{1}{2}(C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t + \cos t + 3\cos t). \end{cases}$$

Спасибо за внимание