Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет
Кафедра теоретической и экспериментальной физики

«УТВЕРЖДАЮ»
Декан ЕНМФ
__________И.П. Чернов
________________2001 г.

ПОТЕНЦИАЛ. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДА В ПОЛЕ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Методические указания по курсу «Общей физики» для решения задач по теме: «Потенциал. Работа по перемещению заряда в поле. Потенциальная энергия зарядов.» для студентов-заочников всех специальностей.

Томск 2001

УДК 53.072:681.3
Потенциал. Работа по перемещению заряда в поле. Потенциальная энергия зарядов.
Методические указания по решению задач по курсу «Общая физика» для студентов-заочников всех специальностей.
Томск, изд. ТПУ. - 2001. – 12 с.

Составитель: к.ф.-м.н., Назимова Н.А.

Рецензент: к.ф.-м.н., Кравченко Н.С.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы методическим семинаром кафедры теоретической и экспериментальной физики.

Зав. кафедрой Ю.Л. Пивоваров

«___»___________2001г.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Потенциалом φ какой - либо точки электрического поля называется физическая величина, численно равная потенциальной энергии U единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

$$\varphi = \frac{U}{q} \qquad (1)$$

Можно дать другое определение потенциала. Потенциалом φ какой -либо точки электрического поля называется физическая величина, численно равная работе A, которую надо совершить, чтобы удалить единичный положительный заряд из данной точки поля в бесконечность.

$$\varphi = \frac{A}{q} \qquad (2)$$

Под словами "электрическое поле" здесь и далее подразумевается электростатическое поле, т.е. поле, создаваемое зарядами, неподвижными в рассматриваемой системе отсчета.

Потенциал φ точки поля, создаваемого точечным зарядом **q,** вычисляется в СИ по формуле:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} \qquad (3)$$

где r - расстояние от заряда q, создающего поле, до исследуемой точки;

ε относительная диэлектрическая проницаемость среды;

ε_0 - электрическая постоянная.

Если поле создается несколькими зарядами, то потенциал в какой - либо точке равен сумме потенциалов, создаваемых в этой точке отдельными зарядами.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \quad (4)$$

Это принцип суперпозиции (наложения) полей.

Работа A, совершаемая силами поля, по перемещению заряда q из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2, вычисляется по формуле

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (5)$$

Потенциальная энергия U двух зарядов q_1 и q_2 находящихся на расстоянии r друг от друга, в СИ выражается формулой:

$$\mathbf{U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}} \qquad \mathbf{(6)}$$

при условии что **U = 0**, если $\mathbf{r = \infty}$.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1. Все задачи следует решать в системе единиц Си. Прежде всего надо кратко через буквенные обозначения записать данные задачи. Все данные условия задачи записываются в СИ. Если какая - либо величина задана в задаче в другой системе единиц измерения, ее необходимо перевести в СИ.
Например, **q== 100 нКл = 100 • 10^{-9} Кл = 10^{-7} Кл.**

В ряде формул, например формулы (3) , (6), встречается коэффициент $\mathbf{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$, где $\mathbf{\varepsilon_0}$ - электрическая постоянная, $\mathbf{\varepsilon_0 \cong 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{Ф}{м}}$. Обозначим его $\mathbf{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}$**.** Тогда формулы приобретут более простой вид. Формула (3) записывается как

$$\mathbf{\varphi = k\,\frac{q}{\varepsilon r}} \qquad \mathbf{(3')}$$

а для формулы (6) получим

$$\mathbf{U = k\,\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r}} \qquad \mathbf{(6')}$$

Значение коэффициента k в СИ подсчитано и равно

$$\mathbf{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\,\frac{Нм^2}{Кл^2} = 9 \cdot 10^9\,\frac{м}{Ф}}$$

Подстановка численного значения коэффициента **k** обычно значительно облегчает вычисления. Единица потенциала в СИ - вольт **(В).** Если все данные задачи переведены в СИ, то потенциал автоматически получается в вольтах, работа в джоулях и т.д..

2. Задачи нужно решать в общем (алгебраическом) виде и, только получив окончательную формулу, можно подставлять в нее численные данные задачи.

3. Относительная диэлектрическая проницаемость $\boldsymbol{\varepsilon}$ для вакуума равна единице. $\boldsymbol{\varepsilon}$ **=l** . Для воздуха $\boldsymbol{\varepsilon}$ **= 1,00059,** т.е. тоже практически равна единице. Если заряды находятся в вакууме или в воздухе, то формулы (3) и (6) приобретают совсем простой вид:

$$\mathbf{\varphi = k\,\frac{q}{r}} \qquad \mathbf{(3'')}$$

$$U = k\frac{q_1 q_2}{r} \qquad (6'')$$

4. При решении задач необходимо помнить, что потенциал является скалярной величиной, и в формуле (4) под суммой потенциалов подразумевается алгебраическая сумма, т.е. сумма с учетом знаков зарядов, (см. задачи № 1,
2)
5. Если поле создается зарядом, который нельзя считать точечным, то заряженное тело мысленно разбивается на отдельные бесконечно малые элементы. Тогда заряд, находящийся на бесконечно малом элементе можно рассматривать как точечный. Затем используется принцип суперпозиции полей. Выражение <р в таких случаях производится с помощью интегрального исчисления, (см. задачи № 3,4)
6. 6. Формулы (3), (3'), (3"), выражающие потенциал точечного заряда, справедливы лишь при условии, что потенциал бесконечно удаленной точки» равен нулю. Аналогично, формулы (6), (6'), (б"), выражающие потенциальную энергию взаимодействия зарядов, справедливы лишь при условии, что при бесконечном удалении зарядов друг от друга потенциальная энергия считается равной нулю. (см. задачи № 5,6)

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

<u>Задача №1</u>

Два равных точечных положительных заряда, по 10 $^{-9}$ Кл каждый, отстоят на **100 см** друг от друга. Найти потенциал точки поля, находящейся посередине между зарядами, когда:
1) заряды находится в вакууме;
2) заряды находятся в оливковом масле ε **= 3,1.**

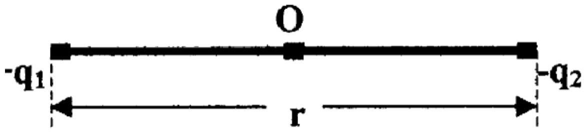
РЕШЕНИЕ

<u>Дано: СИ</u>

$q_1 = q_2 = 10^{-9}$ Кл
$r = 100$см $= 1$м
1) $\varepsilon = 1$
2) $\varepsilon = 3{,}1$
$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9\ \dfrac{м}{Ф}$

$\varphi - ?$

РЕШЕНИЕ



1. заряды находятся в вакууме $\varepsilon = 1$

Потенциал в точке О равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке зарядами q_1 и q_2

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = k\frac{q_1}{r/2} + k\frac{q_2}{r/2} = k\frac{4q}{r}$$

$$\varphi = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-9}}{1} В = 36В$$

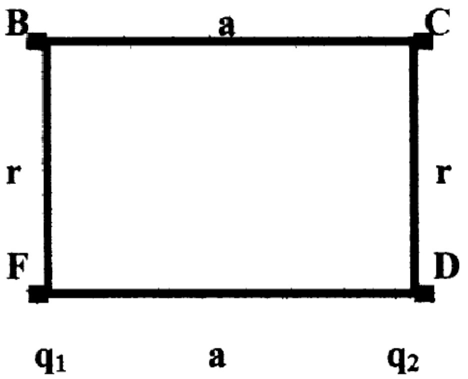
2) заряды находятся в оливковом масле

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = k\frac{q_1}{\varepsilon r/2} + k\frac{q_2}{\varepsilon r/2} = k\frac{4q}{\varepsilon r}$$

$$\varphi = 9 \cdot 10^9 \frac{4 \cdot 10^{-9}}{3{,}1 \cdot 1} В \cong 12В$$

Ответ: 36 В, 12 В.

<u>Задача №2</u>

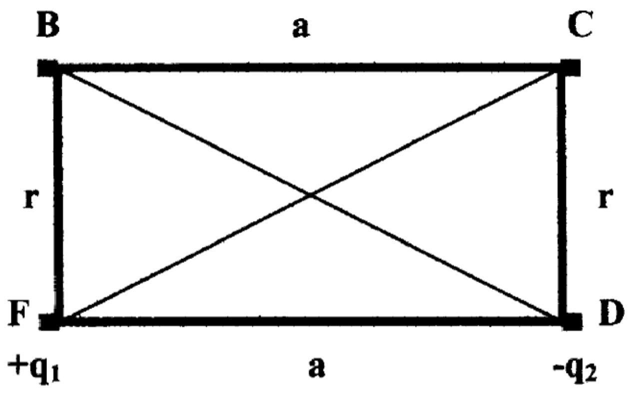


Определить работу электрических сил при перенесении заряда **q=1нКл** из точки **B** в точку **C** (см. рис.), если **r=6см, a=8см,** $q_1 = 3{,}33 \cdot 10^{-9}$ **Кл** $q_2 = -3{,}33 \cdot 10^{-9}$ **Кл.**

<u>Дано: СИ</u>
q=lнКл=10 $^{-9}$ Кл
r=6см=6•10 $^{-2}$ см
a=8см=8•10^{-2}м
$q_1 = 3{,}33 \cdot 10^{-9}$ Кл
$q_2 = -3{,}33 \cdot 10^{-9}$ Кл
$\varepsilon = 1$
$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{м}{Ф}$

$\varphi - ?$

РЕШЕНИЕ



$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Потенциал φ_1 в точке **B** создается зарядами $+q_1$ и $-q_2$

$$\varphi_1 = k\frac{q_1}{r} + k\frac{q_2}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

т.к. заряд q_1 отстоит от точки **B** на расстоянии **r,** а заряд q_2 отстоит от точки **B** на расстояние BD, BD – диагональ прямоугольника **BCDF**, **BD** можно найти по теореме Пифагора

$$BD = \sqrt{BF^2 + FD^2}$$

т.е.

$$BD = \sqrt{r^2 + a^2}$$

Знак заряда q_2 будет учтен при подстановке численных значений величин.

Аналогично потенциал φ_2 в точке **C** создается зарядом q_1**,** отстоящим от точки **C** на расстояние $\sqrt{r^2 + a^2}$, и зарядом q_2, находящимся от точки **C** на расстоянии **r,** т.е.

$$\varphi_2 = \frac{q_2}{r} + \frac{q_1}{\sqrt{r^2 + a^2}}$$

Работа

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\left(k\frac{q_1}{r} + k\frac{q_2}{\sqrt{r^2 + a^2}} - k\frac{q_1}{\sqrt{r^2 - a^2}} - k\frac{q_2}{r}\right) =$$

$$= kq\frac{(q_1 - q_2)\left(\sqrt{r^2 + a^2} - r\right)}{r\sqrt{r^2 + a^2}}$$

Итак

$$A = 9\cdot 10^9\cdot 10^{-9}\frac{\left(3{,}33\cdot 10^{-9} - \left(-3{,}33\cdot 10^{-9}\right)\right)\left(\sqrt{36\cdot 10^{-4} + 64\cdot 10^{-4}} - 6\cdot 10^{-2}\right)}{6\cdot 10^{-2}\sqrt{36\cdot 10^{-4} + 64\cdot 10^{-4}}}\text{Дж}$$

$$A = 3{,}98\cdot 10^{-7}\,\text{Дж} \cong 4\cdot 10^{-7}\,\text{Дж}$$

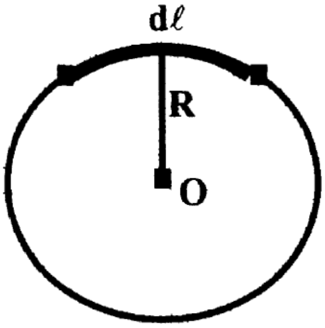
$$\textbf{Ответ: } A = 4\cdot 10^{-7}\,\text{Дж}$$

Задача №3.

Заряд очень тонкого проволочного кольца радиуса **R** равен **Q**. Заряд равномерно распределен по кольцу. Найти потенциал в центре кольца.

Дано: СИ
R
Q
$\varepsilon = 1$
$\varphi - ?$

РЕШЕНИЕ



Разделим мысленно кольцо на бесконечные малые элементы. Т.к. кольцо очень тонкое, то все точки каждого элемента будут находится от центра кольца **O** на одном и том же расстоянии **R**. Заряд, **dQ,** находящийся на бесконечно малом элементе длиною $d\ell$**,** можно считать точечным. Используя формулу (**3"),** можно записать, что потенциал $d\varphi$, создаваемый точечным зарядом **dQ** в точке **O,** будет равен

$$d\varphi = k\frac{dQ}{R},\ dQ = \frac{Q}{2\pi R}d\ell$$

где $\frac{Q}{2\pi R}$ - заряд приходящийся ва единицу длины кольца

$$d\varphi = k\frac{Q}{2\pi RR}d\ell = k\frac{Q}{2\pi R^2}d\ell$$

По принципу суперпозиции весь потенциал в точке O равен

$$\varphi = \int d\varphi = k\frac{Q}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi R} d\ell = k\frac{Q}{2\pi R^2}2\pi R = k\frac{Q}{R}$$

Интегрирование проводилось по всей длине кольца

$$\varphi = k\frac{Q}{R}$$

В СИ $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, следовательно $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

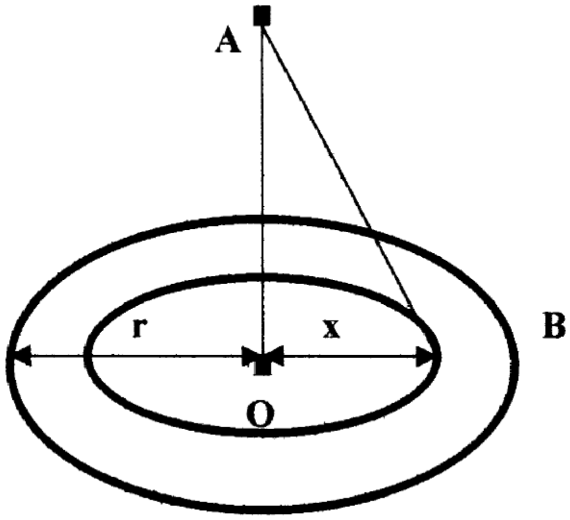
Ответ: $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Задача №4.

Тонкий диск радиуса r равномерно заряжен с поверхностной плотностью δ. Найти потенциал в точке **A**, лежащей на оси диска на расстоянии α от него. Ось диска перпендикулярна плоскости диска и проходит через центр диска.

Дано: СИ
R σ α $\varepsilon = 1$ $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$
$\varphi - ?$

РЕШЕНИЕ



Поскольку в задаче ничего не сказано о среде, окружающей диск, можно считать, что диск находится в вакууме и принять $\varepsilon = 1$. Разобьем диск на концентрические бесконечно тонкие кольца шириной **dx** каждое. На чертеже выделено одно кольцо радиуса **x**. Площадь **S** круга радиуса **x** равна.

$$S = \pi x^2$$

Бесконечно малая площадь **dS** бесконечно тонкого кольца шириною **dx** будет равна:

$$dS = 2\pi x dx.$$

Находящийся на нем заряд

$$dq = \sigma dS = 2\pi x \sigma dx.$$

$d\varphi$ - потенциал в точке **A,** создаваемый полем какого - либо одного бесконечно тонкого кольца.

Все точки бесконечно тонкого кольца отстоят от точки **A** на одно и тоже расстояние **AB.** Из Δ **AOB** можно по теореме Пифагора найти **AB.**

$AB = \sqrt{OB^2 + AO^2}$ или $AB = \sqrt{x^2 + a^2}$ Так как все точки кольца равноудалены от точки A, то заряд кольца можно заменить точечным зарядом той же величины (см. пред. задачу), удаленным на расстояние $\sqrt{x^2 + a^2}$ от точки A. Используя формулу **(3"),** можно записать

$$d\varphi = k\frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}} = k\frac{2\pi\sigma x dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Применяя принцип суперпозиции полей, находим, что потенциал в точке А, создаваемый полем всего диска, равен. Применяя принцип суперпозиции полей, находим, что потенциал в точке **А**, создаваемый полем всего диска, равен

$$\varphi = \int d\varphi = \int_0^r k\frac{2\pi\sigma x dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = k2\pi\sigma\int_0^r \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = k2\pi\sigma\left(\sqrt{x^2+a^2} - a\right)$$

<u>Примечание:</u> При вычислении интеграла использовался табличный интеграл вида

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{b \pm x^2}} = \pm\sqrt{b \pm x^2} + c$$

В СИ $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ и

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{r^2+a^2} - a\right)$$

Ответ: $\varphi = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{r^2+a^2} - a\right)$

<u>Задача №5</u>

Шарик массой **40 мг,** заряженный положительным зарядом в **10^{-9} Кл** движется со скоростью **10 м/с**. На какое расстояние может приблизится шарик к положительному точечному заряду, равному $2 \cdot 10^{-9}$ Кл?

<u>Дано: СИ</u>

$q_1 = 10^{-9}$ Кл

m=40мг=$4 \cdot 10^{-5}$ кг

$\varepsilon = 1$

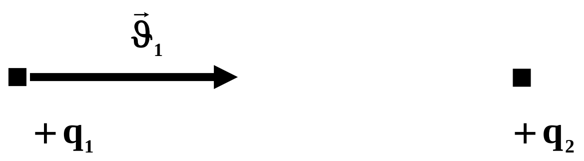
$\sigma_1 = 10$ см/с $= 10^{-1}$ м/с

$q_2 = 2 \cdot 10^{-9}$ Кл

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{м}{Ф}$

$r - ?$

РЕШЕНИЕ



Задачу решаем в инерциальной системе отсчета, связанной с Землей.

Применим закон сохранения энергии. Замкнутая система состоит из зарядов $\mathbf{q_1}$ и $\mathbf{q_2}$. Заряд $\mathbf{q_2}$ покоится, а заряд $\mathbf{q_1}$ приближается к нему со скоростью $\boldsymbol{\sigma_1}$. Полная энергия системы **E** = **const**. Когда заряды $\mathbf{q_1}$ и $\mathbf{q_2}$ находились достаточно далеко друг от друга, то потенциальной энергией их взаимодействия можно пренебречь и считать ее равной нулю. Тогда полная энергия системы

$$\mathbf{E = \frac{m\sigma_1^2}{2}}$$

Подойдя к заряду $\mathbf{q_2}$ на какое - то расстояние r, заряд $\mathbf{q_1}$ остановится из-за действия кулоновских сил отталкивания, тогда кинетическая энергия обоих зарядов будет равна нулю, и полная энергия системы будет равна:

$$\mathbf{E = k\frac{q_1 q_2}{r}}$$

Приравниваем (1) и (2).

$$\mathbf{\frac{m\sigma_1^2}{2} = k\frac{q_1 q_2}{r}}$$

Отсюда

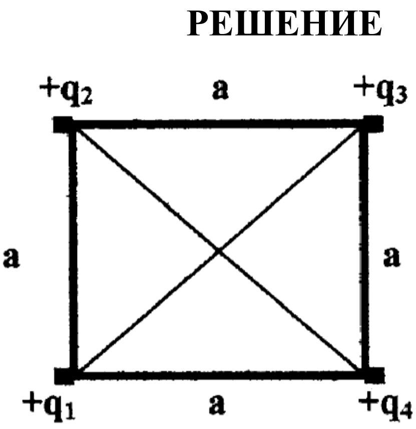
$$\mathbf{r = k\frac{2q_1 q_2}{m\vartheta_1^2}}$$

$$\mathbf{r = 9\cdot 10^9\,\frac{2\cdot 10^{-9}\cdot 2\cdot 10^{-9}}{4\cdot 10^{-5}\cdot 10^{-2}}\,м = 9\cdot 10^{-2}\,м}$$

Ответ: $\mathbf{9\cdot 10^{-2}\,м}$

Задача №5

Какова потенциальная энергия U системы четырех одинаковых положительных точечных зарядов **q=10нКл,** расположенных в вершинах квадрата со стороной **a=10см?**

Дано: СИ	**РЕШЕНИЕ**
$\mathbf{q_1=q_2=q_3=}$ $\mathbf{q_4=q10нКл=10^{-8}Кл}$ $\mathbf{a==10см=10^{-1}м}$ $\mathbf{k=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9\cdot 10^9\,\frac{м}{Ф}}$	
U-?	

где $\mathbf{U_{12}}$ - потенциальная энергия $\mathbf{q_1}$ и $\mathbf{q_2}$
$\mathbf{U_{13}}$ - потенциальная энергия $\mathbf{q_1}$ и $\mathbf{q_3}$
$\mathbf{U_{14}}$ - потенциальная энергия $\mathbf{q_1}$ и $\mathbf{q_4}$ т.д..

$$\mathbf{U_{12}=U_{14}=U_{23}=U_{34}=k\frac{q^2}{a\sqrt{2}}}$$

где $\mathbf{a\sqrt{2}}$ - диагональ квадрата.

$$\mathbf{U = 4k\frac{q^2}{a} + 2k\frac{q^2}{a\sqrt{2}} = k\frac{q^2}{a}\left(4+\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = k\frac{q^2}{a}\left(4+\sqrt{2}\right)}$$

Итак

$$\mathbf{U = k\frac{q^2}{a}\left(4+\sqrt{2}\right)}$$

$$\mathbf{U = 9\cdot 10^9\,\frac{\left(10^{-8}\right)^2}{10^{-1}}\left(4+1{,}41\right)Дж = 48{,}7\cdot 10^{-6}\,Дж = 48{,}7мкДж}$$

Ответ: 48,7 мкДж

ПОТЕНЦИАЛ. РАБОТА ПО ПЕРЕМЕЩЕНИЮ ЗАРЯДА В ПОЛЕ. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ.

Методические указания

Составитель к.ф.-м.н., Назимова Н.А.
Рецензент: к.ф.-м.н., Кравченко Н.С.

Подписано к печати

Формат 60х84/16. Бумага. №
Плоская печать. Усл. Печ. л.   Уч.-изд.л.
Тираж ____ экз. Заказ   Бесплатно.
Ротопринт. ТПУ 634004. Томск пр. Ленина, 30.