Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет
Кафедра теоретической и экспериментальной физики

«УТВЕРЖДАЮ»
Декан ЕНМФ
__________И.П. Чернов
________________2001 г.

Напряженность электрического поля

Методические указания для решения задач на тему: «Напряженность электрического поля» для студентов-заочников всех специальностей.

Томск 2001

УДК 53.01
Напряженность электрического поля. Методические указания по решению задач по курсу «Общая физика» для студентов-заочников всех специальностей.
Томск, изд. ТПУ 2001. – 12 с.

Составитель: к.ф.-м.н., Назимова Н.А.

Рецензент: к.ф.-м.н., Макиенко А.В.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы методическим семинаром кафедры теоретической и экспериментальной физики.

Зав. кафедрой Ю.Л. Пивоваров

«___»___________2001г.

КРАТКАЯ ТЕОРИЯ

Пространство, в котором находятся электрические заряды, обладает особыми физическими свойствами. Любой заряд возбуждает вокруг себя поле. Свойства полей электрических зарядов зависят от того, в каком состоянии находятся сами заряды.

Поле неподвижных зарядов называется электростатическим полем. В дальнейшем под словами "электрическое поле'* будем подразумевать именно электростатическое поле.

Напряженностью $\vec{\mathbf{E}}$ электрического поля в данной точке называется физическая величина, численно равная силе, с которой поле действует на единичный заряд, помещенный в данную точку поля.

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}}{\mathbf{q}} \qquad (1)$$

Напряженность поля $\vec{\mathbf{E}}$ - величина векторная. Напряженность электрического поля является силовой характеристикой поля.

Если поле создается точечным зарядом **q**, то напряженность поля в какой-либо точке, отстоящей от заряда **q** на расстояние **г,** рассчитывается по формуле:

$$\mathbf{E} = \mathbf{k}\frac{\mathbf{q}}{\varepsilon \mathbf{r}^2} \qquad (2)$$

где **е** - относительная диэлектрическая проницаемость среды;

k- коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы

единиц измерения.

Относительная диэлектрическая проницаемость среды ε находится по таблицам, которые имеются во всех справочниках и задачниках по физике. Коэффициент **k** в системе СИ равен:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi\varepsilon_0}}$$

где ε_0 - электрическая постоянная.

$$\varepsilon_0 \cong 8{,}85 \cdot 10^9 \, \frac{\Phi}{\text{м}}$$

Численное значение коэффициента **k** в системе СИ равно:

$$\mathbf{k=9\ 10^9}\frac{\text{м}}{\Phi}$$

В СИ выражение (2) для напряженности электрического поля записывается в виде:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{q}}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon \mathbf{r}^2} \qquad \textbf{(3)}$$

Для вакуума $\boldsymbol{\varepsilon = 1}$ и выражение (3) переписывается в СИ в виде:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{q}}{4\pi\varepsilon_0 \mathbf{r}^2} \qquad \textbf{(4)}$$

Если поле создается несколькими зарядами, то результирующая напряженность электрического поля в каждой точке поля равна векторной сумме напряженностей полей создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности. Это принцип суперпозиции (наложения) электрических полей.

Математически принцип суперпозиции записывается так:

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \vec{\mathbf{E}}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{\mathbf{E}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{E}}_i \qquad \textbf{(5)}$$

где $\vec{\mathbf{E}}$ - напряженность результирующего поля в рассматриваемой точке поля;

$\vec{\mathbf{E}}_i$ -напряженность поля, создаваемого i-тым зарядом в этой же точке.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

При решении задач на тему "Напряженность электрического поля" могут встретиться следующие случаи.

1. Поле создается одним или несколькими точечными зарядами**,** причем известна конфигурация (расположение) этих электрических зарядов. Тогда используются формулы (2), (3), (4) и принцип суперпозиции (5) полей, (см. задачи № 1,2).

2. Поле задается зарядами, которые нельзя считать точечными в условии данной задачи. Тогда тело разбивается на бесконечно малые элементы, такие, чтобы заряд каждого элемента можно было считать точечным. По формулам (2), (3), (4) находится напряженность поля, создаваемая в исследуемой точке каждым элементом. Эти напряженности затем суммируются геометрически, т.е. с учетом их направлений. (См. задачи 3,4, 5)

3. Поле создается равномерно заряженными бесконечной плоскостью, двумя бесконечными параллельными плоскостями (поле между обкладками плоского конденсатора), бесконечной цилиндрической поверхностью (поле, создаваемое очень длинной равномерно заряженной нитью), равномерно заряженной сферической поверхностью. Тогда напряженность поля рассчитывается или непосредственно с помощью теоремы Гаусса-Остроградского или с помощью формул, полученных, как следствия этой теоремы, (см. Методические указания по решению задач на тему "Теорема Гаусса-Остроградского" для студентов-заочников всех специальностей).

4. Если в условии задачи не указывается среда, в которой находятся заряды, то подразумевается, что они находятся в вакууме ($\varepsilon = 1$) или в воздухе ($\varepsilon \cong 1$)

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Найти напряженность электрического поля в точке, лежащей посередине между точечными зарядами **q, = 8 * КГ^Кл и q, = -6 • 10~^{9} Кл**. Расстояние между зарядами равно **г** = **10см**. Заряды находятся в вакууме.

РЕШЕНИЕ

<u>Дано:СИ</u>

$\mathbf{q_1 = 8 \cdot 10^{-9}}$ **Кл.**

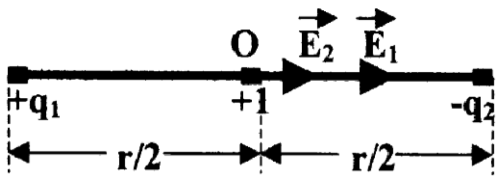
$\mathbf{q_2 = -6 \cdot 10^{-9}}$ **Кл.**

$\mathbf{к = 10см = 10^{-1} м}$

$\mathbf{\varepsilon = 1}$

$$\mathbf{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{м}{Ф}}$$

E-?



$\vec{E}_1$ **- напряженность поля, создаваемого в точке О**

$\vec{E}_2$ **- напряженность поля, создаваемого в точке О.**

Поместим в исследуемую точку **О** единичный положительный заряд. Согласно принципу суперпозиции результирующая напряженность поля в точке **О;**

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ направлены в одну сторону поэтому векторную сумму можно заменить алгебраической

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E_1 = k\frac{q_1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = k\frac{4q}{r^2}; \qquad E_2 = k\frac{q_2}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = k\frac{4q_2}{r^2}$$

$$E = k\frac{4q_1}{r^2} + k\frac{4q_2}{r^2} = k\frac{4}{r^2}(q_1 + q_2);$$

$$E = 9 \cdot 10^9 \frac{4(8 \cdot 10^{-9} + 6 \cdot 10^{-9})}{10^{-2}} \frac{В}{м} = 5{,}04 \cdot 10^4 \frac{В}{м}$$

Ответ: $\mathbf{E = 5{,}04 \cdot 10^4 \frac{В}{м}}$.

<u>Задача №2.</u>

<u>Дано:СИ</u>

$\mathbf{q_1 = 7{,}5 \cdot 10^{-9}}$ **Кл.**

$\mathbf{q_2 = -14{,}6 \cdot 10^{-9}}$ **Кл.**

$\mathbf{r = 5см = 5 \cdot 10^{-2}}$ **м**

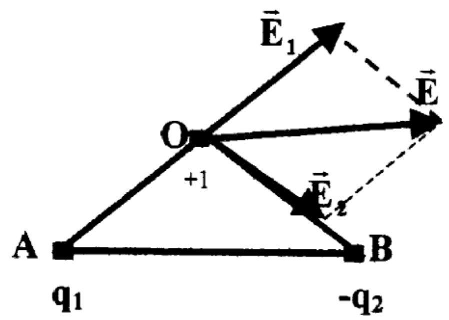
$\mathbf{r_1 = 3см = 3 \cdot 10^{-2}}$ **м**

$\mathbf{r = 4см = 4 \cdot 10^{-2}}$ **м**

$\mathbf{\varepsilon = 1}$

$\mathbf{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{м}{Ф}}$

E-?



$\vec{E}_1$ -напряженность поля,создаваемого в точке О положительным зарядом $\mathbf{q_1}$

$\vec{E}_2$ -напряженность поля, создаваемого в точке О отрицательным зарядом $\mathbf{q_2}$

Поместим в исследуемую точку О единичный положительный заряд. Результирующая напряженность в точке О

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Заменим векторную форму записи алгебраической. Так как по условию задачи $\mathbf{r_1^2 + r_2^2 = r}\left(\mathbf{3^2 + 4^2 = 5^2}\right)$, то $\mathbf{\Delta ABC}$ и $\mathbf{\angle AOB}$-прямой. Тогда модуль вектора напряженности равен:

$$\mathbf{E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \left(k\frac{q_1}{r_1^2}\right)^2 + \left(k\frac{q_2}{r_2^2}\right)^2 = k\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^2} + \frac{q_2^2}{r_2^3}}}$$

$$\mathbf{E = 9 \cdot 10^{-9} \sqrt{\left(\frac{7{,}5 \cdot 10^{-9}}{9 \cdot 10^{-4}}\right) + \left(\frac{14{,}6 \cdot 10^{-9}}{16 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = 1{,}12 \cdot 10^5 \frac{В}{м}}$$

Ответ: $\mathbf{E = 1{,}12 \cdot 10^5 \frac{В}{м}}$

Задача№ 3.

Длинная нить равномерно заряжена с линейной плотностью τ. Найти напряженность поля в точке A, лежащей вблизи нити на перпендикуляре, восстановленном из конца нити, на расстоянии α от этого конца.

РЕШЕНИЕ

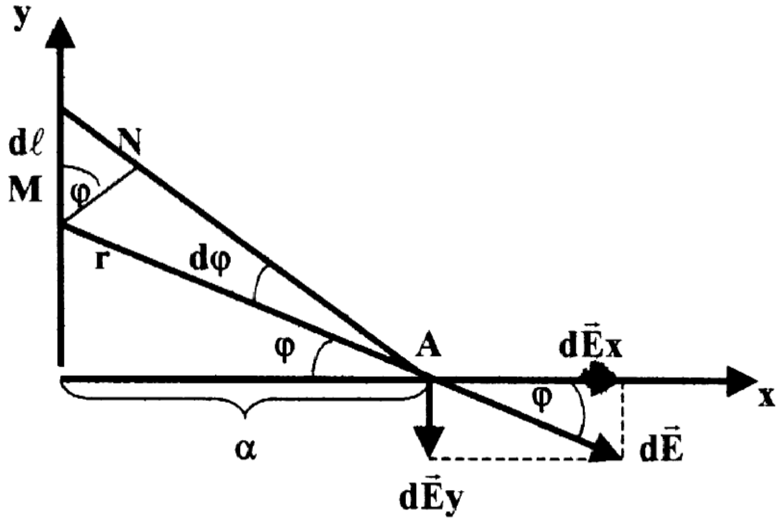
Дано:СИ

τ, α

$\varepsilon = 1$

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

E-?



Выберем оси **OX** **и OY,** как показано на чертеже. Нить расположена вдоль оси **OY,** точка **O**-конец нити, из которого восстановлен перпендикуляр. Напряженность E поля, создаваемого нитью, требуется найти в точке A.

Разделим нить на бесконечно-малые элементы $d\ell$. Заряд dq, находящийся на элементе $d\ell$, можно считать точечным $dq = \tau d\ell$. Рассмотрим элемент $d\ell$ находящийся от точки **A** на расстоянии **r**.

$d\vec{E}$ -напряженность поля в точке **A**, создаваемая этим элементом; ее можно рассчитать по формуле

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\frac{\tau d\ell}{r^2}$$

Рассчитать напряженность **E** в точке **A**, взяв линейный интеграл от $d\vec{E}$ нельзя, т.к. векторы $d\vec{E}$, создаваемые различными элементами $d\ell$, имеют различные направления и заменить векторную сумму $\sum d\vec{E}$ алгебраической, т.е. применить интегрирование, невозможно.

Разложим $d\vec{E}$ на составляющие $d\vec{E}_x$, и $d\vec{E}_y$ и выберем в качестве переменной величины угол φ

$$dE_x = dE\cos\varphi \qquad dE_Y = dE\sin\varphi$$

Или $$dE_x = k\frac{\tau d\ell}{r^2}\cos\varphi \qquad dE_y = k\frac{\tau d\ell}{r^2}\sin\varphi$$

Из чертежа следует, что $\mathbf{r = \frac{\alpha}{\cos\alpha}}$ $\mathbf{MN = rd\varphi}$, с другой стороны

$$\mathbf{MN = d\ell\cos\varphi \quad rd\varphi = d\ell\cos\varphi} \text{ и}$$

$$\mathbf{d\ell = \frac{rd\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\alpha d\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

Тогда

$$\mathbf{dE_x = k\frac{\tau\alpha d\varphi\cos^2\alpha\cos\varphi}{\cos^2\varphi\ \ \alpha^2} = k\frac{\tau}{\alpha}\cos\varphi d\varphi}$$

Аналогично $\mathbf{dE_y = k\frac{\tau}{\alpha}\sin\varphi d\varphi}$, отсюда

$$\mathbf{E_x = \int_0^\infty dE_x = k\frac{\tau}{\alpha}\int_o^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi = k\frac{\tau}{\alpha}}$$

$$\mathbf{E_y = \int_0^\infty dE_y = k\frac{\tau}{\alpha}\int_o^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi = k\frac{\tau}{\alpha}}$$

$\mathbf{E_x}$ и $\mathbf{E_y}$ - проекции на оси **OX** и **OY** искомого вектора напряженности $\vec{\mathbf{E}}$ в точке **A.**

Модуль вектора напряженности равен $\mathbf{T = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}}$

$$\mathbf{E = \sqrt{k^2\frac{\tau^2}{\alpha^2} + k^2\frac{\tau^2}{\alpha^2}} = k\sqrt{2}\frac{\tau}{\alpha} = \frac{\tau\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0\alpha}}$$

$$\textbf{Ответ:}\ \mathbf{E = \frac{\tau\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0\alpha}}$$

Задача №4

Тонкое кольцо радиуса $\mathbf{R = 8см}$ несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\mathbf{\tau = 10\frac{нКл}{м}}$. Определить напряженность электрического поля в точке, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $\mathbf{r = 10см}$.

РЕШЕНИЕ

<u>Дано:</u> СИ

$\mathbf{R=8см=8\cdot10^{-2}м}$

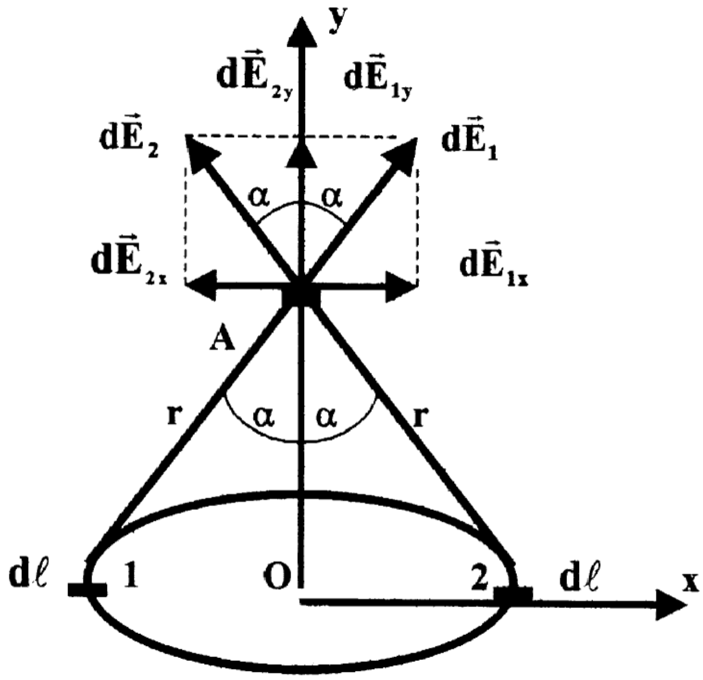
$\tau = 10\dfrac{нКл}{м} = 10^{-8}\dfrac{Кл}{м}$

$\mathbf{r = 10см = 10^{-1}м}$

$\varepsilon_0 \cong 8{,}85\cdot10^{-12}\dfrac{Ф}{м}$

$\varepsilon = 1$

E-?



Разобьем кольцо на бесконечно малые элементы $d\ell$. Заряд каждого элемента dq можно считать точечным $dq = \tau d\ell$. Рассмотрим элементы 1 и 2.

Элемент1 создает в исследуемой точке А поле с напряженностью $dE_1 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, а элемент 2 с напряженностью $dE_2 = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$,отсюда

$$dE_1 = dE_2 = dE$$

Разложим dE_1 и dE_2 на составляющие по осям **OX** и **OY.** Как видно из чертежа, сумма всех составляющих, параллельных оси **OX,** будет равна нулю.

$$\sum dE_x = 0$$

Остается просуммировать все составляющие по оси **OY.**

$$E = \int dE_y\ ; \qquad\qquad dE_y = dE\cos\alpha$$

Находим $\cos\alpha$. Как видно из чертежа, $\sin\alpha = \dfrac{R}{r}$, отсюда

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin\alpha} = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{r}$$

$$dE_y = \frac{\tau d\ell}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sqrt{r^2-R^2}}{r} = \frac{\tau\sqrt{r^2-R^2}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}d\ell$$

$$E=\int dE_y=\frac{\tau\sqrt{r^2-R^2}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int\limits_0^{2\pi R}d\ell=\frac{\tau R\sqrt{r^2-R^2}}{2\varepsilon_0 r^3}$$

$$E=\frac{10^{-8}\cdot 8\cdot 10^{-2}\sqrt{10^{-2}-64\cdot 10^{-4}}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-3}}\,\frac{В}{м}=2{,}71\cdot 10^3\,\frac{В}{м}=2{,}71\frac{kВ}{м}$$

Ответ: $2{,}71\dfrac{kВ}{м}$

Задача №5

Полусфера несет заряд, равномерно распределенный с поверхностной плотностью $\delta=1\dfrac{нКл}{м^2}$. Найти напряженность **E** электрического поля в геометрическом центре полусферы.

Решение

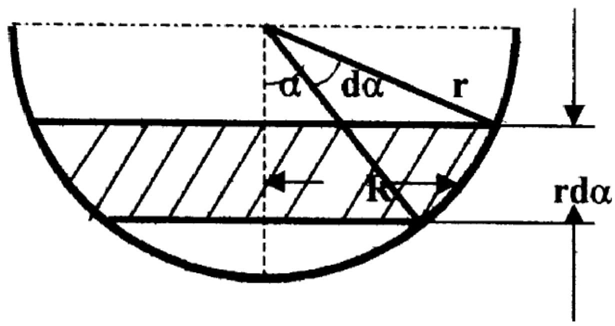
Дано: **СИ**

$\delta=1\dfrac{нКл}{м^2}=10^{-9}\dfrac{Кл}{м^2}$

$\varepsilon_0\cong 8{,}85\cdot 10^{-12}\dfrac{Ф}{м}$

$\varepsilon=1$

E-?



Разобьем полусферу на элементарные кольца бесконечно малой высоты **dh**,

$$dh=rd\alpha$$

где **r**-расстояние от центра полусферы до кольца.

Заряд каждого кольца

$$dq=\delta\,ds$$

где **ds**- площадь боковой поверхности кольца (на чертеже эта поверхность заштрихована).

$$ds=2\pi Rdh=2\pi Rrd\alpha$$

Следовательно,

$$dq=\delta 2\pi Rrd\alpha\,,$$

где **R=r α sin**

Напряженность **E** поля, создаваемого заряженной полусферой в точке **O**, равна сумме напряженностей полей, создаваемых элементарными кольцами в рассматриваемой точке.

Напряженность **dE** поля, создаваемая кольцом бесконечно-малой высоты в центре полусферы (в точке **O**) равна (см. задачу № 4).

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha = \frac{\delta 2\pi R d\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\delta R}{2\varepsilon_0 r}\cos\alpha d\alpha$$

Учитывая, что $R = r\sin\alpha$, имеем

$$E = \int dE = \frac{\delta}{2\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin\alpha\cos\alpha d\alpha = \frac{\delta}{4\varepsilon_0}\int_0^{\pi/2}\sin 2\alpha d\alpha = \frac{\delta}{4\varepsilon_0}$$

$E = \frac{\delta}{4\varepsilon_0}$, отсюда $E = \frac{10^{-9}}{4\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\frac{В}{м} = 28{,}3\frac{В}{м}$

Ответ: $E \cong 28{,}3\frac{В}{м}$

НАПРЯЖЕННОСТЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Методические указания

Составитель к.ф.-м.н., Назимова Н.А.
Рецензент: к.ф.-м.н., Макиенко А.В.

Подписано к печати

Формат 60x84/16. Бумага. №
Плоская печать. Усл. Печ. л.   Уч.-изд.л.
Тираж ____ экз. Заказ   Бесплатно.
Ротопринт. ТПУ 634004. Томск пр. Ленина, 30.