1.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,4,-3)$, $\vec{f}_2 = (2,3,-5)$, $\vec{f}_3 = (1,1,1)$, $\vec{x} = (2,1,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

1.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (4x_3 + 2x_2, -x_3 - 2x_1, x_2 - 4x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (2x_3, -x_2, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1\widehat{G}_2 - \widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 25.13.

1.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 5; \end{array} \qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = 2. \end{array}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

1.5. Найти норму элемента $y(x)$ в пространствах $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$:

$$y(x) = \frac{\cos nx}{n^2+1}, \quad n = 1, 10, 100, \quad x \in [0, 2\pi].$$

1.6. Исследовать непрерывность функционала

$$J[y] = y(0), \quad y(x) \in C[-1,1].$$

1.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^3 [2y - yy' + x(y')^2]dx, \quad y(1) = 1, \quad y(3) = 4.$$

1.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [y^2 + 2(y')^2 + (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = -\operatorname{sh} 1.$$

1.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^3 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2}dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -2, \quad y_1(3) = 7, \quad y_2(3) = 1.$$

1.10. Найти допустимые экстремали и значение x_2 в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{x - 2}dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) + 4x_2 - 4 = 0.$$

1.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [y_1^2 + y_2^2 - (y_1')^2 - (y_2')^2 + \cos x]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = -1,$$

$$y_1 - y_2 - 2\sin x = 0.$$

1.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad \int\limits_0^1 xydx = 0.$$

1.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y] = \int\limits_0^1 e^y (y')^2 dx + 4e^{y(0)} + 32e^{-y(1)}.$$

1.14. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^a [6(y')^2 - (y')^4]dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a > 0$, $b > 0$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

1.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_{-1}^0 [xy - (y')^2]dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(0) = 0.$$

1.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y')^2 + y^2 + xy]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$$

2.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (2,1,2)$, $\vec{f}_2 = (3,2,5)$, $\vec{f}_3 = (4,0,0)$, $\vec{x} = (10,1,-3)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

2.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (8x_3 - 2x_2, 4x_3 + 2x_1, -4x_2 - 8x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_2, x_1 + x_3, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 24.13.

2.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 5, \\ \lambda_3 = 5; \end{matrix} \qquad 2)\quad A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 1. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

2.5. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^1 xy^2y'dx, \quad y_0(x) = x^2, \quad \delta y(x) = x - 2.$$

2.6. Исследовать дифференцируемость функционала

$$J[y] = y(0), \quad y(x) \in C[-1,1].$$

2.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left[y - \frac{1}{2}(y')^2\right] \sin x\, dx, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ln\sqrt{2}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

2.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{-1}^{0} [240y - (y''')^2]dx,$$

$$y(-1) = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(-1) = -4,5, \quad y'(0) = 0, \quad y''(-1) = 16, \quad y''(0) = 0.$$

2.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2, y_3] = \int\limits_2^4 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2 + (y_3')^2}dx,$$
$$y_1(2) = 1, \quad y_2(2) = 2, \quad y_3(2) = 5, \quad y_1(4) = 3, \quad y_2(4) = 4, \quad y_3(4) = 9.$$

2.10. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^2 [2xy + (y')^2]dx, \quad y(0) = 0.$$

2.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + 2(y_2')^2 + y_2^2]dx,$$
$$y_1(0) = -2, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = -e^{-1}, \quad y_2(1) = 0,$$
$$y_1 - y_2' = 0.$$

2.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2dx,$$
$$y(0) = y(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 ydx = 1, \quad \int\limits_0^1 xydx = 0.$$

2.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [8y_1'y_2' - y_1^2 + y_2^2]dx + \sin y_1(0) - 2\cos y_2(0).$$

2.14. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^a [(y')^2 + x^2]dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 0$, $y(a) = 3$, $a > 0$? Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

2.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^1 e^x(y')^3dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = e^{-1}.$$

2.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_0^1 [x(y')^2 + x^2y^2]dx, \quad y(0) = -1, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$$

3.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,-2,1)$, $\vec{f}_2 = (-1,1,-2)$, $\vec{f}_3 = (2,1,-3)$, $\vec{x} = (11,-6,5)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

3.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (7x_2 + 2x_3, -7x_1 + 5x_3, -2x_1 - 5x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + x_3, -x_2, x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_2\widehat{G}_1$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 23.13.

3.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 5, \\ \lambda_3 = 7; \end{matrix} \qquad 2)\ \ A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = 1. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

3.5. Определить, сходится ли последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{\sin n^2 x}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

к функции $y_0(x) = 0$ по норме пространства: а) $C[0,\pi]$; б) $C^1[0,\pi]$.

3.6. Исследовать на непрерывность функционал

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx, \quad y(x) \in C^1[0,1]$$

в слабой окрестности функции $y(x) = 0$.

3.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 + 4y^2 + 2y\cos x]dx, \quad y(0) = \frac{4}{5}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}.$$

3.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y')^2 + (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = \operatorname{ch} 1.$$

3.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1 y_2]dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = 1.$$

3.10. Методами вариационного исчисления найти кратчайшее расстояние от точки $A(0,0)$ до кривой $y = 1/x^4$.

3.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + x^3]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(1) = 2, \quad y_2(0) = y_1(1) = 1,$$
$$y_1 - 2y_2 + 3x = 0.$$

3.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^\pi (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1, \quad \int\limits_0^\pi y \sin x dx = 0.$$

3.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y] = \int\limits_0^2 [(y')^2 - y]dx + y^2(0), \quad y(2) = 4.$$

3.14. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(y)\sqrt{1 + (y')^2}dx,$$

проходящей через точки $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, $f(y) > 0$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

3.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_1^2 [x^2(y')^2 - yy']dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

3.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_{-1}^1 [(y')^2 + x^2y^2]dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$$

4.1. В базисе $\{\vec{e_i}\}$: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1, -1, 1)$, $\vec{f}_2 = (-1, 4, 3)$, $\vec{f}_3 = (8, 1, -1)$, $\vec{x} = (8, 4, 1)$.
  а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f_i}\}$ образует базис;
  б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e_i}\}$ к базису $\{\vec{f_i}\}$;
  в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f_i}\}$;
  г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e_i}\}$ и $\{\vec{f_i}\}$.

4.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам
$$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_1),$$
$$\widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$
  а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
  б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e_i}\}$;
  в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_2\widehat{G}_1$ действует на вектор $\vec{x}$;
  г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f_i}\}$ из предыдущей задачи 22.13.

4.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц
$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

4.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где
$$1)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 5; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = 0. \end{matrix}$$
Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

4.5. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:
$$J[y] = \int_0^1 xy^3 dx, \quad y_0(x) = \sin x, \quad \delta y(x) = x.$$

4.6. Известно, что функционал $J[y]$ – дифференцируем. Будет ли дифференцируемым функционал $J^2[y]$? Записать первую вариацию функционала $J^2[y]$.

4.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения
$$J[y] = \int_0^1 [xyy' - 2(y')^2]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = \operatorname{ch}\frac{1}{2}.$$

4.8. Найти допустимые экстремали функционала
$$J[y] = \frac{1}{2}\int_0^1 (y'')^2 dx,$$
$$y(0) = y(1) = y'(1) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

4.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 (y_1' y_2' + 6xy_1 + 12x^2 y_2)dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1.$$

4.10. Найти допустимые экстремали и значения x_1 и x_2 в задаче с подвижными границами

$$J[y] = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (y')^2}dx, \quad y(x_1) = x_1^2, \quad y(x_2) = x_2 - 5.$$

4.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + 1]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, \quad y_1(1) = 4,$$

$$y_1 + y_2 - 2x^2 = 0.$$

4.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^\pi y \sin x dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi, \quad \int\limits_0^\pi (y')^2 dx = \frac{3}{2}\pi.$$

4.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + 4(y_2')^2 + y_2 + xy_1]dx + y_1(0)y_2^2(1), \quad y_1(1) = 0.$$

4.14. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{-1}^1 [12xy + (y')^2 + x^2]dx,$$

проходящей через точки $y(-1) = -2$, $y(1) = 0$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

4.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_1^e [x^2(y')^3 + x]dx, \quad y(1) = 1, \quad y(e) = 2.$$

4.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_{-\pi}^\pi [(y')^2 + y^2 \sin x]dx, \quad y(-\pi) = 1, \quad y(\pi) = 1, \quad n = 2.$$

5.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3, 1, 2)$, $\vec{f}_2 = (2, 0, 3)$, $\vec{f}_3 = (1, 0, 2)$, $\vec{x} = (3, 5, -6)$.
   а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
   б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
   в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
   г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

5.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам
$$\widehat{G}_1\vec{x} = (9x_1 - 12x_2 + 3x_3, -12x_1 + 16x_2 - 4x_3, 3x_1 - 4x_2 + x_3), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (-x_2, x_3 - x_1, 2x_1).$$
   а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
   б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
   в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2\widehat{G}_1 - \widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;
   г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 21.13.

5.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц
$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где
$$1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = -1; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = 1. \end{matrix}$$
Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

5.5. Найти расстояние между элементами $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в пространствах $C[a, b]$ и $C^1[a, b]$:
$$y_1(x) = \ln x, \quad y_2(x) = x, \quad x \in [e^{-1}, e].$$

5.6. Исследовать непрерывность функционала
$$J[y] = |y(0)|, \quad y(x) \in C[-1, 1].$$

5.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения
$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} [(y' + y)^2 + 2y \sin x]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 1.$$

5.8. Найти допустимые экстремали функционала
$$J[y] = \int\limits_0^1 (y''')^2 dx,$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4, \quad y''(1) = 12.$$

5.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1]dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_1(1) = \frac{3}{2}, \quad y_2(1) = 1.$$

5.10. Найти допустимые экстремали и значение x_2 в задаче с подвижными границами

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 + y^2]dx, \quad y(x_2) + x_2 - 1 = 0.$$

5.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + y_2^2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(1) = 0, \quad y_2(0) = y_1(1) = 1,$$

$$y_1' - y_2 = 0.$$

5.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y')^2 + y^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}, \quad \int\limits_0^1 e^{-x} y dx = \frac{1}{4}(1 - 3e^{-2}).$$

5.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2]dx + y^2(0) - y^2(\pi/2) + 4y(\pi/2).$$

5.14. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^2 [6(y')^2 - (y')^4 + yy']dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 0$, $y(2) = e$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

5.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} [4y \cos x + (y')^2 - y^2]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

5.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_0^1 [\cos x (y')^2 - 2y]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$$

6.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,2,1)$, $\vec{f}_2 = (2,3,1)$, $\vec{f}_3 = (-1,-3,-1)$, $\vec{x} = (2,1,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

6.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_1+2x_2, x_3, -x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1+2x_2-x_3, 2x_1+4x_2-2x_3, -x_1-2x_2+x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_2\widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 20.13.

6.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

6.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 5, \\ \lambda_3 = 7; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 6, \\ \lambda_3 = 6. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

6.5. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_{-1}^{1} (y^2 + y')dx, \quad y_0(x) = \sin x, \quad \delta y(x) = x.$$

6.6. Исследовать дифференцируемость функционала

$$J[y] = y(0), \quad y(x) \in C^1[-1,1].$$

6.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_{0}^{1/2} \left[\frac{(y')^2}{x^2-1} - \frac{2y^2}{(x^2-1)^2}\right] dx, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 2.$$

6.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{0}^{1} [48y - (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 4.$$

6.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \left[y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = e.$$

6.10. Найти допустимые экстремали и значение x_2 в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) = x_2 - 10.$$

6.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi} [(y_1')^2 - (y_2')^2] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(\pi) = 0, \quad y_2(\pi) = \pi/2,$$
$$y_1' - y_2 + \cos x = 0.$$

6.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 y_1' y_2' dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1, \quad \int\limits_0^1 y_1 dx = 1, \quad \int\limits_0^1 y_2 dx = 0.$$

6.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 (y_1' y_2' + y_1 y_2) dx + y_1(0) y_2(1) + y_1(1) y_2(0).$$

6.14. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [1 + (y')^2] dx,$$

проходящей через точки $y(0) = y(1) = 0$? Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

6.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^3 (9 - x^2)(y')^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(3) = \pi/2.$$

6.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(x^2 + 1)(y')^2 + xy] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad n = 2.$$

7.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (4,2,-1)$, $\vec{f}_2 = (5,3,-2)$, $\vec{f}_3 = (3,2,-1)$, $\vec{x} = (4,3,-2)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

7.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (8x_3 - 2x_2, 4x_3 + 2x_1, -4x_2 - 8x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_2, x_1 + x_3, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 19.13.

7.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

7.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 6 & -7 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = -3; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 3+i, \\ \lambda_3 = 3-i. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

7.5. Найти расстояние первого порядка между кривыми $y_1(x) = xe^{-x}$, $y_2(x) = 0$ на отрезке $[-1,3]$.

7.6. Исследовать на непрерывность функционал

$$J[y] = \int\limits_1^2 |y'|dx, \quad y(x) \in C^1[1,2],$$

в сильной окрестности функции $y(x) = 0$.

7.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^2 \left[(y')^2 + \frac{6y^2}{x^2} - 32y\ln x\right]dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 4(4\ln 2 + 3).$$

7.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y'')^2 - 24xy]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{5}, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

7.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \left[y_1^2 + y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(1) = e, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = e.$$

7.10. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^1 [2y + 6y' + (y')^2]dx, \quad y(0) = 0.$$

7.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1y_2]dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = -1, \quad y_1(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} + 1, \quad y_2(\pi/2) = \frac{\pi^2}{4} - 1,$$

$$y_1' - y_2' - 4x = 0.$$

7.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 (y_1 + y_2)dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = -3, \quad \int\limits_0^1 y_1'y_2'dx = 0.$$

7.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y] = \int\limits_0^1 y'(x + y')dx + 2y(1), \quad y(0) = 1.$$

7.14. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 y(y')^2dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 3$, $y(1) = 3$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

7.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_1^2 [x^5(y')^2 - 3yy']dx, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 1.$$

7.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_{-3}^3 [(4x)(y')^2 + 3y^2]dx, \quad y(-3) = 3, \quad y(3) = -3, \quad n = 2.$$

8.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,-1,-1)$, $\vec{f}_2 = (1,1,-1)$, $\vec{f}_3 = (1,1,1)$, $\vec{x} = (2,3,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

8.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_3 - x_2, -2x_3 + x_1, 2x_2 - x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1 - \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 18.13.

8.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

8.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 1; \end{matrix} \qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 3i, \\ \lambda_3 = -3i. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

8.5. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^{2\pi} (x + y + y')dx, \quad y_0(x) = \sin 2x, \quad \delta y(x) = x^2.$$

8.6. Известно, что функция $\varphi(u)$ дифференцируема как функция переменной u. Будет ли функционал $J[y] = \varphi(y(0))$ дифференцируемым в пространстве: а) $C[-1,1]$; б) $C^1[-1,1]$? Записать первую вариацию функционала.

8.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_{-2}^{-1} \left[x^3(y')^2 + 3xy^2 - \frac{6y}{x}\right] dx, \quad y(-2) = \frac{1}{4}, \quad y(-1) = 1.$$

8.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y''')^2 + (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(1) = y''(1) = \operatorname{sh} 1, \quad y'(1) = \operatorname{ch} 1.$$

8.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_1^2 \left[12y_1^2 + y_2^2 + x^2(y_1')^2 + (y_2')^2\right] dx,$$

$$y_1(1) = 1, \quad y_1(2) = 8, \quad y_2(1) = e, \quad y_2(2) = e^2.$$

8.10. Методами вариационного исчисления найти кратчайшее расстояние от точки $A(1, 0)$ до эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

8.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_2')^2 - 2y_1'y_2' - 2y_1^2]dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = 0,$$
$$y_1' - y_2' = 0.$$

8.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 y_1'y_2'dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = 0, \quad y_2(1) = 1, \quad \int\limits_0^1 xy_1'dx = 0, \quad \int\limits_0^1 xy_2'dx = 0.$$

8.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}(y_1')^2 + \frac{1}{2}(y_2')^2 - y_1y_2\right] dx + y_2(1), \quad y_1(1) = 0.$$

8.14. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y')^2 - y^2]dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$? Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

8.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^4 x(y')^3dx, \quad y(\pi/4) = 1, \quad y(\pi/2) = 0.$$

8.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_3^6 [3(y')^2 + 6y^2 + y]dx, \quad y(3) = 3, \quad y(6) = 6, \quad n = 2.$$

9.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,-1,2)$, $\vec{f}_2 = (1,2,4)$, $\vec{f}_3 = (-3,1,-1)$, $\vec{x} = (2,4,9)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

9.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (-x_2 - 7x_3, x_1 + 4x_3, 7x_1 - 4x_2),$$
$$\widehat{G}_2\vec{x} = (16x_1 + 28x_2 - 4x_3, 28x_1 + 49x_2 - 7x_3, -4x_1 - 7x_2 + x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1 + \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 17.13.

9.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -7 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

9.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = -2; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 3. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

9.5. Найти расстояние первого порядка между указанными кривыми на заданном промежутке

$$y_1(x) = x^2, \quad y_2(x) = x, \quad x \in [0,1].$$

9.6. Исследовать непрерывность функционала

$$J[y] = y(0) + y'(0) - y(0)y'(0), \quad y(x) \in C^1[-1,1].$$

9.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^2 \left[\frac{3y^2}{x^3} + x^2 + \frac{(y')^2}{x}\right] dx, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = \frac{17}{2}.$$

9.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y'')^2 - (y')^2] dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

9.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} \left[(y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1y_2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(\pi/2) = e^{\pi/2}, \quad y_2(0) = -1, \quad y_2(\pi/2) = -e^{\pi/2}.$$

9.10. Найти допустимые экстремали и значение x_2 в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [3(y')^2 y - x(y')^3] dx, \quad y(0) = 0.$$

9.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + (y_1')^2 + (y_2')^2} dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 2, \quad y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 1,$$
$$2y_1 - y_2 - 3x = 0.$$

9.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = y_2(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 y_1 y_2 dx = -2.$$

9.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/4} [2(y')^2 + yy' + 8y^2] dx + y(0) + y^2(\pi/4).$$

9.14. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_2^3 \frac{x^3}{(y')^2} dx,$$

проходящей через точки $y(2) = 4$, $y(3) = 9$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

9.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^1 ((y')^2 - y^2 - y) e^{2x} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = e^{-1}.$$

9.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(x^3)(y')^2 - y^2 - y] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = -1, \quad n = 2.$$

10.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (2,1,0)$, $\vec{f}_2 = (2,-1,2)$, $\vec{f}_3 = (2,2,-1)$, $\vec{x} = (3,7,-7)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

10.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (-3x_2 + 2x_3, 3x_1 + 4x_3, -2x_1 - 4x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_3, 2x_1, x_1 + x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_2\widehat{G}_1$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 16.13.

10.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

10.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = 5; \end{matrix} \qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 0. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

10.5. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^3 xy^4 dx, \quad y_0(x) = x, \quad \delta y(x) = x^2.$$

10.6. Исследовать дифференцируемость функционала

$$J[y] = y(0)y'(0), \quad y(x) \in C^1[-1,1].$$

10.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^4 \left[\frac{2yy'}{x} - \frac{3y^2}{x^2} - (y')^2 - \frac{y}{x}\right] dx, \quad y(1) = 4, \quad y(4) = 4.$$

10.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^b [(y'')^2 + (y')^2] dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(b) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(b) = 0.$$

10.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \left[2y_1 + y_2^2 + (y_1')^2 + (y_2')^2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = \frac{1}{2}, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = e^{-1}.$$

10.10. Найти допустимые экстремали и значение x_2 в задаче с подвижными границами

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 + y]dx, \quad y(x_2) = x_2.$$

10.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2]dx,$$

$$y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = -1, \quad y_2(1) = 1,$$
$$y_1 + y_2 - 2x^2 + x + 1 = 0.$$

10.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 x(y_1 - y_2)dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = y_2(1) = 0, \quad y_1(1) = 2, \quad \int\limits_0^1 y_1' y_2' dx = -\frac{4}{5}.$$

10.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{-1}^0 \left[\frac{1}{2}(y_1')^2 - \frac{1}{2}(y_2')^2 + xy_1' + y_2\right] dx + y_1(0) - y_2(-1),$$

$$y_1(-1) = 1, \quad y_2(0) = 0.$$

10.14. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y')^2 + 9y^2 - 3x]dx,$$

проходящей через точки $y(0) = y(1) = 0$? Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

10.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/4} (1 + x^2)^2 (y')^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 1.$$

10.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y')^2 + (x^3 - 1)y^2 - x]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3, \quad n = 2.$$

11.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1=(2,-1,2)$, $\vec{f}_2=(-6,7,7)$, $\vec{f}_3=(1,1,-1)$, $\vec{x}=(4,0,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

11.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x}=(2x_3+x_2,-x_3-x_1,x_2-2x_1),\quad \widehat{G}_2\vec{x}=(2x_3,x_1,x_2+x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2+\widehat{G}_2\widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 15.13.

11.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1=\begin{pmatrix}2&-5\\1&6\end{pmatrix},\qquad G_2=\begin{pmatrix}4&0&0\\5&-2&3\\-7&4&2\end{pmatrix}.$$

11.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,'=A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A=\begin{pmatrix}-1&2&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=2,\\ \lambda_2=-1,\\ \lambda_3=0;\end{matrix}\qquad 2)\ \ A=\begin{pmatrix}9&-6&-2\\18&-12&-3\\19&-9&-6\end{pmatrix}\ \begin{matrix}\lambda_1=-3,\\ \lambda_2=-3,\\ \lambda_3=-3.\end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

11.5. Найти норму элемента $y(x)$ в пространствах $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$:

$$y(x)=\frac{\sin x}{n},\quad n=1,10,100,\quad x\in[0,1].$$

11.6. Исследовать на непрерывность функционал

$$J[y]=\int\limits_1^2|y'|dx,\quad y(x)\in C^1[1,2],$$

в слабой окрестности функции $y(x)=0$.

11.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y]=\int\limits_0^1[e^x(y'-x)^2+2y]dx,\quad y(0)=1,\quad y(1)=\frac{1}{2}.$$

11.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y]=\int\limits_0^{\pi}[(y''')^2-(y'')^2]dx,$$

$$y(0)=y'(0)=y''(0)=0,\quad y(\pi)=\pi,\quad y'(\pi)=2,\quad y''(\pi)=0.$$

11.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} \left[(y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1y_2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(\pi/2) = e^{\pi/2}, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(\pi/2) = e^{\pi/2}.$$

11.10. Найти допустимые экстремали и значение x_2 в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 - y^2] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) = \sin 2x_2.$$

11.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 - (y_2')^2] dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = \frac{\pi}{4}, \quad y_2(\pi/2) = -\frac{1}{2},$$

$$y_1' - y_2 - \sin x = 0.$$

11.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = 6, \quad \int\limits_0^1 y(x) dx = 3.$$

11.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y] = \int\limits_1^3 x\sqrt{1 + (y')^2} dx - y(3), \quad y(1) = 0.$$

11.14. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_1^2 [x(y')^4 - 2y(y')^3] dx,$$

проходящей через точки $y(1) = 0$, $y(2) = 1$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

11.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_1^e [x(y')^2 + 2xy^3 + 3x^2y^2y'] dx, \quad y(1) = 1, \quad y(e) = 2.$$

11.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y')^2 - (x^2 - 1)y] dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1, \quad n = 2.$$

12.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (-7,3,7)$, $\vec{f}_2 = (-1,2,2)$, $\vec{f}_3 = (0,2,1)$, $\vec{x} = (-6,-1,4)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

12.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + x_3, x_2 - x_1),$$
$$\widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + 4x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_2\widehat{G}_1$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 14.13.

12.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

12.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \begin{array}{l} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 3; \end{array} \qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2 + i, \\ \lambda_3 = 2 - i. \end{array}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

12.5. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} xyy'dx, \quad y_0(x) = \sin x, \quad \delta y(x) = \cos x.$$

12.6. Известно, что функция двух переменных $\varphi(u,v)$ дифференцируема. Будет ли функционал $J[y] = \varphi(y(-1), y(1))$ дифференцируемым в пространстве $C[-1,1]$ Записать первую вариацию функционала.

12.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^2 [24x^3y - yy' - x^2(y')^2]dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = -7.$$

12.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 e^{-x}(y'')^2dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e, \quad y'(0) = 1, \quad y'(1) = 2e.$$

12.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [y_1y_2 + y_1'y_2']\, dx,$$

$$y_1(0) = 1, \quad y_1(1) = e, \quad y_2(0) = 1, \quad y_2(1) = e.$$

12.10. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_1^2 [x^2(y')^2 + 6y^2 + 2x^3y]dx, \quad y(1) = \frac{1}{6}.$$

12.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 - (y_2')^2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = -2, \quad y_2(\pi/2) = 0,$$

$$y_1' - y_2 + 1 = 0.$$

12.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 [x^2 + (y')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad \int\limits_0^1 y^2(x)dx = 2.$$

12.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{-1}^2 [(y_1')^2 + (y_2')^2 - y_1^2 + y_2]dx - 4y_2(-1), \quad y_1(2) = -\frac{3}{2}.$$

12.14. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^a [(y')^2 - y^2]dx,$$

проходящей через точки $y(0) = y(a) = 0$? Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

12.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^3 [xy' - (y')^3]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(3) = 2.$$

12.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_{-2}^1 ((y')^2 + y^2 + xy)dx, \quad y(-2) = -2, \quad y(1) = 1, \quad n = 2.$$

13.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (4,1,-2)$, $\vec{f}_2 = (5,2,-3)$, $\vec{f}_3 = (2,3,-4)$, $\vec{x} = (-2,2,-2)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

13.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (4x_2 - 3x_3, -4x_1 + 2x_3, 3x_1 - 2x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_3, -x_2, x_1 + x_2).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1\widehat{G}_2 + \widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 12.13.

13.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1; \end{matrix} \qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = 1 + i, \\ \lambda_2 = 1 - i, \\ \lambda_3 = -1. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

13.5. Определить, сходится ли последовательность функций

$$y_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

к функции $y_0(x) = 0$ по норме пространства: а) $C[0,\pi]$; б) $C^1[0,\pi]$.

13.6. Исследовать непрерывность функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 y\,dx, \quad y(x) \in C[0,1].$$

13.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/4} \left[\frac{(y')^2}{\cos x} + \frac{y}{\cos^2 x}\right] dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

13.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 (x+1)^3 (y'')^2 dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = -1, \quad y'(1) = -\frac{1}{4}.$$

13.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [y_1' y_2' - y_1 y_2]\, dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/2) = 1.$$

13.10. Методами вариационного исчисления найти кратчайшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $y = x - 1$.

13.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 - (y_2')^2] dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = 1,$$

$$y_1' - y_2 - 2\cos(2x) = 0.$$

13.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{4}, \quad \int\limits_0^1 (y - (y')^2) dx = \frac{1}{12}.$$

13.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y] = \int\limits_1^2 [(y')^2 + 12xy] dx + 12y(1) + y^2(2).$$

13.14. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^2 [(y')^4 + (y')^2] dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 1$, $y(2) = 5$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

13.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_{-1}^1 [(y')^2 - 2xy] dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

13.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_0^1 [(y')^2 + y^2 + xy] dx, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 2, \quad n = 2.$$

14.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,2,3)$, $\vec{f}_2 = (1,1,-2)$, $\vec{f}_3 = (3,5,3)$, $\vec{x} = (-8,-12,-2)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;

б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;

в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

14.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$\widehat{G}_1\vec{x} = (9x_1-12x_2+3x_3, -12x_1+16x_2-4x_3, 3x_1-4x_2+x_3)$, $\quad \widehat{G}_2\vec{x} = (-x_2, x_3-x_1, 2x_1)$.

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;

б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;

в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2\widehat{G}_1 - \widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;

г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 13.13.

14.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

14.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 6; \end{matrix} \qquad 2)\ \ A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = 1. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

14.5. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^1 (xy + y'x^2)dx, \quad y_0(x) = x, \quad \delta y(x) = x + 1.$$

14.6. Исследовать дифференцируемость функционала

$$J[y] = y^2(0), \quad y(x) \in C[-1,1].$$

14.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^4 \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right) y^2 + 2yy'\ln x - 4(y')^2 - 10y\right] dx, \quad y(1) = -1, \quad y(4) = 0.$$

14.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} [(y''')^2 - (y')^2]dx,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(\pi) = y''(\pi) = \operatorname{sh}\pi, \quad y'(\pi) = \operatorname{ch}\pi + 1.$$

14.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 \left[2y_1^2 + 2y_1y_2 + (y_1')^2 - (y_2')^2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(1) = 2\operatorname{sh} e, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = -2\operatorname{sh} e.$$

14.10. Найти допустимые экстремали и значение x_2 в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 - y^2 - 2y]dx, \quad y(0) = 0.$$

14.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 - (y_2')^2 + 5y_1y_2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$

$$y_1' + y_2' - 2 = 0.$$

14.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e - 3, \quad \int\limits_0^1 ye^x dx = 0.$$

14.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{-1}^2 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + y_1'y_2' + y_1y_2]dx + y_1(-1)y_2(2), \quad y_1(2) = 2.$$

14.14. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^a y'e^{y'} dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 1$, $y(a) = b$ $(a > 0)$? Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

14.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_{-1}^1 [(y')^3 + y + xy']dx, \quad y(-1) = -1, \quad y(1) = 1.$$

14.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_3^4 [(x^2 - 1)(y')^2 + yy']dx, \quad y(3) = 1, \quad y(4) = 1, \quad n = 2.$$

15.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3,2,-4)$, $\vec{f}_2 = (4,-1,-2)$, $\vec{f}_3 = (5,2,-3)$, $\vec{x} = (9,5,-8)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

15.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_2 - 3x_3, -x_1 + 4x_3, 3x_1 - 4x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (2x_1, -x_3, x_2).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2\widehat{G}_1 + \widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 11.13.

15.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 10 & -3 & -8 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

15.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2, \\ \lambda_3 = 10; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

15.5. Найти расстояние между элементами $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в пространствах $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$:

$$y_1(x) = \sin 2x, \quad y_2(x) = \sin x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

15.6. Исследовать на непрерывность функционал

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 + (y')^2}dx, \quad y(x) \in C^1[0,\pi]$$

в сильной окрестности функции $y(x) = 0$.

15.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^2 [(xy' + y)^2 + (1 + x^2)y']dx, \quad y(1) = -\frac{1}{2}, \quad y(2) = 1.$$

15.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y'')^2 - y^2 + x^2]dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = -1.$$

15.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} \left[2y_1y_2 - 2y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2\right] dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\pi/2) = -1.$$

15.10. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижными границами

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/2} [4y^2 + (y')^2 + 2y\cos x]dx.$$

15.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + 5y_1y_2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$

$$y_1 - y_2 = 0.$$

15.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 2e + 1, \quad y(1) = 2, \quad \int\limits_0^1 ye^{-x}dx = e.$$

15.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y] = \int\limits_2^5 (x+1)\sqrt{1 + (y')^2}dx + y(2), \quad y(5) = 4.$$

15.14. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{-1}^1 [x^2(y')^2 + 12y^2]dx,$$

проходящей через точки $y(-1) = 1, y(1) = 1$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

15.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^1 [x + (y')^2]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

15.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y^2 - xy')dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1, \quad n = 2.$$

16.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (3, 5, 3)$, $\vec{f}_2 = (2, 0, 3)$, $\vec{f}_3 = (0, 1, -1)$, $\vec{x} = (-14, -7, -13)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

16.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам
$\widehat{G}_1\vec{x} = (x_1+2x_2, x_3, -x_2)$, $\quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1+2x_2-x_3, 2x_1+4x_2-2x_3, -x_1-2x_2+x_3)$.

а) Доказать, что $\widehat{G}_2$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_2\widehat{G}_1)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 10.13.

16.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

16.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1; \end{matrix} \qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 3. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

16.5. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^1 xy^3dx, \quad y_0(x) = x, \quad \delta y(x) = \sin x.$$

16.6. Исследовать дифференцируемость функционала

$$J[y] = \sqrt{1 + (y'(a))^2}, \quad y(x) \in C^1[a, b].$$

16.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_1^2 \left[12xy - \frac{12}{x}yy' - 3(y')^2\right] dx, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y(2) = 0.$$

16.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [-2xy + (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{5!}, \quad y'(1) = \frac{1}{12}.$$

16.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/4} (2y_2 - 4y_1^2 + (y_1')^2 - (y_2')^2)dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\frac{\pi}{4}) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\frac{\pi}{4}) = 1.$$

16.10. Найти допустимые экстремали и значение x_2 в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 + y^2]dx, \quad y(0) = 0, \quad y(x_2) = \operatorname{ch} x_2.$$

16.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + 5y_1]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$

$$y_1 + y_2 - 2x^2 = 0.$$

16.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = e - 3, \quad \int\limits_0^1 ye^x dx = 0.$$

16.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{-1}^2 (y_1'y_2' + y_1y_2 + y_1)dx + y_1(-1)y_2(2), \quad y_1(2) = 0.$$

16.14. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^2 [(y')^2 + xy']dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 1$, $y(2) = 0$? Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

16.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_0^2 [e^x(y')^3 + y']dx, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = e^{-1}.$$

16.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_1^3 [(y')^2 - xy^2]dx, \quad y(1) = 3, \quad y(3) = 1, \quad n = 2.$$

17.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (4,-5,-3)$, $\vec{f}_2 = (1,-1,-1)$, $\vec{f}_3 = (-1,1,2)$, $\vec{x} = (2,-1,-1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

17.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (7x_2 + 2x_3, -7x_1 + 5x_3, -2x_1 - 5x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_1 + x_3, -x_2, x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $\widehat{G}_2\widehat{G}_1$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 9.13.

17.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

17.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 5; \end{matrix} \qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = -7, \\ \lambda_2 = 7, \\ \lambda_3 = 7. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

17.5. Найти расстояние второго порядка между кривыми $y_1(x) = x$, $y_2(x) = -\cos x$ на отрезке $[0, \pi/3]$.

17.6. Исследовать непрерывность функционала

$$J[y] = \int_0^1 [y^2 + (y')^2]dx, \quad y(x) \in C[0,1].$$

17.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int_0^1 \left[(1+x^2)(y')^2 - 4xy' + yy'\sin^2 x + \frac{1}{2}y^2 \sin 2x\right] dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = \ln 2.$$

17.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^1 [1 + x^2 + 2(y''')^2]dx,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 6, \quad y''(1) = 22.$$

17.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{-1}^{1} (2xy_1 - (y_1')^2 + \frac{1}{3}(y_2')^3)dx,$$
$$y_1(-1) = 2, \quad y_1(1) = 0, \quad y_2(-1) = -1, \quad y_2(1) = 1.$$

17.10. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижной границей

$$J[y] = \int\limits_{0}^{1} [y + xy' + (y')^2]dx, \quad y(0) = 0.$$

17.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{0}^{1} [(y_1')^2 + 5y_2]dx,$$
$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$
$$y_1 + y_2' - 2x^3 = 0.$$

17.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_{0}^{1} [y^2 + (y')^2]dx,$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 4e, \quad \int\limits_{0}^{1} ye^x dx = 1 + e^2.$$

17.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y] = \int\limits_{0}^{1} [(y')^2 - y]dx - \frac{1}{2}y^2(1).$$

17.14. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{0}^{1} [(y')^2 - yy']dx,$$

проходящей через точки $y(0) = y(1) = 0$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

17.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_{-1}^{0} [(y')^2 - 3xy]dx, \quad y(-1) = 0, \quad y(0) = 2.$$

17.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (y^2 + xy')dx, \quad y(-\pi) = 1, \quad y(\pi) = 0, \quad n = 2.$$

18.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,2,3)$, $\vec{f}_2 = (2,3,1)$, $\vec{f}_3 = (1,1,-3)$, $\vec{x} = (2,4,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

18.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (8x_3 - 2x_2, 4x_3 + 2x_1, -4x_2 - 8x_1), \quad \widehat{G}_2\vec{x} = (x_2, x_1 + x_3, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2 + \widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 8.13.

18.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

18.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 10 & 1 \end{pmatrix}, \begin{array}{c} \lambda_1 = -4, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = 9; \end{array} \qquad 2)\ \ A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & 6 & -8 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{array}{c} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 1. \end{array}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

18.5. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y] = \int\limits_0^1 (xy^2 + y'x)dx, \quad y_0(x) = x^2, \quad \delta y(x) = x.$$

18.6. Исследовать дифференцируемость функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 y(x)dx, \quad y(x) \in C[0,1].$$

18.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi/4} \left[yy'\operatorname{arctg} x - (y')^2 + \frac{y^2}{2(1+x^2)} - 9y^2 + 16y\operatorname{sh} x\right]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\operatorname{sh}^3\frac{\pi}{4} + \operatorname{sh}\frac{\pi}{4}.$$

18.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^1 [2e^x y - (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = y'(0) = 1, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 2e.$$

18.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} ((y_1')^2 + (y_2')^2 - 2y_1 y_2)dx,$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_1(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(\frac{\pi}{2}) = 1.$$

18.10. Методами вариационного исчисления найти кратчайшее расстояние от точки $A(-1, 5)$ до параболы $x = y^2$.

18.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^{\pi/2} [(y_1')^2 - y_1 y_2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(\pi/2) = 1, \quad y_2(\pi/2) = 1,$$

$$y_1 - y_2' - 2\cos x = 0.$$

18.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_0^1 [2xy + (y')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 3, \quad \int\limits_0^1 xy dx = 1.$$

18.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{-1}^2 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + y_1' y_2' + y_1 y_2]dx + y_1(-1)y_2(2), \quad y_1(2) = 2.$$

18.14. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_0^a [(y')^2 + 2yy' - 16y^2]dx,$$

проходящей через точки $y(0) = 0$, $y(a) = 0$ $(a > 0)$? Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

18.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_{-1}^1 [e^y + e^y xy' - (y')^3]dx, \quad y(-1) = 1, \quad y(1) = 1.$$

18.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_{-2\pi}^{2\pi} (xy^2 + xy')dx, \quad y(-2\pi) = 0, \quad y(2\pi) = 0, \quad n = 2.$$

19.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1 = (1,-1,-1)$, $\vec{f}_2 = (1,1,-1)$, $\vec{f}_3 = (1,1,1)$, $\vec{x} = (2,3,1)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

19.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x} = (-3x_3 - 5x_2, -2x_3 + 5x_1, 2x_2 + 3x_1),$$
$$\widehat{G}_2\vec{x} = (4x_1 - 6x_2 + 10x_3, -6x_1 + 9x_2 - 15x_3, 10x_1 - 15x_2 + 25x_3).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 7.13.

19.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G_2 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

19.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2, \\ \lambda_3 = 3; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = -9, \\ \lambda_2 = -9, \\ \lambda_3 = 9. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

19.5. Найти расстояние первого порядка между указанными кривыми на заданном промежутке

$$y_1(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad y_2(x) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

19.6. Исследовать на непрерывность функционал

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 + (y')^2}dx, \quad y(x) \in C^1[0,\pi],$$

в слабой окрестности функции $y(x) = 0$.

19.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y] = \int\limits_0^{\pi} [(y')^2 + y^2 - 4y\sin x]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = e^{\pi}.$$

19.8. Найти допустимые экстремали функционала
$$J[y] = \int\limits_0^1 [4(y')^2 + (y'')^2]dx,$$
$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = \frac{1}{4}(e^2 - 3), \quad y'(1) = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

19.9. Найти допустимые экстремали функционала
$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 ((y_1')^2 + (y_2')^2 + 2y_1)dx,$$
$$y_1(0) = 1, \quad y_1(1) = \frac{3}{2}, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2(1) = 1.$$

19.10. Найти допустимые экстремали и значение x_2 в задаче с подвижной границей
$$J[y] = \int\limits_0^{x_2} [(y')^2 + y]dx, \quad y(0) = 1.$$

19.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа
$$J[y_1, y_2] = \int\limits_0^1 [(y_1')^2 + y_1^2 + y_2^2]dx,$$
$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$
$$y_1 + y_2 = 2x.$$

19.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче
$$J[y] = \int\limits_1^2 x(y')^2]dx,$$
$$y(1) = 0, \quad y(2) = 12, \quad \int\limits_1^2 xydx = 9.$$

19.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца
$$J[y] = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y}dx + y(1), \quad y(0) = 1.$$

19.14. Проверить выполнение условия Лежандра для экстремали функционала
$$J[y] = \int\limits_1^2 [(y')^2 + 2yy' + y^2]dx,$$
проходящей через точки $y(1) = 1$, $y(2) = 0$. Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

19.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал
$$J[y] = \int\limits_0^1 [xy' + (y')^2]dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 1.$$

19.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи
$$J[y] = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\sin xy^2 + yy')dx, \quad y(-\pi) = \pi, \quad y(\pi) = -\pi, \quad n = 2.$$

20.1. В базисе $\{\vec{e}_i\}$: $\vec{e}_1=(1,0,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0)$, $\vec{e}_3=(0,0,1)$ заданы векторы $\vec{f}_1=(2,1,0)$, $\vec{f}_2=(2,-1,2)$, $\vec{f}_3=(2,2,-1)$, $\vec{x}=(3,7,-7)$.

а) Доказать, что совокупность векторов $\{\vec{f}_i\}$ образует базис;
б) записать матрицу перехода от базиса $\{\vec{e}_i\}$ к базису $\{\vec{f}_i\}$;
в) найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$;
г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора относительно базисов $\{\vec{e}_i\}$ и $\{\vec{f}_i\}$.

20.2. Операторы $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ действуют в пространстве L_3 по законам

$$\widehat{G}_1\vec{x}=(-2x_2-2x_3, 2x_1+3x_3, 2x_1-3x_2), \quad \widehat{G}_2\vec{x}=(x_3-x_1, x_2-x_1, x_1).$$

а) Доказать, что $\widehat{G}_1$ — линейный оператор;
б) найти матрицы операторов $\widehat{G}_1$ и $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{e}_i\}$;
в) указать закон, по которому оператор $(\widehat{G}_2-\widehat{G}_1\widehat{G}_2)$ действует на вектор $\vec{x}$;
г) найти матрицу оператора $\widehat{G}_2$ в базисе $\{\vec{f}_i\}$ из предыдущей задачи 6.13.

20.3. Найти собственные значения и собственные векторы матриц

$$G_1=\begin{pmatrix}5&2\\4&3\end{pmatrix}, \qquad G_2=\begin{pmatrix}5&4&0\\0&3&0\\3&-7&4\end{pmatrix}.$$

20.4. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,'=A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\-1&0&-2\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=-1,\\ \lambda_2=0,\\ \lambda_3=1;\end{matrix} \qquad 2)\ \ A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&-2\\4&1&0\\2&1&-1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=-1,\\ \lambda_2=-1,\\ \lambda_3=1.\end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

20.5. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]$ в точке $y_0(x)$, отвечающие вариации аргумента $\delta y(x)$:

$$J[y]=\int\limits_0^{\pi} xy\,dx, \quad y_0(x)=\sin x, \quad \delta y(x)=\cos x.$$

20.6. Исследовать дифференцируемость функционала

$$J[y]=|y(a)|, \quad y(x)\in C[a,b].$$

20.7. Найти допустимые экстремали функционала и исследовать функционал на экстремум, определив знак его приращения

$$J[y]=\int\limits_{1/4}^{1}[6xy'-x^{1/2}y^2-x^{5/2}(y')^2]dx, \quad y\left(\frac{1}{4}\right)=-1, \quad y(1)=1.$$

20.8. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y]=\int\limits_0^{\pi/2\sqrt{2}}[16y^2+(y'')^2]dx,$$

$$y(0)=y'(0)=0, \quad y(\pi/2\sqrt{2})=0, \quad y'(\pi/2\sqrt{2})=-2\sqrt{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{2}.$$

20.9. Найти допустимые экстремали функционала

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{1/2}^{1} ((y_1')^2 - 2xy_1y_2')dx,$$

$$y_1\left(\frac{1}{2}\right) = 2, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2\left(\frac{1}{2}\right) = 15, \quad y_2(1) = 1.$$

20.10. Найти допустимые экстремали функционала в задаче с подвижными границами

$$J[y] = \int\limits_{1}^{e} [x(y')^2 + \frac{1}{x}y^2 + \frac{2\ln x}{x}y]dx.$$

20.11. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в задаче Лагранжа

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{0}^{1} [(y_1')^2 + y_1^2 - y_2^2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 1,$$

$$y_1 + y_2 = 2x^2.$$

20.12. Найти функции, на которых может достигаться экстремум функционала в изопериметрической задаче

$$J[y] = \int\limits_{0}^{\pi} [2y + 3y' + (y')^2]dx,$$

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = \pi^2, \quad \int\limits_{0}^{\pi} y \sin x dx = \pi^2 - 1.$$

20.13. Найти допустимые экстремали функционала в задаче Больца

$$J[y_1, y_2] = \int\limits_{0}^{1} [(y_1')^2 - (y_2')^2 - y_1y_2]dx + y_1(1), \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(1) = -1.$$

20.14. Выполнено ли условие Якоби для экстремали функционала

$$J[y] = \int\limits_{1}^{2} y'(1 + x^2y')dx,$$

проходящей через точки $y(1) = 3$, $y(2) = 5$? Определить возможность включения допустимой экстремали функционала в поле экстремалей.

20.15. С помощью функции Вейерштрасса исследовать на экстремум функционал

$$J[y] = \int\limits_{1}^{2} [x^4(y')^3 + y^2y']dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2.$$

20.16. Методом Ритца найти приближенное решение вариационной задачи

$$J[y] = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (y'x^2 - y^2)dx, \quad y(-\pi) = 1, \quad y(\pi) = 0, \quad n = 2.$$