



Томский политехнический университет

Доцент, к.ф.м.н.

Богданов Олег Викторович

Дифференциальные уравнения
и системы. Ряды. (Консультация.1)

Определение типа дифференциального уравнения 1-го порядка

В каком бы виде не было задано уравнение, в первую очередь необходимо проверить, не относится ли оно к уравнению с разделяющимися переменными.

Если нет, и уравнение записано в дифференциальной форме

$$f(x; y)dx + g(x; y)dy = 0,$$

то можно сразу проверить, не относится ли оно к уравнениям в полных дифференциалах.

Если и это не пройдет, остается убедиться в однородности или линейности уравнения.

Как правило, в последнюю очередь остается проверить, не относится ли уравнение к уравнению Бернулли.

Не следует также забывать о том, что уравнение может быть линейным или типа Бернулли относительно переменной

X.

Одно и то же уравнение относится сразу к нескольким типам.

- 1. $(y+1)y' = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} + xy.$

В первую очередь попытаемся разделить переменные Для этого

1) вынесем за скобку общий множитель и запишем производную
в виде $\frac{dy}{dx}$ получим

$$(y+1) \frac{dy}{dx} = y \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x \right),$$

2) умножим на dx

$$(y+1)dy = y \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x \right) dx,$$

3) делим на y

$$\frac{y+1}{y} dy = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x \right) dx.$$

Переменные разделены, можно интегрировать.

- 2. $(2x + y \operatorname{tg} x - x^2 \operatorname{tg} x) dx = dy.$

Разделить переменные в уравнении невозможно, однородным оно тоже не является. Но можно заметить, что искомая функция и ее дифференциал входят в первых степенях и не перемножаются, а это признаки линейного уравнения.

Приводим его к виду

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Делим на dx и заменяем $\frac{dy}{dx} = y'$

$$2x + y \operatorname{tg} x - x^2 \operatorname{tg} x = \frac{dy}{dx} \qquad 2x + y \operatorname{tg} x - x^2 \operatorname{tg} x = y'$$

$$y' - y \operatorname{tg} x = 2x - x^2 \operatorname{tg} x$$

Это классический вид линейного уравнения. Далее решаем его методом подстановки

$$y = U(x)V(x)$$

- 3. $(xy + 2x^2)y' = y(2x - y)$.

Переменные в этом уравнении не разделяются, так как имеем сумму, а не произведение или отношение переменных. Но можно заметить, что в скобках в левой части уравнения и правая часть уравнения являются многочленами одной степени (второй) относительно своих переменных, а это признак однородного уравнения. Приводим его к виду

$$y' = \frac{y(2x - y)}{xy + 2x^2}, \quad \begin{array}{l} \text{делим почленно числитель и знаменатель} \\ \text{на } x^2, \quad \text{получаем} \end{array}$$

$$y' = \frac{y/x(2 - y/x)}{y/x + 2}$$

Уравнение содержит только отношения y/x ,

а значит, действительно является однородным. Далее делаем замену

$y/x = t$ и решаем согласно методу решения однородного уравнения.

- 4. $(x+1)(y' + y^2) = -y.$

$$y' + y^2 = -\frac{y}{1+x}$$

$$y' + \frac{y}{1+x} = -y^2$$

это уравнение Бернулли

$$y' + P(x)y = Q(x)y^k.$$

Далее делаем подстановку

$$y = UV$$

К уравнениям Бернулли относятся уравнения

$$a) y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x \Rightarrow y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x.$$

$$b) 2y' \cdot y - 3y^2 \cdot \cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x).$$

$$\Rightarrow 2y' - 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x) \cdot y^{-1}.$$

- 5. $dx + (xy - y^3)dy = 0 \Rightarrow$

Разделим на dy и заменим $\frac{dx}{dy} = x'$

$$x' + xy - y^3 = 0 \Rightarrow$$

$$x' + xy = y^3,$$

Это уравнение линейное
относительно x

$$x' + xP(y) = Q(y).$$

Решаем, применив подстановку

$$x = UV.$$

- 6. $(y^4 e^y + 2x)y' = y \Rightarrow (y^4 e^y + 2x)\frac{1}{x'} = y \Rightarrow x' - \frac{2}{y}x = y^3 e^y.$

Это также уравнение линейное
относительно x

- $7. 3x^2 (1 + \ln y) dx = (2y - x^3/y) dy$

$$3x^2 (1 + \ln y) dx - (2y - x^3/y) dy = 0$$

Разделить переменные здесь не удастся. Однородным уравнение также не является, так как получить только отношения

y/x

мы не сможем. Уравнение не является линейным, так как переменные не только в степенях, но и под знаком логарифма.

Предположим, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Проверим выполнение критерия

$$P(x; y) = 3x^2 (1 + \ln y), \quad Q(x; y) = -(2y - x^3/y)$$

$$P'_y = 3x^2 \frac{1}{y}, \quad Q'_x = \frac{1}{y} 3x^2.$$

Частные производные равны, значит уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Функциональные ряды

О п р е д е л е н и е. Функциональным называется ряд, члены которого есть непрерывные функции от X

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

При конкретном значении X функциональный ряд становится числовым, который либо сходится, либо расходится.

О п р е д е л е н и е. Совокупность значений аргумента, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости ряда.

Степенные ряды. Интервал сходимости

О п р е д е л е н и е. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad \text{где}$$

$a_1; a_2; \dots a_n$ — действительные числа, называется степенным рядом.

Существует такое значение $x = R > 0$, что для $|x| < R$ степенной ряд сходится, а для $|x| > R$ расходится. Это число R называется радиусом сходимости степенного ряда. Интервал $(-R; R)$ называется интервалом сходимости.

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

называется степенным рядом общего вида.

Для такого ряда интервал сходимости определяется неравенством $|x - x_0| < R$, т.е. интервал сходимости:

$$(-R + x_0; R + x_0)$$

Радиус сходимости может быть равен 0, и тогда ряд сходится только в одной точке, но может быть и неограниченно большим ($R = \infty$)

В последнем случае ряд сходится на всей числовой оси.

Для нахождения интервала сходимости степенного ряда удобно пользоваться достаточными признаками сходимости знакоположительных рядов и, в частности, признаками Даламбера и Коши. В соответствие с этими признаками степенной ряд сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} < 1.$$

Эти условия и применяются для нахождения интервала сходимости степенного ряда.

Отметим, что нахождение интервала сходимости также включает и проверку сходимости ряда на концах полученного интервала.

Таким образом, при нахождении интервала сходимости:

1. Используя условия сходимости, находим интервал значений, для которых ряд сходится.
2. Проверяем сходимость ряда на концах полученного интервала.

Найти интервал сходимости рядов.

• 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2}.$

1) Используем условие сходимости по признаку Даламбера.

Составим предел отношения последующего члена ряда к предыдущему и потребуем, чтобы он был по модулю меньше единицы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n x^n} \right| = |2x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 2|x|.$$

Теперь потребуем, чтобы $2|x| < 1$, откуда $|x| < \frac{1}{2}$

Получаем интервал значений x , в котором ряд сходится

$$-1/2 < x < 1/2.$$

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервала. Для этого подставляем значения

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

в исходный ряд, получаем числовой ряд и исследуем его сходимость одним из признаков сходимости числовых рядов.

а) При $x = +\frac{1}{2}$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (1/2)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

который сходится как обобщенный гармонический т.к. $k = 2 > 1$.

б) При $x = -\frac{1}{2}$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (-1/2)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Ряд сходится абсолютно, так как сходится соответствующий знакоположительный ряд.

Итак, оба конца интервала принадлежат интервалу сходимости, т.е. ряд сходится в закрытом интервале $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

- 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}.$

1) Используем условие сходимости по признаку Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3x}{n+1} \right| = |3x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Предел равен нулю для любых значений x ,

поэтому ряд сходится на всей числовой прямой $x \in (-\infty; +\infty)$

- 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^{2n+1}}{\sqrt{n+3}}.$

1) Используем условие сходимости по признаку Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{2n+3}}{\sqrt{n+4}} \cdot \frac{\sqrt{n+3}}{n! x^{2n+1}} \right| = x^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty > 1.$$

Ряд расходится на всей числовой оси, кроме одной точки $x = 0$.

- 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{4^n}.$

1) Используем признак Коши. Запишем предел корня ~~n~~ -ой степени из общего члена ряда и потребуем, чтобы он по модулю был меньше единицы.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| (-1)^n \frac{(x-3)^n}{4^n} \right|} = \left| \frac{x-3}{4} \right|.$$

Т р е б у е м, чтобы $\frac{|x-3|}{4} < 1 \Rightarrow |x-3| < 4,$

$$-4 < x-3 < 4.$$

Получили интервал сходимости $-1 < x < 7.$

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервала. Для этого подставляем значения $x = -1$ и $x = 7$

в исходный ряд, получаем числовой ряд и исследуем его сходимость одним из признаков сходимости числовых рядов.

а) При $x = 7$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n.$$

Ряд знакочередующийся и он расходится, так как предел его общего члена не равен нулю.

б) При $x = -1$ получаем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-4)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

Ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости. Итак, концы интервала не принадлежат интервалу сходимости и ряд сходится при $x \in (-1; 7)$.

- 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (2x+3)^n}{n}$.

1) Используем условие сходимости по признаку Даламбера.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5^{n+1} (2x+3)^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{5^n (2x+3)^n} \right| &= \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{5(2x+3)n}{n+1} \right| &= |5(2x+3)| \cdot 1 < 1. \end{aligned}$$

$$|2x+3| < \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{5} < 2x+3 < \frac{1}{5},$$

$$-\frac{1}{5} - 3 < 2x < \frac{1}{5} - 3, \quad -\frac{16}{5} < 2x < -\frac{14}{5},$$

Получаем интервал сходимости ряда $-\frac{8}{5} < x < -\frac{7}{5}$.

2) Проверяем сходимость ряда на концах интервала.

а) При $x = -\frac{7}{5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \left(-\frac{14}{5} + 3\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \left(\frac{1}{5}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ряд расходится как гармонический.

б) При $x = -\frac{8}{5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \left(-\frac{16}{5} + 3\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \left(-\frac{1}{5}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Ряд знакочередующийся и сходится условно, так как предел общего члена по абсолютной величине равен нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

а соответствующий знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ является расходящимся.

Итак, в интервал сходимости можно включить левый конец промежутка, а правый нельзя. Итог: ряд сходится при $-\frac{8}{5} \leq x < -\frac{7}{5}$.

Спасибо за внимание