



Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Дифференциальные уравнения
и системы. (Лк.1)



Дифференциальные уравнения и системы.

- Обыкновенные дифференциальные уравнения.
- ОДУ 1го порядка. Основные типы ОДУ.
- Методы решения ОДУ 1го порядка.
- ОДУ Высших порядков и методы их решения.
- Фундаментальная система решений.
- Понятие систем ОДУ.

Вариант № 1

1. Найти общее решение уравнения:

$$1) y^2(1+x)dx + xdy = 0; \quad 2) y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{\sin(y/x)};$$

$$3) y' + y \cos x = \cos x; \quad 4) y' + y = x\sqrt{y}.$$

2. Найти частное решение уравнения:

$$1) xy y' - \sqrt{y^2 + 1} = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$2) (x - y)dx + (x + y)dy = 0, \quad y(1) = 1;$$

$$3) \left(3x^2 \cdot \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3} \right) dx + \left(\frac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2} \right) dy = 0, \quad y(1) = 0.$$

3. Найти общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов:

$$1) y'' + 4y' + 3y = (5x - 2) \cdot e^{-3x};$$

$$2) y'' - 8y' + 16y = x^2 + 2x - 7;$$

$$3) y'' + 4y = 2 \sin x.$$

4. Найти решение линейной системы методом исключения:

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -6x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 9x - 3y. \end{cases}$$



Обыкновенные дифференциальные уравнения

Опр. 1. Уравнение вида $F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0$ (1)

связывающее независимую переменную x , искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$, называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**.

x - независимая переменная, $y = y(x)$ - искомая функция

Решением ДУ (1) на интервале (a, b) называется функция $y = \varphi(x)$, которая при ее подстановке в (1) обращает его в тождество на (a, b)

Решение ДУ в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, называется **интегралом ДУ**

График решения ДУ называется **интегральной кривой**

Если искомая функция $y = y(x)$ зависит от одной переменной, то ДУ называется **обыкновенным**

Если искомая функция зависит от двух и более переменных, то ДУ называется **в частных производных**

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей него.



Уравнение первого порядка

Общий вид ДУ первого порядка: $F(x, y, y') = 0$ (2)

x – независимая переменная, y – искомая функция F – заданная функция трех переменных

Уравнение $y' = f(x, y)$ (3)

называется **разрешенным относительно производной**.

Теорема 1. (о существовании и единственности решений задачи Коши)

Пусть в уравнении $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D плоскости XOY и ее частная производная $f_y'(x, y)$ ограничена в D . Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x, y)$ уравнения (3), определенное в некотором интервале (a, b) , содержащее точку x_0 и удовлетворяющее условию $y_0 = \varphi(x_0)$.

Опр 2. Общим решением ДУ $F(x, y, y') = 0$ (2) в области существования и единственности решений задачи Коши называется функция $y = \varphi(x, C)$ зависящая от x и одной произвольной постоянной C , которая удовлетворяет двум условиям:

- 1) при любом допустимом значении постоянной C она удовлетворяет уравнению (2);
- 2) каково бы ни было начальное условие $y_0 = \varphi(x_0)$ ($(x_0, y_0) \in D$) можно найти единственное значение $C = C_0$ такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Замечание Общее решение не всегда описывает все множество решений ДУ.

а) так, если в каждой точке решения $y = \varphi(x)$ нарушено условие единственности (проходит еще хотя бы одна интегральная кривая), то оно не будет входить в общее. Такое решение называется **особым**

б) в процессе решения ДУ часть общего решения может потеряться. Такие решения называются потерянными.

ДУ (3) всегда можно записать в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

(иногда эту форму записи называют **дифференциальной формой уравнения**)

Удобна тем, что переменные можно рассматривать как равноправные

Основные типы ДУ

1. Уравнения с разделенными переменными

ДУ (3) всегда можно записать в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

(иногда эту форму записи называют дифференциальной формой уравнения)

Удобна тем, что переменные можно рассматривать как равноправные

Опр.3. Уравнение вида $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$ (5)

где $f(x)$ и $\varphi(x)$ - непрерывные функции, называется уравнением с разделенными переменными

Опр.4. Если ДУ (2) приводится к виду (5), т.е. $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, то оно называется уравнением с разделяющимися переменными

или $M_1(x) \cdot N_1(y)dx + M_2(x) \cdot N_2(y)dy = 0 \quad (5^*)$

т.е. уравнение, в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y . M_1, N_1, M_2, N_2 — непрерывные

Опр.5. Функция $M(x, y)$ называется однородной степени m , если при любом t справедливо равенство

$$M(tx, ty) = t^m \cdot M(x, y)$$

Опр.6. ДУ (2) $y' = f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ однородная функция нулевой степени однородности

Подстановка: $\frac{y}{x} = z \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = z + xz' \quad (6)$

Линейные уравнения первого порядка

Опр.7. Уравнение первого порядка, линейное относительно неизвестной функции и ее производной, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (7)$$

$f(x)$, $p(x)$ – заданные непрерывные функции

Если $f(x)=0$, то линейное уравнение называется однородным.
противном случае уравнение называется неоднородным.

Методы решения линейного уравнения $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$

1. Метод Лагранжа (вариации постоянной)

a) $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow y = Ce^{-\int g(x)dx}$ - общее решение
однородного уравнения

b) Пусть $C = C(x) \Rightarrow C(x) = \int f(x)e^{\int g(x)dx} dx + \tilde{C}$

Решение $y(x) = \left[\int f(x)e^{\int g(x)dx} dx + \tilde{C} \right] e^{-\int g(x)dx}$

Заметим: $y(x) = \tilde{C}e^{-\int g(x)dx} + \int f(x)e^{\int g(x)dx} dx \cdot e^{-\int g(x)dx}$

↑
общее решение
однородного уравнения

↑
частное решение
неоднородного уравнения

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (7)$$

2. Метод Бернулли

Ищем решение в виде произведения двух функций $y(x) = u(x) v(x)$

$$y'(x) = u'(x) v(x) + u(x) v'(x) \Rightarrow \text{в (7)}$$

$$u' v + u v' + p(x) u v = f(x) \Rightarrow$$

$$u' v + u (v' + p(x) v) = f(x) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} v' + p(x) v = 0 \\ u' v = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v = \varphi(x) \\ \leftarrow \end{matrix}$$

$$\Rightarrow u = F(x) + C$$

Общее решение $y(x) = \varphi(x) [F(x) + C]$

Уравнение Бернулли

Опр.8. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = f(x) \cdot y^n \quad (8)$$

$n \neq 1, 0$. $f(x)$, $p(x)$ – заданные непрерывные функции

Методы решения

1. Сведение к линейному

Замена $y^{1-n} = z$

2. Метод Бернулли

Замена $y = u \cdot v$

Сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными

Уравнение в полных дифференциалах

Опр.9. Уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (9)

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, т.е.

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y)$$

Тогда исходное уравнение запишется $du = 0$,

откуда очевидно общий интеграл $u(x, y) = C$

Теорема 2.

Пусть функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ определены и непрерывны в D плоскости XOY и имеют в ней непрерывные частные производные M'_y и N'_x . Для того, чтобы выражение $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ было полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы во всех точках D выполнялось условие

$$M'_y = N'_x$$

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Опр.10. Если уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ (*)

не является уравнением в полных дифференциалах, но существует некоторая функция $\mu(x, y)$, после умножения на которую уравнение

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0 \quad (**)$$

становится уравнением в полных дифференциалах, т.е.

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

то такая функция $\mu(x, y)$ называется интегрирующим множителем

$$\frac{\partial \mu}{\partial \varpi} = \frac{\mu \left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right]}{N \frac{\partial \varpi}{\partial x} - M \frac{\partial \varpi}{\partial y}}$$

УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

В общем виде: $F(x, y, y') = 0$

Уравнение, линейное относительно x и y - уравнение Лагранжа

$$y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y')$$

Частный случай уравнения Лагранжа - уравнение Клеро

$$y = x \cdot y' + \psi(y')$$

Подстановка: $y' = p(x)$

Вид ДУ	Тип ДУ	Метод
$f_1(x)dx + f_2(y)dy = 0$	С разделенными переменными	Интегрирование
$y' = f_1(y) \cdot f_2(x)$	С разделяющимися переменными	$\frac{dy}{f_1(y)} = f_2(x)dx$
$y' = f(ax + by + c)$	Приводящиеся к разделяющимся	$z = ax + by + c \Rightarrow y' = \frac{z' - a}{b}$
$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$	Однородное	$\frac{y}{x} = z \Rightarrow y' = z + xz'$
$y' + g(x)y = f(x)$	Линейное неоднородное	а) Лагранжа б) Бернулли
$y' + g(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n$	Бернулли	а) $z = y^{1-n}$ б) $y = v(x) \cdot u(x)$
$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$	В полных дифференциалах	$u = \int M(x, y)dx + C(y)$

Дифференциальные уравнения порядка выше первого

Уравнение вида $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (9)

называется дифференциальным уравнением n – го порядка, неразрешенное относительно старшей производной

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (10)

называется дифференциальным уравнением n – го порядка, разрешенное относительно старшей производной

Опр.11 Задачей Коши ДУ n – го порядка называется нахождение решения уравнения (10), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{10}, y''(x_0) = y_{20}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)0} \quad (11)$$



НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Опр 12. Общим решением ДУ $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (9)

называют функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ (12)

определенную в некоторой области переменных $x, C_1, C_2, \dots, C_n$ и имеющую непрерывные частные производные по x до порядка n включительно если :

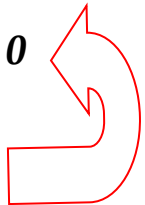
1) при любых допустимых $C_1, C_2, \dots, C_n$ она удовлетворяет уравнению (9);

2) Для заданных начальных условий

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{10}, y''(x_0) = y_{20}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)0}$$

можно подобрать $C_i = C_{i0}$ так, что функция- решение

$y = \varphi(x, C_{10}, C_{20}, \dots, C_{n0})$ будет удовлетворять н.у.



Опр 13. Всякое решение, которое получается из общего (12) при конкретных числовых значениях C_i называется частным решением

Теорема 3. (о существовании и единственности решения задачи Коши)

Существует единственное решение $y = \varphi(x)$

для ДУ $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (9),

удовлетворяющее начальным условиям (11)

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{10}, y''(x_0) = y_{20}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)0},$

если в окрестности точки $(x_0, y_0, y_{10}, \dots, y_{(n-1)0})$ функция F и
ее частные производные по всем своим аргументам

$F'_y, F'_{y'}, F'_{y''}, \dots, F'_{y^{(n)}}$ непрерывны и ограничены

Простейшие случаи ДУ высшего порядка, допускающие понижение порядка

1. $F(x, y^{(n)}) = 0$ **(13)**

2. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ **(14)**

Подстановка $y^{(k)} = t(x)$

3. $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ **(15)**

Подстановка $y' = p(y)$

Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка

Опр.14 ДУ n – го порядка называется линейным , если оно является уравнением первой степени относительно неизвестной функции и y ее производных y' , y'' , ..., $y^{(n)}$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (16)$$

где $f(x)$ и $a_i(x)$ заданные функции от x или $const$, причем $a_0 \neq 0$

Если $f(x) = 0$, то (16) – однородное

Если $f(x) \neq 0$, то (16) – неоднородное

Приведенное ЛДУ

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = f(x) \quad (17)$$

Линейный дифференциальный оператор:

$$L[y] = y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y$$

тогда $(17) \rightarrow L[y] = f(x) \quad (17^*)$

$$L[y] = y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y$$

Свойства дифференциального оператора:

$$1. L[C y] = C L[y]$$

Док-во: *самостоятельно*

$$2. L[y + z] = L[y] + L[z]$$

Док-во: *самостоятельно*

$\Rightarrow L[y]$ *линейный
дифференциальный оператор*

Линейные однородные ДУ n -го порядка

$$y^{(n)} + b_1(x)y^{(n-1)} + \dots + b_{n-1}(x)y' + b_n(x)y = 0 \quad (18)$$

$$\text{или } L[y] = 0$$

Свойства решений ЛОДУ

Теорема 4. Если y_1 и y_2 - решения ЛОДУ $L[y] = 0$, то $y_1 + y_2$ также решения этого уравнения

Теорема 5. Если y_1 - решение ЛОДУ $L[y] = 0$, то Cy_1 также решение этого уравнения

Следствие Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ - решения ЛОДУ $L[y] = 0$, то их линейная комбинация $C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n$ также решение этого уравнения

Линейная зависимость системы функций

Определитель Вронского

Пусть на (a, b) определена и $(n - 1)$ раз дифференцируема система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

Опр.15 Определитель вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (19)$$

называется определителем Вронского или вронскианом системы функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$

Теорема 6. Если функции $y_1, y_2, \dots, y_n$ линейно зависимы на $[a, b]$, то их определитель Вронского равен нулю.

Замечание. Т6 – необходимое, но не достаточное условие. Т.е. если $W \equiv 0$, то система $y_1, y_2, \dots, y_n$ может быть как линейно зависима, так и линейно независима

Теорема 7. Если n решений $y_1, y_2, \dots, y_n$ уравнения $L[y] = 0$ линейно независимы на (a, b) , то их определитель Вронского не равен нулю.

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Теорема 8. Общим решением уравнения $L[y] = 0$, определенного на (a, b) является линейная комбинация

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = \sum_{i=1}^n C_i y_i$$

n линейно независимых на (a, b) решений $y_1, y_2, \dots, y_n$

Фундаментальная система решений (ФСР)

Опр.16. Система n линейно независимых решений ЛОДУ n -го порядка называется его фундаментальной системой решений.

Следствия. Из Т6-Т8

1. Максимальное число линейно-независимых решений ЛОДУ $L[y]=0$ равно его порядку n .
2. Любые n линейно-независимые частные решения ЛОДУ $L[y]=0$ n -го порядка являются его фундаментальной системой решений
3. Пространство решений ЛОДУ $L[y]=0$ n -го порядка имеет базис из n векторов (n -мерное пространство). Базисные векторы – фундаментальная система
4. Любое другое решение, не зависимо от начальных условий, есть линейная комбинация базисных векторов – решений фундаментальной системы
5. Если два ЛОДУ $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$

$$y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \dots + q_n y = 0$$

имеют общую ФСР, то они тождественны между собой, т.е. $p_i(x) \equiv q_i(x) \quad i = \overline{1, n}$

Системы ОДУ. Метод исключения

Пример . Найти общее решение системы

$$\begin{aligned}x' &= 5x + 2y, \\ y' &= -4x - y\end{aligned}$$

методом исключения.

Решение. Продифференцировав первое уравнение , имеем

$$x'' = 5x' + 2y'.$$

Подставив производные x' и y' из (30.3) в полученное соотношение, найдём

$$x'' = 5(5x + 2y) + 2(-4x - y) = 17x + 8y.$$

Выразив из первого уравнения (30.3) функцию $y(t)$:

$$y = \frac{x' - 5x}{2}$$

и подставив её в (30.4), получим уравнение второго порядка для функции $x(t)$:

$$x'' - 4x' + 3x = 0.$$

Характеристическое уравнение для (30.4)

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

имеет два действительных различных корня

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$$

Тогда общее решение уравнения (30.4) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Функция $y(t)$ находится подстановкой

$$y(t) = -2C_1e^t - C_2e^{3t}.$$

Таким образом, мы получили общее решение системы

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1e^t + C_2e^{3t}, \\y(t) &= -2C_1e^t - C_2e^{3t},\end{aligned}$$

совпадающее с полученным в примере

Для вектор-функции

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

решение можно представить как

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} C_1e^t + C_2e^{3t} \\ -2C_1e^t - C_2e^{3t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

С помощью двух векторов

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

можно записать фундаментальную систему решений однородной системы

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}_1e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t, \quad \vec{x}_2(t) = \vec{g}_2e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

позволяющую представить общее решение (30.8) линейной комбинацией

$$\vec{x} = C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2.$$

Пример Найти общее решение системы

$$\begin{aligned}x' &= x - y, \\y' &= x + 3y,\end{aligned}$$

методом исключения.

Решение. Продифференцируем первое уравнение из :

$$x'' = x' - y'.$$

Подставив x' и y' из в полученное соотношение, найдём

$$x'' = x - y - x - 3y = -4y.$$

Выразив из первого уравнения (30.12) функцию $y(t)$:

$$y = x - x'$$

и подставив её в , получим уравнение второго порядка для функции $x(t)$:

$$x'' - 4x' + 4x = 0.$$

Характеристическое уравнение для (30.15)

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

имеет действительный двукратный корень $\lambda_{1,2} = 2$ ($r = 2$), следовательно, общее решение) имеет вид

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Функция $y(t)$ находится подстановкой

$$y(t) = x(t) - x'(t) = -(C_1 + C_2 - C_2 t)e^{2t}.$$

Таким образом, мы получили общее решение системы

$$\begin{aligned}x(t) &= (C_1 + C_2 t)e^{2t}, \\y(t) &= -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t}.\end{aligned}$$

Для вектор-функции

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

решение можно представить как

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 t)e^{2t} \\ -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t} \end{pmatrix} = \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \right\} e^{2t}.$$

С помощью двух векторов

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

можно записать фундаментальную систему решений однородной системы

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}_1 e^{2t}, \quad \vec{x}_2(t) = (\vec{g}_1 t + \vec{g}_2) e^{2t}.$$

Тогда общее решение (30.18) можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{x}_1(t) + C_2 \vec{x}_2(t).$$

Пример

Найти общее решение системы

$$x' = 2x + y - z,$$

$$y' = 3y - z,$$

$$z' = y + z$$

методом исключения.

Решение. Продифференцировав первое уравнение системы (1), имеем

$$x'' = 2x' + y' - z'.$$

Подставив два последних равенства системы (1) в полученное соотношение, найдём

$$x'' = 2x' + (3y - z) = (y + z) = 2x' + 2(y - z).$$

Выразим из первого уравнения разность $y - z$:

$$y - z = x' - 2x.$$

Теперь подставим (2) в (3) и получим уравнение 2-го порядка для функции $x(t)$:

$$x'' = 2x' + 2(x' - 2x) = 4x' - 4x$$

или

$$x'' - 4x' + 4x = 0.$$

Характеристическое уравнение для

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

имеет действительный корень $\lambda = 2$ кратности $r = 2$. Стало быть, общее решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 t)e^{2t},$$

где $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ — произвольные постоянные.

Теперь продифференцируем второе уравнение из (1):

$$y'' = 3y' - z'$$

и подставим в полученное выражение третье уравнение из системы (1):

$$y'' = 3y' - z' = 3y' - y - z.$$

Чтобы исключить из этого уравнения функцию z , выразим её из второго уравнения (1):

$$z = 3y - y'$$

и подставим в (2). Тогда

$$y'' = 3y' - y - (3y - y') = 4y' - 4y$$

или

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Это уравнение аналогично уравнению (30.29) и, следовательно, имеет общее решение

$$y(t) = (\bar{C}_3 + \bar{C}_4 t)e^{2t},$$

где $\bar{C}_3$ и $\bar{C}_4$ — ещё одна пара произвольных постоянных.

Теперь функция $z(t)$ определится подстановкой в (30.28) $y(t)$ и $y'(t)$:

$$z(t) = (\bar{C}_3 - \bar{C}_4 + \bar{C}_4 t)e^{2t}.$$

Таким образом, можно записать общее решение системы (30.27)

$$\begin{aligned} x(t) &= (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 t)e^{2t}, \\ y(t) &= (\bar{C}_3 + \bar{C}_4 t)e^{2t}, \\ z(t) &= (\bar{C}_3 - \bar{C}_4 + \bar{C}_4 t)e^{2t}. \end{aligned}$$

Поскольку в (30.27) вместо трех произвольных постоянных присутствуют четыре, чтобы установить связь между ними, подставим решения (30.30) в первое уравнение системы (30.27) и получим

$$(\bar{C}_2 + 2\bar{C}_1 + 2\bar{C}_2 t)e^{2t} = (2\bar{C}_1 + 2\bar{C}_2 t + \bar{C}_3 + \bar{C}_4 t - \bar{C}_3 + \bar{C}_4 + \bar{C}_4 t)e^{2t}$$

или

$$\bar{C}_2 = \bar{C}_4.$$

С учётом этого равенства общее решение (30.30) примет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 t)e^{2t}, \\ y(t) &= (\bar{C}_3 + \bar{C}_1 t)e^{2t}, \\ z(t) &= (\bar{C}_3 - \bar{C}_2 + \bar{C}_2 t)e^{2t}. \end{aligned}$$

Спасибо за внимание