Геометрические вопросы теории дифференциальных уравнений

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 1 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

1. Теория устойчивости

1.1. Основные понятия

В общем случае трудно получить количественную информацию в отношении решений нелинейных дифференциальных уравнений. Во многих физических задачах независимая переменная x играет роль времени, а зависимая переменная $\boldsymbol{y}$ определяет состояние системы. Часто нет необходимости знать решение явно, а достаточно получить информацию о поведении решения при больших временах. Во многих физических задачах имеются основания считать, что малые изменения в условиях задачи ведут к малым изменениям в решении.

Например, рассмотрим линейное уравнение

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(x)\,, \tag{1.1}$$

где A — постоянная матрица. Пусть $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ — два решения уравнения (1.1), отвечающие различным начальным условиям. Положим

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1,$$

тогда

$$\boldsymbol{z}' = A\boldsymbol{z}\,. \tag{1.2}$$

Пусть все собственные числа матрицы A имеют отрицательную вещественную часть: $\mathrm{Re}\lambda_i < 0 \quad (\forall i)$. Согласно общей теории решение $\boldsymbol{z}$ является суммой функций

$$x^j e^{\lambda_i x}\boldsymbol{c}_{ij} \qquad (j = 0, \dots k_i - 1) \tag{1.3}$$

где k_i — кратность собственного значения λ_i, а $\boldsymbol{c}_{ij}$ — постоянные векторы. Но тогда

$$\boldsymbol{z} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \boldsymbol{0}\,.$$

В этом случае говорят, что решения уравнения (1.1) *устойчивы*. Если хотя бы одно из собственных значений имеет λ_i имеет положительную вещественную часть, общее

решение уравнения (1.2) становится неограниченно большим при $x \to \infty$. В этом случае говорят, что решения уравнения (1.1) *неустойчивы*.

Понятие устойчивости, в действительности, является сложным. Нет единого определения, удовлетворяющего всем целям.

Определение 1.1. Решения уравнения

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \tag{1.4}$$

называются *устойчивыми по Ляпунову*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \qquad \|\boldsymbol{y}_2(x_0) - \boldsymbol{y}_1(x_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{y}_2(x) - \boldsymbol{y}_1(x)\| < \varepsilon \quad (\forall x > x_0),$$

где $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ — произвольные решения уравнения (1.4), а x_0 — фиксированная начальная точка.

Определение 1.2. Решения уравнения (1.4)

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$$

называются *асимптотически устойчивыми*, если

$$\exists \delta > 0 : \qquad \|\boldsymbol{y}_2(x_0) - \boldsymbol{y}_1(x_0)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \|\boldsymbol{y}_2(x) - \boldsymbol{y}_1(x)\| = 0,$$

где $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ — произвольные решения уравнения (1.4), а x_0 — начальная точка.

Например, все решения уравнения (1.1) в случае собственных чисел с отрицательной вещественной частью являются асимптотически устойчивыми.

В некоторых случаях концепция устойчивости зависит от начальных условий. Рассмотрим, например, уравнение

$$y' = -y(y-1)(y-2)\,. \tag{1.5}$$

Оно имеет следующие частные решения

$$y_1 = 0, \qquad y_2 = 1, \qquad y_3 = 2\,.$$

Если $y \neq 0, 1, 2$, то делением переменных найдем общий интеграл

$$(y-1)^2 = \frac{1}{1 + c^2 e^{-2x}}\,.$$

Легко можно исследовать устойчивость решений y_1, y_2, y_3, см. рис. 1. Решения $y = 0$ и $y = 2$ — устойчивы, а $y = 1$ — нет. Любое решение с начальным значением больше 1 приближается к $y = 2$, любое решение с начальным значением меньше 1 приближается к $y = 0$. Если начальное значение равно 1, получаем решение $y = 1$.

Определение 1.3. Решения уравнения (1.4)

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$$

называются *устойчивыми по Ляпунову относительно множества* Ω *начальных условий*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \qquad \begin{cases} \|\boldsymbol{y}_2(x_0) - \boldsymbol{y}_1(x_0)\| < \delta\,, \\ \boldsymbol{y}_1(x_0)\,, \boldsymbol{y}_2(x_0) \in \Omega \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{y}_2(x) - \boldsymbol{y}_1(x)\| < \varepsilon \quad (\forall x > x_0),$$

где $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ — произвольные решения уравнения (1.4), а x_0 — фиксированная начальная точка.

Аналогичное определение дается в отношении асимптотической устойчивости.

Упражнение 1.4. Сформулировать определение асимптотической устойчивости решений уравнения (1.4) в отношении множества Ω начальных условий.

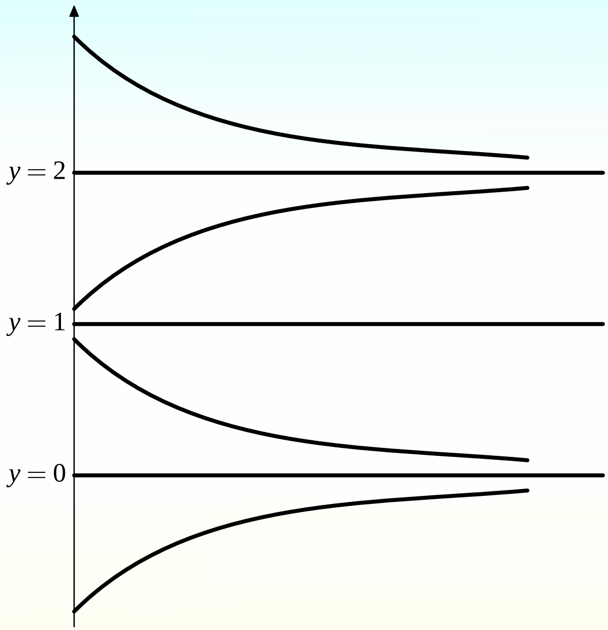


Рис. 1: Решения уравнения $y' = -y(y-1)(y-2)$

В отношении примера (1.5) решение $\boldsymbol{y} = 0$ является асимптотически устойчивым для начальных условий $\boldsymbol{y}(0) < 1$, решение $\boldsymbol{y} = 2$ является асимптотически устойчивым для начальных условий $\boldsymbol{y}(0) > 1$.

Если речь идет об устойчивости частного решения, обычно имеется ввиду устойчивость решений относительно начальных данных, лежащих в достаточно малой окрестности начального условия рассматриваемого частного решения.

Решения системы

$$\boldsymbol{y}' = J\boldsymbol{y}\,, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

не являются асимптотически устойчивыми, поскольку собственные значения матрицы J равны $\pm i$ (вещественная часть не является отрицательной). Однако решения этого уравнения являются устойчивыми по Ляпунову. Действительно, положим

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{Jx}\boldsymbol{y}(0) = (\cos x \cdot I + \sin x \cdot J)\boldsymbol{y}(0) = \begin{pmatrix} b_1 \cos x + b_2 \sin x \\ b_2 \cos x - b_1 \sin x \end{pmatrix}.$$

Если определит норму вектора равенством

$$\|\boldsymbol{b}\| = \max\{|b_1|, |b_2|\}\,,$$

то

$$\|\boldsymbol{y}(x)\| \leqslant 2\|\boldsymbol{y}(0)\|\,.$$

Поэтому, обращаясь к проверке устойчивости по Ляпунову, фиксировав $\varepsilon > 0$, достаточно выбрать $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

В случае линейных дифференциальных систем уравнений (1.1) с постоянными коэффициентами вопросы устойчивости сводятся к изучению корней характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda I) = 0\,. \tag{1.7}$$

Последняя задача, сама по себе, может быть чрезвычайно сложной, однако эти трудности лежат в области специальных вопросов алгебры, см., например, критерий Рауса–Гурвица в [3]. Мы не будем касаться этой темы.

Вопросы устойчивости в линейном случае, но с переменными коэффициентами, а тем более, в нелинейном случае, могут быть несравненно более трудными. Однако, во многих случаях можно достаточно много сказать о характере решений. Примером такого положения является следующая теорема.

Теорема 1.5. *Решения задачи Коши*

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y}) \,, \\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b} \end{cases} \tag{1.8}$$

являются асимптотически устойчивыми, если все собственные числа матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, а функция $\boldsymbol{f}$ непрерывна и удовлетворяет оценке

$$\|\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})\| \leqslant k\|\boldsymbol{y}\| \,, \tag{1.9}$$

где k — достаточно мало (и зависит от A). Например, считая, что

$$\|e^{Ax}\| \leqslant ce^{-\alpha x} \,, \tag{1.10}$$

достаточно требовать, чтобы

$$ck < \alpha \,. \tag{1.11}$$

Доказательство. Положим (в духе метода вариации постоянных)

$$\boldsymbol{y} = e^{Ax}\boldsymbol{z} \,,$$

тогда

$$\boldsymbol{y}' = Ae^{Ax}\boldsymbol{z} + e^{Ax}\boldsymbol{z}' \,,$$

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 7 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

откуда получаем уравнение на z:

$$\begin{cases} \boldsymbol{z}' = e^{-Ax}\boldsymbol{f}(x, e^{Ax}\boldsymbol{z}) \,, \\ \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{b} \,. \end{cases}$$

Интегрируя и умножая на e^{Ax}, найдем

$$\boldsymbol{y}(x) = e^{Ax}\boldsymbol{b} + \int\limits_0^x e^{A(x-t)}\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t))\,dt \,.$$

Тогда

$$\|\boldsymbol{y}(x)\| \leqslant \|e^{Ax}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| + \int\limits_0^x \|e^{A(x-t)}\| \cdot \|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t))\|\,dt$$

$$\leqslant c\|\boldsymbol{b}\|e^{-\alpha x} + \int\limits_0^x ce^{-\alpha(x-t)}k\|\boldsymbol{y}(t)\|\,dt \qquad (x > 0),$$

откуда

$$\frac{ke^{\alpha x}\|\boldsymbol{y}(x)\|}{\|\boldsymbol{b}\| + k\int\limits_0^x e^{\alpha t}\|\boldsymbol{y}(t)\|\,dt} \leqslant ck$$

и, после интегрирования в пределах от 0 до x,

$$\ln\frac{\|\boldsymbol{b}\| + k\int\limits_0^x e^{\alpha t}\|\boldsymbol{y}(t)\|\,dt}{\|\boldsymbol{b}\|} \leqslant ckx \,,$$

т.е.

$$\|\boldsymbol{b}\| + k\int\limits_0^x e^{\alpha t}\|\boldsymbol{y}(t)\|\,dt \leqslant \|\boldsymbol{b}\|e^{ckx} \,,$$

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнения в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 8 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

что ведет к конечной оценке

$$\|\boldsymbol{y}(x)\| \leqslant c\|\boldsymbol{b}\|e^{(ck-\alpha)x} .$$

Если $ck - \alpha < 0$, то $\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{0}$. $\square$

Следствие 1.6. *Решение задачи Коши*

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = (A + B(x))\boldsymbol{y} , \\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b} \end{cases} \tag{1.12}$$

являются асимптотически устойчивыми, если все собственные числа матрицы A имеют отрицательную вещественную часть, а функция $B(x)$ непрерывна и удовлетворяет оценке

$$\|B(x)\| \leqslant k , \tag{1.13}$$

где k — достаточно мало.

Следствие 1.7. *Пусть $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ является решением автономной*[1] *системы*

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) .$$

Если функция $\boldsymbol{f}$ дифференцируема в нуле, то решение $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ является асимптотически устойчивым, если вещественные части всех собственных чисел матрицы Якоби $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{0})$ отрицательны.

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу дифференцируемости $\boldsymbol{f}$ и равенства $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ имеем

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{0})\boldsymbol{y} + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}) , \qquad \|\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})\| \underset{\|\boldsymbol{y}\|\to 0}{=} o(\|\boldsymbol{y}\|) .$$

$\square$

[1] т.е. нет явной зависимости от x

1.2. Прямой метод Ляпунова

Речь пойдет об одном методе исследования на устойчивость, который может быть интерпретирован с чисто физических позиций. Полная энергия физической системы в состоянии устойчивого равновесия должна иметь минимум. Например, полная энергия частицы массы m, совершающей упругие колебания с коэффициентом упругости k вдоль оси x около нуля равна

$$E = \frac{mx'^2}{2} + \frac{kx^2}{2}\,.$$

Дифференциальное уравнение движения такой частицы имеет вид

$$mx'' + cx' + kx = 0\,,$$

где член cx' представляет сопротивление движению, вызванное трением, при этом $c > 0$. Дифференцируя E и используя уравнение движения, найдем

$$E' = mx'x'' + kxx' = x'(mx'' + kx) = -cx'^2 \leqslant 0\,.$$

Это означает, что энергия убывает с течением времени. Но энергия является ограниченной с низу (не отрицательной), следовательно, существует точная нижняя грань значений E, равная в данном случае нулю, что достигается, когда система останавливается в положении $x = 0$. Это означает, что решение $x = 0$ является асимптотически устойчивым.

Идея метода Ляпунова в отношении уравнения

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})\,, \tag{1.14}$$

— найти функцию $V(x, \boldsymbol{y})$, которая ведет себя как энергия системы.

Определение 1.8. Функция $V(x, \boldsymbol{y})$ называется *положительно определенной относительно* $\boldsymbol{y}$, если

1. V — непрерывна,

2. $\lim\limits_{\|\boldsymbol{y}\|\to 0} V(x, \boldsymbol{y}) = 0\,,$

3. существует непрерывная монотонно возрастающая функция φ, такая, что $\varphi(0) = 0$ и
$$V(x, \boldsymbol{y}) \geqslant \varphi(\|\boldsymbol{y}\|)\,.$$

Функция V называется *отрицательно определенной*, если функция $-V$ является положительно определенной.

Теорема 1.9. *Пусть в уравнении*
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{y})$$
функция $\boldsymbol{f}$ *непрерывна и*
$$\boldsymbol{f}(x, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}\,.$$
Решение $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ *является устойчивым по Ляпунову, если существует положительно определенная (относительно* $\boldsymbol{y}$*) функция* $V(x, \boldsymbol{y})$*, производная которой неположительна на всех интегральных кривых, начальные условия для которых достаточно близки к нулю:*
$$V' \equiv \frac{\partial V}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial y_i} \cdot f_i(x, \boldsymbol{y}) \leqslant 0\,.$$
Здесь f_i *— компоненты вектора* $\boldsymbol{f}$.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b}$ так, чтобы $\|\boldsymbol{b}\| < \varepsilon$ и
$$V(0, \boldsymbol{b}) < \varphi(\varepsilon)\,.$$
Предположим, что при некотором x решение $\boldsymbol{y}$ с начальным условием $\boldsymbol{b}$ станет по норме равным ε. Тогда
$$V(x, \boldsymbol{y}(x)) \geqslant \varphi(\varepsilon)\,.$$

Но по предположению V на траекториях решений является невозрастающей функцией, так что имеем также

$$V(x, \boldsymbol{y}(x)) \leqslant V(0, \boldsymbol{b}) < \varphi(\varepsilon)\,.$$

Полученное противоречие означает, что решение $\boldsymbol{y}$ при всех x остается по норме меньше ε. $\square$

Теорема 1.10. *Пусть в условиях теоремы 1.9 производная V' является отрицательно определенной. Тогда решение $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. По условиям теоремы имеют место неравенства

$$V(x, \boldsymbol{y}) > \varphi(\|\boldsymbol{y}\|)\,, \qquad V'(x, \boldsymbol{y}) < -\psi(\|\boldsymbol{y}\|)\,,$$

где функции φ и ψ непрерывны, возрастают и в нуле равны нулю. Если асимптотической устойчивости нулевого решения нет, то в силу устойчивости нулевого решения по Ляпунову должна существовать положительная константа ρ такая, что имеет место неравенство

$$\|\boldsymbol{y}(x)\| \geqslant \rho > 0\,.$$

Тогда

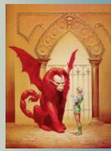
$$V(x, \boldsymbol{y}(x)) > \varphi(\rho) > 0\,, \qquad V'(x, \boldsymbol{y}(x)) < -\psi(\rho) < 0\,.$$

Но интегрирование второго неравенства ведет к оценке

$$V(x, \boldsymbol{y}(x)) \leqslant V(0, \boldsymbol{y}(0)) - x\psi(\rho)$$

и, следовательно, при достаточно больших x функция V становится отрицательной, противоречие. $\square$

Слабость метода Ляпунова состоит в том, что нет общей техники построения функции V — *функции Ляпунова.*



Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = y\,, \qquad \frac{dy}{dt} = -f(x)\,,$$

считая, что $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x \neq 0$. Заметим, что

$$y \cdot \frac{dy}{dt} = -f(x) \cdot \frac{dx}{dt}\,,$$

откуда

$$\frac{y^2}{2} + \int\limits_0^x f(u)\,du = C$$

— первый интеграл. Функция

$$V(x,y) = \frac{y^2}{2} + \int\limits_0^x f(u)\,du$$

является положительно определенной. Ее производная на траекториях системы равна

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot y + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot (-f(x)) = f(x)y - yf(x) = 0\,.$$

По теореме 1.9 положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ устойчиво по Ляпунову. Заметим на будущее, что данная система является *гамильтоновой* и найденная функция V является *гамильтонианом* этой системы.

2. Элементарные вопросы качественной теории на плоскости

2.1. Автономные системы

Во многих физических задачах x задает положение некоторой системы, x' и x'' — соответственно, скорость и ускорение. Закон Ньютона связывает ускорение частицы и силу, действующую на нее. Это ведет к дифференциальному уравнению

$$x'' = f(t, x, x')\,,$$

где t — время. Мы ограничимся рассмотрением *автономных* уравнений

$$x'' = f(x, x')\,. \tag{2.1}$$

Полагая $x' = v$, получим систему, эквивалентную (2.1):

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = f(x, v)\,. \end{cases} \tag{2.2}$$

Эта система легко сводится к уравнению первого порядка. Переменные x и v зависят обе от t. Если считать, что эти зависимости являются параметрической записью функции v от x, найдем

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f(x, v)}{v}\,. \tag{2.3}$$

Решив дифференциальное уравнение первого порядка (2.3), мы найдем эту функцию $v = v(x)$. Тогда зависимость x от t может быть найдена интегрированием уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v(x)\,.$$

Решим, например, уравнение

$$x'' + x = 0\,.$$

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 14 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Редукция к системе дает

$$\begin{cases} x' = v\,, \\ v' = -x\,, \end{cases}$$

и тогда,

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{x}{v}\,,$$

откуда

$$xdx + vdv = 0\,.$$

Последнее есть уравнение в полных дифференциалах. Его интеграл

$$x^2 + v^2 = c^2\,, \qquad c = \text{const}\,.$$

Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{c^2 - x^2}\,,$$

откуда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{c^2 - x^2}} = \int dt\,,$$

т.е.

$$\arcsin\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{c}} = t + t_0 \qquad \text{или} \qquad x = c\sin(t + t_0)\,.$$

Если физическая система, представленная системой (2.2), имеет одно или несколько положений равновесия, эти равновесные положения могут быть охарактеризованы как решения системы, для которых x является константой, т.е. положения равновесия являются решениями уравнения

$$f(x, 0) = 0\,.$$

В окрестности таких точек уравнение (2.3) становится неопределенным и требуется отдельная техника исследования.

Перейдем к общей постановке задачи. Будем рассматривать автономную систему

$$\begin{cases} x' = f(x,y)\,, \\ y' = g(x,y)\,, \end{cases} \tag{2.4}$$

где штрих обозначает дифференцирование по t. Считая y функцией x, найдем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}\,. \tag{2.5}$$

Будем предполагать, что существует неподвижная точка (x_0, y_0), т.е. точка, в которой обе функции f и g обращаются в ноль одновременно. Не теряя общности будем считать, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Этого всегда можно добиться сдвигом системы координат в плоскости x, y.[2] Функции f и g мы будем считать дифференцируемыми в нуле, тогда

$$\begin{cases} f(x,y) = ax + by + \varphi(x,y)\,, \qquad \varphi(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} o(|x| + |y|)\,, \\ g(x,y) = cx + dy + \psi(x,y)\,, \qquad \psi(x,y) \underset{(x,y)\to(0,0)}{=} o(|x| + |y|) \end{cases} \tag{2.6}$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

является матрицей Якоби вектор-функции (f, g) в нуле.

Естественно ожидать, что поведение решений уравнений (2.4) и (2.5) похоже на поведение решений уравнений, соответственно,

$$\begin{cases} x' = ax + by\,, \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{2.7}$$

[2] неподвижных точек может быть много, в данный момент мы будем исследовать какую-либо одну из них

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 16 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by} \tag{2.8}$$

в окрестности нуля (неподвижной точки). Уравнение (2.7) называется *линеаризацией* уравнения (2.4). Исследуем его, записав в виде

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y}\,, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A находятся из уравнения

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0\,.$$

Предположим, вначале, что собственные числа различны и равны λ_1 и λ_2. Соответствующие собственные векторы обозначим через $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$. Обозначая матрицу, столбцами которой являются эти векторы, через T, найдем

$$A = T\Lambda T^{-1}\,, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Замена искомой функции

$$\boldsymbol{z} = T^{-1}\boldsymbol{y}$$

ведет к системе

$$\boldsymbol{z}' = \Lambda \boldsymbol{z}\,,$$

решения которой имеют вид

$$u = c_1 e^{\lambda_1 t}\,, \qquad v = c_2 e^{\lambda_2 t}\,, \qquad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Предположим, теперь, что собственные числа вещественны (и различны). Тогда на фазовой плоскости u, v получим семейство кривых

$$v = ku^{\mu}\,, \qquad \mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,.$$

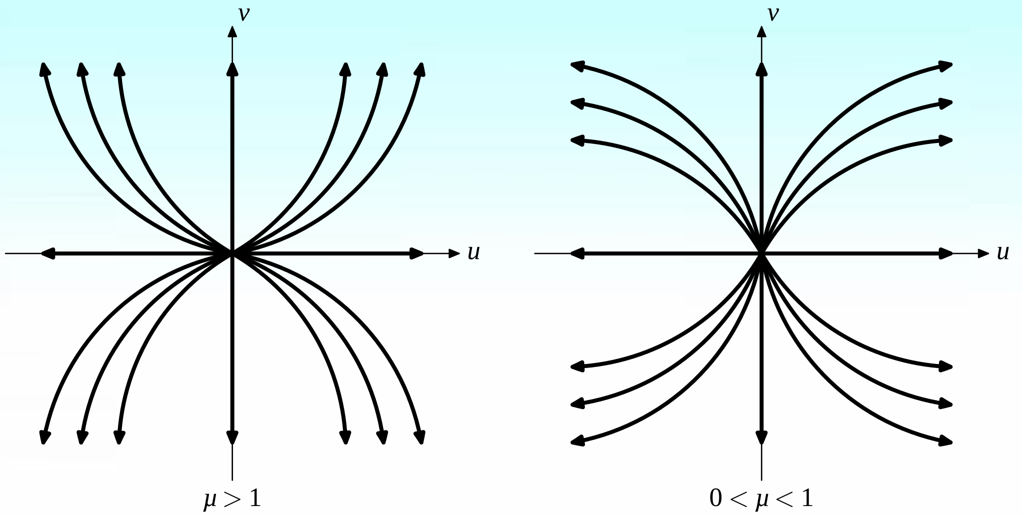
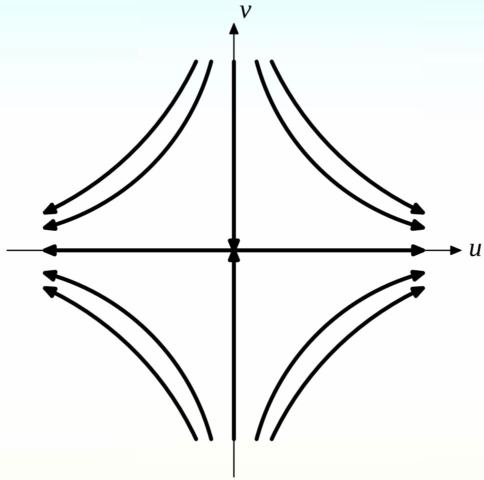


Рис. 2: Неустойчивый узел

Если оба корня λ_1, λ_2 положительны, получится картина, представленная на рисунке 2. При этом стрелочки указывают направление движения. Особая точка $(0, 0)$ называется *неустойчивым узлом*.

Если оба корня отрицательны, получится аналогичная картина, но направление движения изменится на противоположное. Особая точка $(0, 0)$ в этом случае называется *устойчивым узлом*. Если корни разных знаков, *фазовый портрет* примет вид, например, показанный на рисунке 3.

В этом случае особая точка $(0, 0)$ называется *седлом*. Четыре траектории, входящие или выходящие из седловой точки и отделяющие друг от друга семейства траекторий



$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 < 0$

Рис. 3: Седло

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 19 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

типа гипербол, называются *сепаратрисами*.

Если корни комплексные, то в силу вещественности матрицы A, будем иметь комплексно сопряженные корни $\lambda_{12} = \alpha \pm i\beta$. Пусть $\boldsymbol{a} \pm i\boldsymbol{b}$ — соответствующие собственные векторы.[3] Тогда

$$A\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{a} - \beta\boldsymbol{b}$$
$$A\boldsymbol{b} = \beta\boldsymbol{a} + \alpha\boldsymbol{b}\,.$$

Это означает, что в базисе из векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ матрица A примет вид

$$B = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

здесь S — матрица, столбцы которой составляют векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Замена

$$\boldsymbol{z} = S^{-1}\boldsymbol{y}$$

приведет нас к уравнению

$$\boldsymbol{z}' = B\boldsymbol{z}\,, \qquad \boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Удобно ввести полярные координаты

$$\begin{cases} u = r\cos\varphi\,, \\ v = r\sin\varphi\,. \end{cases}$$

Тогда система

$$\begin{cases} u' = \alpha u + \beta v\,, \\ v' = -\beta u + \alpha v \end{cases}$$

[3] $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — вещественные векторы

примет вид

$$\begin{cases} r' = \alpha r\,, \\ \varphi' = -\beta\,. \end{cases}$$

Решение

$$r = r_0 e^{\alpha t}\,, \qquad \varphi = -\beta t + \varphi_0\,,$$

если $\alpha \neq 0$, является спиралью, см. рис. 4. Особая точка при этом называется *фокусом*. Закручивается или раскручивается спираль (с течением времени) — определяется знаком вещественной части собственных чисел (т.е. знаком α). Если $\alpha > 0$, спираль закручивается и фокус называется устойчивым. Направление движения (по или против часовой стрелки) — определяется знаком β.

Если корни чисто мнимые, вместо спиралей получаем семейство окружностей с центром в нуле. Особая точка при этом так и называется — *центром*.

Остается разобрать случай кратного собственного числа λ матрицы A. Если матрица может быть диагонализована (т.е. существует базис из собственных векторов), то верны те же рассуждения, которые относились к случаю различных вещественных значений одного знака. В противном случае в жордановом базисе матрица A примет вид

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

В соответствующих координатах u, v система запишется в виде

$$\begin{cases} u' = \lambda u + v\,, \\ v' = \lambda v\,. \end{cases}$$

Решение дается равенствами

$$\begin{cases} u = (c_1 t + c_2) e^{\lambda t}\,, \\ v = c_1 e^{\lambda t}\,. \end{cases}$$

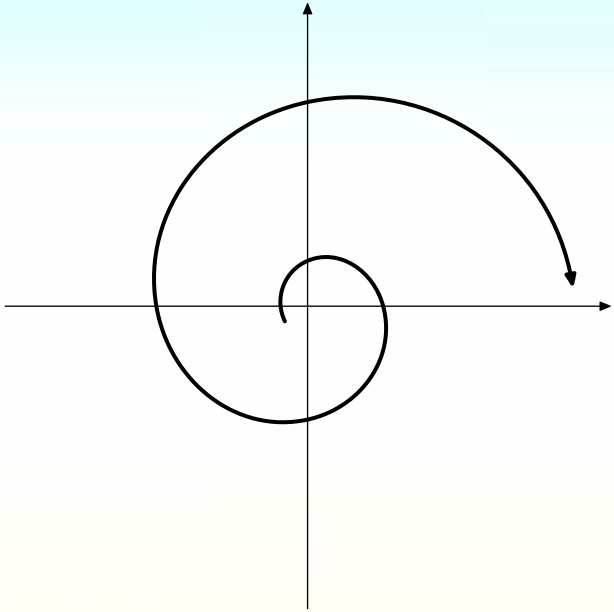


Рис. 4: Фокус

Качественно опять фазовые кривые выглядят также, как в случае вещественных различных корней одного знака, т.е. особая точка будет являться устойчивым узлом в случае $\lambda < 0$ и неустойчивым узлом при $\lambda > 0$.

Возвращаясь на фазовую плоскость x, y мы получим принципиально те же фазовые портреты (с точностью до линейных искажений). Таким образом, на плоскости в случае *простых* (т.е. если определитель соответствующей матрицы не равен нулю) линейных систем дифференциальных уравнений имеется четыре типа особых точек: узел, седло, фокус и центр.

Эта классификация сохранится и для нелинейных систем. Имеет место теорема о линеаризации, утверждающая, что если линеаризованная система в окрестности особой точки является простой, то фазовый портрет нелинейной системы в окрестности рассматриваемой особой точки качественно эквивалентен фазовому портрету линеаризованной системы, если только особая точка не является центром. Доказательство этой теоремы выходит за рамки данного курса. Ограничимся лишь только замечанием, что в силу следствия 1.7 в случае узла или фокуса устойчивость особой точки нелинейной системы будет определяться устойчивостью особой точки соответствующего линеаризованного уравнения: устойчивость особой точки в нуле для уравнения (2.6) определяется устойчивостью особой точки (узла или фокуса) линеаризованного уравнения 2.7.

2.2. Понятие о предельном цикле

В предыдущем параграфе мы рассматривали решения автономных систем на плоскости только в окрестности особых точек (имеются в виду, конечно, нелинейные системы). Во многих задачах бывает нужна информация о глобальных решениях. Выяснение глобальных свойств решений является задачей значительно более сложной. Достаточно заметить, что две нелинейные системы могут иметь одинаковое число особых точек одинакового характера (качественно эквивалентных) и одинаково расположенных, но при этом в целом фазовые портреты этих систем не будут качественно эквивалентными. Одним из интересных проявлений глобальных фазовых портретов являются *предельные циклы* — изолированные замкнутые орбиты, т.е. такие замкнутые фазовые траектории, в некото-

рой окрестности которых нет других замкнутых траекторий. Примером является система, имеющая в полярных координатах вид

$$\begin{cases} r' = 1 - r^2\,, \\ \varphi' = 1\,. \end{cases}$$

Предельным циклом является окружность $r = 1$.

Имеются глубокие результаты, описывающие условия появления предельных циклов (теория Пуанкаре–Бендиксона). Например, если некоторая компактная область в фазовой плоскости обладает тем свойством, что любая траектория, с началом в этой области, остается в области во все последующие моменты времени и если в этой области нет неподвижных точек, то в рассматриваемой области существует предельный цикл.

Мы остановимся на доказательстве одного простого критерия, гарантирующего отсутствие предельных циклов.

Теорема 2.1. *Пусть в односвязной области D фазовой плоскости функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывно дифференцируемы и сумма*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$$

знакоопределенна. Тогда в области D нет замкнутых траекторий системы

$$\begin{cases} x' = f(x,y)\,, \\ y' = g(x,y)\,. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть кривая Γ является замкнутой траекторией для рассматриваемой системы. Тогда на ней

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{f} \qquad \Rightarrow \qquad g dx - f dy = 0 \qquad (x, y \in \Gamma)\,.$$

По формуле Грина

$$\int\limits_{\Gamma} g dx - f dy = -\iint\limits_{D_\Gamma} \Big(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\Big) dx dy\,,$$

где D_Γ — область, ограниченная орбитой Γ. Мы пришли к противоречию, поскольку левая часть равенства равна нулю, в то время как правая знакоопределенна. $\square$

Например, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + f(x)}{bx + g(y)}$$

не имеет предельных циклов, если $a + b \neq 0$. Действительно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = a + b\,.$$

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 25 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

3. Уравнения в частных производных 1-го порядка

3.1. Вводные замечания

С геометрической точки зрения обыкновенному дифференциальному уравнению отвечает заданное в некотором конфигурационном пространстве поле направлений (т.е. в каждой точке конфигурационного пространства задана прямая) и задача интегрирования сводится к нахождению интегральных кривых, т.е. таких кривых, касательные к которым совпадают с направлениями поля. В случае уравнения в частных производных вместо поля направлений задается поле плоскостей (линейных пространств размерности больше 1), т.е. в каждой точке конфигурационного пространства задается плоскость и задача интегрирования сводится к нахождению интегральной поверхности, т.е. такой поверхности, касательные плоскости к которой совпадают с плоскостями поля. Однако интегрируемые поля плоскостей оказываются исключительным явлением. Уже поле двумерных плоскостей в трехмерном пространстве не интегрируется в общем случае. Например — поле плоскостей $dz = y\,dx$ в пространстве с координатами x, y, z. То есть, не существует функции $F(x, y, z)$ такой, чтобы уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяло поверхность, в каждой точке (x, y, z) которой касательная плоскость была бы определена уравнением $(Z - z) = y(X - x)$ (здесь X, Y, Z — координаты на плоскости). Действительно, такая функция F не должна зависеть от y : $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$, что противоречит равенству $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y$. Все это говорит о том, что нет общей теории для дифференциальных уравнений в частных производных. Некоторые уравнения имеют свои теории, другие — нет. Мы познакомимся со случаем, когда есть полная теория — это случай [одного] уравнения в частных производных первого порядка. Для системы линейных дифференциальных уравнений (приведенный выше пример относится к линейной системе) такой теории уже нет.

Уравнение в частных производных первого порядка имеет вид

$$F(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) = 0\,,$$

или в координатной записи

$$F(x_1, \dots x_n, u, p_1, \dots p_n) = 0\,,$$

где $p_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$, где u — искомая, а F — заданная функции.

Прежде чем переходить к общей теории рассмотрим примеры.

Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0\,, \tag{3.1}$$

очевидно, в качестве общего решения имеет произвольную функцию $u = u(x_2, \dots x_n)$, не зависящую от x_1. Это пример линейного уравнения в частных производных. Как мы видим, пространство решений этого уравнения является бесконечномерным линейным пространством. Такое положение типично (но не обязательно) для линейных уравнений в частных производных.

Второй пример — уравнение эйконала в геометрической оптике. На плоскости x, y оно имеет вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1\,. \tag{3.2}$$

Пусть Ω — выпуклая замкнутая область с гладкой границей. Для точки $(x, y) \notin \Omega$ определим функцию $u(x, y)$ как расстояние от точки (x, y) до области Ω. Тогда, как нетрудно видеть, функция u является решением уравнения (3.2). Действительно, ∇u является вектором, направленным в сторону наибыстрейшего возрастания функции u, т.е. от точки (x, y) перпендикулярно к границе $\partial\Omega$. На этом направлении скорость изменения расстояния равна по абсолютной величине единице. Но $|\nabla u|$ и есть скорость изменения u на таком направлении (направлении наибыстрейшего изменения), т.е. $|\nabla u| = 1$, что эквивалентно равенству (3.2). Можно показать, что любое решение уравнения эйконала локально имеет вид суммы расстояния до некоторой кривой и константы.

В качестве еще одного примера рассмотрим уравнение Эйлера–Хопфа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \tag{3.3}$$

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных ...
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 27 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Как и предыдущее — это нелинейное уравнение, однако тот факт, что частные производные входят в уравнение линейно выделяет его в отдельную группу *квазилинейных* уравнений. Это уравнение описывает свободное движение частицы вдоль прямой x. Действительно, если $u(x,t)$ — скорость частицы в точке x в момент времени t, то $x = x_0 + u(x,t)t$, согласно второму закону Ньютона, удовлетворяет уравнению $x'' = 0$. При этом $x' = u(x,t)$, откуда согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$x'' = u_t + u_x \cdot x' = u_t + uu_x = 0\,.$$

Обратно, из уравнения Эйлера–Хопфа можно вывести уравнение Ньютона, т.е. эти описания движения эквивалентны. Заметим, что уравнение Ньютона является уравнением эволюции частиц, в то время как уравнение Эйлера–Хопфа является уравнением поля (уравнением для волн). Здесь мы имеем наглядный пример двойственности описания одних и тех же физических явлений — при помощи волн и при помощи частиц. **Оказывается эта двойственность в некотором смысле универсальна, т.е. если поле удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных первого порядка, то его изучение может быть сведено к изучению эволюции частиц, движение которых описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.**

3.2. Линейные уравнения в частных производных

Пусть $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ — векторное поле в области евклидова пространства. Уравнение

$$D_{\boldsymbol{v}} u = 0 \tag{3.4}$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением в частных производных. Напомним, что $D_{\boldsymbol{v}} u$ — производная от u по вектору $\boldsymbol{v}$, т.е.

$$D_{\boldsymbol{v}} u(\boldsymbol{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{u(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) - u(\boldsymbol{x})}{t} = \sum_{i=1}^{n} v_i(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u}{\partial x_i}\,,$$

где v_i и x_i — координаты векторов, соответственно, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{x}$.

Определение 3.1. Векторное поле $\boldsymbol{v}$ называется *характеристическим* векторным полем, а его фазовые кривые — *характеристиками* уравнения (3.4).

Напомним, что фазовые кривые — это проекции интегральных кривых дифференциального уравнения

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \tag{3.5}$$

на фазовое пространство (пространство $\boldsymbol{x}$-ов). Здесь штрих $'$ означает производную по независимой переменной t.

Определение 3.2. *Первыми интегралами* системы (3.5) называются дифференцируемые функции $U(\boldsymbol{x})$, которые постоянны на фазовых кривых поля $\boldsymbol{v}$, т.е.

$$\frac{d}{dt}\,U(\boldsymbol{x}(t)) = 0\,, \tag{3.6}$$

если $\boldsymbol{x}(t)$ — решение уравнения (3.5).

Очевидно, что первые интегралы системы (3.5) и только они являются решениями линейного однородного уравнения в частных производных (3.4). Действительно, на фазовых траекториях

$$\frac{d}{dt}\,U(\boldsymbol{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i} \cdot v_i = 0\,.$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0\,.$$

Характеристическим является поле $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}$. Решая уравнение $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}$ найдем $\boldsymbol{x} = e^t\boldsymbol{c}$. Таким образом, характеристики — лучи $\boldsymbol{x} = e^t\boldsymbol{c}$ (здесь множитель e^t играет роль параметра: при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка $\boldsymbol{x}$ пробегает луч, исходящий из начала

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнения в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 29 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

координат в направлении вектора $\boldsymbol{c}$). Решение $u(\boldsymbol{x})$ должно быть постоянно на каждом таком луче. Считая, что функция $u(\boldsymbol{x})$ непрерывна в нуле заключаем, что решениями рассматриваемого уравнения в частных производных являются только константы.

В качестве еще одного примера рассмотрим *уравнение Лиувилля*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \{H, \Phi\} = 0\,, \tag{3.7}$$

где $H = H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ — *функция Гамильтона* (функция полной энергии системы), $\Phi = \Phi(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ — искомая функция, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{p}$ — так называемые обобщенные координаты и импульсы, t — время, а $\{H, \Phi\}$ — скобка Пуассона. Последняя определяется равенством

$$\{H, \Phi\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \Phi}{\partial p_i} \right). \tag{3.8}$$

Уравнение Лиувилля является линейным однородным уравнением в частных производных с характеристическим векторным полем

$$\boldsymbol{v} = \left(1, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots \frac{\partial H}{\partial p_n}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \ldots - \frac{\partial H}{\partial q_n}\right) = \left(1, \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\right).$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dt}{d\tau} = 1\,, \quad \frac{d\boldsymbol{q}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\,, \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\,,$$

т.е.

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\,, \\ \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}\,. \end{cases} \tag{3.9}$$

и называются *каноническими уравнениями Гамильтона*. Решение Φ уравнения Лиувилля является постоянным на траекториях канонических уравнений.

Определение 3.3. *Задачей Коши* для уравнения (3.4) называется задача о нахождении решения u этого уравнения, удовлетворяющая условию

$$u|_{\Gamma} = f\,, \tag{3.10}$$

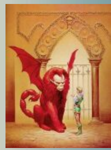
где Γ — заданная гладкая гиперповерхность, а f — определенная на ней функция. Гиперповерхность Γ называется *начальной*.

Определение 3.4. Точка $\boldsymbol{x}_0$ начальной гиперповерхности Γ называется *нехарактеристической*, если характеристика, проходящая через эту точку, *трансверсальна* (т.е. — не касательна) поверхности Γ.

Теорема 3.5. *Пусть $\boldsymbol{x}_0$ — нехарактеристическая точка поверхности Γ. Тогда в некоторой окрестности этой точки существует и единственно решение u задачи Коши для уравнения (3.4) с начальной гиперповерхностью Γ.*

Доказательство. Пусть в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$ поверхность $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ задана параметрическим уравнением $\boldsymbol{x} = \gamma(\boldsymbol{s})$, где $\boldsymbol{s} \in \mathbb{R}^{n-1}$. Обозначая параметр на интегральных кривых характеристического поля через t, введем криволинейные координаты $(t, \boldsymbol{s})$ в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$. Для фиксированной точки $\boldsymbol{x}$ они определяются следующим образом. Через каждую начальную точку $\gamma(\boldsymbol{s}) \in \Gamma$ проходит и при том только одна (локально) интегральная кривая $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{s})$ уравнения (3.5). Тогда точка $\boldsymbol{x}$ получается как значение решения $\boldsymbol{x}(t)$ задачи Коши для уравнения (3.5) с начальным условием $\boldsymbol{x}(0) = \gamma(\boldsymbol{s})$. Таким образом, точка $\boldsymbol{x}$ взаимно однозначно определяется парой $(t, \boldsymbol{s})$. Единственный тонкий вопрос состоит в том, а любая ли точка $\boldsymbol{x}$ (в достаточно малой окрестности рассматриваемой нехарактеристической точки) получит координаты $(t, \boldsymbol{s})$, т.е. обязательно ли, выйдя из точки $\boldsymbol{x}$ по характеристике, мы достигнем поверхности Γ. Ответ будет положительным в силу теоремы о продолжимости решения обыкновенного дифференциального уравнения и нехарактеристичности поверхности Γ в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$. [4] В новых

[4] мы не будем более строго обосновывать этот факт апеллируя к геометрической интуиции



координатах задача Коши для уравнения в частных производных принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = 0\,, \\ w|_{t=0} = f(\gamma(\boldsymbol{s}))\,, \end{cases} \tag{3.11}$$

где $w(t, \boldsymbol{s}) = u(\boldsymbol{x})$.

Эта процедура называется *выпрямлением* векторного поля $\boldsymbol{v}$ и поверхности Γ. Отметим, что дифференциальное уравнение выпрямленного поля в точности отвечает тому факту, что решение исходного уравнения в частных производных должно быть первым интегралом дифференциального уравнения характеристического векторного поля. Решение полученной задачи элементарно и единственно

$$w(t, \boldsymbol{s}) = f(\gamma(\boldsymbol{s}))\,.$$

В исходных координатах решение $u(\boldsymbol{x})$ строится как постоянное на характеристиках с начальными значениями $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Gamma$. $\square$

Аналогично рассматривается неоднородное линейное уравнение в частных производных

$$D_{\boldsymbol{v}} u = b\,, \tag{3.12}$$

где $b = b(\boldsymbol{x})$ — заданная функция.

Теорема 3.6. *Задача Коши для уравнения* (3.12) *в достаточно малой окрестности любой нехарактристической точки начальной гиперповерхности* Γ *имеет и при том единственное решение. В случае начального условия* (3.10) *оно дается равенством*

$$u(\boldsymbol{x}(t)) = f(\boldsymbol{x}(0)) + \int\limits_0^t b(\boldsymbol{x}(\tau))\,d\tau\,,$$

где $\boldsymbol{x}(t)$ *— характеристика,* $\boldsymbol{x}(0) \in \Gamma$.

Доказательство. После выпрямления векторного поля и гиперповерхности приходим к задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = b(\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{s}))\,, \\ w|_{t=0} = f(\gamma(\boldsymbol{s}))\,, \end{cases}$$

решение которой дается равенством

$$w(t,\boldsymbol{s}) - f(\gamma(\boldsymbol{s})) = \int\limits_0^t b(\boldsymbol{x}(\tau;\boldsymbol{s}))\,d\tau\,.$$

Как и ранее здесь $w(t,\boldsymbol{s}) = u(\boldsymbol{x})$ при замене переменных $\boldsymbol{x} \mapsto (t,\boldsymbol{s})$. $\square$

Заметим, что в случае неоднородного уравнения решение уже не является постоянным на характеристиках. Как и в случае обыкновенных уравнений общее решение неоднородной задачи является суммой общего решения однородной задачи и частного решения неоднородной.

Найдем решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} - y\,\frac{\partial u}{\partial y} = y\,, \qquad u(0,y) = \sin y\,.$$

Уравнения характеристик имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = 1\,, \quad \frac{dy}{dt} = -y\,.$$

Таким образом, характеристиками служат кривые

$$x = x_0 + t\,, \quad y = y_0 e^{-t} \qquad \text{т.е.} \qquad y = ce^{-x}\,.$$

Отметим, что общее решение U однородного уравнения дается равенством

$$U = \Phi(ye^{x})\,,$$

где Φ — произвольная дифференцируемая функция. Найдем решение нашей неоднородной задачи. При $t=0$ получаем уравнения на начальные данные $x_0=0$, $u(0,y_0)=\sin y_0$. Тогда при $x=t$, $y=y_0e^{-t}$ найдем

$$u(x,y)=\sin y_0+\int\limits_0^t y_0e^{-\tau}\,d\tau=\sin y_0-y_0e^{-t}+y_0\,,$$

т.е.

$$u(x,y)=\sin(ye^x)+ye^x-y\,.$$

3.3. Квазилинейные уравнения первого порядка

Определение 3.7. *Квазилинейным уравнением первого порядка* называется уравнение

$$D_{\boldsymbol{v}}u=b\,, \tag{3.13}$$

где $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x}))$ и $b=b(\boldsymbol{x},u(\boldsymbol{x}))$, функции $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},u)$ и $b(\boldsymbol{x},u)$ (как функции $\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$, соответственно) заданы, а функция $u=u(\boldsymbol{x})$ (как функция $\boldsymbol{R}^n\to\mathbb{R}$) является искомой.

В координатной записи квазилинейное уравнение принимает вид

$$\sum_{i=1}^n v_i(x_1,\dots x_n,u)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}=b(x_1,\dots x_n,u)\,.$$

Смысл выписанного соотношения в следующем. Если точка $\boldsymbol{x}$ выходит из точки $\boldsymbol{x}_0$ и начинает двигаться со скоростью $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0,u(\boldsymbol{x_0}))$, то значение решения $u=u(\boldsymbol{x}_0)$ начинает меняться со скоростью $b(\boldsymbol{x}_0,u(\boldsymbol{x}_0))$. Это в точности означает, что вектор

$$\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{v},b)\in\boldsymbol{R}^{n+1} \tag{3.14}$$

является касательным к графику решения $u=u(\boldsymbol{x})$.

Определение 3.8. Векторное поле $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{v}, b)$ называется *характеристическим* для квазилинейного уравнения (3.13). Его фазовые кривые называются *характеристиками* уравнения квазилинейного уравнения.

Таким образом, уравнения на характеристики в случае квазилинейных уравнений имеют вид

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, u)\,, \quad u' = b(\boldsymbol{x}, u)\,, \tag{3.15}$$

штрих означает дифференцирование по независимой переменной t. Уравнения на характеристики часто записывают в симметричном виде:

$$\frac{dx_1}{v_1} = \ldots = \frac{dx_n}{v_n} = \frac{du}{b}\,.$$

Теорема 3.9. *Функция u является решением квазилинейного уравнения тогда и только тогда, когда ее график состоит из характеристик.*

Доказательство. Если характеристика пересекает график решения, то в силу условия касания графика решения с характеристическим полем она вся лежит на этом графике. □

Задача Коши в квазилинейном случае ставится также, как в линейном.

Определение 3.10. *Начальным многообразием* G для задачи Коши в квазилинейном случае называется график функции $f: \Gamma \to \mathbb{R}$, см. (3.10). Начальное условие (Γ, f) называется *нехарактеристическим в точке* $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma$, если вектор $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}_0, u_0)$, где $u_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$, трансверсален поверхности Γ.

Заметим, что в отличии от линейного уравнения характеристический вектор зависит от u и, следовательно, нельзя ввести понятия нехарактеристической точки поверхности Γ. Следует говорить лишь о нехарактеристических точках начального многообразия G.[5]Заметим, что нехарактеристичность начального условия складывается из двух вещей:

[5]если начальное условие f нехарактеристично в точке $\boldsymbol{x}_0$, то точка $(\boldsymbol{x}_0, u_0) \in G$ является нехарактеристической, т.е. характеристическое поле $\boldsymbol{a}$ трансверсально G в этой точке

нехарактеристчности точки $(\boldsymbol{x}_0, u_0)$ начального многообразия G и условия невертикальности характеристического поля $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{v}, b)$ в этой точке (т.е. $\boldsymbol{v} \neq 0$).

Теорема 3.11. *Решение задачи Коши с нехарактеристическим начальным условием в точке $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma$ существует в некоторой окрестности этой точки и единственно.*

Доказательство. В силу нехарактеристичности начального условия в окрестности точки $(\boldsymbol{x}_0, u_0)$ характеристическое поле $\boldsymbol{a}$ невертикально. Поэтому характеристики поля, выходящие из начального многообразия G, будут выстилать некоторую поверхность, являющуюся графиком функции. Последняя и есть искомое решение. Существование и единственность вытекают из теоремы существования и единственности для обыкновенных дифференциальных уравнений (уравнений для характеристик), см. рис. 5. □

Вернемся к уравнению Эйлера-Хопфа и рассмотрим для него задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0\,, \qquad u|_{t=0} = f(x)\,.$$

Уравнения на характеристики имеют вид

$$\frac{dt}{d\tau} = 1\,, \quad \frac{dx}{d\tau} = u\,, \quad \frac{du}{d\tau} = 0$$

Это линейная система дифференциальных уравнений эквивалентная уравнению Ньютона

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0\,.$$

Характеристиками служат прямые

$$t = \tau + t_0\,, \quad x = u_0\tau + x_0\,, \quad u = u_0$$

Начальная гиперповерхность Γ является плоскостью $t = 0$. Считая, что характеристики начинаются при нулевом значении параметра τ, найдем $t_0 = 0$. Из начальных условий находим тогда

$$u_0 = f(x_0)\,.$$

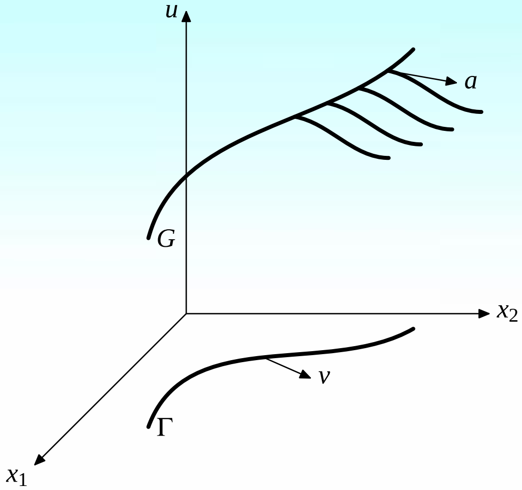


Рис. 5: Характеристики квазилинейного уравнения

Таким образом, получено решение в параметрическом виде

$$\begin{cases} x = f(x_0)t + x_0\,, \\ u = f(x_0) \end{cases}$$

(параметром является x_0). В неявном виде решение принимает форму

$$u = f(x - ut)\,.$$

Заметим, что на характеристиках

$$x_0 - u_0 t_0 = x - u_0(t - t_0) - u_0 t_0 = x - u_0 t = x - ut\,,$$

что также ведет к решению рассматриваемой задачи Коши.

Это уравнение описывает, например, пылевое облако, частицы которого движутся параллельно оси x со скоростью u. Найдем условия опрокидывания пылевой волны, т.е. когда и где производная по x от скорости обращается в бесконечность (это момент, когда быстрые частицы догоняют медленные и фронт волны рушится — происходит формирование ударной волны, см. рис. 6).

По правилу дифференцирования неявной функции получаем

$$u_x = f'(x - ut) \cdot (1 - tu_x) \qquad \Rightarrow \qquad u_x = \frac{1}{t + \frac{1}{f'}},$$

т.е. формирование ударной волны будет происходить при условии $tf'(x-ut) = -1$. Пусть, для определенности, $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Условие опрокидывания примет вид: $t = 1 + (x - ut)^2$. Мы видим, что опрокидывание наступает при $t \uparrow 1$ в точке $x = u$, т.е. при $x = f(0) = \frac{\pi}{2}$.

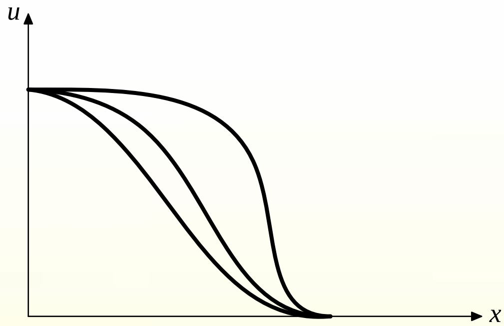


Рис. 6: Формирование ударной волны

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 38 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

3.4. Нелинейные уравнения первого порядка

Для нелинейного уравнения в частных производных сохраняет силу метод характеристик, но в то время как характеристики линейного уравнения были траекториями в n-мерном пространстве, а характеристики квазилинейного уравнения — в $(n+1)$-мерном, характеристики нелинейного уравнения лежат в $2n+1$ мерном пространстве (имеется ввиду случай $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$).

Итак, рассмотрим уравнение

$$F(\boldsymbol{x}, u, \nabla u) = 0\,, \tag{3.16}$$

где F — гладкая функция. Прежде всего заметим, что решение этого уравнения сводится к решению системы

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}\, dx_i + \frac{\partial F}{\partial u}\, du + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i}\, dp_i &= 0\,, \\ du - \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i &= 0\,, \end{aligned}$$

или в сокращенной записи

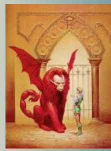
$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\, d\boldsymbol{x} + \frac{\partial F}{\partial u}\, du + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\, d\boldsymbol{p} = 0\,, \tag{3.17}$$

$$du - \boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x} = 0\,. \tag{3.18}$$

Уравнение (3.17) определяет касательную гиперплоскость к гиперповерхности в $\mathbb{R}^{2n+1}$:

$$F(\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{p}) = 0\,, \qquad (\boldsymbol{x}, u, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)\,.$$

Уравнение (3.18) задает так называемую *контактную гиперплоскость*. Как уже было замечено выше, поле контактных гиперплоскостей неинтегрируемо, т.е. система (3.17)-(3.18) определяет поле плоскостей размерности $2n-1$. Рассмотрим какую–либо из



Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 39 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

плоскостей этого поля как гиперплоскость в пространстве соответствующей контактной плоскости (размерности $2n$). В качестве координат на контактной плоскости можно выбрать $(d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{p})$[6] (поскольку контактная плоскость взаимно однозначно проектируется на $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$).

Дифференциальная форма $\alpha = du - \boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x}$ называется *стандартной контактной формой*. Ее дифференциал равен

$$\omega = d\alpha = -\sum_{i=1}^{n} dp_i \wedge dx_i\,,$$

т.е. является *симплектической формой* в пространстве $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$ (и, в частности, на контактной плоскости). Как мы знаем, это невырожденная кососимметрическая билинейная форма. Четномерное пространство, наделенное симплектической формой называется *симплектическим* (на подобии того как линейное пространство со скалярным произведением называется евклидовым). Векторы ξ и η в симплектическом пространстве с формой ω называются *кососортогональными*, если

$$\omega(\xi, \eta) = 0\,.$$

Теорема 3.12. *Гиперплоскость в симплектическом пространстве имеет одномерное кососортогональное дополнение, которое лежит в этой гиперплоскости.*

Доказательство. Пусть $\xi_1, \dots \xi_{2n}$ — базис в симплектическом пространстве, причем первые $2n-1$ векторов составляют базис в гиперплоскости. Тогда вектор $\eta = \sum\limits_{i=1}^{2n} y_i \xi_i$ будет кососортогонален рассматриваемой гиперплоскости, если $\omega(\xi_i, \eta) = 0$ при $i = 1, \dots 2n-1$:

$$\sum_{j=1} y_j \omega(\xi_i, \xi_j) = 0 \qquad (i = 1, \dots 2n-1).$$

[6] точнее — соответствующие проекции вектора

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 40 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Это однородная система линейных уравнений на $2n$ неизвестных $y_1, \dots y_{2n}$. Ранг системы равен $2n-1$ (число уравнений) в силу невырожденности симплектической формы. Как известно из курса линейной алгебры, система имеет однопараметрическое семейство решений, т.е. косоортогональное дополнение к гиперплоскости существует и является прямой. Тот факт, что направляющий вектор этой прямой лежит в косоортогональной гиперплоскости тривиален: иначе векторы $\xi_1, \dots \xi_{2n-1}, \eta$ образовывали бы базис в симплектическом пространстве, причем $\omega(\eta, \xi) = 0$ для любого ξ (в силу $\omega(\eta, \eta) = 0$), что противоречит невырожденности формы ω. $\square$

Определение 3.13. Направление, косоортогональное к плоскости (3.17)-(3.18) в контактной плоскости (3.18) называется *характеристическим* для нелинейного уравнения в частных производных. Фазовые кривые характеристического векторного поля называются *характеристиками* для нелинейного уравнения в частных производных.

Найдем уравнения на характеристики. Заметим, что если $\xi = (X, P)$ и $\eta = (Y, Q)$ — два вектора (здесь X, Y, P, Q — n-мерные составляющие векторов) в симплектическом пространстве со стандартной симплектической формой $\omega = -\sum dp_i \wedge dx_i$, то

$$\omega(\xi, \eta) = -\sum (P_i Y_i - Q_i X_i) = -PY + QX\,.$$

Заметим, далее, что уравнение плоскости (3.17)-(3.18) в координатах $d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{p}$ имеет вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{p}\frac{\partial F}{\partial u}\right) d\boldsymbol{x} + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\, d\boldsymbol{p} = 0\,.$$

Точнее, если $\xi = (X, P)$ — произвольный вектор, лежащий в этой плоскости, то (ввиду $d\boldsymbol{x}(\xi) = X$, $d\boldsymbol{p}(\xi) = P$)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{p}\frac{\partial F}{\partial u}\right) X + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\, P = 0\,.$$

Сравнив полученные уравнения, нетрудно выписать искомый косоортогональный вектор. В координатах контактной плоскости он задается равенствами

$$\eta = (Y, Q)\,, \quad Y = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}\,, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{p}\frac{\partial F}{\partial u}\,.$$

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 41 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

По традиции характеристический вектор берут противоположного направления. Таким образом, характеристическое поле $\boldsymbol{a}$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$ определяется равенством

$$\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}, -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}\,\frac{\partial F}{\partial u}\right)$$

(здесь средняя компонента вектора найдена из уравнения контактной плоскости) и уравнения на характеристики имеют вид

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \frac{du}{dt} = \boldsymbol{p}\,\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{p}}, \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}\,\frac{\partial F}{\partial u} \tag{3.19}$$

или в развернутом виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_j\,\frac{\partial F}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - p_i\,\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad i = 1,\ldots n\,.$$

Определение 3.14. *1-струей* или *1-джетом* функции u в точке $\boldsymbol{x}$ называется вектор $(\boldsymbol{x}, u, \nabla u)$.

Уравнение в частных производных 1-го порядка есть не что иное, как неявное задание графиков 1-струй (так называемый *1-график*) решений этого уравнения. К графику 1-струй функции u можно относится как к графику вектор–функции $(u, \nabla u)$. Заметим, что это n-мерная поверхность в $(2n+1)$-мерном пространстве.

Теорема 3.15. *График 1-струй решения уравнения в частных производных* (3.16) *выстилается характеристиками.*

Доказательство. Пусть $u = U(\boldsymbol{x})$ — решение уравнения в частных производных. Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial F}{\partial u}\nabla U + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_i}\,\frac{\partial \nabla U}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial p_i}\,\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, U, \nabla U)}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0}\,.$$

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных ...
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 42 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Рассмотрим решение $\boldsymbol{x}(t)$ дифференциального уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial F(\boldsymbol{x}, U(\boldsymbol{x}), \nabla U(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{p}} .$$

Тогда в силу

$$\frac{d\nabla U}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \nabla U}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial \nabla U}{\partial x_i}$$

заключаем, что функция $\boldsymbol{p}(t) = \nabla U(\boldsymbol{x}(t))$ является решением уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}\, \frac{\partial F}{\partial u} ,$$

т.е. вектор

$$\left(\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}, \frac{dU(\boldsymbol{x}(t))}{dt}, \frac{d}{dt}\nabla U(\boldsymbol{x}(t))\right)$$

является характеристическим. □

Геометрический смысл доказанной теоремы состоит в следующем. Подпространство симплектического пространства называется *изотропным*, если любые два вектора этого подпространства кособортогональны между собой. Примером изотропного пространства является касательная плоскость к графику решения

$$du = \boldsymbol{p}\, d\boldsymbol{x} , \qquad \boldsymbol{p} = \nabla U .$$

Это вытекает из леммы Пуанкаре (равенство смешанных производных)

$$\sum d\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i = \sum \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i = 0 .$$

Изотропное пространство не может быть размерности большей, чем n (половина размерности симплектического пространства), поскольку оно содержится в своем кософортогональном дополнении: если m — размерность изотропного пространства, то $2n - m \geqslant m$.

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 43 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

Пусть $(\boldsymbol{x}(t), u(t), \boldsymbol{p}(t))$ — характеристика. Вектор $(\boldsymbol{x}'(t), u'(t), \boldsymbol{p}'(t))$ кософртогонален (как характеристический) векторам, лежащим в касательной плоскости графика решения. Если при этом он не лежит в самой этой плоскости, то линейная оболочка, натянутая на характеристический вектор и касательную плоскость, будет $(n+1)$-мерным изотропным пространством, противоречие.

В качестве примера рассмотрим уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1\,.$$

Тогда $F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2$. Уравнения на характеристики запишутся в виде

$$x' = 2p\,, \quad y' = 2q\,, \quad u' = 2p^2 + 2q^2\,, \quad p' = 0\,, \quad q' = 0\,.$$

При этом $p^2 + q^2 = 1$. Находим характеристики

$$x = 2pt + x_0\,, \quad y = 2qt + y_0\,, \quad u = 2t + u_0\,, \quad p = \mathrm{const}\,, \quad q = \mathrm{const}\,, \quad p^2 + q^2 = 1\,.$$

Заметим, что $u(x_0, y_0) = u_0$. Пусть $f(x, y) = \mathrm{const}$ — некоторая гладкая кривая в плоскости x, y. Зададим на этой кривой значение функции u полагая $u = u_0$. Фиксировав точку (x_0, y_0) на начальной кривой получим в качестве характеристики прямую в $\mathbb{R}^5$. Проекция характеристики на плоскость x, y также является прямой. Направляющий вектор этой прямой равен $2(p, q)$, т.е. пропорционален $\nabla u = (p, q)$. Так как начальная кривая является линией уровня функции u, то вектор $\nabla u = (p, q)$ перпендикулярен начальной кривой. Если (x, y) — точка на проекции характеристики, то

$$u = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + u_0\,,$$

т.е. построенное решение u имеет смысл расстояния от точки (x, y) до начальной кривой плюс константа.

В качестве еще одного примера рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\Big(t, \boldsymbol{x}, \frac{\partial S}{\partial \boldsymbol{x}}\Big) = 0\,,$$

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 44 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход

где $H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$ — заданная гладкая функция, называемая функцией Гамильтона. Соответствующая функция F имеет вид $F(t, \boldsymbol{x}, S, q, \boldsymbol{p}) = q + H(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{p})$. Особенностью этого уравнения является то, что искомая функция S не входит в уравнение явно. Уравнения на характеристики имеют вид

$$\frac{dt}{d\tau} = 1\,, \quad \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\,, \quad \frac{dS}{d\tau} = q + \boldsymbol{p}\,\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\,, \quad \frac{dq}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial t}\,, \quad \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\,.$$

Если гамильтониан не зависит явно от времени (т.е. $q = \mathrm{const}$), то уравнения на характеристики сводятся к системе канонических гамильтоновых уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}\,, \\ \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{x}}\,. \end{cases}$$

Предметный указатель

Список литературы

[1] Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Наука, 1978.

[2] Арнольд В.И. *Лекции об уравнениях с частными производными.* Библиотека студента математика. Фазис, 1997.

[3] Мишина А.П., Проскуряков И.В. *Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра.* Справочная математическая библиотека. Наука, 1965.

[4] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциалные уравнения.* Мир, 1970.

[5] H. Hochstadt. *Differential equations. A modern approach.* Dover Publications, Inc., 1975.

Теория устойчивости
Качественная теория
Уравнеия в частных . . .
Предметный указатель
Литература
Веб – страница
Титульный лист
Страница 47 из 47
Назад
Полный экран
Закрыть
Выход