

**Федеральное агентство по образованию**

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

**«ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

**С.И. Кузнецов**

**КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.  
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И ВОЛНОВАЯ  
ОПТИКА**

**Учебное пособие**

**2-е издание, переработанное, дополненное**

**Издательство**

**Томского политехнического университета**

**2007**

УДК 530

К 89

**Кузнецов С. И.**

К 89

Колебания и волны. Геометрическая и волновая оптика: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. – 170 с.

В учебном пособии рассмотрены основные законы, связанные с механическими и электромагнитными колебаниями и распространением волн в упругой среде. Раскрыты принципы теоретических и экспериментальных исследований электромагнитных волн и связь между оптическими и электромагнитными явлениями. Обоснован корпускулярно-волновой дуализм света.

Пособие подготовлено на кафедре общей физики ТПУ, соответствует программе курса физики высших технических учебных заведений и направлено на активизацию научного мышления и познавательной деятельности студентов.

Предназначено для межвузовского использования студентами технических специальностей очной и дистанционной форм обучения.

УДК 530

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета

*Рецензенты*

Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ

*А.В. Шаповалов*

Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ

*А.Г. Парфенов*

© Томский политехнический университет, 2007

© Оформление. Издательство ТПУ, 2007

© С.И. Кузнецов, 2007

## ВВЕДЕНИЕ

В данном разделе курса лекций рассмотрены основные законы, связанные с механическими и электромагнитными колебаниями и распространением волн. В физике под колебаниями понимают движения или состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости. Колебания свойственны всем явлениям природы. Пульсируют звезды, внутри которых идут циклические ядерные реакции. С высокой степенью периодичности вращаются планеты Солнечной системы. Периодически повторяются приливы и отливы на Земле, вызванные вращением Луны. Сильные ветры возбуждают колебания домов, мостов и волн на поверхности водоемов. Колеблется груз на конце пружины, камертон, маятник, струны гитары. Внутри любого живого организма непрерывно идут различные повторяющиеся процессы. Колеблются атомы в молекулах и относительно кристаллической решетки твердого тела.

Колебания могут распространяться в пространстве, в этом случае мы имеем дело с волнами. Волны – это изменение состояния среды, или возмущения, распространяющиеся в этой среде и несущие с собой энергию. Наиболее часто встречающиеся виды волн – упругие, поверхностные, электромагнитные. Частным случаем упругих волн является звук и сейсмические волны. Разновидностью электромагнитных волн служат радиоволны, свет, рентгеновские лучи.

Изучение колебаний и волновых процессов активно стимулировало развитие науки. Так, исследование колебаний маятника (1636 г.) позволило Галилею более точно измерить промежутки времени. Изучение Ньютоном законов периодического обращения планет вокруг Солнца привело к созданию начал классической механики (1686 г.). Дж. Максвелл, связав свойства электромагнитных процессов с характеристиками света, создал электромагнитную теорию света (1864 г.).

Благодаря общности закономерностей колебательных и волновых процессов различной природы оказывается возможным вести их описание на основе единых математических моделей, не интересуясь деталями их поведения.

Так как волновые процессы встречаются почти во всех разновидностях физических явлений, изучение их закономерностей должно стать фундаментом для вскрытия общих основ многих внешне различных процессов.

## Тема 1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- 1.1. Виды и признаки колебаний
- 1.2. Параметры гармонических колебаний
- 1.3. Графики смещения скорости и ускорения
- 1.4. Основное уравнение динамики гармонических колебаний
- 1.5. Энергия гармонических колебаний
- 1.6. Гармонический осциллятор

### 1.1. Виды и признаки колебаний

В физике особенно выделяют колебания двух видов – *механические и электромагнитные и их электромеханические комбинации*, поскольку они чрезвычайно актуальны для жизнедеятельности человека. Так, механические колебания плотности воздуха воспринимаются нами как звук, а быстрые электромагнитные колебания – как свет. С помощью звука и света мы получаем основную часть информации об окружающем нас мире.

Для колебаний характерно *превращение одного вида энергии в другой – кинетической в потенциальную, магнитной в электрическую и т.д.*

***Колебательным движением называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости во времени.***

Несмотря на большое число колебательных явлений, встречающихся в нашей жизни (звук, свет, радиоволны), существуют общие закономерности этих явлений. Поэтому основные учения о *механических колебаниях*, которые мы рассматриваем здесь, должны стать фундаментом для изучения любых видов колебаний.

Итак, различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями.

Говоря о колебаниях или осцилляциях тела, мы подразумеваем повторяющееся движение его туда и обратно по одной и той же траектории. Иными словами, такое движение является ***периодическим***. Простейшим примером периодического движения служат ***колебания груза на конце пружины***. Многие другие виды колебательных движений проявляют большое сходство с этими колебаниями; поэтому мы разберем этот пример подробно. Будем считать, что массой пружины можно пренебречь и что пружина установлена горизонтально, как показано на рис. 1.1, а.

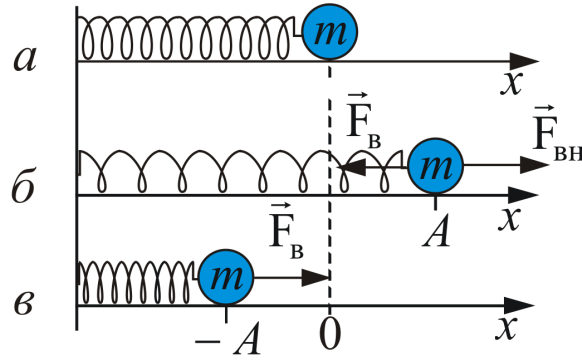


Рис. 1.1

К одному концу пружины прикреплен груз массой  $m$ , который движется без трения по горизонтальной поверхности. Любая пружина имеет определенное значение длины, при котором с ее стороны на груз не действует сила; в этом случае говорят, что пружина находится в *положении равновесия* ( $x=0$ ). Если сдвинуть груз вправо, растягивая пружину, или влево, сжимая ее, то пружина действует на груз с силой  $F_B$ , которая стремится вернуть его в положение равновесия; такую силу называют *возвращающей*. Для нашей системы сила  $F_B$  прямо пропорциональна расстоянию  $x$ , на которое сжимается или растягивается пружина:

$$F_B = -kx. \quad (1.1.1)$$

Формула (1.1.1) справедлива до тех пор, пока пружина не сжимается настолько, что ее витки приходят в соприкосновение или не растягиваются сверх предела упругости. Знак минус означает, что возвращающая сила всегда противоположна направлению перемещения  $x$ .

Постоянная  $k$  в формуле (1.1.1) называется *жесткостью пружины*. Для того чтобы растянуть пружину на длину  $x$ , к ней надо приложить внешнюю силу:

$$F_{вн} = +kx.$$

Что же произойдет, если пружину растянуть на длину  $x=A$ , как показано на рис. 1.1, б, и затем отпустить? Пружина действует на груз с силой, которая стремится вернуть её в положение равновесия. Но поскольку эта сила сообщает грузу ускорение, груз приходит в положение равновесия со значительной скоростью. Заметим, что в положении равновесия сила, действующая на груз, уменьшается до нуля, а скорость его в этой точке максимальна. Когда груз, проскочив положение равновесия, движется влево, сила со стороны пружины замедляет его в точке  $x=-A$  (рис. 1.1, в). Груз на мгновение останавливается, а затем начинает двигаться в противоположном направлении, пока не придет в точку  $x=A$ , откуда он начал движение. Затем весь этот процесс повторяется.

Из приведенного примера следуют *три признака колебательного движения*:

- **повторяемость (периодичность)** – движение по одной и той же траектории туда и обратно;
- **ограниченность пределами крайних положений**;
- **действие силы**, описываемой функцией  $F = -kx$ .

Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени. Простейшим типом периодических колебаний являются так называемые **гармонические колебания**.

Любая колебательная система, в которой возвращающая сила прямо пропорциональна смещению, взятому с противоположным знаком (например,  $F = -kx$ ), совершает *гармонические колебания*. Саму такую систему часто называют *гармоническим осциллятором*. Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

- колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, *близкий к гармоническому*;
- различные *периодические процессы* (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как *наложение гармонических колебаний*.

Периодический процесс можно описать уравнением:

$$f(t) = f(t + nT).$$

По определению, колебания называются *гармоническими*, если зависимость некоторой величины  $x = f(t)$  имеет вид

$$x = A \sin \varphi \text{ или } x = A \cos \varphi. \quad (1.1.2)$$

Здесь синус или косинус используются в зависимости от условия задачи,  $A$  и  $\varphi$  – параметры колебаний, которые мы рассмотрим ниже.

## 1.2. Параметры гармонических колебаний

Для изучения колебательного движения нам придется ввести несколько терминов – **параметров колебательного движения**.

- Расстояние груза от положения равновесия до точки, в которой находится груз, называют **смещением**  $x$ .
- **Максимальное смещение** – наибольшее расстояние от положения равновесия – называется **амплитудой** и обозначается буквой  $A$ .
- Выражение, стоящее под знаком синуса или косинуса в формуле (1.1.2)  $\varphi = \omega t + \varphi_0$ , определяет смещение  $x$  в данный момент времени  $t$  и называется **фазой колебания**.

- При  $t = 0$   $\varphi = \varphi_0$ , поэтому  $\varphi_0$  называется **начальной фазой колебания**. Фаза измеряется в радианах и определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени.

Т.к. синус и косинус изменяются в пределах от +1 до -1, то  $x$  может принимать значения от  $+A$  до  $-A$  (рис. 1.2).

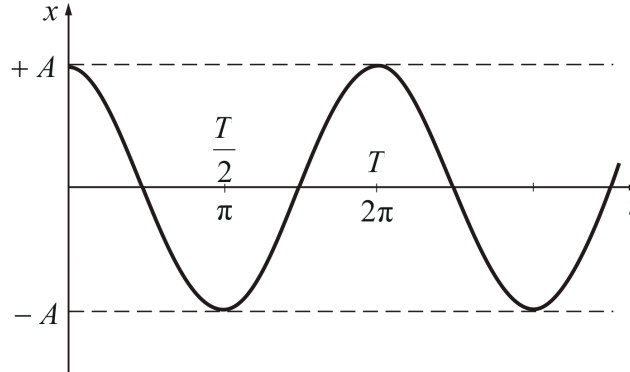


Рис. 1.2

- Движение от некоторой начальной точки до возвращения в ту же точку, например от  $x = A$  к  $x = -A$  и обратно в  $x = A$ , называется **полным колебанием**. **Частота колебаний**  $\nu$  определяется как число полных колебаний в 1 секунду. Частоту, как правило, измеряют в герцах (Гц): 1 Гц равен 1 полному колебанию в секунду. Очевидно, что

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (1.2.1)$$

- $T$  – **период колебаний** – минимальный промежуток времени, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебание

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}. \quad (1.2.2)$$

- $\omega$  – **циклическая (круговая) частота** – число полных колебаний за  $2\pi$  секунд:

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (1.2.3)$$

Заметим, что фаза  $\varphi$  не влияет на форму кривой  $x(t)$ , а влияет лишь на ее положение в некоторый произвольный момент времени  $t$ .

Например, при  $\varphi_0 = 0$  мы имеем  $x(t) = A \cos \omega t$ , как на рис. 1.2, а при  $\varphi_0 = -\pi/2$   $x(t) = A \cos(\omega t - \pi/2) = A \sin \omega t$ , т.е. мы имеем чистую синусоиду. Таким образом, гармонические колебания являются всегда синусоидальными.

Кроме того, заметим, что частота и период гармонических колебаний не зависят от амплитуды. Изменяя амплитуду колебаний груза на пружине, мы не изменяем частоту колебаний этой системы.

Колебания характеризуются не только смещением, но и **скоростью**  $v_x$  и **ускорением**  $a_x$ .

Если смещение описывается уравнением  $x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ , то, по определению,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1.2.4)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1.2.5)$$

В этих уравнениях  $v_m = \omega A$  – **амплитуда скорости**;  $a_m = -\omega^2 A$  – **амплитуда ускорения**.

Из уравнений (1.2.4) и (1.2.5) видно, что скорость и ускорение также являются гармоническими колебаниями.

### 1.3. Графики смещения скорости и ускорения

Параметры колебаний запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \\ v_x = v_m \cos(\omega t + \varphi_0), \\ a_x = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0). \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Из этой системы уравнений можно сделать следующие выводы:

- *скорость колебаний тела максимальна и, по абсолютной величине, равна амплитуде скорости в момент прохождения через положение равновесия ( $x = 0$ ). При максимальном смещении ( $x = \pm A$ ) скорость равна нулю;*

- *ускорение равно нулю при прохождении телом положения равновесия и достигает наибольшего значения, равного амплитуде ускорения при наибольших смещениях.*

Ускорение всегда направлено к положению равновесия, поэтому, удаляясь от положения равновесия, тело движется замедленно, приближаясь к нему – ускоренно. Ускорение всегда прямо пропорционально смещению, а его направление противоположно направлению смещения. Все эти выводы могут служить определением гармонического колебания.

Графики смещения скорости и ускорения гармонических колебаний приведены на рис. 1.3.

Начальная фаза  $\varphi_0$  определяется из начальных условий конкретной задачи (точно так же, как и амплитуда  $A$ ).



Найдем разность фаз  $\Delta\varphi$  между фазами смещения  $x$  и скорости  $v_x$ . Для этого воспользуемся (1.3.1):

$$\begin{cases} x = A \sin(\omega t + \varphi_0) = A \sin \varphi_x, \\ v_x = v_m \cos(\omega t + \varphi_0) = v_m \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi/2) = v_m \sin \varphi_v. \end{cases}$$

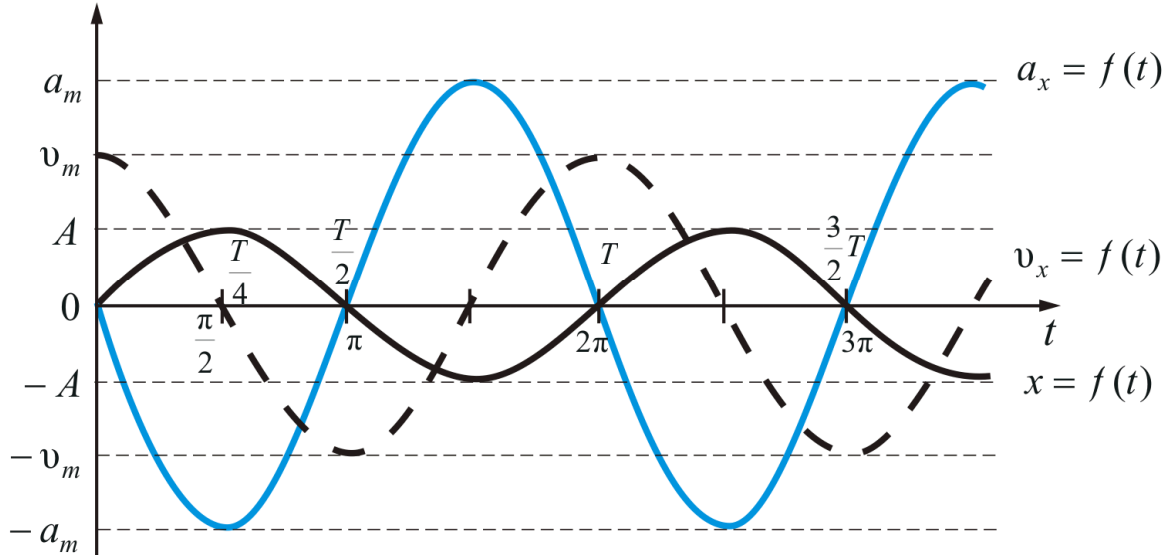


Рис. 1.3

Отсюда видно, что

$$\Delta\varphi = \varphi_x - \varphi_v = \pi/2, \quad (1.3.2)$$

то есть *скорость опережает смещение по фазе на  $\pi/2$* .

Аналогично можно показать, что *ускорение, в свою очередь, опережает скорость по фазе на  $\pi/2$* :

$$a_x = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0) = a_m \sin(\omega t + \varphi_0 + \pi) = a_m \sin \varphi_a,$$

т.к.  $-\sin \alpha = \sin(\pi + \alpha)$ , то  $\varphi_a - \varphi_v = \omega t + \varphi_0 + \pi - \omega t - \varphi_0 - \pi/2 = \pi/2$ , или

$$\varphi_v - \varphi_a = -\pi/2. \quad (1.3.3)$$

Тогда *ускорение опережает смещение на  $\pi$* , или

$$\varphi_x - \varphi_a = -\pi, \quad (1.3.4)$$

то есть *смещение и ускорение находятся в противофазе*. Все вышеизложенное хорошо иллюстрируется рис. 1.3.

## 1.4. Основное уравнение динамики гармонических колебаний

Второй закон Ньютона позволяет, в общем виде, записать связь между силой и ускорением, при прямолинейных гармонических колебаниях материальной точки (или тела) с массой  $m$ .

Т.к. исходя из второго закона  $F = ma$ , можно записать:

$$F_x = -m\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x, \quad (1.4.1)$$

где  $F_x$  – проекция силы на направление  $x$ . Из (1.4.1) следует, что **сила  $F$  пропорциональна  $x$  и всегда направлена к положению равновесия** (поэтому ее и называют **возвращающей силой**). Период и фаза силы совпадают с периодом и фазой ускорения.

Примером сил удовлетворяющих (1.4.1) являются **упругие силы**. Силы же, имеющие иную природу, но удовлетворяющие (1.4.1), называются **квазиупругими**. Квазиупругая сила

$$F_x = -kx, \quad (1.4.2)$$

где  $k$  – коэффициент квазиупругой силы.

Сравнивая (1.4.1) и (1.4.2), видим, что  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ .

В случае прямолинейных колебаний вдоль оси  $x$ , проекция ускорения на эту ось  $a_x = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

Подставив выражения для  $a_x$  и  $F_x$  во второй закон Ньютона, получим **основное уравнение динамики гармонических колебаний**, вызываемых упругими или квазиупругими силами:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \quad \text{тогда}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.4.3)$$

Решением этого уравнения всегда будет выражение вида

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0),$$

т.е. смещение груза под действием упругой или квазиупругой силы является **гармоническим колебанием, происходящим по синусоидальному закону**.

Круговая частота незатухающих колебаний  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , но, т.к.

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ , тогда  $\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , отсюда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (1.4.4)$$

то есть чем больше жесткость пружины  $k$ , тем меньше период (больше частота), а чем больше масса, тем период колебаний больше.

## 1.5. Энергия гармонических колебаний

Вычислим энергию тела массой  $m$ , совершающего гармонические колебания с амплитудой  $A$  и круговой частотой  $\omega$  (рис. 1.1).

**Потенциальная энергия  $U$  тела**, смещенного на расстояние  $x$  от положения равновесия, измеряется той работой, которую произведет возвращающая сила  $F_x = -kx$ , перемещая тело в положение равновесия.

$$F_x = -\frac{dU}{dx}; \quad dU = -Fdx = kxdx, \quad \text{отсюда } U = k \int_0^x xdx, \quad \text{или}$$

$$U = \frac{kx^2}{2}, \quad (1.5.1)$$

$$U = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0). \quad (1.5.2)$$

**Кинетическая энергия**

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (1.5.3)$$

Заменив в (1.5.2)  $k = m\omega^2$  и сложив почленно уравнения (1.5.2) и (1.5.3), получим выражение для **полной энергии**:

$$E = U + K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [\sin^2(\omega t + \varphi_0) + \cos^2(\omega t + \varphi_0)] = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2, \quad \text{или}$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (1.5.4)$$

*Полная механическая энергия гармонически колеблющегося тела пропорциональна квадрату амплитуды колебания.*

В случае свободных незатухающих колебаний полная энергия не зависит от времени, поэтому и амплитуда  $A$  не зависит от времени.

Из (1.5.2) и (1.5.3) видно, что и потенциальная  $U$ , и кинетическая  $K$  энергия пропорциональны квадрату амплитуды  $A^2$ .

Рассмотрим колебания груза под действием сил тяжести (рис. 1.4).

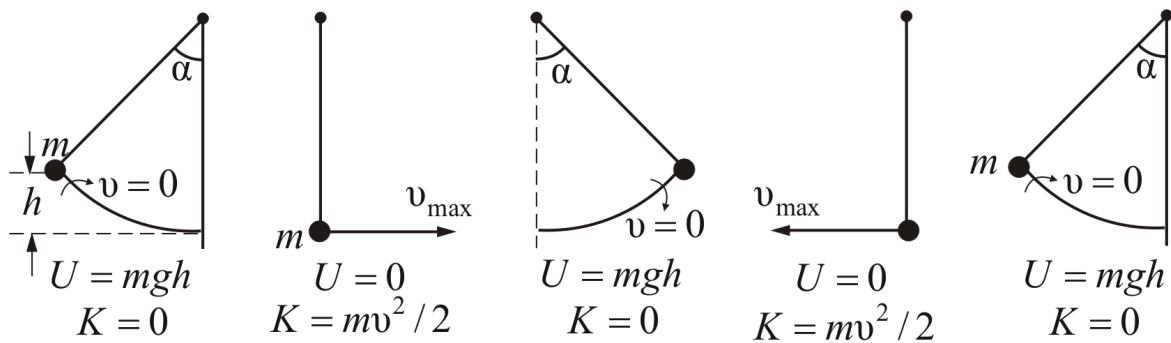


Рис. 1.4

Из рис. 1.4 и из формул (1.5.2) и (1.5.3) видно, что  $U$  и  $K$  изменяются периодически (при свободных незатухающих колебаниях). Однако период изменения энергии в два раза меньше, чем период изменения смещения скорости и ускорения. Это значит, что и кинетическая, и потенциальная энергия изменяются с частотой, которая в два раза превышает частоту смещения гармонического колебания. За время одного полного колебания  $U$  и  $K$  дважды достигают своих максимальных значений и дважды обращаются в нуль. Связано это с тем, что и  $U$ , и  $K$  пропорциональны квадрату косинуса и синуса фазы колебаний.

Максимум потенциальной энергии (1.5.2)  $U_{\max} = mgh = \frac{1}{2}kA^2$ .

Максимум кинетической энергии  $K_{\max} = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}kA^2$ , но когда  $K = \max$   $U = 0$  и наоборот. На рис. 1.5 представлены графики зависимости  $x$ ,  $U$  и  $K$  от времени  $t$ .

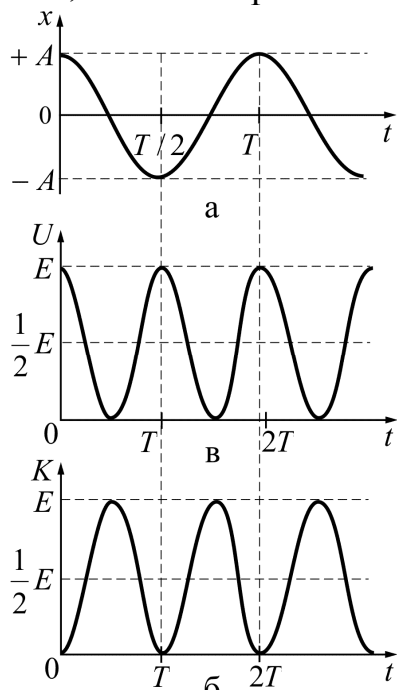


Рис. 1.5

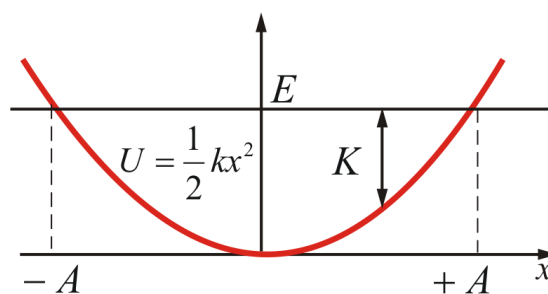


Рис. 1.6

При колебаниях, совершающихся под действием потенциальных (консервативных) сил, происходит переход кинетической энергии в потенциальную и наоборот, но их сумма в любой момент времени постоянна.

На рис. 1.6 приведена кривая потенциальной энергии.

Горизонтальная линия соответствует определенному значению полной энергии:  $E = \frac{1}{2}kA^2$ . Расстояние от этой линии до кривой равно

кинетической энергии, а движение ограничено значениями  $x$ , заключенными в пределах от  $+A$  до  $-A$ . Эти результаты полностью согласуются с полным решением уравнения движения.

## 1.6. Гармонические осцилляторы

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются: *пружинный, математический и физический маятники*, а также *колебательный контур* (для малых токов и напряжений).

• **Пружинный маятник** – это груз массой  $m$ , подвешенный на абсолютно упругой пружине с жесткостью  $k$ , совершающий гармонические колебания под действием упругой силы  $F = -kx$  (рис. 1.7).

Уравнение движения маятника:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m}\right)x = 0. \quad (1.6.1)$$

Из сравнения выражений (1.4.3) и (1.6.1) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону  $x = A \cos(\omega t + \varphi)$  с циклической частотой  $\omega$  и периодом  $T$ , где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

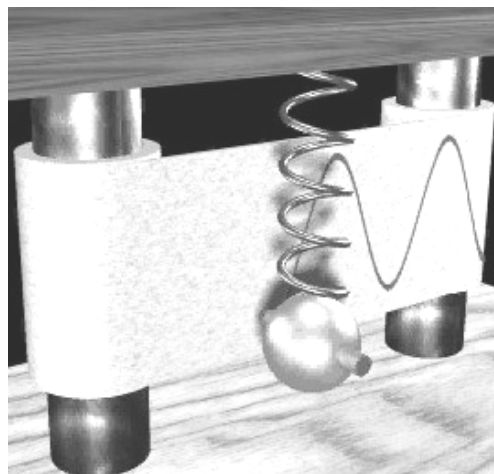
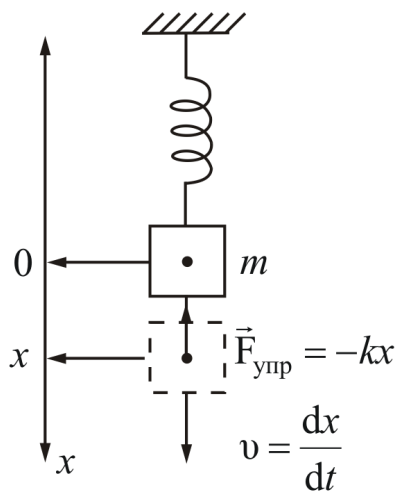


Рис. 1.7

Эти формулы справедливы для упругих колебаний в пределах, когда выполняется закон Гука, т.е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела и ее деформация не превышает предела упругости.

• **Математическим маятником** называется идеализированная система, состоящая из невесомой нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (шарик на длинной тонкой нити) (рис. 1.8).

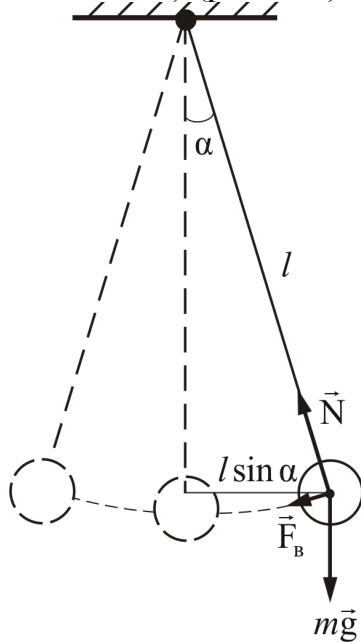


Рис. 1.8

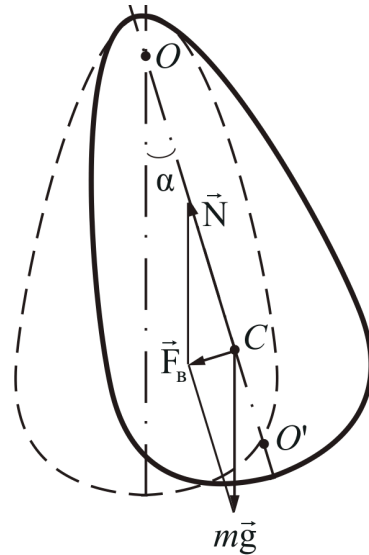


Рис. 1.9

Рассмотрим условия, при которых колебания маятника являются гармоническими.

Отклонения маятника от положения равновесия будем характеризовать углом  $\alpha$ , образованным нитью с вертикалью.

При отклонении маятника от вертикали возникает **вращающий момент**, модуль которого  $|\vec{M}| = mgl \sin \alpha$ . Он имеет такое направление, что стремится вернуть маятник в положение равновесия, и в этом отношении он аналогичен квазиупругой силе. Поэтому можно записать:

$$M = -mgl \sin \alpha. \quad (1.6.2)$$

Уравнение динамики вращательного движения для маятника:

$$M = J\varepsilon,$$

где  $J = ml^2$  – момент инерции маятника,  $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$  – угловое ускорение.

$$\text{Тогда } ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha, \text{ или } \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \alpha = 0.$$

Рассмотрим колебания с *малой амплитудой*, т.е.  $\sin \alpha \approx \alpha$ , и введем обозначение:  $\frac{g}{l} = \omega^2$ . Тогда получим **уравнение движения маятника**:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0. \quad (1.6.3)$$

Это *уравнение динамики гармонических колебаний*. Решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (1.6.4)$$

Следовательно, *при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется во времени по гармоническому закону*.

Циклическая частота колебаний  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{2\pi}{T}$ , тогда период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1.6.5)$$

Т.е. период  $T$  *зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения*.

• **Физический маятник** – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , не совпадающую с центром масс  $C$  (рис. 1.9).

При отклонении этого тела от положения равновесия на угол  $\alpha$  также возникает **вращающий момент**, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия:

$$M = -mgl \sin \alpha,$$

где  $l$  – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника  $C$ .

Обозначим через  $J$  момент инерции маятника:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha. \quad (1.6.6)$$

В случае малых колебаний ( $\sin \alpha = \alpha$ ) уравнение (1.6.6) переходит в известное нам уравнение  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0$ . Его решение:

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega t + \varphi_0), \text{ где } \omega^2 = \frac{mgl}{J}.$$

Из (1.6.6) следует, что физический маятник при малых отклонениях также совершает гармонические колебания, частота которых зависит от массы и момента инерции маятника. Аналогично (1.6.5) получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (1.6.7)$$

Величину момента инерции  $J$  иногда бывает трудно вычислить.

Сопоставляя (1.6.5) и (1.6.7), получим, что физический маятник с длиной

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml} \quad (1.6.8)$$

будет иметь такой же период колебаний, как и математический:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}, \quad (1.6.9)$$

где  $l_{\text{пр}}$  – *приведенная длина физического маятника* – это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Точка  $O'$  на продолжении прямой  $OC$ , отстоящая от точки подвеса  $O$  на расстоянии приведенной длины  $l_{\text{пр}}$ , называется *центром качаний* физического маятника. Применяя теорему Штейнера, получим

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{ml} = \frac{J_C + ml^2}{ml} = \frac{J_C}{ml} + l > l,$$

т.е.  $l_{\text{пр}}$  всегда больше  $l$ . Точки  $O$  и  $O'$  всегда будут лежать по обе стороны от точки  $C$ .

Точка подвеса  $O$  маятника и центр качаний  $O'$  обладают *свойством взаимозаменяемости*: если маятник *перевернуть* и подвесить за точку  $O'$ , то прежняя точка  $O$  станет центром качаний и период колебаний физического маятника не изменится.

На этом свойстве основано определение ускорения силы тяжести  $g$  с помощью так называемого *оборотного маятника*. Это такой маятник, у которого имеются две точки подвеса и два груза, которые могут перемещаться вдоль оси маятника. Перемещением грузов добиваются того, что расстояние между точками подвеса будет соответствовать  $l_{\text{пр}}$ . Тогда, измерив период  $T$  и  $l_{\text{пр}}$ , легко рассчитать  $g$  по (1.6.9).

Физический и математический маятники совершают гармонические колебания при малых углах отклонения (меньше  $15^\circ$ ), т.е. длина дуги  $x = l\alpha$  мало отличается от длины хорды  $l \sin \alpha$  (менее 1%).



## Тема 2. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

### 2.1. Способы представления гармонических колебаний

### 2.2. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

### 2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

### 2.4. Фигуры Лиссажу (частные случаи)

### 2.1. Способы представления гармонических колебаний

Гармонические колебания можно представить несколькими способами:

- аналитический:  
 $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ;  $v_x = v_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ ;  $a_x = -a_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ ;
- графический (рис. 1.2 и 1.3);
- геометрический, с помощью вектора амплитуды (метод векторных диаграмм).

Рассмотрим подробнее последний способ (рис. 2.1).

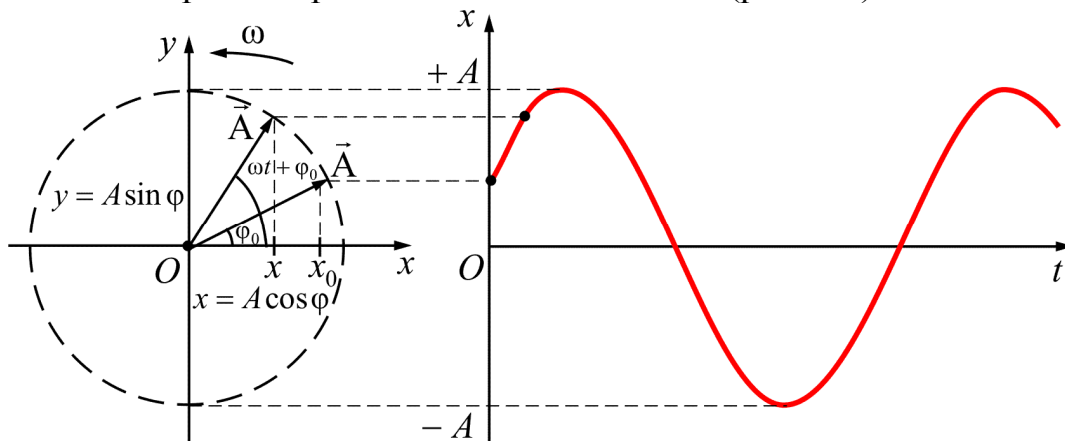


Рис. 2.1

Пусть гармоническое колебание описывается уравнением  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Проведем прямую  $Ox$  (опорную) и построим вектор  $\vec{A}$ , направленный из точки  $O$  под углом  $\varphi_0$  к опорной линии.

Обозначим через  $x_0$  проекцию вектора  $\vec{A}$  на опорную линию в момент времени  $t = 0$ :

$$x_0 = A \cos \varphi_0.$$

Вращение происходит против часовой стрелки, т.е.  $\omega > 0$ . За промежуток времени  $t$  вектор амплитуды повернется на угол  $\omega t$  и займет новое положение. Его проекция на опорную линию равна:  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ . За время, равное периоду колебаний  $T$ , вектор ампли-

туды повернется на угол  $2\pi$  и проекция вектора совершит полное колебание около положения равновесия (точка  $O$ ). Следовательно, *вращающийся вектор амплитуды полностью характеризует гармоническое колебание.*

Проекция кругового движения на ось  $y$  также совершает гармоническое колебание  $y = A \sin(\omega t + \varphi)$ . Таким образом, равномерное движение по окружности можно рассматривать как два колебательных гармонических движения, совершаемых одновременно в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Этим представлением широко пользуются при сложении колебаний.

## 2.2. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Пусть точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.

Сложение колебаний будем проводить методом векторных диаграмм (рис. 2.2). Пусть колебания заданы уравнениями

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и } x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (2.2.1)$$

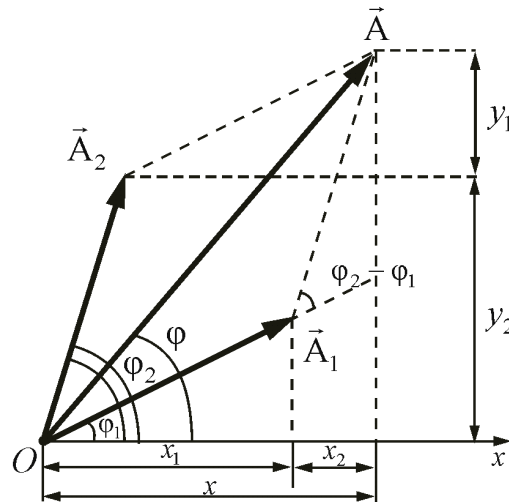


Рис. 2.2

Отложим из точки  $O$  вектор  $\vec{A}_1$  под углом  $\varphi_1$  к опорной линии и вектор  $\vec{A}_2$  под углом  $\varphi_2$ . Оба вектора вращаются против часовой стрелки с одинаковой угловой скоростью  $\omega$ , поэтому их разность фаз не зависит от времени ( $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$ ). Такие колебания называют когерентными.

Нам известно, что суммарная проекция вектора  $\vec{A}$  равна сумме проекций на эту же ось. Поэтому результирующее колебание может

быть изображено вектором амплитуды  $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$ , вращающимся вокруг точки  $O$  с той же угловой скоростью  $\omega$ , что и  $\vec{A}_1$ , и  $\vec{A}_2$ . Результирующее колебание должно быть также гармоническим с частотой  $\omega$ :

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

По правилу сложения векторов найдем суммарную амплитуду:

$$\begin{aligned} A^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 = \\ &= A_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2A_1A_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + A_2^2 \cos^2 \varphi_2 + A_1^2 \sin^2 \varphi_1 + \\ &\quad + 2A_1A_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + A_2^2 \sin^2 \varphi_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \times \\ &\times \left[ \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 + \varphi_1) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_2 + \varphi_1) \right] = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \end{aligned}$$

Результирующую амплитуду найдем по формуле

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (2.2.2)$$

Начальная фаза определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (2.2.3)$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Из (2.2.2) следует, что амплитуда  $A$  результирующего колебания зависит от разности начальных фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$ . Возможные значения  $A$  лежат в диапазоне  $|A_2 - A_1| \leq A \leq A_2 + A_1$  (амплитуда не может быть отрицательной).

**Рассмотрим несколько простых случаев.**

1. Разность фаз равна нулю или четному числу  $\pi$ , то есть  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi n$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Тогда  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$  и

$$A = A_1 + A_2, \quad (2.2.4)$$

так как  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} = A_1 + A_2$ , т.е. амплитуда результирующего колебания  $A$  равна сумме амплитуд складываемых колебаний (колебания *синфазны*) (рис. 2.3).

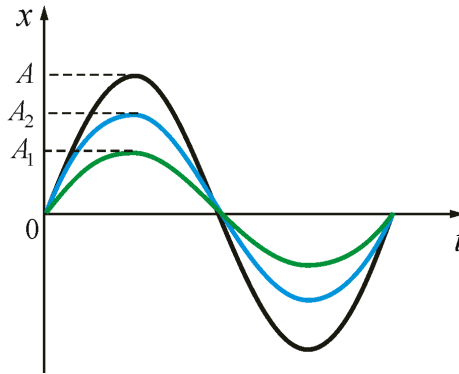


Рис. 2.3

2. Разность фаз равна нечетному числу  $\pi$ , то есть  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi(2n + 1)$ , где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . Тогда  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$ . Отсюда

$$A = |A_2 - A_1|. \quad (2.2.5)$$

На рис. 2.4 изображена амплитуда результирующего колебания  $A$ , равная разности амплитуд складываемых колебаний (колебания в *противофазе*).

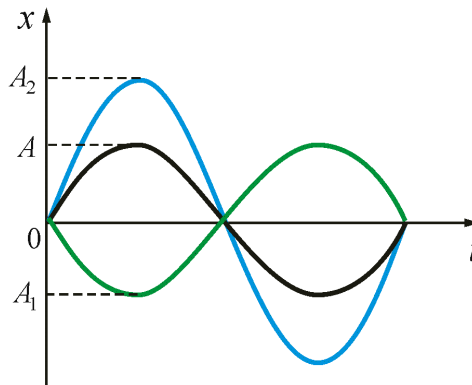


Рис. 2.4

3. Разность фаз изменяется во времени произвольным образом:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos[\omega_1 t + \varphi_1(t)], \\ x_2 = A_2 \cos[\omega_2 t + \varphi_2(t)]. \end{cases} \quad (2.2.6)$$

Из уравнения (2.2.6) следует, что  $A \neq \text{const}$  и будет изменяться в соответствии с величиной  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ . Поэтому при сложении некогерентных колебаний не имеет смысла говорить о сложении амплитуд, но в некоторых случаях наблюдаются вполне определенные закономерности. Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой.

Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**. Строго говоря, это уже не гармонические колебания.

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны  $A$ , а частоты равны  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$ , причем  $\Delta\omega \ll \omega$ . Начало отсчета выбираем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$x_1 = A \cos \omega t;$$

$$x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t.$$

Сложим эти выражения, пренебрегая  $\frac{\Delta\omega}{2}t$ , так как  $\frac{\Delta\omega}{2}t \ll 2\omega t$ .

$$x = A[\cos \omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t] = (2A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t) \cos \omega t. \quad (2.2.7)$$

Результирующее колебание (2.2.7) можно рассматривать как гармоническое с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A_6$ , которая изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_6 = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2}t \right|; \quad (2.2.8)$$

$$x = A_6 \cos \omega t.$$

Характер зависимости (2.2.8) показан на рис. 2.5, где сплошные жирные линии дают график результирующего колебания, а огибающие их – график медленно меняющейся по уравнению (2.2.7) амплитуды.

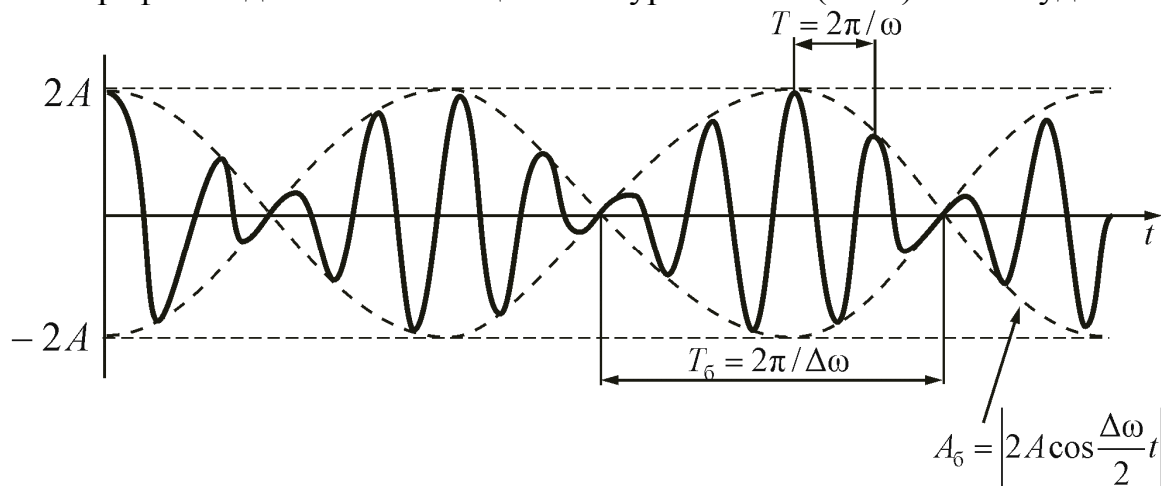


Рис. 2.5

Определение частоты тона (звука определенной высоты) биений между эталонным и измеряемым колебаниями – наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т.д.

Вообще, колебания вида  $x = A(t) \cos[\omega t + \varphi(t)]$  называются **модулированными**. Частные случаи: *амплитудная модуляция и модулирование по фазе или частоте*. **Биеение** – простейший вид модулированных колебаний.

Любые сложные периодические колебания  $S = f(t)$  можно представить в виде суперпозиции одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами, кратными циклической частоте  $\omega$ :

$$S(t) = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots + A_n \cos(m\omega t + \varphi_n).$$

Представление периодической функции в таком виде связывают с понятием *гармонического анализа сложного периодического колебания, или разложения Фурье* (то есть представление сложных модулированных колебаний в виде ряда (суммы) простых гармонических колебаний). Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами  $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ , называются *первой (или основной), второй, третьей* и т.д. *гармониками* сложного периодического колебания.

### 2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть некоторое тело колеблется и вдоль оси  $x$ , и вдоль оси  $y$ , т.е. участвует в двух взаимноперпендикулярных колебаниях:

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1); \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \quad (2.3.1)$$

Найдем уравнение результирующего колебания. Для простоты примем  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

Разность фаз между обоими колебаниями равна:  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ .

Чтобы получить уравнение траектории, надо исключить из этих уравнений время  $t$ .

Упростим выражения, выбрав начало отсчета так, чтобы  $\varphi_1 = 0$ , т.е.

$$x = A_1 \cos \omega t; \quad y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi).$$

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t \quad \text{или} \quad \sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}.$$

Распишем второе уравнение через косинус суммы:

$$\frac{y}{A_2} = \cos \omega t \cos \Delta\varphi - \sin \omega t \sin \Delta\varphi = \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi - \sin \Delta\varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}}.$$

$$\text{Отсюда} \quad \left( \frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi \right)^2 = \left( -\sin \Delta\varphi \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \right)^2.$$

Возведем обе части в квадрат:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \Delta\varphi - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi - \frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \Delta\varphi ;$$

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} (\cos^2 \Delta\varphi + \sin^2 \Delta\varphi) - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi .$$

Окончательное уравнение:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (2.3.2)$$

В результате мы получили *уравнение эллипса*, оси которого ориентированы относительно  $x$  и  $y$  произвольно (рис. 2.6).

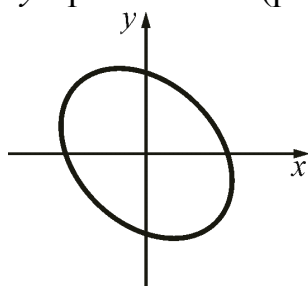


Рис. 2.6

## 2.4. Фигуры Лиссажу (частные случаи)

Рассмотрим некоторые частные случаи решений уравнения (2.3.2).

### 1. Начальные фазы колебаний одинаковы:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \text{ т.е. } \varphi_2 - \varphi_1 = 0.$$

Тогда уравнение (2.3.2) примет вид:

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0 \quad \text{или} \quad \left( \frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0 ;$$

отсюда получим уравнение результирующего колебания:

$$y = \frac{A_2}{A_1} x. \quad (2.4.1)$$

Это уравнение прямой, проходящей через начало координат (рис. 2.7, а). Следовательно, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми начальными фазами будут происходить колебания вдоль прямой, проходящей через начало координат.

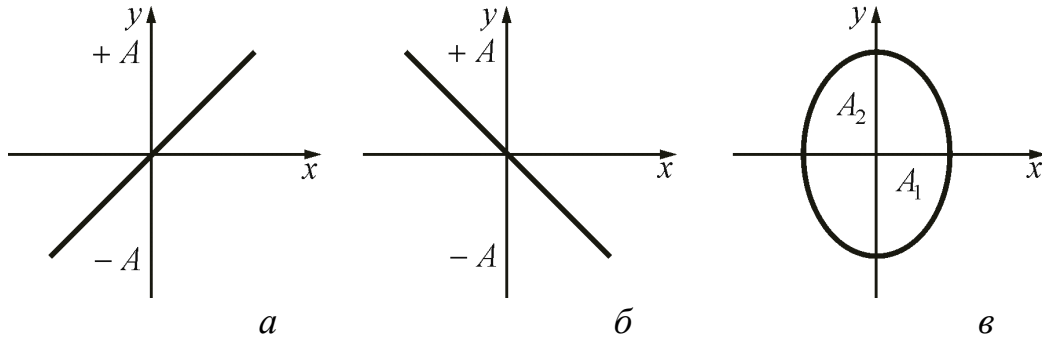


Рис. 2.7

Такие колебания называются *линейно поляризованными*.

2. **Начальная разность фаз равна  $\pi$** . Тогда  $\cos \pi = -1$ , следовательно

$$\left( \frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} + \frac{2xy}{A_1 A_2} \right) = 0;$$

$$\left( \frac{x}{A_1} + \frac{y}{A_2} \right)^2 = 0.$$

Уравнение колебания в этом случае

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \quad (2.4.2)$$

То есть точка тоже будет колебаться вдоль прямой, проходящей через начало координат, но прямая лежит в других четвертях по сравнению с первым случаем (рис. 2.7, б).

Амплитуда результирующего колебания в обоих случаях равна:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \quad (2.4.3)$$

3. **Начальная разность фаз равна  $\pi/2$** . Проанализируем уравнение (2.3.2), учитывая, что  $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ ;  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ .

$$\frac{y^2}{A_2^2} + \frac{x^2}{A_1^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi,$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \quad (2.4.4)$$

Это уравнение эллипса с полуосями  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 2.7, в). Случай *эллиптически поляризованных колебаний*.

При  $A_1 = A_2$  получим уравнение окружности (*циркулярно-поляризованные колебания*).

4. **Все остальные разности фаз дают эллипсы с различным углом наклона относительно осей координат.**



Необходимо отметить, что все рассматриваемые случаи, все кривые – это эллипсы (даже прямая – частный случай эллипса).

Фигуры, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний разных частот, называются **фигурами Лиссажу** (Ж. Лиссажу (1822–1880) – французский физик). В простейших случаях можно сравнить частоты по виду фигур.

В приведенных выше примерах рассматривались простейшие случаи, когда  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . Если  $\omega_1 \neq \omega_2$ , то в результате будут получаться уже не эллипсы, а более сложные фигуры Лиссажу. В табл. 1 приведены несколько фигур Лиссажу для разных соотношений частот колебаний и заданной разности фаз  $\Delta\varphi$ .

Таблица 1

$\frac{\omega_1}{\omega_2}$	Угол сдвига фаз $\Delta\varphi$				
	$0^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$180^\circ$
1:1					
1:2					
2:1					
1:3					
2:3					

## Тема 3. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНИХ СИЛ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

### 3.1. Свободные затухающие механические колебания

### 3.2. Коэффициент затухания

и логарифмический декремент затухания

### 3.3. Вынужденные механические колебания

### 3.4. Автоколебания

#### 3.1. Свободные затухающие механические колебания

Все реальные колебания являются затухающими. Энергия механических колебаний постепенно расходуется на работу против сил трения и амплитуда колебаний постепенно уменьшается (затухает).

Во многих случаях в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях силы, вызывающие затухание колебаний, пропорциональны величине скорости (например маятник). Тогда *сила трения* (или *сопротивления*)

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -r\vec{v},$$

где  $r$  – коэффициент сопротивления,  $\vec{v}$  – скорость движения.

Запишем второй закон Ньютона для затухающих *прямолинейных* колебаний вдоль оси  $x$ :

$$ma_x = -kx - rv_x,$$

где  $kx$  – возвращающая сила,  $rv_x$  – сила трения. Это уравнение можно переписать:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}, \text{ отсюда следует: } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Введем обозначения:  $\frac{r}{2m} = \beta$ ;  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ .

Тогда однородное **дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее затухающее колебательное движение**, запишем так:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.1.1)$$

Решение уравнения (3.1.1) имеет вид (при  $\beta \leq \omega_0$ ):

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t - \varphi_0). \quad (3.1.2)$$

Здесь  $A_0$  и  $\varphi_0$  определяются из краевых условий задачи (начальных и граничных), а  $\beta$  и  $\omega$  – из самого уравнения.

Найдем круговую частоту  $\omega$ . Здесь она уже не равна  $\omega_0$  ( $\omega \neq \omega_0$ ).

Для этого найдем первую и вторую производные от  $x$ :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\beta A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \beta^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + \beta \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + \\ &+ \beta \omega A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).\end{aligned}$$

Подставим эти значения в (3.1.1) и сократим на  $A_0 e^{-\beta t}$ :

$$\begin{aligned}\beta^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + 2\beta \omega \sin(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) - \\ - 2\beta^2 \cos(\omega t + \varphi_0) - 2\omega \beta \sin(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = 0; \\ -\beta^2 \cos(\omega t + \varphi_0) - \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) + \omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = 0.\end{aligned}$$

Сократим на  $\cos(\omega t + \varphi_0)$  и выразим  $\omega$ :

$$\begin{aligned}-\beta^2 - \omega^2 - \omega_0^2 = 0; \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2, \\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2},\end{aligned}$$

где  $\omega_0$  – *круговая частота собственных колебаний* (без затухания);  $\omega$  – *круговая частота свободных затухающих колебаний*. Из этого выражения ясно, почему решение (3.1.1) будет только при  $\beta \leq \omega_0$ .

Для колебаний под действием различных сил (квазиупругих) значения  $\omega$ ,  $\beta$ ,  $\omega_0$  будут различными. Например, для колебаний под действием упругой силы

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \beta = \frac{r}{2m}; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}.$$

Затухающие колебания представляют собой непериодические колебания, так как в них не повторяется, например, максимальное значение амплитуды. Поэтому называть  $\omega$  – *циклической* (повторяющейся, круговой) частотой можно лишь *условно*. По этой же причине и

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

называется *условным периодом* затухающих колебаний.

### 3.2. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания

Найдем отношение значений амплитуды затухающих колебаний в моменты времени  $t$  и  $t + T$  (рис. 3.1):

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta t} e^{-\beta T}} = e^{\beta T},$$

где  $\beta$  – коэффициент затухания.

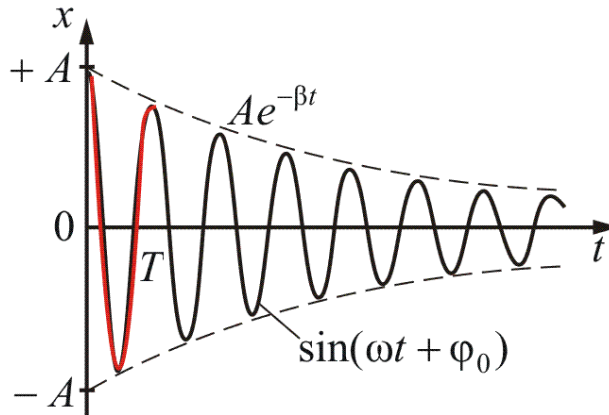


Рис. 3.1

Натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через период  $T$ , называется **логарифмическим декрементом затухания**  $\chi$ :

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T;$$

$$\chi = \beta T.$$

Выясним физический смысл  $\chi$  и  $\beta$ .

**Время релаксации**  $\tau$  – время, в течение которого амплитуда  $A$  уменьшается в  $e$  раз.

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\beta \tau} = e^1, \text{ отсюда } \beta \tau = 1; \quad \beta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, **коэффициент затухания**  $\beta$  есть физическая величина, обратная времени, в течение которого амплитуда уменьшается в  $e$  раз.

Пусть  $N$  число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Тогда

$$\tau = NT; \quad T = \frac{\tau}{N}; \quad \beta = \frac{1}{\tau};$$

$$\chi = \beta T = \frac{\tau}{\tau N} = \frac{1}{N}.$$

Следовательно, **логарифмический декремент затухания**  $\chi$  есть физическая величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда  $A$  уменьшается в  $e$  раз.

Если  $\chi = 0,01$ , то  $N = 100$ .

При большом коэффициенте затухания происходит не только быстрое уменьшение амплитуды, но и заметно увеличивается период колебаний. Когда сопротивление становится равным **критическому**  $r = r_{кр}$ , а  $\beta = \omega_0$ , то круговая частота обращается в нуль ( $\omega = 0$ ), а ( $T \rightarrow \infty$ ), колебания прекращаются. Такой процесс называется **апериодическим** (рис. 3.2).

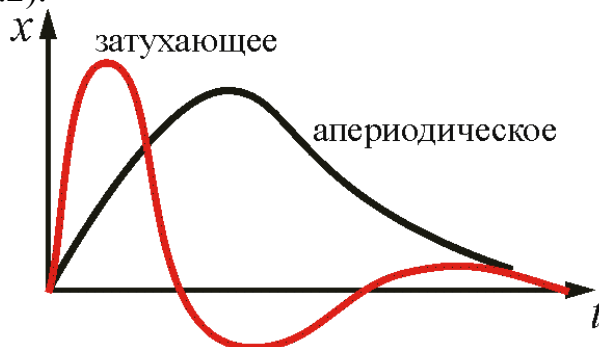


Рис. 3.2

Отличия в следующем. При колебаниях тело, возвращающееся в положение равновесия, имеет запас кинетической энергии. В случае апериодического движения энергия тела при возвращении в положение равновесия оказывается израсходованной на преодоление сил сопротивления, трения.

### 3.3. Вынужденные механические колебания

Рассмотрим систему, на которую, кроме упругой силы ( $-kx$ ) и сил сопротивления ( $-rv$ ), действует добавочная *периодическая сила*  $F$  – **вынуждающая сила**. Для колебаний вдоль оси  $x$  запишем:

$$ma_x = -kx - rv_x + F_x$$

– **основное уравнение колебательного процесса**, или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_x, \quad (3.3.1)$$

где  $f_x = F_x/m$  – вынуждающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$f_x = F_0 \cos \omega t.$$

Через некоторое время после начала действия вынуждающей силы колебания системы будут совершаться с частотой вынуждающей силы  $\omega$ . Уравнение установившихся вынужденных колебаний:

$$x = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.3.2)$$

Наша задача найти амплитуду  $A$  и разность фаз  $\varphi$  между смещением вынужденных колебаний и вынуждающей силой.

Обратим внимание на то, что скорость на  $\pi/2$  опережает смещение, а ускорение на  $\pi/2$  опережает скорость (см. п. 1.3).

Из (3.3.2) получим:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.3.3)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2). \quad (3.3.4)$$

Преобразуем и (3.3.2) через косинус:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2). \quad (3.3.5)$$

Обозначим  $\alpha = \varphi - \pi/2$  – угол между смещением и вынуждающей силой.

Подставим (3.3.3), (3.3.4) и (3.3.5) в (3.3.1):

$$\omega^2 A \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega A \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 A \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t,$$

$$\omega^2 \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + 2\beta\omega \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{mA} \cos \omega t.$$

Каждое слагаемое последнего уравнения можно представить в виде соответствующего вращающегося вектора амплитуды:

$A_1 = \omega^2$  – амплитуда ускорения;  $A_2 = 2\beta\omega$  – амплитуда скорости;  $A_3 = \omega_0^2$  – амплитуда смещения;  $A_4 = F_0/mA$  – амплитуда вынуждающей силы, причем  $|A_3| > |A_1|$ .

Вектор амплитуды силы найдем по правилу сложения векторов:

$$\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3.$$

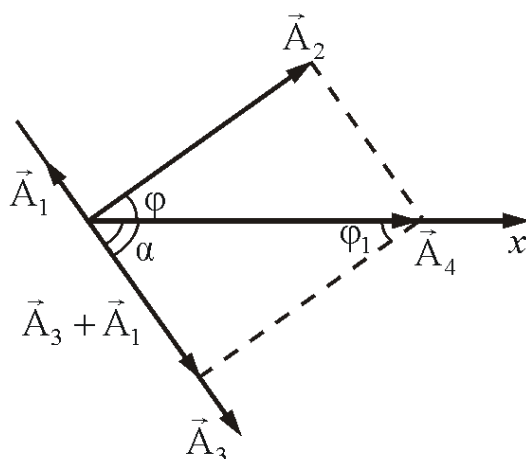


Рис. 3.3

Из рис. 3.2 видно, что  $A_4^2 = (A_3 - A_1)^2 + A_2^2$ . Найдем амплитуду  $A$ :

$$A = \frac{F_0}{mA_4} = \frac{F_0}{m\sqrt{(A_3 - A_1)^2 + A_2^2}},$$

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (3.3.7)$$

Таким образом,  $A \sim F_0/m$  и  $\sim 1/\beta$ .

При постоянных  $F_0$ ,  $m$  и  $\beta$  амплитуда зависит только от соотношения круговых частот вынуждающей силы  $\omega$  и свободных незатухающих колебаний системы  $\omega_0$ .

Начальную фазу вынужденных колебаний можно найти из выражения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_3 - A_1}{A_2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}. \quad (3.3.8)$$

Из рис. 3.3 видно, что сила опережает смещение на угол, который определяется из выражения

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_2}{A_3 - A_1} = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

**Проанализируем выражение (3.3.7).**

1)  $\omega = 0$  (частота вынуждающей силы равна нулю), тогда

$$A = F_0 / m\omega_0$$

– статическая амплитуда (колебания не совершаются).

2)  $\beta = 0$  (затухания нет). С увеличением  $\omega$  (но при  $\omega < \omega_0$ ) амплитуда растет и при  $\omega = \omega_0$  резко возрастает ( $A \rightarrow \infty$ ). Это явление называется **резонанс**. При дальнейшем увеличении  $\omega$  ( $\omega > \omega_0$ ) амплитуда опять уменьшается (рис. 3.4).

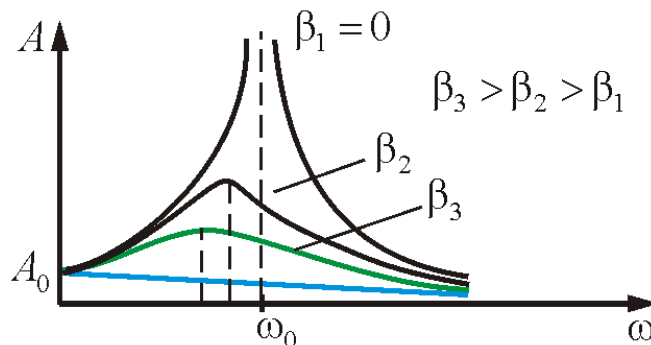


Рис. 3.4

3)  $\beta \neq 0$ . Амплитуда будет максимальна при минимальном значении знаменателя. Для нахождения точки перегиба возьмем первую производную по  $\omega$  от подкоренного выражения (3.3.7) и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d}{d\omega} \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 \right] = \frac{d}{d\omega} \left[ \omega_0^4 - 2\omega_0^2 \omega^2 + \omega^4 + 4\beta^2 \omega^2 \right] = -4\omega_0^2 \omega + 4\omega^3 + 8\beta^2 \omega = -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2) = 0.$$

$4\omega \neq 0$ , следовательно, выражение в скобках равно нулю:

$$\omega_0^2 - \omega^2 - 2\beta^2 = 0, \text{ откуда}$$

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (3.3.9)$$

где  $\omega_{\text{рез}}$  – резонансная частота.

*Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к  $\omega_{\text{рез}}$  называется **резонансом**.*

Для консервативной системы, т.е.  $\beta = 0$ , из (3.3.9) следует  $\omega_{\text{рез}} = \omega_0$ ; для диссипативной  $\omega_{\text{рез}}$  несколько меньше собственной круговой частоты  $\omega_0$  (рис. 3.4).

С увеличением коэффициента затухания  $\beta$  явление резонанса проявляется все слабее и исчезает при  $\beta > \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ .

### 3.4. Автоколебания

Наблюдая колебания листьев деревьев, дорожных знаков над проезжей частью улиц, полотнищ на ветру и др., мы понимаем, что во всех перечисленных случаях незатухающие колебания происходят за счет энергии постоянно дующего ветра. При этом сама колебательная система производит отбор энергии ветра в нужный момент времени и в количестве, требуемом для компенсации неизбежно присутствующих энергетических потерь. Колебания в этих системах начинаются самопроизвольно за счет начальных флуктуаций (дрожаний) колеблющихся предметов. Частота и амплитуда установившихся колебаний определяется как параметрами самой системы, так и параметрами ее взаимодействия с ветром. Такие колебания являются примерами автоколебаний, а сами системы – примерами автоколебательных систем.

Классическим примером автоколебательной системы служат механические часы с маятником и гирями. Эти часы периодически «черпают» энергию при опускании гирь, подвешенных к цепочке, перекинутой через шестерню часового механизма.

Принцип работы всех автоколебательных систем можно понять, обратившись к схеме, изображенной на рис. 3.5.



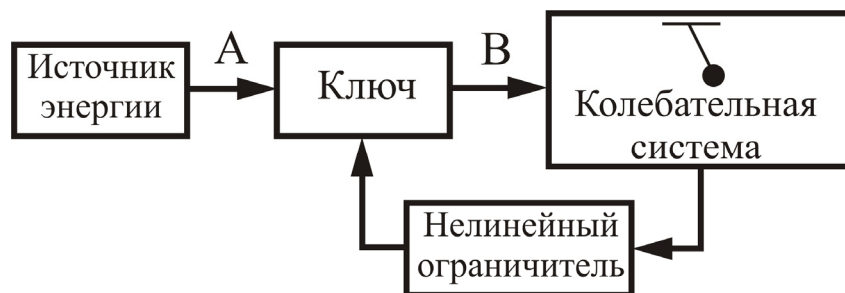


Рис. 3.5

Периодическим поступлением энергии в колебательную систему от источника энергии по каналу АВ управляет сама колебательная система посредством обратной связи. Схематически это изображено в виде некоторого запирающего канал АВ устройства (ключа), который управляется самой системой. Так, в зависимости от положения и скорости колеблющегося листа на ветру будет различной мощность сил аэродинамического давления.

В конструкции часового механизма (рис. 3.6) присутствует специальное устройство – анкер, выполняющий роль ключа. Этот анкер, представляющий собой коромысло, приводится в колебание самим маятником часов. При определенных положениях он «отпирает» одну из шестерен часового механизма. В этот момент времени шестерня проворачивается за счет момента сил, приложенного со стороны натянутой цепи с грузом. Груз при этом опускается на небольшую величину. Количество энергии, поступающей в часовой механизм, равно по величине уменьшению потенциальной энергии груза в поле силы тяжести.

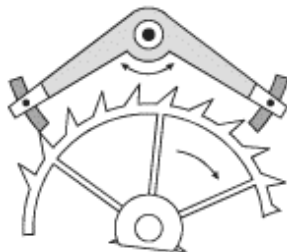


Рис. 3.6

Важно отметить, что любая автоколебательная система нелинейна. На схеме это отражено наличием в системе обратной связи нелинейного ограничителя сигнала, управляющего ключом. Нелинейность системы проявляется в том, что при начальном нарастании амплитуды колебаний, порожденных флуктуациями, поступление энергии в систему за каждый последующий период колебаний увеличивается нелинейно, т.е. прирост поступающей энергии становится все меньше и меньше. Естественно, что амплитуда колебаний достигнет такой установившейся величины, при которой приток энергии и ее потери будут равны.

## Тема 4. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### 4.1. Квазистационарные токи

### 4.2. Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

### 4.3. Свободные затухающие электрические колебания

### 4.4. Вынужденные электрические колебания

### 4.5. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

#### 4.1. Квазистационарные токи

При рассмотрении электрических колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися во времени. Закон Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока. Однако, они остаются справедливыми и для мгновенных значений изменяющегося тока и напряжения, если их изменения происходят не слишком быстро. Электромагнитные сигналы распространяются по цепи со скоростью света  $c$ . Пусть  $l$  – длина электрической цепи. Тогда время распространения сигнала в данной цепи  $t = l/c$ . Если  $t \ll T$  ( $T$  – период колебаний электрического тока), то такие токи называются *квазистационарными*. При этом условии мгновенное значение силы тока во всех участках цепи будет постоянным. Для частоты  $f = 50$  Гц условие квазистационарности выполняется при длине цепи  $\sim 100$  км.

Рассматривая в дальнейшем электрические колебания, мы будем считать, что токи квазистационарны.

#### 4.2. Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления

В цепи, содержащей индуктивность  $L$  и ёмкость  $C$ , могут возникать электрические колебания. Такая цепь называется *колебательным контуром* (рис. 4.1).

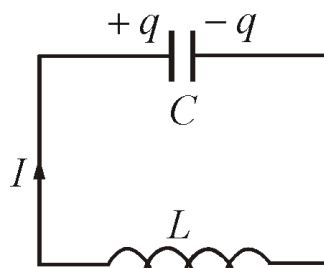


Рис. 4.1

Колебания в контуре можно вызвать либо зарядив конденсатор, либо вызвав в индуктивности ток (например включив магнитное поле).

Поскольку активное сопротивление контура  $R = 0$ , полная энергия остаётся постоянной. Если энергия конденсатора равна нулю, то энергия магнитного поля максимальна, и наоборот. Рассмотрим процессы, происходящие в колебательном контуре, в сравнении с колебаниями маятника (рис. 4.2).

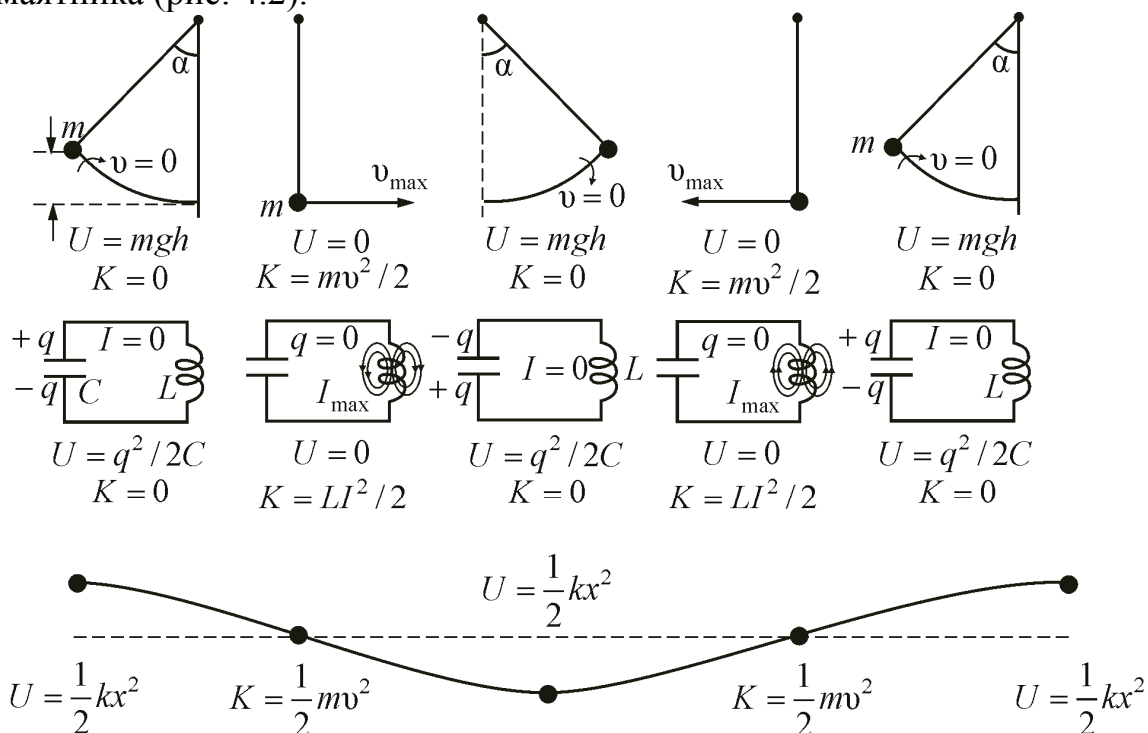


Рис. 4.2

Из сопоставления электрических и механических колебаний (рис. 4.2) следует, что энергия электрического поля  $U = \frac{q^2}{2C}$  аналогична

потенциальной энергии  $mgh$  или  $1/2 kx^2$ , а энергия магнитного поля  $\frac{LI^2}{2}$

аналогична кинетической энергии  $\frac{mv^2}{2}$ ;  $L$  играет роль массы  $m$ ,

$1/C$  – роль коэффициента жесткости  $k$ . Наконец, заряду  $q$  соответствует смещение маятника из положения равновесия  $x$ , силе тока  $I$  – скорость  $v$ , а напряжению  $U$  – ускорению  $a$ .

Ниже мы увидим, что эта аналогия сохраняется и в математических уравнениях. В соответствии со вторым законом Кирхгофа (и законом сохранения энергии), можно записать:

$$\frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.2.1)$$

Но, т.к.  $I = \frac{dq}{dt}$ ,  $\mathcal{E}_i = -L \frac{dI}{dt}$ , тогда получим  $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$ .

Введем обозначение:  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  – **собственная частота контура**,

отсюда получим **основное уравнение колебаний в контуре**:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (4.2.2)$$

Решением этого уравнения является выражение вида

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.2.3)$$

Таким образом, заряд на обкладке конденсатора изменяется по гармоническому закону с собственной частотой контура  $\omega_0$ .

Для периода колебаний справедлива **формула Томсона**:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC},$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (4.2.4)$$

Продифференцируем (4.2.3) по времени и получим выражение для тока:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.2.5)$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда на  $1/C$ :

$$U = \frac{q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.2.6)$$

Таким образом, ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе на  $\pi/2$ . На индуктивности, наоборот, напряжение опережает ток на  $\pi/2$ .

$$U_m = \frac{q_m}{C}; \quad I_m = \omega_0 q_m; \quad U_m C = \frac{I_m}{\omega_0};$$

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m, \quad (4.2.7)$$

где  $\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{вол}}$  – волновое сопротивление [Ом].

Выражение (4.2.7) – это **закон Ома для колебательного контура**.

### 4.3. Свободные затухающие электрические колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением (рис. 4.3). Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего колебания затухают.

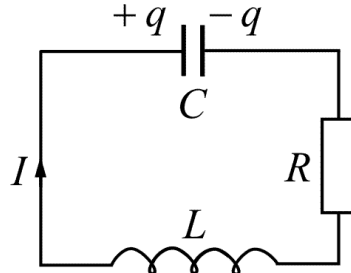


Рис. 4.3

По второму закону Кирхгофа:

$$IR + \frac{q}{C} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (4.3.1)$$

$$\frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C} = -L \frac{d^2q}{dt^2}, \text{ или } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Обозначим  $\beta = \frac{R}{2L}$  – коэффициент затухания и, учитывая, что

собственная частота контура  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , получим **уравнение затухающих колебаний** в контуре с  $R$ ,  $L$  и  $C$ :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 = 0. \quad (4.3.2)$$

При  $\beta \leq \omega_0$ , т.е.  $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , решение этого уравнения имеет вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – частота затухающих колебаний контура, или

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \text{ т.е. } \omega < \omega_0.$$

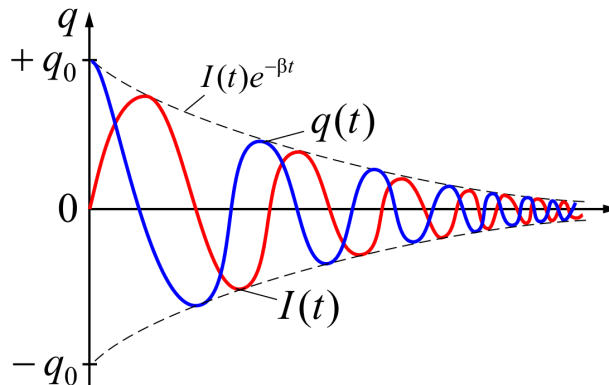


Рис. 4.4

На рис. 4.4 показан вид затухающих колебаний заряда  $q$  и силы тока  $I$ . Если сравнить электрические затухающие колебания с механиче-

скими (рис. 3.1), то хорошо видны общие закономерности этих явлений: колебаниям  $q$  соответствует  $x$  – смещение маятника из положения равновесия, силе тока  $I$  – скорость  $v$ .

Затухание принято характеризовать *логарифмическим декрементом затухания*  $\chi$ :

$$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T, \quad (4.3.3)$$

где  $A$  – амплитуда  $I, U, q$ .

Найдём выражение  $\chi$  для электрических колебаний. Т.к.

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega},$$

тогда

$$\chi = \beta T = \frac{\pi R}{L\omega}.$$

Поскольку  $R, L, \omega$  определяются параметрами контура, следовательно  $\chi$  является *характеристикой контура*.

Если затухание невелико, т.е.  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , то  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , тогда

$$\chi = \frac{\pi R \sqrt{LC}}{L} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (4.3.4)$$

Колебательный контур часто характеризуют *добротностью*  $Q$ , которая определяется как величина, обратно пропорциональная  $\chi$ :  $Q = \frac{\pi}{\chi}$ ,

а т.к.  $\chi = \frac{1}{N}$ , где  $N$  – число колебаний, то  $Q = \pi N$ , т.е. *добротность*  $Q$  тем больше, чем больше колебаний успевают совершиться, прежде чем амплитуда уменьшится в  $e$  раз.

Добротность определяется и по-другому:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (4.3.5)$$

где  $W$  – энергия контура в данный момент,  $\Delta W$  – убыль энергии за один период, следующий за этим моментом.

При  $\beta^2 \geq \omega_0^2$ , т.е. при  $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$ , происходит *апериодический разряд* (рис. 4.5).

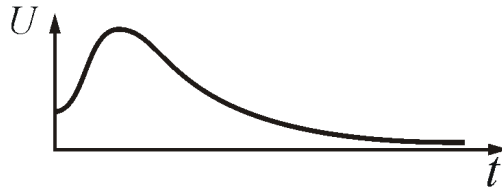


Рис. 4.5

Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в аperiodический, называется **критическим сопротивлением**  $R_k$ . Найдем это сопротивление из равенства:

$$\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC},$$

отсюда

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2R_{\text{вол}}, \quad (4.3.6)$$

где  $R_{\text{вол}}$  – волновое сопротивление, определяемое параметрами  $L$  и  $C$ .

#### 4.4. Вынужденные электрические колебания. Резонанс

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему внешнее периодическое воздействие. Рассмотрим этот вопрос кратко, используя аналогию с механическими колебаниями.

К контуру, изображенному на рис. 4.6, подадим переменное напряжение  $U$ :

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (4.4.1)$$

Рис. 4.6

Тогда уравнение (4.3.2.) примет вид:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (4.4.2)$$

Это **уравнение вынужденных электрических колебаний**, которое совпадает с аналогичным уравнением механических колебаний. Его решение имеет вид:

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.4.3)$$

где

$$q_m = U_m / \omega \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = U_m / \omega \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}.$$

Величина  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  называется **полным сопротивлением цепи** или **импедансом** (от лат. *impedio* – препятствую). Импеданс

представляет комплексное сопротивление для гармонических процессов  $Z = R + iX$ , где  $R$  – **активное сопротивление**, отвечающее за потерю мощности в цепи,  $X$  – **реактивное сопротивление**, определяющее величину энергии пульсирующей в цепи с частотой  $2\omega$ .

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

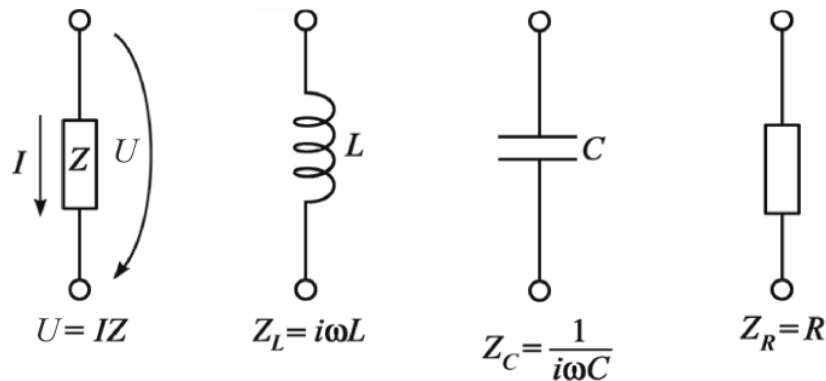


Рис. 4.7

На рис. 4.7 изображены идеальные элементы цепи и соответствующие им импедансы.

### **Резонанс напряжений**

При последовательном соединении  $R, L, C$ , в контуре (рис. 4.6), когда  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , – наблюдается **резонанс**. При этом угол сдвига фаз между током и напряжением обращается в нуль ( $\varphi = 0$ ).

**Резонансная частота** при напряжении на конденсаторе  $U_C$  равна:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \quad \text{и} \quad Z = R,$$

тогда  $U = U_R$ , а  $U_C$  и  $U_L$  одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Такой вид резонанса называется **резонансом напряжения** или **последовательным резонансом**.

Резонансные кривые для напряжения  $U$  изображены на рис. 4.8. Они сходны с резонансными кривыми для ускорения  $a$  при механических колебаниях (рис. 3.4).



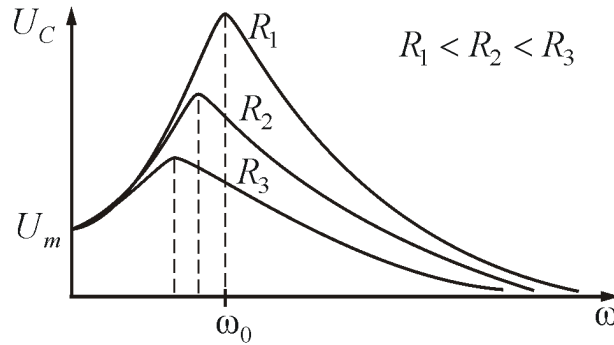


Рис. 4.8

$$U_{L\text{рез}} = U_{C\text{рез}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = QU_m.$$

Таким образом, при последовательном резонансе, на ёмкости можно получить усиление напряжения с амплитудой  $QU \gg U$ , в узком диапазоне частот. Этот эффект широко используется в различных усилительных устройствах.

### Резонанс токов

В цепях переменного тока, содержащих параллельно включенные ёмкость и индуктивность (рис. 4.9), наблюдается другой тип резонанса.

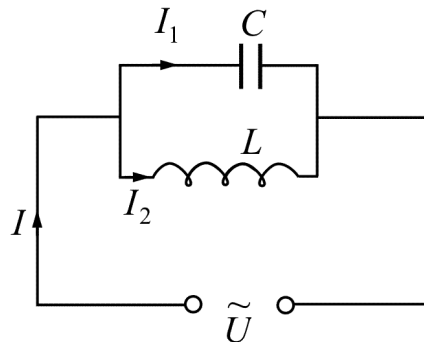


Рис. 4.9

Поскольку в таком контуре сопротивлением  $R$  можно пренебречь ( $R = 0$ ), то выражение для тока через емкость  $I_1$  примет вид:

$$I_1 = I_{m1} \cos(\omega t - \varphi_1), \quad (4.4.6.)$$

где  $I_{m1} = \frac{U_m}{1/\omega C}$ ;  $\text{tg } \varphi_1 = -\infty$ , т.к.  $\varphi_1 = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi$ , а  $n = 1, 2, 3 \dots$

Аналогично для тока через индуктивность (при  $R = 0$ ,  $C = \infty$ ):

$$I_2 = I_{m2} \cos(\omega t - \varphi_2), \quad (4.4.7)$$

где  $I_{m2} = \frac{U_m}{\omega L}$ ;  $\text{tg } \varphi_2 = +\infty$ , т.к.  $\varphi_2 = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$ , а  $n = 1, 2, 3 \dots$

Из сравнения (4.4.6) и (4.4.7) вытекает, что разность фаз в ветвях цепи  $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ , т.е. токи противоположны по фазе.

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|. \quad (4.4.8)$$

Если  $\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то  $I_{m1} = I_{m2}$  и  $I_m = 0$ .

Резонансные кривые для тока изображены на рис. 4.10. Они соответствуют резонансным кривым для скорости при механических колебаниях.

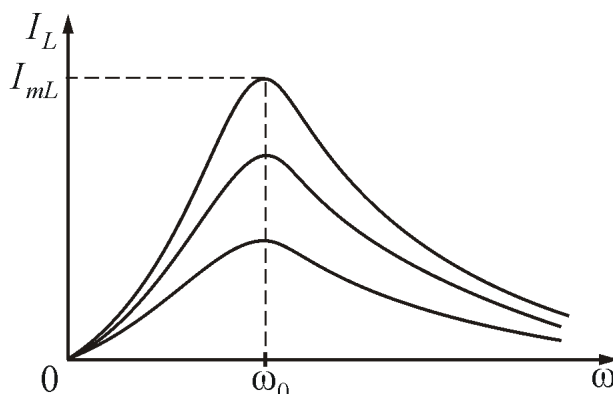


Рис. 4.10

Явление резкого увеличения амплитуды тока во внешней цепи в данном случае, при приближении частоты приложенного напряжения  $\omega$  к  $\omega_{\text{рез}}$ , называется **резонансом токов** или **параллельным резонансом**. (Используется в приемниках, резонансных усилителях).

#### 4.5. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

*Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенного значения напряжения на силу тока:*

$$P(t) = U(t)I(t),$$

где  $U(t) = U_m \cos \omega t$  и  $I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$ .

Раскрыв  $\cos(\omega t - \varphi)$ , получим

$$P(t) = I_m U_m \cos(\omega t - \varphi) \cos \omega t = I_m U_m (\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t - \sin \varphi).$$

Практический интерес представляет не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за период колебания. Учитывая, что  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$ ,  $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$ , получим:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi, \quad (4.5.1)$$

где  $U_m \cos \varphi = RI_m$ , поэтому среднее значение мощности будет равно:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} RI_m^2. \quad (4.5.2)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток:  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ .

Величины  $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$  и  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$  называются **действующими** (или **эффективными**) значениями тока и напряжения. Все амперметры и вольтметры градуируются по действующим значениям тока и напряжения.

Учитывая действующие значения тока и напряжения, выражение средней мощности (4.5.1) можно записать в виде:

$$\langle P \rangle = IU \cos \varphi, \quad (4.5.4)$$

где множитель  $\cos \varphi$  называется **коэффициентом мощности**.

Формула (4.5.4) показывает, что мощность, выделяемая в цепи переменного тока, в общем случае, зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи отсутствует реактивное сопротивление  $X$ , то  $\cos \varphi = 1$  и  $P = UI$ . Если цепь содержит только реактивное сопротивление ( $R = 0$ ), то  $\cos \varphi = 0$  и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение.

Если  $\cos \varphi$  имеет значение существенно меньше единицы, то для передачи заданной мощности при данном напряжении генератора нужно увеличивать силу тока  $I$ , что приводит либо к выделению джоулевой теплоты, либо потребует увеличения сечения проводов, что повышает стоимость линий электропередачи. Поэтому *на практике всегда стремятся увеличить  $\cos \varphi$* . Наименьшее допустимое значение  $\cos \varphi$  для промышленных установок составляет примерно 0,85.

В таблице 4.1 приведены сравнительные характеристики механических и электромагнитных колебаний.

Таблица 4.1

Колебания			
механические		электромагнитные	
Дифференциальное уравнение	$\ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0$	Дифференциальное уравнение	$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0$ $\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2q = 0$
Масса	$m$	Индуктивность катушки	$L$
Коэффициент жесткости	$k$	Обратная величина емкости	$\frac{1}{C}$
Смещение	$x = x_m \sin(\omega t + \varphi)$	Заряд	$q = q_m \sin(\omega t + \varphi)$
Скорость	$v = dx / dt$	Сила тока	$I = dq / dt$
Потенциальная энергия	$W = \frac{kx^2}{2}$	Энергия электр. поля	$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}$
Кинетическая энергия	$K = \frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля	$K = \frac{LI^2}{2}$
Собств. частота пружинного маятника	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Собств. частота колебательного контура	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Период колебаний	$T = 2\pi\sqrt{m/k}$	Период колеб. Формула Томсона	$T = 2\pi\sqrt{LC}$
Циклич. частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$	Циклич. частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$
Коэффициент затухания	$\beta = \frac{r}{2m}$	Коэффициент затухания	$\beta = \frac{R}{2L}$
Логарифмич. декремент затухания	$\chi = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$	Логарифмич. декремент затухания	$\chi = \beta T = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}$
Добротность пружинного маятника	$Q = \frac{\pi}{\chi} = \frac{1}{r} \sqrt{km}$	Добротность колебательного контура	$Q = \frac{\pi}{\chi} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Резонансная частота	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$	Резонансная частота	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

## Контрольные вопросы

1. Почему возможен единый подход при изучении колебаний различной физической природы?
2. Что такое периодические процессы? гармонические колебания? свободные колебания?
3. Дайте определения амплитуды, фазы, периода, частоты, циклической частоты колебания.
4. Приведите формулы для скорости и ускорения гармонически колеблющейся точки.
5. Как связаны амплитуда и начальная фаза гармонических механических колебаний?
6. Какие формулы используются для определения кинетической, потенциальной и полной энергии при гармонических колебаниях?
7. Как можно сравнить между собой массы тела, измеряя частоты колебаний при подвешивании этих масс к пружине?
8. Что называется гармоническим осциллятором? пружинным маятником? физическим? математическим?
9. Приведите формулы для периодов колебаний пружинного, физического и математического маятников.
10. Что такое приведенная длина физического маятника?
11. Какие процессы происходят при свободных гармонических колебаниях в колебательном контуре? Чем определяется их период?
12. Запишите и проанализируйте дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний в контуре.
13. Какова траектория точки, участвующей одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях с одинаковыми периодами? Как получается окружность? прямая?
14. Как по виду фигур Лиссажу можно определить отношение частот складываемых колебаний?
15. Что такое биения? Чему равна амплитуда? частота биений? период?
16. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. Проанализируйте их для механических и электромагнитных колебаний.
17. Как изменяется частота собственных колебаний с увеличением массы колеблющегося тела?
18. По какому закону изменяется амплитуда затухающих колебаний? Являются ли затухающие колебания периодическими?

19. Что такое коэффициент затухания? декремент затухания? логарифмический декремент затухания? В чем заключается физический смысл этих величин?
20. При каких условиях наблюдается апериодическое движение?
21. Что такое автоколебания? В чем их отличие от свободных незатухающих и вынужденных незатухающих колебаний? Где они применяются?
22. Что такое вынужденные колебания? Запишите дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Проведите аналогию для механических и электромагнитных колебаний.
23. Нарисуйте и проанализируйте резонансные кривые для амплитуды смещения (заряда) и скорости (тока). В чем их аналогия?
24. Почему добротность является важнейшей характеристикой резонансных свойств системы?
25. Чему равен сдвиг фаз между смещением и вынуждающей силой при резонансе?
26. Что называется резонансом? Какова его роль?
27. От чего зависит индуктивное сопротивление? емкостное сопротивление? Что называется реактивным сопротивлением?
28. Каковы характерные признаки резонанса напряжений, резонанса токов? Приведите графики резонанса токов и напряжений.
29. Проведите аналогию механических и электромагнитных колебаний.
30. Как вычислить мощность, выделяемую в цепи переменного тока? Что называется коэффициентом мощности?

## Тема 5. УПРУГИЕ ВОЛНЫ

### 5.1. Распространение волн в упругой среде

### 5.2. Уравнения плоской и сферической волн

### 5.3. Фазовая скорость

### 5.4. Принцип суперпозиции. Групповая скорость

### 5.5. Стоячие волны

### 5.6. Волновое уравнение

### 5.7. Эффект Доплера

#### 5.1. Распространение волн в упругой среде

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Иначе говоря, увлекаемые частицы будут отставать по фазе от тех частиц, которые их увлекают.

При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды. Среда рассматривается как сплошная, т.е. непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

*Итак, колеблющееся тело, помещенное в упругую среду, является источником колебаний, распространяющихся от него во все стороны. Процесс распространения колебаний в среде называется **волной**.*

При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице передается лишь состояние колебательного движения и энергия. Поэтому **основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества**.

Волны бывают **поперечными** (колебания происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения) и **продольными** (сгущение и разрежение частиц среды происходит в направлении распространения).

*Граница, отделяющая колеблющиеся частицы от частиц еще не начавших колебаться, называется **фронтом волны**.*

В однородной среде направление распространения перпендикулярно фронту волны (рис. 5.1).

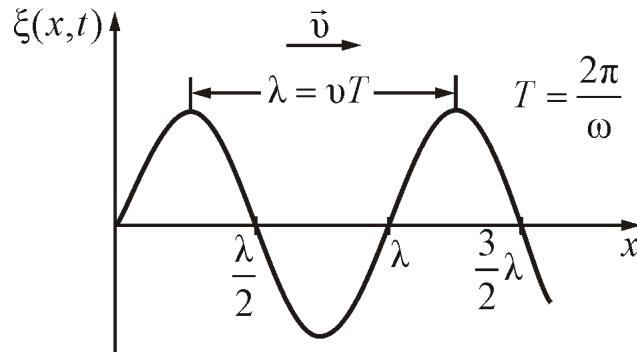


Рис. 5.1

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется *длиной волны*  $\lambda$ :

$$\lambda = vT, \quad (5.1.1)$$

где  $v$  – скорость распространения волны,  $T = \frac{1}{\nu}$  – период,  $\nu$  – частота.

Отсюда скорость распространения волны можно найти по формуле:

$$v = \lambda\nu. \quad (5.1.2)$$

*Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью.* Волновую поверхность можно провести через любую точку пространства, охваченную волновым процессом, т.е. волновых поверхностей бесконечное множество. Волновые поверхности остаются неподвижными (они проходят через положение равновесия частиц, колеблющихся в одинаковой фазе). Волновой фронт только один, и он все время перемещается.

Волновые поверхности могут быть любой формы. В простейших случаях волновые поверхности имеют форму *плоскости* или *сферы*, соответственно волны называются *плоскими* или *сферическими*. В плоской волне волновые поверхности представляют собой систему параллельных друг другу плоскостей, в сферической волне – систему концентрических сфер.

## 5.2. Уравнения плоской и сферической волн

*Уравнением волны* называется выражение, которое дает *смещение колеблющейся точки* как функцию ее координат  $(x, y, z)$  и времени  $t$ .

$$\xi = f(x, y, z, t) = \xi(x, y, z, t). \quad (5.2.1)$$

Эта функция должна быть периодической как относительно времени, так и координат (волна – это распространяющееся колебание, следовательно периодически повторяющееся движение). Кроме того, точки, отстоящие друг от друга на расстоянии  $\lambda$ , колеблются одинаковым образом.



## Уравнение плоской волны

Найдем вид функции  $\xi$  в случае плоской волны, предполагая, что колебания носят гармонический характер.

Направим оси координат так, чтобы ось  $x$  совпадала с направлением распространения волны. Тогда волновая поверхность будет перпендикулярна оси  $x$ . Так как все точки волновой поверхности колеблются одинаково, смещение  $\xi$  будет зависеть только от  $x$  и  $t$ :  $\xi = \xi(x, t)$ . Пусть колебание точек, лежащих в плоскости  $x = 0$ , имеет вид (при начальной фазе  $\varphi = 0$ )

$$\xi = \xi(0, t) = A \cos \omega t. \quad (5.2.2)$$

Найдем вид колебания частиц в плоскости, соответствующей произвольному значению  $x$ . Чтобы пройти путь  $x$ , необходимо время  $\tau = \frac{x}{v}$ .

Следовательно, колебания частиц в плоскости  $x$  будут отставать по времени на  $\tau$  от колебаний частиц в плоскости  $x = 0$ , т.е.

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - \tau) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right), \quad (5.2.3)$$

– это **уравнение плоской волны**.

Таким образом,  $\xi$  есть **смещение** любой из точек с координатой  $x$  в момент времени  $t$ . При выводе мы предполагали, что амплитуда колебания  $A = \text{const}$ . Это будет, если энергия волны не поглощается средой.

Такой же вид уравнение (5.2.3) будет иметь, если колебания распространяются вдоль оси  $y$  или  $z$ .

В общем виде уравнение плоской волны записывается так:

$$\xi = A \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right), \text{ или } \xi = A \cos \omega \left[ \left( t - \frac{r}{v} \right) + \varphi \right]. \quad (5.2.4)$$

Выражения (5.2.3) и (5.2.4) есть **уравнения бегущей волны**.

Уравнение (5.2.3) описывает волну, распространяющуюся в сторону увеличения  $x$ . Волна, распространяющаяся в противоположном направлении, имеет вид:

$$\xi = A \cos \omega \left( t + \frac{x}{v} \right).$$

Уравнение волны можно записать и в другом виде.

Введем **волновое число**  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , или в векторной форме:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}, \quad (5.2.5)$$

где  $\vec{k}$  – волновой вектор,  $\vec{n}$  – нормаль к волновой поверхности.

Так как  $\lambda = vT$ , то  $k = \frac{2\pi}{vT} = \frac{2\pi v}{v} = \frac{\omega}{v}$ . Отсюда  $v = \frac{\omega}{k}$ . Тогда **уравнение плоской волны** запишется так:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx). \quad (5.2.6)$$

### Уравнение сферической волны

В случае, когда скорость волны  $v$  во всех направлениях постоянна, а источник точечный, волна будет **сферической**.

Предположим, что фаза колебаний источника равна  $\omega t$  (т.е.  $\varphi_0 = 0$ ). Тогда точки, лежащие на волновой поверхности радиуса  $r$ , будут иметь фазу  $\omega\left(t - \frac{r}{v}\right)$ . Амплитуда колебаний здесь, даже если волна

не поглощается средой, не будет постоянной, она убывает по закону  $\frac{1}{r}$ .

Следовательно, **уравнение сферической волны**:

$$\xi = \frac{A}{r} \cos\omega\left(t - \frac{r}{v}\right), \text{ или } \xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr), \quad (5.2.7)$$

где  $A$  равна амплитуде на расстоянии от источника равном единице.

Уравнение (5.2.7) неприменимо для малых  $r$ , т.к. при  $r \rightarrow 0$ , амплитуда стремится к бесконечности. То, что амплитуда колебаний  $A \sim \frac{1}{r}$ , следует из рассмотрения энергии, переносимой волной.

### 5.3. Фазовая скорость

**Фазовая скорость** – это скорость распространения фазы волны.

Зафиксируем какое-либо значение фазы волны и проследим, с какой скоростью фаза будет перемещаться вдоль оси  $x$ .

$$\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) = \text{const}.$$

Это уравнение дает связь между  $t$  и тем значением  $x$ , где зафиксированное значение фазы будет в данный момент времени. Следовательно,  $\frac{dx}{dt}$  – это есть **скорость перемещения данной фазы**. Т.к.  $\omega = \text{const}$ , поэтому

$t - \frac{x}{v} = \text{const}$ . Возьмем производную по времени от обеих частей равенства:  $1 - \frac{1}{v} \frac{dx}{dt} = 0$ . Отсюда получим *выражение для фазовой скорости*:

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (5.3.1)$$

Итак, *скорость распространения фазы есть скорость распространения волны*. Т.е.  $v$  в уравнении волны есть **фазовая скорость**. Для синусоидальной волны *скорость переноса энергии равна фазовой скорости*. Но синусоидальная волна не несет никакой информации, любой сигнал – это модулированная волна, т.е. несинусоидальная (негармоническая).

При решении некоторых задач получается, что фазовая скорость больше скорости света. Здесь нет парадокса, так как **скорость перемещения фазы** – это не скорость передачи (распространения) энергии, которая не может распространяться со скоростью большей, чем скорость света  $c$ .

#### 5.4. Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Если свойства среды не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к ним применим **принцип суперпозиции (наложения волн)** при распространении в такой среде нескольких волн, каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды равно геометрической сумме смещений частиц.

Строго *монохроматическая* волна представляет собой бесконечную во времени и пространстве последовательность «горбов» и «впадин».

$$\xi = \xi_0 \cos(\omega t - kx + \alpha). \quad (5.4.1)$$

*Фазовая скорость этой волны*

$$v = \frac{\omega}{k} \text{ или } v = \lambda \nu.$$

С помощью такой волны нельзя передавать сигнал, так как в любой точке волны все «горбы» одинаковы. Сигнал должен отличаться, быть знаком (меткой) на волне. Но тогда волна уже не будет описываться уравнением (5.4.1).

Сигнал (импульс) можно представить (согласно теореме Фурье) в виде суперпозиции гармонических волн с частотами, заключенными в некотором интервале  $\Delta\omega$ . *Суперпозиция волн, мало отличающихся друг*

от друга по частоте, называется **волновым пакетом** или **группой волн** (рис. 5.2).

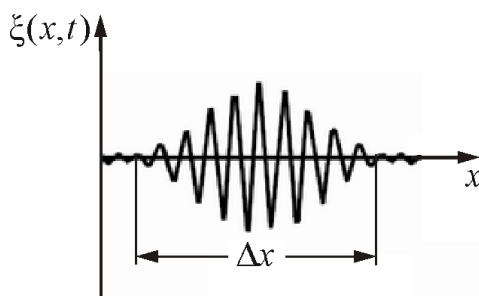


Рис. 5.2

Выражение для группы волн:

$$\xi(x,t) = \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} E_{0\omega} \cos(\omega t - k_{\omega}x + \alpha_{\omega}) d\omega. \quad (5.4.2)$$

Этот волновой пакет может быть суммой двух волн с мало отличающимися частотами (рис. 5.3).

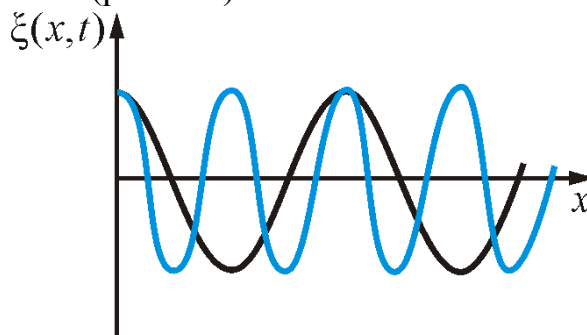


Рис. 5.3

Там, где фазы совпадают, наблюдается усиление амплитуды, где нет – гашение (результат интерференции).

Чтобы суперпозицию можно было считать группой волн, необходимо условие  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

**Дисперсия** – это зависимость фазовой скорости в среде от частоты.

В *недиспергирующей среде* все плоские волны, образующие пакет, распространяются с одинаковой фазовой скоростью  $v$ . Очевидно, что в данном случае скорость перемещения пакета совпадает со скоростью  $v$ . В *диспергирующей среде* каждая волна диспергирует со своей скоростью, пакет с течением времени расплывается, его ширина увеличивается. Если *дисперсия невелика*, то расплывание не происходит слишком быстро и пакету можно приписать скорость  $u$  (рис. 5.4).

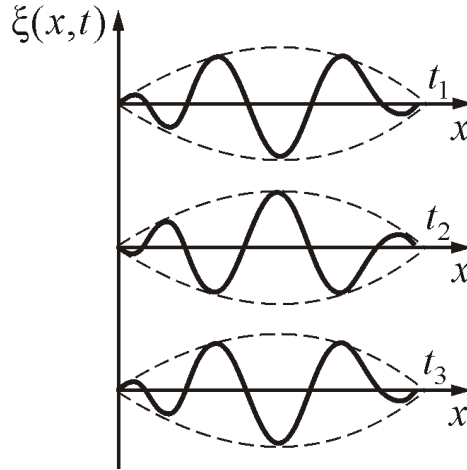


Рис. 5.4

Скорость, с которой перемещается центр пакета (точка с максимальным значением  $A$ ), называется **групповой скоростью  $u$** .

В диспергирующей среде  $u \neq v$ . Вместе с движением самого пакета происходит движение «горбов» внутри пакета. «Горбы» перемещаются со скоростью  $v$ , а пакет в целом с  $u$ .

Рассмотрим это подробнее на примере суперпозиции двух волн с одинаковой амплитудой и разными длинами волн  $\lambda$ .

Уравнения волн (при начальной фазе  $\varphi = 0$ ) можно записать так:

$$\xi_1 = A_0 \cos(\omega t - kx) \quad \text{и} \quad \xi_2 = A_0 \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x],$$

здесь  $k = \frac{\omega}{v_1}$ ;  $(k + \Delta k) = \frac{\omega + \Delta\omega}{v_2}$ , т.к.  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$ .

Пусть  $\Delta\omega \ll \omega$ , соответственно  $\Delta k \ll k$ .

Сложим колебания, применив преобразования для суммы косинусов:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \quad (5.4.3)$$

$$\begin{aligned} \xi &= 2A_0 \left[ \cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + \Delta\omega t - kx - \Delta kx}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - \Delta\omega t + kx + \Delta kx}{2}\right) \right] = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{2\omega t - 2kx}{2}\right) \cos\left(\frac{-\Delta\omega t + \Delta kx}{2}\right), \quad \text{т.к. } \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \text{ то} \\ \xi &= \left[ 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right) \right] \cos(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Множитель в квадратных скобках изменяется с изменением  $t$  и  $x$  значительно медленнее, чем второй множитель. Следовательно, выражение (5.4.4) можно рассматривать как уравнение плоской волны с амплитудой

$$A = \left| 2A_0 \cos \left( \frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x \right) \right|.$$

Результирующая амплитуда получается в результате сложения, следовательно будут *максимумы и минимумы амплитуды*. Максимум амплитуды будет определяться условием

$$\frac{\Delta\omega}{2} t - \frac{\Delta k}{2} x_{\max} = \pm m\pi,$$

где  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $x_{\max}$  – координата максимума амплитуды.

Каждый из этих максимумов можно рассматривать как центр соответствующей группы волн. Решив это уравнение относительно  $x_{\max}$ , получим:

$$x_{\max} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} t + \text{const}; \quad (2m\pi = \text{const}).$$

Так как  $v = \frac{\omega}{k}$  – *фазовая скорость*, то  $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} = u$  – *групповая скорость*. С такой скоростью перемещается максимум амплитуды. В пределе выражение для групповой скорости:

$$u = \frac{d\omega}{dk}. \quad (5.4.5)$$

Это выражение справедливо для центра группы произвольного числа волн. Выражению для групповой скорости можно придать другой вид. Т.к.  $\omega = vk$ , следовательно

$$u = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk}.$$

Выразим  $\frac{dv}{dk}$  через длину волны  $\lambda$ :

$$\frac{dv}{dk} = \frac{dv}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{dk}; \quad \lambda = \frac{2\pi}{k}; \quad \frac{d\lambda}{dk} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k},$$

$$\frac{dv}{dk} = -\frac{dv}{d\lambda} \frac{\lambda}{k}, \text{ тогда получим}$$

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}. \quad (5.4.6)$$

Из этой формулы следует, что *в диспергирующей среде, в зависимости от знака  $\frac{dv}{d\lambda}$ , групповая скорость может быть больше или меньше фазовой*.

**В отсутствие дисперсии**  $\frac{dv}{d\lambda} = 0$  и  $u = v$ . Максимум интенсивности приходится на центр группы волн. Поэтому *скорость переноса энергии равна групповой скорости*.

Понятие групповой скорости применимо только при условии, что *поглощение энергии волны в среде невелико*. При значительном затухании волн понятие групповой скорости утрачивает смысл. Это случай из области аномальной дисперсии (рассмотрим позже).

## 5.5. Стоячие волны

Если в среде распространяется несколько волн, то колебания частиц среды оказываются геометрической суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. **Волны накладываются друг на друга, не возмущая (не искажая друг друга).** Это и есть **принцип суперпозиции волн**.

Если две волны, приходящие в какую-либо точку пространства, обладают постоянной разностью фаз, такие волны называются **когерентными**. При сложении когерентных волн возникает **явление интерференции**.

Очень важный случай интерференции наблюдается при наложении двух встречных плоских волн с одинаковой амплитудой. Возникающий в результате колебательный процесс называется **стоячей волной**. Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

Напишем уравнения двух плоских волн, распространяющихся в противоположных направлениях (начальная фаза  $\varphi = 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A \cos(\omega t - kx) \\ \xi_2 &= A \cos(\omega t + kx) \end{aligned} \right\} \quad (5.5.1)$$

Сложим уравнения и преобразуем по формуле суммы косинусов (5.4.3):

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos\left(\frac{\omega t - kx + \omega t + kx}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - kx - \omega t - kx}{2}\right).$$

Т.к.  $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ , то можно записать:

$$\xi = 2A \cos \omega t \cos kx = 2A \cos kx \cos \omega t.$$

Учитывая, что  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , получим **уравнение стоячей волны**:

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cos \omega t. \quad (5.5.2)$$

В выражении для фазы не входит координата, поэтому можно записать:

$$\xi = A^* \cos \omega t, \quad (5.5.3)$$

где суммарная амплитуда  $A^* = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ .

В точках, где координаты удовлетворяют условию  $2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm n\pi$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ),  $\cos\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) = 1$ , суммарная амплитуда равна максимальному значению:  $A^* = 2A$ , – это **пучности** стоячей волны. **Координаты пучностей**:

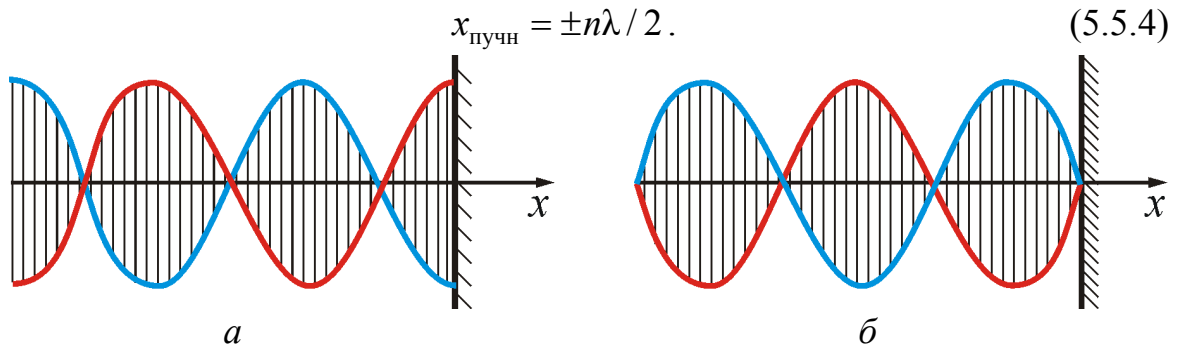


Рис. 5.5

В точках, координаты которых удовлетворяют условию  $2\pi \frac{x}{\lambda} = \pm(n + \frac{1}{2})\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ),  $\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = 0$  и суммарная амплитуда колебаний равна нулю  $A^* = 0$ , – это **узлы** стоячей волны. **Координаты узлов**:

$$x_{\text{узел}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}. \quad (5.5.5)$$

Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженных волн. На границе, где происходит отражение волны, получается пучность, если среда, от которой происходит отражение, менее плотная (рис. 5.5, а), и узел – если более плотная (рис. 5.5, б).

Если рассматривать **бегущую волну**, то в направлении ее распространения **переносится энергия** колебательного движения. **В случае же стоячей волны переноса энергии нет**, т.к. падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях.



## 5.6. Волновое уравнение

Уравнение любой волны есть решение некоторого дифференциального уравнения, называемого *волновым*. Найдем общий вид волнового уравнения. Для этого продифференцируем дважды уравнение плоской волны по времени  $t$  и всем координатам:

$$\begin{aligned}\xi &= A\cos(\omega t - kr), \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= -\omega^2 A\cos(\omega t - kr) = -\omega^2 \xi, \\ \xi &= -\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},\end{aligned}\tag{5.6.1}$$

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -k_x^2 A\cos(\omega t - kr) = -k_x^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} &= -k_y^2 A\cos(\omega t - kr) = -k_y^2 \xi, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} &= -k_z^2 A\cos(\omega t - kr) = -k_z^2 \xi.\end{aligned}\right\}\tag{5.6.2}$$

Сложим уравнения (5.6.2):

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\xi = -k^2 \xi.\tag{5.6.3}$$

Подставим из (5.6.1) значение  $\xi$ , и получим:  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ .

Учтем, что  $v = \omega/k$ , а окончательно получим для **волнового уравнения**

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.\tag{5.6.4}$$

**Всякая функция, удовлетворяющая уравнению (5.6.4), описывает некоторую волну, причем корень квадратный из величины, обратной коэффициенту при производной по времени  $1/v^2$ , есть фазовая скорость волны.**

Используя оператор Лапласа  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , **волновое уравнение** можно записать в виде

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.\tag{5.6.6}$$

## 5.7. Эффект Доплера

Известно, что при приближении к неподвижному наблюдателю быстро движущегося электропоезда его звуковой сигнал кажется более высоким, а при удалении от наблюдателя – более низким, чем сигнал того же электропоезда, но неподвижного.



**Доплер Кристиан** (1803–1853), австрийский физик и астроном, член Венской АН (1848 г.). Учился в Зальцбурге и Вене. С 1847 г. профессор Горной академии в Хемнице, с 1850 г. профессор Политехнического института и университета в Вене. Основные труды посвящены абберации света, теории микроскопа и оптического дальномера, теории цветов и др. В 1842 г. теоретически обосновал зависимость частоты колебаний, воспринимаемых наблюдателем, от скорости и направления движения наблюдателя относительно источника колебаний.

*Эффектом Доплера называют изменение частоты волн, регистрируемых приемником, которое происходит вследствие движения источника этих волн и приемника.*

Источник, двигаясь к приемнику, как бы сжимает пружину – волну (рис. 5.6).

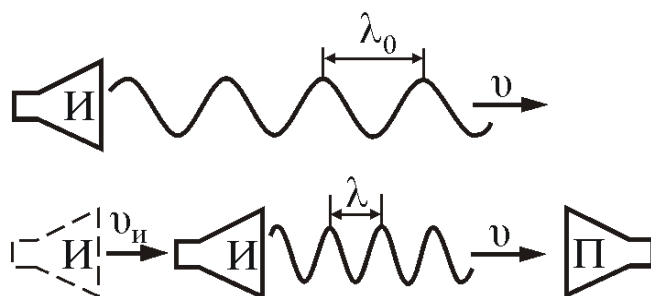


Рис. 5.6

Данный эффект наблюдается при распространении звуковых волн (акустический эффект) и электромагнитных волн (оптический эффект).

*Рассмотрим несколько случаев проявления акустического эффекта Доплера.*

Пусть приемник звуковых волн П в газообразной (или жидкой) среде неподвижен относительно нее, а источник И удаляется от приемника со скоростью  $\vec{v}_и$  вдоль соединяющей их прямой (рис. 5.7, а).

Источник смещается в среде за время, равное периоду  $T_0$  его колебаний, на расстояние  $v_и T_0 = \frac{v_и}{\nu_0}$ , где  $\nu_0$  – частота колебаний источника.

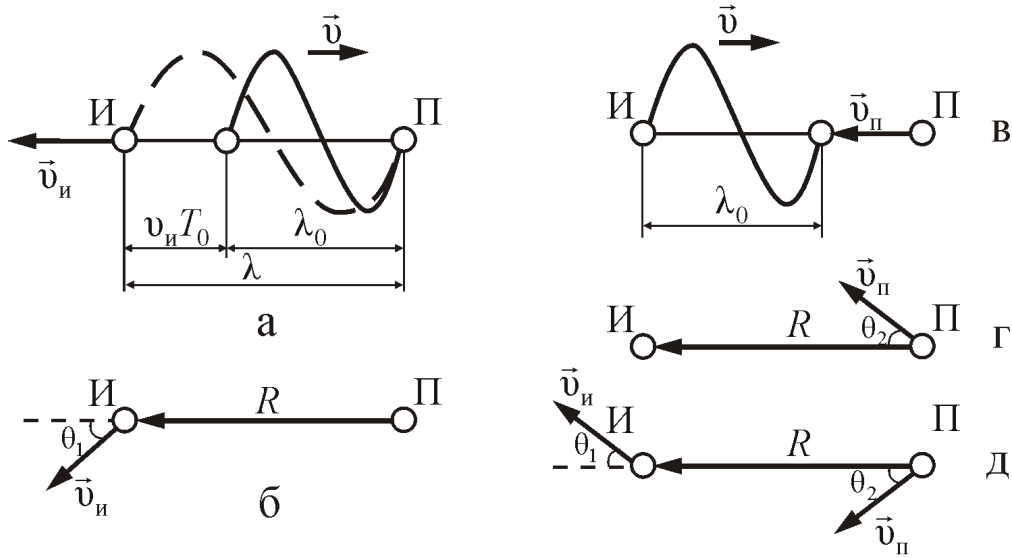


Рис. 5.7

Поэтому при движении источника длина волны в среде  $\lambda$  отлична от ее значения  $\lambda_0$  при неподвижном источнике:

$$\lambda = \lambda_0 + v_{\text{и}}T_0 = (v + v_{\text{и}})T_0 = \frac{(v + v_{\text{и}})}{v_0},$$

где  $v$  – фазовая скорость волны в среде.

Частота волны, регистрируемая приемником,

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{v_0}{1 + v_{\text{и}}/v}. \quad (5.7.1)$$

Если вектор  $\vec{v}_{\text{и}}$  скорости источника направлен под произвольным углом  $\theta_1$  к радиус-вектору  $\vec{R}$ , соединяющему неподвижный приемник с источником (рис. 5.7, б), то

$$v = \frac{v_0}{1 + (v_{\text{и}}/v) \cos \theta_1}. \quad (5.7.2)$$

Если источник неподвижен, а приемник приближается к нему со скоростью  $\vec{v}_{\text{п}}$  вдоль соединяющей их прямой (рис. 5.7, в), то длина волны в среде  $\lambda = \lambda_0 = \frac{v}{v_0}$ . Однако, скорость распространения волны относительно приемника равна  $v + v_{\text{п}}$ , так что частота волны, регистрируемая приемником

$$v = (v + v_{\text{п}})/\lambda_0 = v_0(1 + v_{\text{п}}/v). \quad (5.7.3)$$

В том случае, когда скорость  $\vec{v}_{\text{п}}$  направлена под произвольным углом  $\theta_2$  к радиус-вектору  $\vec{R}$ , соединяющему движущийся приемник с неподвижным источником (рис. 5.7, г), имеем:

$$v = v_0[1 + (v_{\text{п}}/v)\cos\theta_2]. \quad (5.7.4)$$

В самом общем случае, когда и приемник и источник звуковых волн движутся относительно среды с произвольными скоростями (рис. 5.7, д),

$$v = v_0 \frac{1 + (v_{\text{п}}/v)\cos\theta_2}{1 + (v_{\text{и}}/v)\cos\theta_1}. \quad (5.7.5)$$

Эту формулу можно также представить в виде (если  $v_{\text{и}} \ll v$ )

$$v \approx v_0[1 - (v'/v)\cos\theta], \quad (5.7.6)$$

где  $v' = v_{\text{и}} - v_{\text{п}}$  – скорость источника волны относительно приемника, а  $\theta$  – угол между векторами  $\vec{v}'$  и  $\vec{R}$ . Величина  $v'\cos\theta$ , равная проекции  $\vec{v}'$  на направление  $\vec{R}$ , называется *лучевой скоростью источника*.

### Оптический эффект Доплера

При движении источника и приемника электромагнитных волн относительно друг друга также наблюдается *эффект Доплера*, т.е. *изменение частоты волны*, регистрируемой приемником. В отличие от рассмотренного нами эффекта Доплера в акустике, закономерности этого явления для электромагнитных волн можно установить только на основе специальной теории относительности.

Соотношение, описывающее *эффект Доплера* для электромагнитных волн в вакууме, с учетом преобразований Лоренца, имеет вид:

$$v = \frac{v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c)\cos\theta}. \quad (5.7.7)$$

При небольших скоростях движения источника волн относительно приемника, релятивистская формула эффекта Доплера (5.7.7) совпадает с классической формулой (5.7.2).

Если источник движется относительно приемника вдоль соединяющей их прямой, то наблюдается *продольный эффект Доплера*.

В случае сближения источника и приемника ( $\theta = \pi$ )

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} > v_0, \quad (5.7.8)$$

а в случае их взаимного удаления ( $\theta = 0$ )

$$v = v_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} < v_0. \quad (5.7.9)$$

Кроме того, из релятивистской теории эффекта Доплера следует существование *поперечного эффекта Доплера*, наблюдающегося при  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$ , т.е. в тех случаях, когда источник движется перпен-

дикулярно линии наблюдения (например источник движется по окружности, приемник в центре):

$$v = v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} < v_0. \quad (5.7.10)$$

Поперечный эффект Доплера необъясним в классической физике. Он представляет чисто релятивистский эффект.

Как видно из формулы (5.7.10), поперечный эффект пропорционален отношению  $v^2/c^2$ , следовательно он значительно слабее продольного, который пропорционален  $v/c$  (5.7.9).

В общем случае вектор относительной скорости можно разложить на составляющие: одна обеспечивает продольный эффект, другая – поперечный.

Существование поперечного эффекта Доплера следует непосредственно из замедления времени в движущихся системах отсчета.

Впервые экспериментальная проверка существования эффекта Доплера и правильности релятивистской формулы (5.7.7) была осуществлена американскими физиками Г. Айвсом и Д. Стилуэллом в 30-х гг. Они с помощью спектрографа исследовали излучение атомов водорода, разогнанных до скоростей  $2 \cdot 10^6$  м/с. В 1938 г. результаты были опубликованы. Резюме: поперечный эффект Доплера наблюдался в полном соответствии с релятивистскими преобразованиями частоты (спектр излучения атомов оказался сдвинут в низкочастотную область); вывод о замедлении времени в движущихся инерциальных системах отсчета подтвержден.

Эффект Доплера нашел широкое применение в науке и технике. Особенно большую роль это явление играет в астрофизике. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости  $v' \cos \theta$  этих объектов по отношению к Земле: при  $v \ll c$  по формуле (5.7.6)

$$v' \cos \theta \approx (1 - v/v_0)c. \quad (5.7.11)$$

Американский астроном Э. Хаббл обнаружил в 1929 г. явление, получившее название **космологического красного смещения** и состоящее в том, что линии в спектрах излучения внегалактических объектов смещены в сторону меньших частот (больших длин волн). Оказалось, что для каждого объекта относительное смещение частоты  $z = (v_0 - v)/v_0$  ( $v_0$  – частота линии в спектре неподвижного источника,  $v$  – наблюдаемая частота) совершенно одинаково по всем частотам. Космологическое красное смещение есть не что иное, как эффект Доплера. Оно свидетельствует о том, что Метагалактика расширяется, так что внегалактические объекты удаляются от нашей Галактики.

Под Метагалактикой понимают совокупность всех звездных систем. В современные телескопы можно наблюдать часть Метагалактики, оптический радиус которой равен  $R = 1,12 \cdot 10^{23}$  км. Существование этого явления было теоретически предсказано еще в 1922 г. советским ученым А.А. Фридманом на основе развития общей теории относительности.

Хаббл установил закон, согласно которому *относительное красное смещение  $z$  галактик растет пропорционально расстоянию  $r$  до них.*

*Закон Хаббла* можно записать в виде

$$v \cos \theta \approx cz = Hr, \quad (5.7.12)$$

где  $H$  – постоянная Хаббла. По самым современным оценкам, проведенным в 2003 г.,  $H = 73,2$  км/(с · Мпк). (1 пк (парсек) – расстояние, которое свет проходит в вакууме за 3,27 лет (1 пк  $\approx 3,09 \cdot 10^{16}$  м)).

В 1990 г. на борту шаттла «Дискавери» был выведен на орбиту космический телескоп имени Хаббла (рис. 5.8).



Рис. 5.8

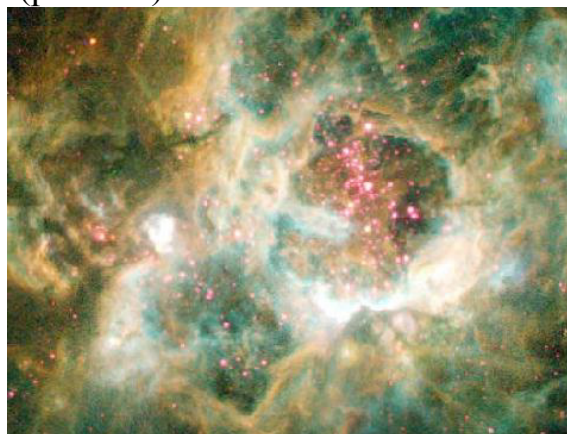


Рис. 5.9

Астрономы давно мечтали о телескопе, который работал бы в видимом диапазоне, но находился за пределами земной атмосферы, сильно мешающей наблюдениям. «Хаббл» не только не обманул возлагавшихся на него надежд, но даже превзошел практически все ожидания. Он фантастически расширил «поле зрения» человечества, заглянув в немислимые глубины Вселенной. За время своей работы космический телескоп передал на землю 700 тыс. великолепных фотографий (рис. 5.9). Он, в частности, помог астрономам определить точный возраст нашей Вселенной – 13,7 млрд. лет; помог подтвердить существование во Вселенной странной, но оказывающей огромное влияние, формы энергии – темной энергии; доказал существование сверхмассивных черных дыр; удивительно четко заснял падение кометы на Юпитер; показал, что процесс формирования планетных систем является широко рас-

пространенным в нашей Галактике; обнаружил небольшие протогалактики, зарегистрировав излучение, испущенное ими, когда возраст Вселенной составлял менее 1 млрд. лет.

На эффекте Доплера основаны радиолокационные лазерные методы измерения скоростей различных объектов на Земле (например автомобиля, самолета и др.). Лазерная анемометрия является незаменимым методом изучения потока жидкости или газа. Хаотическое тепловое движение атомов светящегося тела также вызывает уширение линий в его спектре, которое возрастает с увеличением скорости теплового движения, т.е. с повышением температуры газа. Это явление можно использовать для определения температуры раскаленных газов.

### Контрольные вопросы

1. Как объяснить распространение колебаний в упругой среде?
2. Что такое поперечная волна, продольная? Когда возникают?
3. Что такое волновой фронт? волновая поверхность?
4. Что называется длиной волны, скоростью и периодом?
5. Что такое волновое число? фазовая и групповая скорости?
6. В чем заключается физический смысл вектора Умова?
7. Какая волна является бегущей, плоской, сферической?
8. При каких условиях возникает интерференция волн?
9. Всегда ли сохраняется энергия при интерференции двух волн?
10. Когда на струне образуется стоячая волна, колебания падающей и отраженной волн в узлах взаимно гасятся. Означает ли это, что исчезает энергия?
11. Две когерентные волны, распространяющиеся навстречу друг другу, отличаются амплитудами. Образуют ли они стоячую волну?
12. Чем стоячая волна отличается от бегущей?
13. Какое расстояние между двумя соседними узлами стоячей волны? двумя соседними пучностями? соседними пучностью и узлом?
14. Что такое звуковые волны? Звуковые волны в воздухе продольные или поперечные? Почему?
15. Может ли звук распространяться в вакууме?
16. От чего зависят громкость, высота и тембр звука?
17. Что такое эффект Доплера? Чему будет равна частота колебаний, воспринимаемых покоящимся приемником, если источник колебаний от него удаляется?
18. Какое влияние оказывает скорость ветра на эффект Доплера?
19. Как определить частоту звука, воспринимаемую приемником, если источник звука и приемник движутся?

## Тема 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ (ЭМВ)

### 6.1. Генерация ЭМВ

### 6.2. Дифференциальное уравнение ЭМВ

### 6.3. Экспериментальное исследование ЭМВ

### 6.4. Энергия и импульс электромагнитного поля

#### 6.1. Генерация ЭМВ

Возможность существования электромагнитных волн предсказывал еще Майкл Фарадей в 1832 г., обобщая известные к тому времени данные по изучению электричества и магнетизма. Теоретически обосновал это предположение Дж. Максвелл.



**Максвелл Джеймс Клерк** (1831–1879) – английский физик, член Эдинбургского (1855) и Лондонского (1861) королевских обществ, с 1871 г. – первый профессор экспериментальной физики в Кембридже. Работы посвящены электродинамике, молекулярной физике, общей статистике, оптике, механике, теории упругости. Самым большим научным достижением Максвелла является созданная им в 1860–1865 гг. теория электромагнитного поля, которую он сформулировал в виде системы нескольких уравнений (уравнения Максвелла), выражающих все основные закономерности электромагнитных явлений. В своей теории Максвелл дал определение электромагнитного поля и предсказал новый эффект: существование в свободном пространстве электромагнитного излучения (электромагнитных волн) и его распространение в пространстве со скоростью света. Теоретически вычислил давление света.

Из теории Максвелла следует, что изменяющееся электрическое поле порождает в пустом пространстве магнитное поле. Изменяющееся магнитное поле приводит, в свою очередь, к появлению изменяющегося электрического поля и т.д. Анализируя свои уравнения, Максвелл пришел к заключению, что конечным итогом подобной связи изменяющихся полей будет появление волны, которая содержит электрическое и магнитное поля и способна распространяться в пустом пространстве.

Впервые электромагнитные волны были обнаружены в 1887 г. Генрихом Герцем, который в качестве источника электромагнитных колебаний использовал колебательный контур.



**Герц Генрих Рудольф** (1857–1894) – немецкий физик. Окончил Берлинский университет (1880) и был ассистентом у Г. Гельмгольца. В 1885–89 гг. – профессор Высшей технической школы в Карлсруэ.

Основные работы относятся к электродинамике, одним из основоположников которой он является, и механике. В 1888 г.



экспериментально доказал существование электромагнитных волн, распространяющихся в свободном пространстве, предсказанных теорией Максвелла. В 1887 г. наблюдал внешний фотоэффект. Исследования Герца посвящены также катодным лучам, теории удара упругих тел и т.п.

В колебательном контуре, образованном конденсатором  $C$  и катушкой  $L$  (рис. 6.1, *a*), электрическое поле сосредоточено в зазоре между обкладками, а магнитное – внутри катушки.

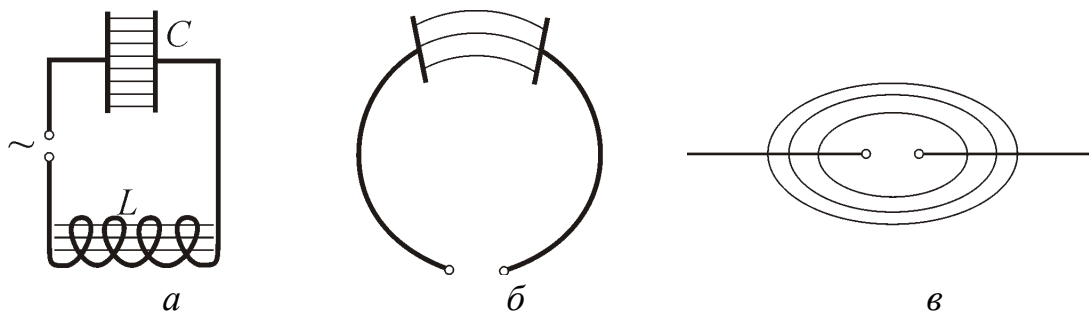


Рис. 6.1

В окружающем конденсатор и катушку пространстве поля практически равны нулю, поэтому заметного излучения электромагнитных волн не происходит. Для того чтобы контур излучал волны, необходимо увеличить расстояние между обкладками конденсатора и между витками катушки. В пределе мы приходим к прибору, названному впоследствии **вибратором Герца**. В процессе видоизменений, изображенных на рис. 6.1, *б*, *в*, сильно уменьшается емкость и индуктивность контура, что также выгодно, так как приводит к увеличению частоты колебаний, а следовательно к уменьшению длины волны. С волнами меньшей длины легче экспериментировать. В своих исследованиях Герц достиг частот порядка  $10^8$  Гц и получил волны, длина которых составляла от 10 до 0,6 м.

Вибратор Герца имел несколько модификаций. В одной из них (рис. 6.2) он состоял из двух одинаковых металлических стержней  $V - V$ , разделенных регулируемым искровым промежутком  $R$  и соединенных через дроссели  $D$  с индуктором – источником высокого напряжения.

Когда напряжение на искровом промежутке достигало пробойного значения, он пробивался электрической искрой, замыкающей обе половины вибратора. В вибраторе возникали затухающие электрические колебания высокой частоты. Максимальной интенсивностью обладали колебания с пучностью тока посередине вибратора и с длиной волны, равной примерно удвоенному расстоянию между концами вибратора (полуволновой вибратор). Уходу колебаний в индуктор препятствовали дроссели, соединяющие элементы вибратора с индуктором.

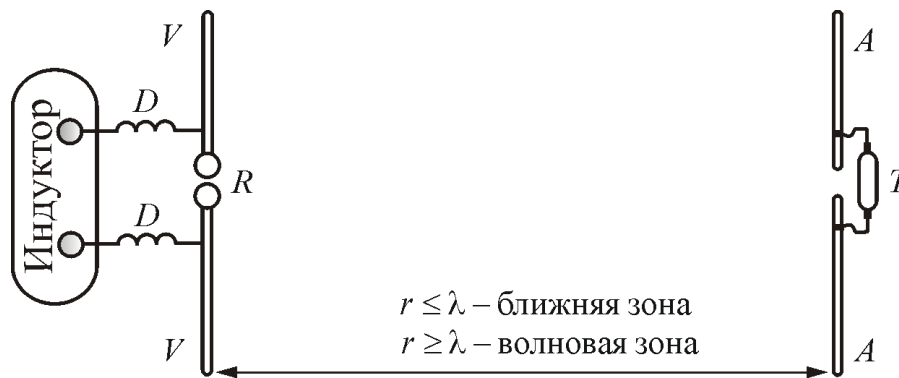


Рис. 6.2

Для обнаружения электромагнитных волн Герц использовал *резонаторы* в виде проволочной рамки и иных форм. Наиболее простым являлся резонатор  $A - A$  (рис. 6.2), по форме повторяющий излучающий вибратор, а поэтому имеющий те же собственные частоты колебаний.

Когда электромагнитная волна достигает резонатора, она возбуждает в нем токи. Появление этих токов сопровождается проскакиванием искры в маленьком зазоре в центре резонатора или возбуждением свечения в небольшой газоразрядной трубке  $T$ , подключенной к обеим половинкам резонатора.

ЭМВ распространяются в пространстве, удаляясь от вибратора во все стороны, а не только вправо, как показано на рис. 6.3.

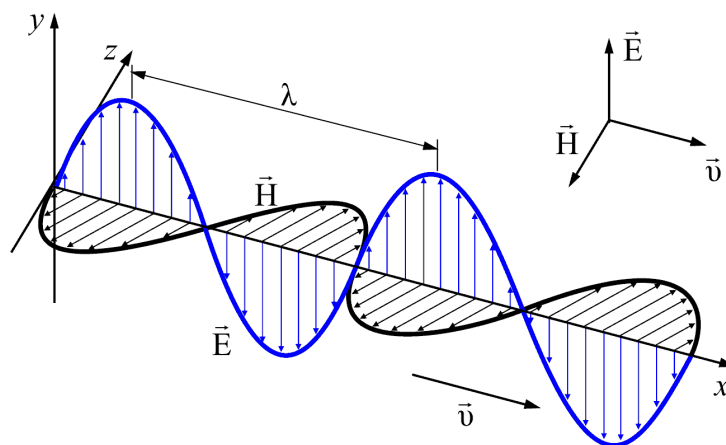


Рис. 6.3

Рисунок 6.3, наглядно показывающий способ распространения ЭМВ, поможет сделать несколько выводов.

- Во-первых, в любой точке векторы напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{H}$  полей взаимно перпендикулярны и перпендикулярны направлению распространения  $\vec{v}$ .
- Во-вторых, поля изменяют свое направление в пространстве: в одних точках вектор  $\vec{H}$  направлен к плоскости страницы, в других – от нее; аналогично ведет себя и вектор  $\vec{E}$ .

- В-третьих, электрическое и магнитное поля находятся в фазе, т.е. они достигают максимума и обращаются в нуль в одних и тех же точках.

Если ЭДС генератора изменяется по синусоидальному закону, то и напряженность электрического поля и магнитного поля будет изменяться по синусоидальному закону. Строго говоря, это справедливо в точках, достаточно удаленных от источника (в волновой зоне, когда  $r > \lambda$ ).

Электромагнитные волны представляют собой **поперечные волны** и аналогичны другим типам волн. Однако в ЭМВ происходят *колебания полей*, а не *вещества*, как в случае волн на воде или в натянутом шнуре.

Таким образом, **ЭМВ генерируются колеблющимися, т.е. движущимися с ускорением, электрическими зарядами**. Справедливо и такое утверждение: **движущийся с ускорением электрический заряд испускает электромагнитные волны**.

## 6.2. Дифференциальные уравнения ЭМВ

Одним из важнейших следствий уравнений Максвелла является существование ЭМВ. Можно показать, что для однородной и изотопной среды вдали от зарядов и токов, создающих электромагнитное поле, из уравнений Максвелла следует, что *векторы напряженности  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  электромагнитного поля удовлетворяют волновым уравнениям типа*

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (6.2.1)$$

Всякая функция, удовлетворяющая уравнениям (6.2.1), описывает некоторую волну. Следовательно, электромагнитные поля действительно могут существовать в виде ЭМВ.

Фазовая скорость ЭМВ определяется выражением

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (6.2.2)$$

где  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  – скорость света в вакууме;  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $\epsilon$  и  $\mu$  – соответственно, электрическая и магнитная проницаемость среды.

Если подставить в выражение для  $c$  известные значения электрической и магнитной постоянных  $\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} \cdot \text{м}^{-1}$ ,  $\mu_0 = 1,256637061 \cdot 10^{-6} \text{ Гн} \cdot \text{м}^{-1}$ , находим  $c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  – **скорость распространения электромагнитного поля в вакууме, которая равна скорости света**. Причем электромагнитное поле распространя-

ется в виде периодических изменений векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , которые взаимно перпендикулярны и перпендикулярны вектору скорости  $\vec{v}$  распространения электромагнитного поля.

Полученные Максвеллом результаты показали, что в вакууме *электромагнитное возмущение* распространяется со скоростью света и *представляет поперечные колебания*. В веществе скорость распространения электромагнитных возмущений меньше в  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$  раз. Все это позволило Максвеллу сделать фундаментальный вывод об электромагнитной природе света.

Скорость распространения электромагнитных волн в среде зависит от ее электрической и магнитной проницаемости. Величину  $n = \sqrt{\mu\epsilon}$  называют *абсолютным показателем преломления*. С учетом последнего имеем:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n} \quad \text{и} \quad n = \frac{c}{v}.$$

Следовательно, *показатель преломления* есть *физическая величина, равная отношению скорости электромагнитных волн в вакууме к их скорости в среде*.

Векторы  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  образуют правовинтовую систему (рис. 6.3).

Из уравнений Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  всегда колеблются в одинаковых фазах, причем мгновенные значения  $E$  и  $H$  в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\epsilon_0\epsilon}E = \sqrt{\mu\mu_0}H.$$

Следовательно  $E$  и  $H$  одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т. д.

От уравнений (6.2.1) можно перейти к уравнениям

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}, \quad (6.2.3)$$

где,  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$  подчеркивают лишь то, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей  $y$  и  $z$ .

Уравнениям (6.2.3) удовлетворяют, в частности, плоские монохроматические электромагнитные волны (ЭМВ одной строго определенной частоты), описываемые уравнениями

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{и} \quad H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi), \quad (6.2.4)$$

где  $E_0$  и  $H_0$  – соответственно, амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны,  $\omega$  – круговая частота,  $k = \frac{\omega}{v}$  – волно-

вое число,  $\varphi$  – начальная фаза колебаний в точках с координатой  $x = 0$ . В уравнениях (6.2.3) начальные фазы одинаковы, т.е. колебания электрического и магнитного векторов в ЭМВ происходят в одинаковых фазах.

Из всего вышеизложенного можно сделать следующие заключения:

- векторы  $\vec{H}$ ,  $\vec{E}$  и  $\vec{v}$  взаимно перпендикулярны, так как  $\vec{k}$  и  $\vec{v}$  направлены одинаково;
- электромагнитная волна является поперечной;
- электрическая и магнитная составляющие распространяются в одном направлении;
- векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  колеблются в одинаковых фазах.

### 6.3. Экспериментальное исследование ЭМВ

Как было сказано выше, экспериментальная проверка вывода теории Максвелла о существовании ЭМВ была осуществлена Герцем. Для получения волн Герц применял разные модификации изобретенного им вибратора, который возбуждал ряд цугов слабозатухающих волн (рис 6.2).

В вибраторе во время колебаний устанавливалась стоячая волна тока и напряжения. Сила тока  $I$  была максимальна в середине вибратора (пучность тока) и обращалась в нуль на его концах (узлы тока). Напряжение  $U$  в середине вибратора имело узел на концах пучности. Таким образом, вибратор аналогичен струне, колеблющейся с основной (т.е. с наименьшей) частотой. Длина  $\lambda$  излучаемых вибратором волн приблизительно в 2 раза превышала длину вибратора (*полуволновой вибратор*).

Исследования излучаемой волны Герц осуществлял также при помощи полуволнового вибратора с небольшим искровым промежутком посередине. При размещении такого вибратора параллельно вектору напряженности электрического поля волны в нем возбуждались колебания тока и напряжения. Так как длина вибратора была равна  $\lambda/2$ , вследствие резонанса колебания в нем достигали такой интенсивности, что вызывали проскакивание в искровом промежутке небольших искр.

В ходе своих исследований Герц обнаружил, что если расстояние между вибратором и приемником (резонатором) меньше одного метра, то поле вибратора в этой области соответствует излучению поля диполем и убывает обратно пропорционально кубу расстояния (эту зону называли *ближней зоной*, здесь  $r \leq \lambda$ ). Однако на расстояниях более трех метров поле убывает значительно медленнее (это волновая зона, где  $r \geq \lambda$ ) и неодинаково в различных направлениях. В направлении оси вибратора поле практически исчезает на расстоянии четырех метров, а в

направлении, перпендикулярном к оси вибратора, достигает расстояния двенадцати метров и более (рис. 6.4).

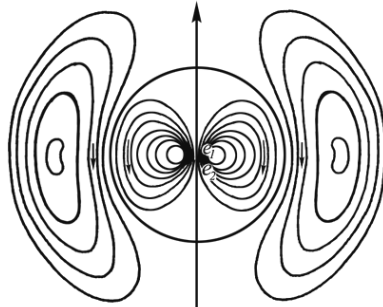


Рис. 6.4

Для объяснения этих результатов Герц теоретически, на основе электродинамики Максвелла, анализирует излучение вибратора. Здесь он впервые получает результат, что волновое поле на дальних расстояниях убывает очень медленно – обратно пропорционально расстоянию, а само поле распространяется со скоростью света. Векторы  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  максимальны в направлениях, перпендикулярных направлению колебаний заряда в вибраторе; вдоль направления колебаний заряда – над и под антенной – поля обращаются в нуль. В результате своих исследований Герц дополнил теорию Максвелла теорией электромагнитного излучения, впервые получил электромагнитные волны, предсказанные Максвеллом, и доказал их тождество с волнами света.

Для исследования свойств электромагнитных волн Герц использовал металлические параболические зеркала и большую призму из твердой смолы – асфальта с основанием 1,2 м и высотой 1,5 м с преломляющим углом  $30^\circ$  (рис. 6.5 а).

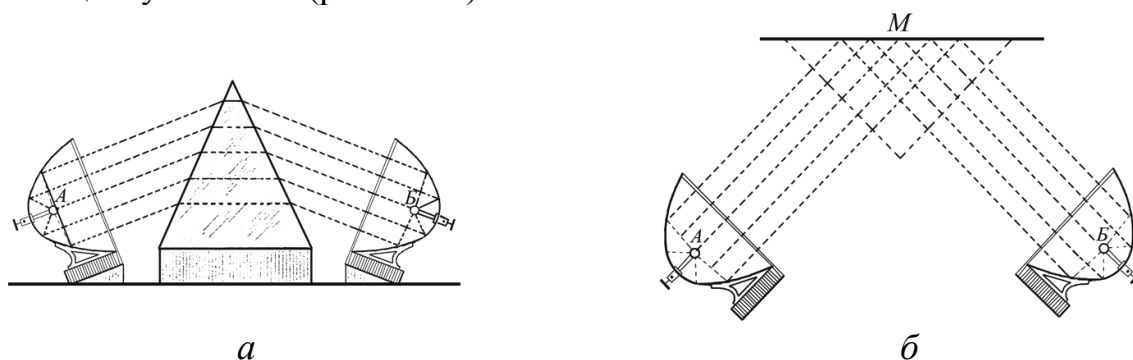


Рис. 6.5

В своих опытах Герц установил полную аналогию электромагнитных и световых волн. Было показано, что для электромагнитных волн справедлив закон отражения и преломления. Отражающими поверхностями для электромагнитных волн служили металлические листы, а закон Снелла был проверен на призмах из диэлектриков. Кроме того,

опыты Герца подтвердили соотношение  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , следующее из теории Максвелла.

Поместив излучающий вибратор в фокусе вогнутого зеркала, Герц получил направленную плоскую волну. На ее пути он расположил плоское зеркало и получил таким образом стоячую волну. Измерив расстояние между узлами и пучностями волны, Герц нашел длину волны  $\lambda$ . Произведение  $\lambda$  на частоту колебаний вибратора  $\nu$  дало скорость ЭМВ, которая оказалась близкой к скорости света  $c$ . Располагая на пути волн решетку из параллельных друг другу медных проволок, Герц обнаружил, что при вращении решетки вокруг луча интенсивность волн, прошедших сквозь решетку, сильно изменяется. Когда проволоки проходили перпендикулярно к вектору  $\vec{E}$ , волна проникала сквозь решетку без помех. При расположении проволоки параллельно вектору  $\vec{E}$  волна сквозь решетку не проходила. Таким образом, была подтверждена поперечность ЭМВ.

Отметим также, что в ходе исследований свойств электромагнитных волн Герц сделал еще одно важнейшее открытие – **фотоэлектрический эффект** (вырывание электрических зарядов с поверхности металлов под действием света).

Опыты Герца были продолжены П. Н. Лебедевым, который в 1894 г. получил ЭМВ длиной 4–6 мм и исследовал прохождение их в кристаллах. При этом было обнаружено двойное преломление волн.

Дальнейшее развитие методики эксперимента позволило в 1923 г. А.А. Глаголевой-Аркадьевой сконструировать массовый излучатель, в котором короткие ЭМВ, возбужденные колебаниями электрических зарядов в атомах и молекулах, генерировались с помощью искр между металлическими опилками, взвешенными в масле. Так были получены волны длиной  $\lambda$  от 50 мм до 80 мкм. Тем самым было доказано существование волн, перекрывающих интервал между радиоволнами и инфракрасным излучением. Позднее были получены волны в очень широком диапазоне частот.

Усовершенствовав вибратор Герца и применив свой приемник, профессор Петербургского электротехнического института А.С. Попов в 1896 г. впервые в мире наладил опытную радиотелеграфную связь и осуществил с помощью электромагнитных волн передачу сообщения на расстояние около 250 м (первыми переданы слова «Генрих Герц»). Тем самым было положено основание радиотехнике. В 1899 г. Попов довел расстояние беспроводной передачи сигналов до 50 км.

В 1901 г. была осуществлена радиотелеграфная связь через Атлантический океан. Изобретение электронных ламп (1904–1907) и приме-

нение их для генерирования незатухающих колебаний (1913 г.) сделали возможным развитие радиотелеграфии и радиовещания. В 20–30-х гг. весь мир покрылся сетью мощных радиопередающих станций. Человечество вступило в новую эру коммуникационных отношений. Эффективность и невиданная до сих пор скорость прогресса в этой области были обеспечены фундаментальной теоретической базой, созданной Дж. Максвеллом и развитой в исследованиях Г. Герца, А.С. Попова, Г. Маркони и многих других ученых и инженеров.

ЭМВ отличаются друг от друга по способам генерации и регистрации, а также по своим свойствам. По этим признакам их делят на несколько видов: радиоволны, световые волны, рентгеновское и  $\gamma$ -излучение. Шкала ЭМВ изображена на рис. 6.6.

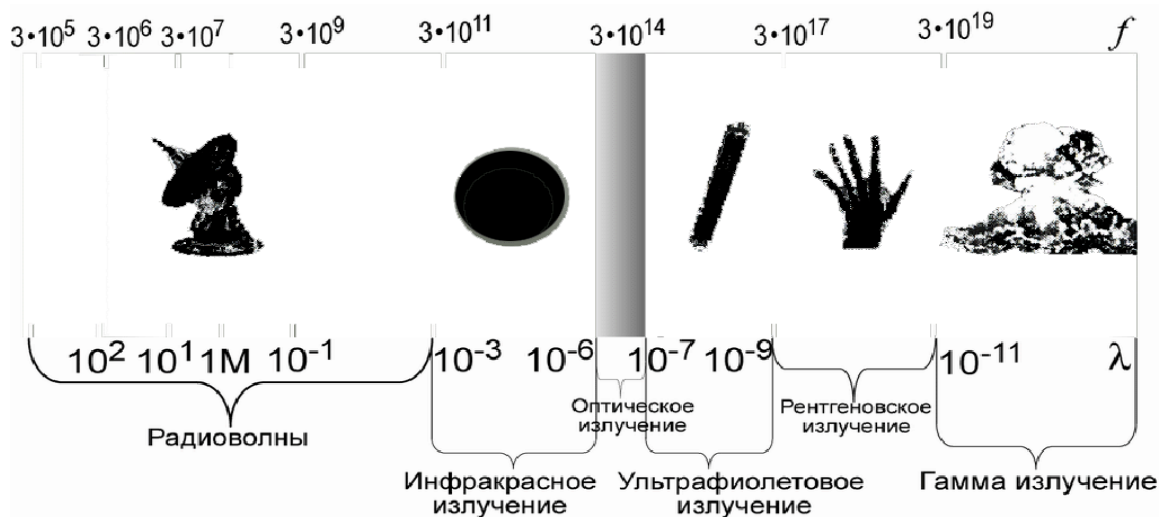


Рис. 6.6

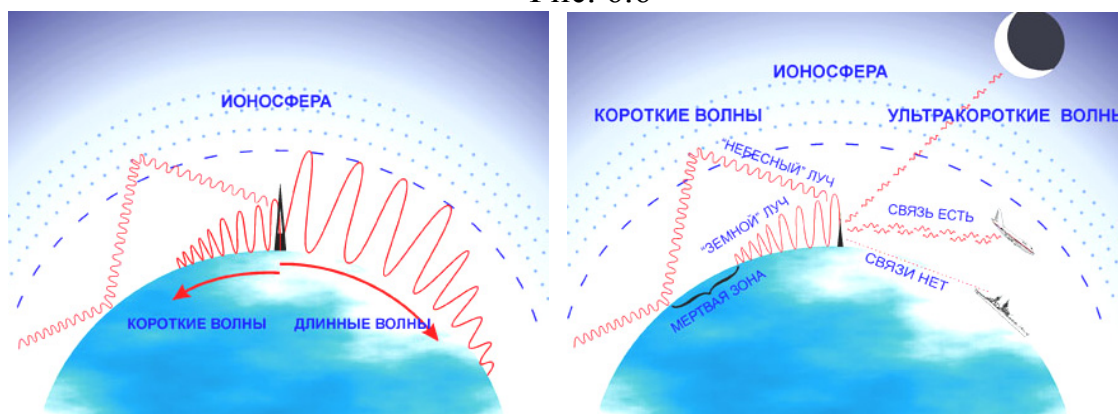


Рис. 6.7

Распространение длинных коротких и ультракоротких волн изображено на рис. 6.7.

Наименование диапазонов частот электромагнитных волн приведено в табл. 6.1.



Таблица 6.1

Диапазон частот	Наименование диапазона (сокращенное наименование)	Наименование диапазона волн	Длина волны
3–30 кГц	Очень низкие частоты (ОНЧ)	Мириаметровые	100–10 км
30–300 кГц	Низкие частоты (НЧ)	Километровые	10–1 км
300–3000 кГц	Средние частоты (СЧ)	Гектометровые	1–0.1 км
3–30 МГц	Высокие частоты (ВЧ)	Декаметровые	100–10 м
30–300 МГц	Очень высокие частоты (ОВЧ)	Метровые	10–1 м
300–3000 МГц	Ультравысокие частоты (УВЧ)	Дециметровые	1–0.1 м
3–30 ГГц	Сверхвысокие частоты (СВЧ)	Сантиметровые	10–1 см
30–300 ГГц	Крайне высокие частоты (КВЧ)	Миллиметровые	10–1 мм
300–3000 ГГц	Гипервысокие частоты (ГВЧ)	Децимиллиметровые	1–0.1 мм

Следует отметить, что границы между различными типами ЭМВ в значительной степени условны, т.к. при пограничных значениях  $\nu$  и  $\lambda$  эти волны мало чем отличаются друг от друга.

#### 6.4. Энергия и импульс электромагнитного поля

Мы уже много раз показывали, что электромагнитное поле обладает энергией. Значит, распространение электромагнитных волн связано с переносом энергии (подобно тому, как распространение упругих волн в веществе связано с переносом механической энергии). Сама возможность обнаружения ЭМВ указывает на то, что они переносят энергию.

Для характеристики переносимой волной энергии русским ученым Н.А. Умовым были введены понятия о скорости и направлении движения энергии, о потоке энергии. Спустя десять лет после этого, в 1884 г., английский ученый Джон Пойнтинг описал процесс переноса энергии с помощью вектора плотности потока энергии.

Введем вектор  $d\omega = \vec{H}d\vec{B} + \vec{E}d\vec{D}$  – приращение плотности электромагнитной энергии, где сама величина  $\omega$  определяется интегралом:

$$\omega = \int (\vec{H}d\vec{B} + \vec{E}d\vec{D}).$$

Объемная плотность энергии  $w$  электромагнитной волны складывается из объемных плотностей  $w_э$  и  $w_м$  электрического и магнитного полей:

$$w = w_э + w_м = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}.$$

Учитывая, что  $\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H$ , получим, что плотность энергии электрического и магнитного полей в каждый момент времени одинакова, т.е.  $w_э = w_м$ . Поэтому

$$w = 2w_э = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} \sqrt{\mu_0 \mu} E H.$$

Умножив плотность энергии  $w$  на скорость  $v$  распространения волны в среде, получим модуль **плотности потока энергии** – **поток энергии через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны в единицу времени**:

$$S = wv = EH. \quad (6.4.1)$$

Так как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему, то направление вектора  $[\vec{E}, \vec{H}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$  (рис. 6.8).

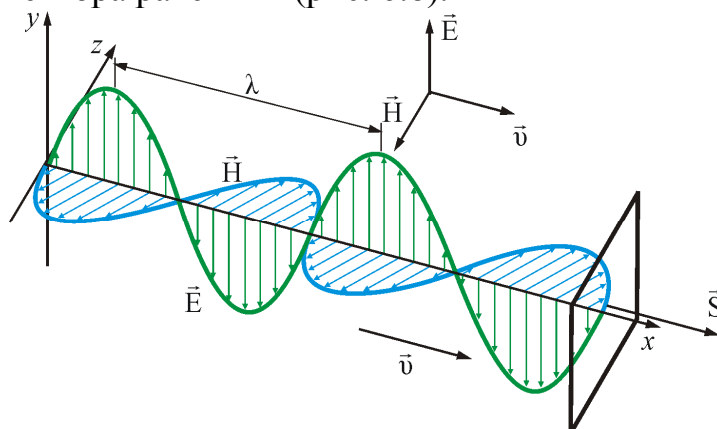


Рис. 6.8

**Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется вектором Умова–Пойнтинга:**

$$\vec{S} = [\vec{E}, \vec{H}]. \quad (6.4.2)$$

**Вектор  $\vec{S}$  направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.**

В сферической электромагнитной волне, излучаемой ускоренно двигающимися зарядами, векторы  $\vec{H}$  направлены по параллелям, векторы  $\vec{E}$  – по меридианам, а поток энергии  $\vec{S}$  – по нормали  $\vec{n}$  (рис. 6.9).

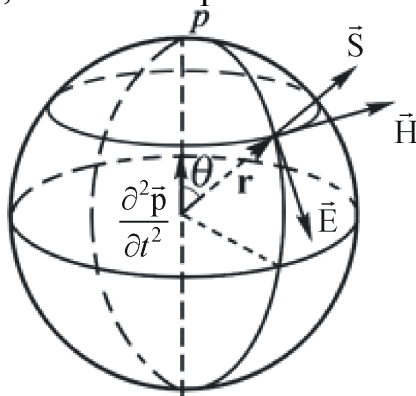


Рис. 6.9

Векторы Умова–Пойнтинга зависят от пространства и времени, так как от них зависят модули векторов напряженности электрического и магнитного полей. Поэтому часто пользуются параметром, называемым **интенсивностью** – модуль среднего значения вектора Умова–Пойнтинга:

$$J = \left| \langle \vec{S} \rangle \right|. \quad (6.4.3)$$

Интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды:

$$J \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \quad (6.4.4)$$

Зависимость интенсивности излучения от направления называют **диаграммой направленности**. Такая диаграмма для линейного излучателя показана на рис. 6.10.

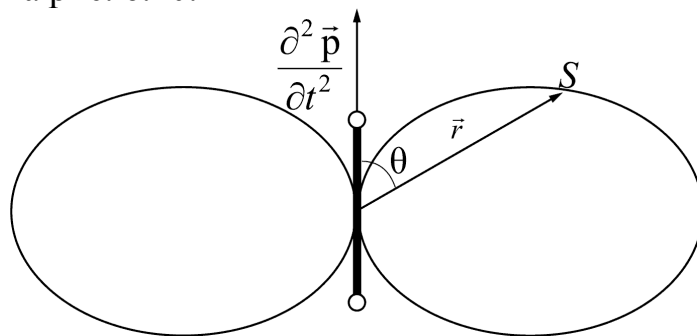


Рис. 6.10

Как доказал Герц, диполь сильнее всего излучает в направлении перпендикулярном по отношению к собственному направлению.

Ускоренно двигающиеся заряды излучают электромагнитную энергию в окружающее пространство. Вектор  $\vec{S}$  направлен вдоль радиуса  $\vec{r}$  и убывает обратно пропорционально  $r^2$ . Излучение максимально в на-

правления, перпендикулярном вектору  $\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial t^2}$ , и отсутствует вдоль этого вектора. Поэтому диаграмма направленности диполя имеет вид двух симметричных лепестков, как показано на рис. 6.10.

### Давление света

Если электромагнитные волны поглощаются или отражаются телами (эти явления подтверждены опытами Герца), то из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать на тела давление. Давление ЭМВ объясняется тем, что под действием электрического поля волны заряженные частицы вещества начинают упорядоченно двигаться и подвергаются со стороны магнитного поля действию силы. Однако, значение этого давления ничтожно мало.

Давление света и электромагнитный импульс настолько малы, что непосредственное их измерение затруднительно. Так, зеркало, расположенное на расстоянии 1 м от источника света в миллион свечей (кандел), испытывает давление  $10^{-7}$  Н/м<sup>2</sup>. Давление излучения Солнца на поверхность Земли равно  $4,3 \cdot 10^{-6}$  Н/м<sup>2</sup>, а общее давление излучения Солнца на Землю равно  $6 \cdot 10^8$  Н, что в  $10^{13}$  раз меньше силы притяжения Солнца.

Световое давление было впервые обнаружено и измерено в 1899 г. в Москве русским ученым П.Н. Лебедевым (1866–1912). Его результаты, как и более точные измерения последующих исследователей, согласуются с теорией в пределах ошибок опыта – до 2 %.

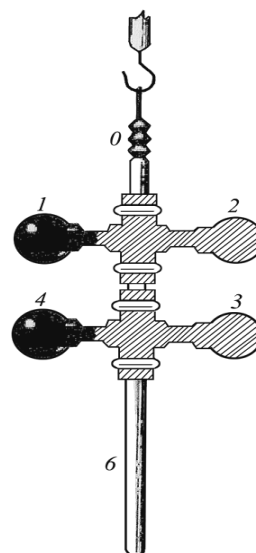
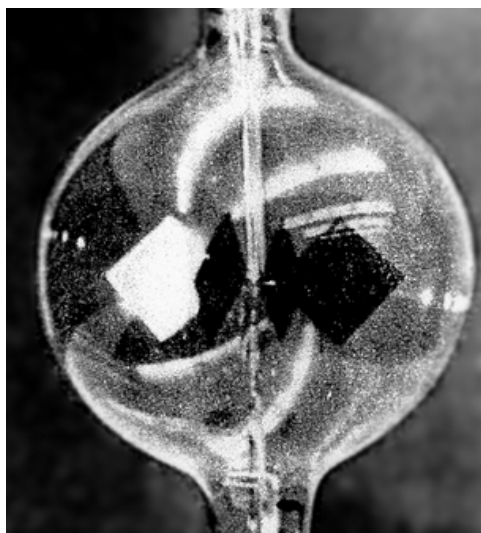


Рис. 6.11

На рис. 6.11 изображен прибор, с помощью которого было измерено давление света, – *радиометр*. Свет, отраженный посеребренной по-

верхностью каждой лопасти 2, 3, передает вдвое больший импульс по сравнению со светом, поглощенным зачерненной поверхностью 1, 4. Вследствие этого лопасти начинают вращаться по часовой стрелке.

Давление света можно рассчитать по формуле:

$$P = J \frac{1+K}{c},$$

где  $J$  – интенсивность света,  $K$  – коэффициент отражения.

Опыты Лебедева имели огромное значение для утверждения выводов теории Максвелла о том, что свет представляет собой ЭМВ.

Давление света играет существенную роль в двух противоположных по масштабу областях явлений.

Так, например, гравитационное притяжение верхних слоев звезд к центру в значительной мере уравнивается силой давления светового потока, идущего от центра звезды наружу. В атомных процессах существенной является отдача, испытываемая возбужденным атомом при излучении им света в силу малости массы атома. Световое давление может создавать ускорение атомов до  $10^5 g$ , где  $g$  – ускорение свободного падения.

Впервые гипотеза о световом давлении была высказана в 1619 г. немецким ученым И. Кеплером (1571–1630) для объяснения отклонения хвостов комет, пролетающих вблизи Солнца (рис. 6.12).

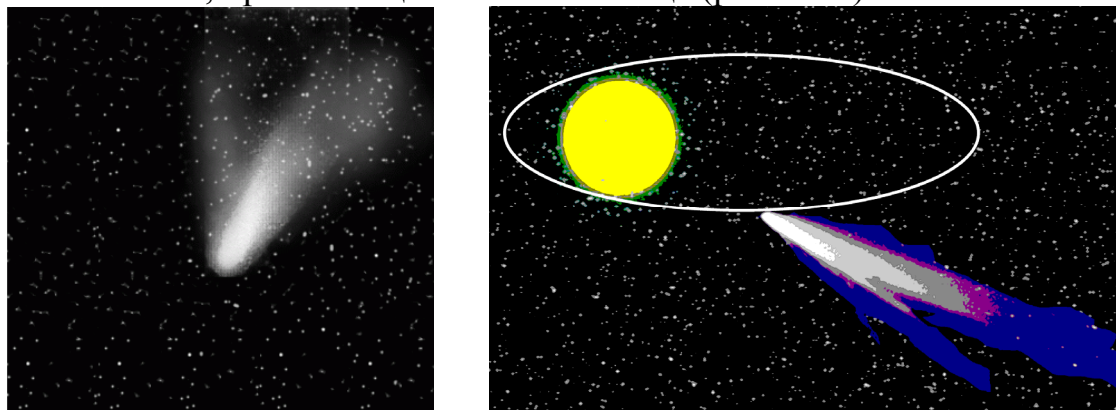


Рис. 6.12

Возможными областями физического применения светового давления могут служить процессы разделения смеси изотопов газов, ускорение микрочастиц и создание условий для протекания управляемой термоядерной реакции.

### ***Электромагнитная масса и импульс***

Существование давления ЭМВ приводит к выводу о том, что электромагнитному полю присущ механический импульс.

Выражая импульс как  $p = mc$  (поле в вакууме распространяется со скоростью света  $c$ ), получим

$$p = mc = \frac{E}{c},$$

отсюда

$$E = mc^2. \quad (6.4.5)$$

Это соотношение между массой и энергией ЭМП является универсальным законом природы, справедливым для любых тел независимо от их внутреннего строения.

Импульс электромагнитного поля, связанного с движущейся частицей, – *электромагнитный импульс* – оказался пропорциональным скорости частицы  $v$ , что имеет место и в выражении для обычного импульса  $mv$ , где  $m$  – инертная масса заряженной частицы. Поэтому коэффициент пропорциональности в полученном выражении для импульса  $\vec{p}$  называют *электромагнитной массой*:

$$m_{\text{эл}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2 4\pi\epsilon_0}, \quad (6.4.6)$$

где  $e$  – заряд движущейся частицы,  $a$  – ее радиус.

И даже если тело не обладает никакой иной массой, оказывается, что между импульсом и скоростью заряженной частицы существует соотношение:

$$\vec{p} = m_{\text{эл}} \vec{v}. \quad (6.4.6)$$

Это соотношение как бы раскрывает происхождение массы – это электродинамический эффект. Движение заряженной частицы сопровождается возникновением магнитного поля. Магнитное поле сообщает телу дополнительную инертность – при ускорении затрачивается работа на создание магнитного поля, при торможении – работа против затормаживающих сил индукционного происхождения. По отношению к движущемуся заряду электромагнитное поле является средой, неотделимой от заряда.

В общем случае можно записать, что полный импульс равен сумме механического и электромагнитного импульсов; возможно, что другие поля вносят и иные вклады в полную массу частицы, но, определенно, в полной массе есть электромагнитная часть:

$$m = m_{\text{мех}} + m_{\text{эл}}, \quad \vec{p} = m\vec{v}.$$

Если учесть релятивистские эффекты сокращения длины и преобразования электрических и магнитных полей, то для электромагнитного импульса получается также релятивистски инвариантная формула:

$$\vec{p} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2 4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (6.4.7)$$

Таким же образом изменяется релятивистский механический импульс.

### Контрольные вопросы

1. Что такое электромагнитная волна? Какова скорость ее распространения?
2. Что может служить источником электромагнитных волн?
3. Каковы физические процессы, приводящие к возможности существования электромагнитных волн?
4. Почему Герц в своих опытах использовал открытый колебательный контур?
5. Как можно представить себе шкалу электромагнитных волн, каковы источники излучения разных видов волн?
6. Какие характеристики поля периодически изменяются в бегущей электромагнитной волне?

7. Почему слагаемое  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  в уравнении Максвелла

$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}$  нужно для понимания распространения электромагнитной волны?

8. Запишите волновое уравнение для векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  переменного электромагнитного поля. Проанализируйте его решения и объясните физический смысл.

9. Как определяется фазовая скорость электромагнитных волн?
10. Как определить объемную плотность энергии в электромагнитной волне?
11. В чем заключается физический смысл вектора Умова–Пойнтинга? Чему он равен?
12. Почему важна задача об излучении диполя?
13. В чем заключается физический смысл диаграммы направленности излучения диполя?
14. Напишите условия для поля электромагнитной волны на границе раздела двух электрических сред.

## **Тема 7. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА. КОРПУСКУЛЯРНО-ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА**

### **7.1 Оптика и ее виды**

### **7.2 Геометрическая оптика**

### **7.3 Развитие взглядов на природу света**

#### **7.1 Оптика и ее виды**

*Оптика* – (от греч. *optike* – наука о зрительных восприятиях) – раздел физики, в котором изучаются оптическое излучение (свет), его распространение и явления, наблюдаемые при взаимодействии света и вещества.

Используя представление о световых лучах как о линиях, вдоль которых распространяется энергия света, на основе электромагнитной теории света (уравнений Максвелла) удастся получить простые правила поведения лучей, справедливые в предельном случае исчезающей малой длины волны.

Оптическое излучение представляет собой электромагнитные волны, и поэтому оптика – часть общего учения об электромагнитном поле.

Оптический диапазон длин волн  $\lambda$  ограничен, с одной стороны, рентгеновскими лучами, а с другой – микроволновым диапазоном радиоизлучения. Такое ограничение условно и в значительной степени определяется общностью технических средств и методов исследования явлений в указанном диапазоне.

По традиции оптику принято подразделять на геометрическую, физическую и физиологическую.

*Геометрическая оптика*, не рассматривая вопрос о природе света, исходит из эмпирических законов его распространения и использует представление о световых лучах, отражающихся и преломляющихся на границах сред с разными оптическими свойствами и прямолинейных в оптически однородной среде.

Наибольшее значение геометрическая оптика имеет для расчета и конструирования оптических приборов – от очковых линз до сложных объективов и огромных астрономических инструментов.

*Физическая оптика* рассматривает проблемы, связанные с процессами испускания света, природой света и световых явлений.



Простейшие оптические явления, например возникновение теней и получение изображений в оптических приборах, могут быть поняты в рамках геометрической оптики. Для понимания более сложных явлений нужна *физическая оптика*. Физическая оптика позволяет установить границы применимости законов геометрической оптики. Без знания этих границ формальное применение законов геометрической оптики может привести к результатам, противоречащим опыту.

*Физиологическая оптика* изучает строение и функционирование всего аппарата зрения – от глаза до коры мозга; разрабатывается теория зрения, восприятия света и цвета.

Результаты физиологической оптики используются в медицине, физиологии, технике при разработке разнообразных устройств – от осветительных приборов и очков до цветного кино и телевидения.

## 7.2 Геометрическая оптика

Основные законы геометрической оптики известны ещё с древних времен. Так, Платон (430 г. до н.э.) установил закон прямолинейного распространения света. В трактатах Евклида формулируется закон прямолинейного распространения света и закон равенства углов падения и отражения. Аристотель и Птолемей изучали преломление света. Но точных формулировок этих *законов геометрической оптики* греческим философам найти не удалось.

*Геометрическая оптика* является предельным случаем волновой оптики, когда *длина световой волны стремится к нулю*.

Простейшие оптические явления, например возникновение теней и получение изображений в оптических приборах, могут быть поняты в рамках геометрической оптики.

В основу формального построения геометрической оптики положено *четыре закона*, установленных опытным путем:

- закон прямолинейного распространения света;
- закон независимости световых лучей;
- закон отражения;
- закон преломления света.

Для анализа этих законов Х. Гюйгенс предложил простой и наглядный метод, названный впоследствии *принципом Гюйгенса*.

*Каждая точка, до которой доходит световое возмущение, является, в свою очередь, центром вторичных волн; поверхность, огибающая в некоторый момент времени эти вторичные волны, указыва-*

ет положение к этому моменту фронта действительно распространяющейся волны.



**Гюйгенс Христиан** (1629–1695), нидерландский ученый. В 1665–1681 гг. работал в Париже. Изобрел (1657) маятниковые часы со спусковым механизмом, дал их теорию, установил законы колебаний физического маятника. Опубликовал в 1690 г. созданную им в 1678 г. волновую теорию света, объяснил двойное лучепреломление. Усовершенствовал телескоп; сконструировал окуляр, названный его именем. Открыл кольцо у Сатурна и его спутник Титан. Автор одного из первых трудов по теории вероятностей (1657 г.).

Основываясь на своем методе, Гюйгенс объяснил **прямолинейность распространения света** и вывел **законы отражения и преломления**.

**Закон прямолинейного распространения света:**

- свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно.

Доказательством этого закона является наличие тени с резкими границами от непрозрачных предметов при освещении их источниками малых размеров.

Тщательные эксперименты показали, однако, что этот закон нарушается, если свет проходит через очень малые отверстия, причем отклонение от прямолинейности распространения тем больше, чем меньше отверстия.

Тень, отбрасываемая предметом, обусловлена **прямолинейностью распространения световых лучей** в оптически однородных средах.

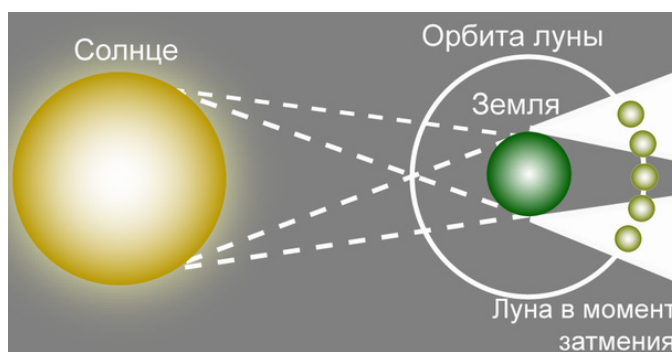


Рис 7.1

Астрономической иллюстрацией **прямолинейного распространения света** и, в частности, образования тени и полутени может служить затенение одних планет другими, например **затмение Луны**, когда Луна попадает в тень Земли (рис. 7.1). Вследствие взаимного движения Луны и Земли тень Земли перемещается по поверхности Луны, и лунное затмение проходит через несколько частных фаз (рис. 7.2).

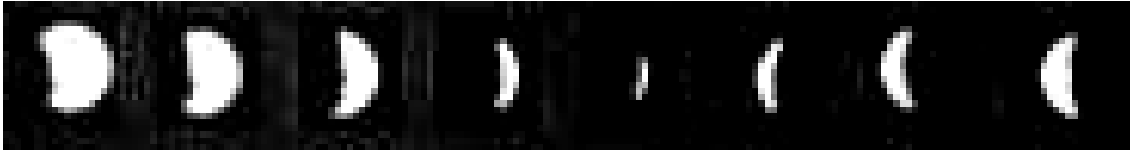


Рис. 7.2

**Закон независимости световых пучков:**

- эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно остальные пучки или они устранены.

Разбивая световой поток на отдельные световые пучки (например, с помощью диафрагм), можно показать, что действие выделенных световых пучков независимо.

**Закон отражения** (рис. 7.3):

- отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения;
- угол падения  $\alpha$  равен углу отражения  $\gamma$ :  $\alpha = \gamma$

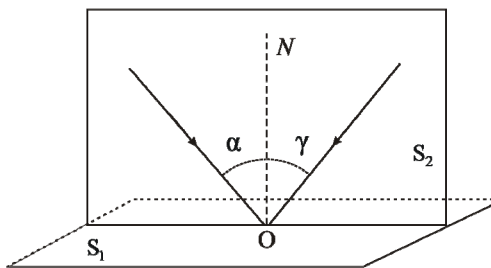


Рис. 7.3

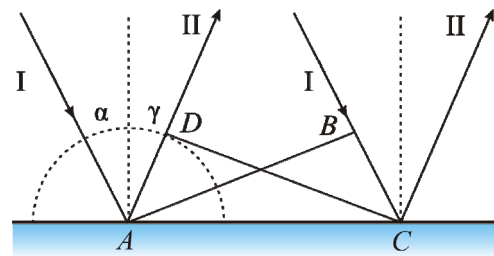


Рис. 7.4

**Для вывода закона отражения** воспользуемся принципом Гюйгенса. Предположим, что плоская волна (фронт волны  $AB$ ), распространяющаяся в вакууме вдоль направления  $I$  со скоростью  $c$ , падает на границу раздела двух сред (рис. 7.4). Когда фронт волны  $AB$  достигнет отражающей поверхности в точке  $A$ , эта точка начнет излучать **вторичную волну**.

• Для прохождения волной расстояния  $BC$  требуется время  $\Delta t = BC/v$ . За это же время фронт вторичной волны достигнет точек полусферы, радиус  $AD$  которой равен:  $v\Delta t = BC$ . Положение фронта отраженной волны в этот момент времени в соответствии с принципом Гюйгенса задается плоскостью  $DC$ , а направление распространения этой волны – лучом  $\Pi$ . Из равенства треугольников  $ABC$  и  $ADC$  вытекает закон отражения: угол падения  $\alpha$  равен углу отражения  $\gamma$ .

**Закон преломления (закон Снелиуса)** (рис. 7.5):

- луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела в точке падения, лежат в одной плоскости;

- *отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред.*

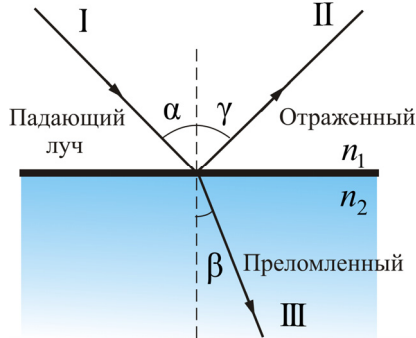


Рис. 7.5

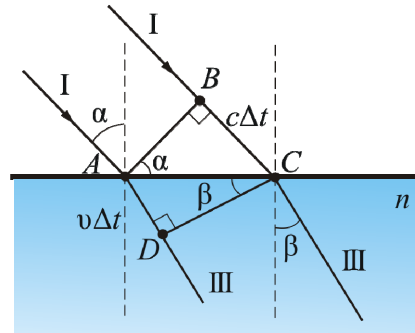


Рис. 7.6

**Вывод закона преломления.** Предположим, что плоская волна (фронт волны  $AB$ ), распространяющаяся в вакууме вдоль направления  $I$  со скоростью  $c$ , падает на границу раздела со средой, в которой скорость ее распространения равна  $v$  (рис. 7.6).

Пусть время, затрачиваемое волной для прохождения пути  $BC$ , равно  $\Delta t$ . Тогда  $BC = c\Delta t$ . За это же время фронт волны, возбуждаемой точкой  $A$  в среде со скоростью  $v$ , достигнет точек полусферы, радиус которой  $AD = v\Delta t$ . Положение фронта преломленной волны в этот момент времени в соответствии с принципом Гюйгенса задается плоскостью  $DC$ , а направление ее распространения – лучом  $III$ . Из рис. 7.6 видно, что

$$AC = BC / \sin \alpha = AD / \sin \beta, \quad \text{т.е.} \quad c\Delta t / \sin \alpha = v\Delta t / \sin \beta.$$

Отсюда следует **закон Снелиуса**:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{v} = n.$$

Несколько иная формулировка закона распространения света была дана французским математиком и физиком П. Ферма.



**Ферма Пьер** (1601–1665) – французский математик и физик. Родился в Бомон-де-Ломань. Получил юридическое образование. С 1631 г. был советником парламента в Тулузе.

Физические исследования относятся большей частью к оптике, где он установил в 1662 г. основной принцип геометрической оптики (принцип Ферма). Аналогия между принципом Ферма и вариационными принципами механики сыграла значительную роль в развитии современной динамики и теории оптических инструментов.

Согласно **принципу Ферма**, свет распространяется между двумя точками по пути, для прохождения которого необходимо **наименьшее время**.

Покажем применение этого принципа к решению той же задачи о преломлении света.

Луч от источника света  $S$ , расположенного в вакууме идет до точки  $B$ , расположенной в некоторой среде за границей раздела (рис. 7.7).

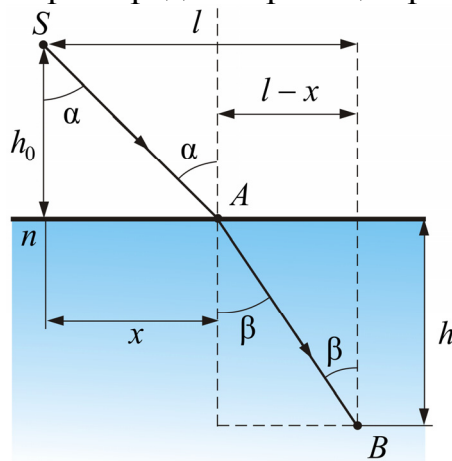


Рис. 7.7

В каждой среде кратчайшим путем будут прямые  $SA$  и  $AB$ . Точку  $A$  охарактеризуем расстоянием  $x$  от перпендикуляра, опущенного из источника на границу раздела. Определим время, затраченное на прохождение пути  $SAB$ :

$$\tau = \frac{SA}{c} + \frac{AB}{v} = \frac{\sqrt{h_0^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{h^2 + (l-x)^2}}{v}.$$

Для нахождения минимума найдем первую производную от  $\tau$  по  $x$  и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{2x}{2c\sqrt{h_0^2 + x^2}} - \frac{2(l-x) \cdot 1}{2v\sqrt{h^2 + (l-x)^2}} = \frac{\sin \alpha}{c} - \frac{\sin \beta}{v} = 0,$$

отсюда приходим к тому же выражению, что получено исходя из принципа Гюйгенса:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c}{v}$ .

Принцип Ферма сохранил свое значение до наших дней и послужил основой для общей формулировки законов механики (в том числе теории относительности и квантовой механики).

Из принципа Ферма вытекает несколько следствий.

**Обратимость световых лучей:** если обратить луч III (рис. 7.7), заставив его падать на границу раздела под углом  $\beta$ , то преломленный луч в первой среде будет распространяться под углом  $\alpha$ , т. е. пойдет в обратном направлении вдоль луча I.

**Другой пример – мираж,** который часто наблюдают путешественники на раскаленных солнцем дорогах. Они видят впереди оазис, но ко-

гда приходят туда, кругом оказывается песок. Сущность в том, что мы видим в этом случае свет, прошедший над песком. Воздух сильно раскален над самой дорогой, а в верхних слоях холоднее. Горячий воздух, расширяясь, становится более разреженным и скорость света в нем больше, чем в холодном. Поэтому свет проходит не по прямой, а по траектории с наименьшим временем, заворачивая в теплые слои воздуха.

Если свет распространяется из среды с большим показателем преломления  $n_1$  (оптически более плотной) в среду с меньшим показателем преломления  $n_2$  (оптически менее плотной) ( $n_1 > n_2$ ), например из стекла в воздух, то, согласно закону преломления, **преломленный луч удаляется от нормали** и угол преломления  $\beta$  больше, чем угол падения  $\alpha$  (рис. 7.8 а).

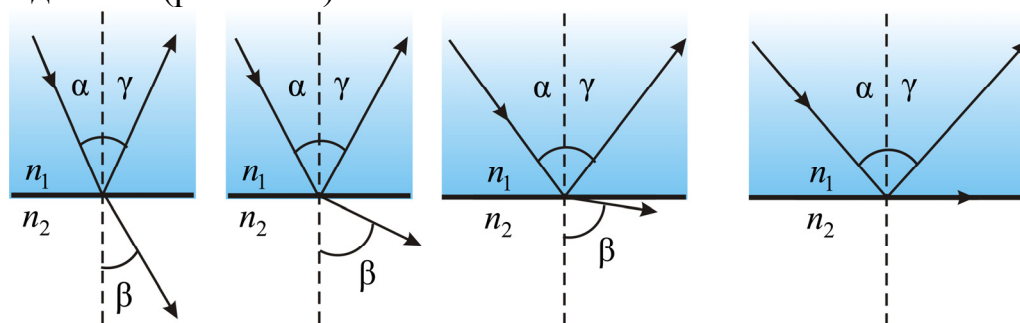


Рис.7.8

С увеличением угла падения увеличивается угол преломления (рис. 7.8 б, в), до тех пор, пока при некотором угле падения ( $\alpha = \alpha_{np}$ ) угол преломления не окажется равным  $\pi/2$ .

Угол  $\alpha_{np}$  называется **предельным углом**. При углах падения  $\alpha > \alpha_{np}$  весь падающий свет полностью отражается (рис. 7.8 г).

- По мере приближения угла падения к предельному, интенсивность преломленного луча уменьшается, а отраженного – растет.

- Если  $\alpha = \alpha_{np}$ , то интенсивность преломленного луча обращается в нуль, а интенсивность отраженного равна интенсивности падающего (рис. 7.8 г).

- Таким образом, при углах падения в пределах от  $\alpha_{np}$  до  $\pi/2$ , луч не преломляется, а полностью отражается в первую среду, причем интенсивности отраженного и падающего лучей одинаковы. Это явление называется **полным отражением**.

Предельный угол  $\alpha_{np}$  определим из формулы:

$$n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \pi/2;$$

$$\alpha_{np} = \arcsin \frac{n_2}{n_1}.$$

**Явление полного отражения используется в призмах полного отражения (Рис. 7.9).**

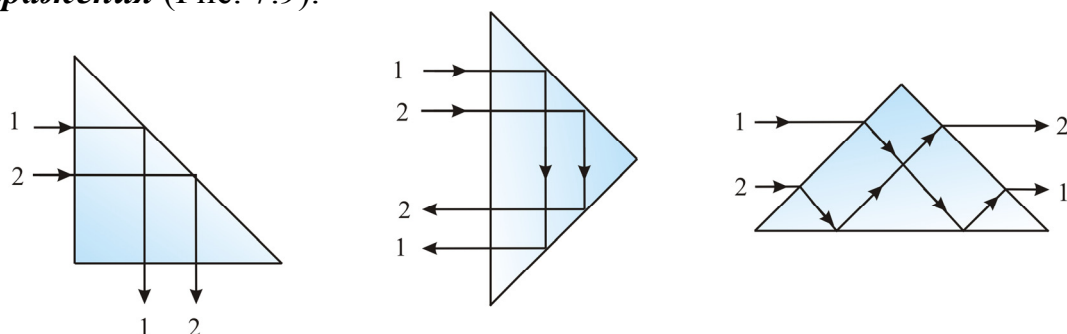


Рис. 7.9

Показатель преломления стекла равен  $n \approx 1,5$ , поэтому предельный угол для границы стекло – воздух  $\alpha_{пр} = \arcsin (1/1,5) = 42^\circ$ .

При падении света на границу стекло – воздух при  $\alpha > 42^\circ$  всегда будет иметь место полное отражение.

На рис. 7.9 показаны призмы полного отражения, позволяющие:

- а) повернуть луч на  $90^\circ$ ;
- б) повернуть изображение;
- в) обернуть лучи.

**Призмы полного отражения применяются в оптических приборах** (например, в биноклях, перископах), а также в рефрактометрах, позволяющих определять показатели преломления тел (по закону преломления, измеряя  $\alpha_{пр}$ , определяем относительный показатель преломления двух сред, а также абсолютный показатель преломления одной из сред, если показатель преломления второй среды известен).

Явление полного отражения используется также в **световодах**, представляющих собой тонкие, произвольным образом изогнутые нити (волокна) из оптически прозрачного материала.

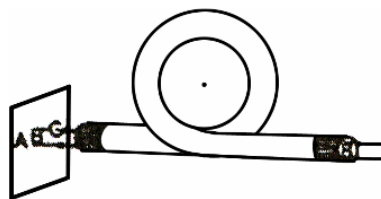


Рис. 7.10

В волоконных деталях применяют стеклянное волокно, световедущая жила (сердцевина) которого окружается стеклом – оболочкой из другого стекла с меньшим показателем преломления. Свет, падающий на торец световода **под углом больше предельного**, претерпевает на поверхности раздела сердцевины и оболочки **полное отражение** и распространяется только по световедущей жиле.

Световоды используются при создании *телеграфно-телефонных кабелей большой емкости*. Кабель состоит из сотен и тысяч оптических волокон тонких, как человеческий волос. По такому кабелю, толщиной в обычный карандаш, можно одновременно передавать до восьмидесяти тысяч телефонных разговоров.

Кроме того, световоды используются в оптоволоконных электронно-лучевых трубках, в электронно-счетных машинах, для кодирования информации, в медицине (например, диагностика желудка), для целей интегральной оптики.

### 7.3. Развитие взглядов на природу света

Первые представления *о природе света*, возникшие у древних греков и египтян, в дальнейшем, по мере изобретения и усовершенствования различных оптических приборов, развивались и трансформировались.

В средние века стали известны эмпирические правила построения изображений, даваемых линзами. В 1590 г. З. Янсен построил первый микроскоп, в 1609 г. Г. Галилей изобрел телескоп. Количественный закон преломления света при прохождении границы раздела двух сред установил в 1620 г. В. Снеллиус. Математическая запись этого закона в виде  $\sin \alpha / \sin \beta = \text{const}$ , принадлежит Р. Декарту (1637 г.) Он же попытался объяснить этот закон исходя из *корпускулярной теории*. Впоследствии формулировкой принципа Ферма (1660 г.) был завершен фундамент построения геометрической оптики.

Дальнейшее развитие оптики связано с открытиями *дифракции* и *интерференции* света (Ф. Гримальди, 1665 г.), *двойного лучепреломления* (Э. Бартолин, 1669 г.) и с работами И. Ньютона, Р. Гука, Х. Гюйгенса.

В конце XVII века на основе многовекового опыта и развития представлений о свете возникли две мощные теории света – *корпускулярная* (Ньютон – Декарт) и *волновая* (Гук – Гюйгенс).

Корпускулярные воззрения на природу света И. Ньютон развил в стройную теорию истечения. *Свет* – *корпускулы*, испускаемые телами и летящие с огромной скоростью. К анализу движения световых корпускул Ньютон, естественно, применил сформулированные им законы механики. Из этих представлений он легко вывел законы отражения и преломления света (рис. 7.11):



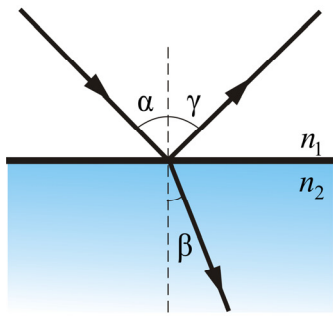


Рис. 7.11

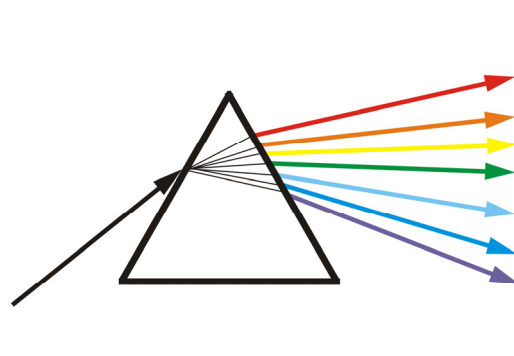


Рис. 7.12

Однако из рассуждений Ньютона следовало, что *скорость света в веществе больше скорости света в вакууме*:  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v}{c} = n$ .

Кроме того, в 1666 г. Ньютон показал, что белый свет является составным и содержит «чистые цвета», каждый из которых характеризуется своей преломляемостью (рис. 7.12), т.е. дал понятие дисперсии света. Эта особенность была объяснена различием масс корпускул.

В то же время в XVII в. (наряду с концепцией Декарта – Ньютона) развивалась противоположная, **волновая теория** Гука – Гюйгенса о том, что *свет есть процесс распространения продольных деформаций в некоторой среде, пронизывающей все тело, – в мировом эфире*.

К концу XVII в. в оптике сложилось весьма своеобразное положение. И та и другая теории объясняли основные оптические закономерности: прямолинейность распространения, законы отражения и преломления. Дальнейшие попытки более полного объяснения наблюдаемых фактов приводили к затруднению в обеих теориях.

Гюйгенс не смог объяснить физической причины наличия различных цветов и механизм изменения скорости распространения света в эфире, пронизывающем различные среды.

Ньютону трудно было объяснить, почему при падении на границу двух сред происходит частичное и отражение, и преломление, а также интерференцию и дисперсию света. Однако огромный авторитет Ньютона и незавершенность волновой теории привели к тому, что весь XVIII в. прошел под знаком корпускулярной теории.

Начало XIX в. характеризуется интенсивным развитием математической *теории колебаний и волн* и ее приложением к объяснению ряда оптических явлений. В связи с работами Т. Юнга и О. Френеля победа временно перешла к *волновой оптике*.

- 1801 г. Т. Юнг формулирует принцип интерференции и объясняет цвета тонких пленок.

- 1818 г. О. Френель объясняет явление дифракции.

- 1840 г. О. Френель и Д. Арго исследуют интерференцию поляризованного света и доказывают поперечность световых колебаний.
- 1841 г. О. Френель строит теорию кристаллооптических колебаний.
- 1849 г. А. Физо измерил скорость света и рассчитал по волновой теории коэффициент преломления воды  $n = 1,33$ , что совпало с экспериментом.
- 1848 г. М. Фарадей открыл вращение плоскости поляризации света в магнитном поле (эффект Фарадея).
- 1860 г. Дж. Максвелл, основываясь на открытии Фарадея, пришел к выводу, что свет есть электромагнитные волны, а не упругие.
- 1888 г. Г. Герц экспериментально подтвердил, что электромагнитное поле распространяется со скоростью света  $c$ .
- 1899 г. П.Н. Лебедев измерил давление света.

Казалось, что спор полностью решен в пользу волновой теории света, так как в середине XIX в. были обнаружены факты, указывающие на связь и аналогию оптических и электрических явлений. Фарадеем, Максвеллом и другими учеными было показано, что свет – частный случай электромагнитной волны с  $\lambda = 400 \div 760$  нм. Только этот интервал длин волн оказывает воздействие на наш глаз и является собственно светом. Но и более длинные и более короткие волны имеют одну и ту же природу, что и свет.

Однако, несмотря на огромные успехи в электромагнитной теории света, к концу XIX в. начали накапливаться новые факты, противоречащие волновой теории света. Волновая теория не смогла объяснить распределение энергии в спектре излучения абсолютно черного тела и явление фотоэффекта, которое в 1890 г. исследовал А.Г. Столетов.

В 1900 г. Макс Планк показал, что излучение абсолютно черного тела можно объяснить, если предложить, что свет излучается не непрерывно, а порциями, *квантами* с энергией  $E_0 = h\nu$ , где  $\nu$  – частота,  $h$  – постоянная Планка.



**Макс Планк** (1858–1947). С 1874 г. он изучал физику у Густава Кирхгофа и Германа Гельмгольца в Мюнхенском университете. В 1930 г. Макс Планк возглавил Институт физики Кайзера Вильгельма (теперь Институт Макса Планка) и занимал этот пост до конца жизни. В 1900 г. в работе, посвященной равновесному тепловому излучению, Планк впервые ввел предположение о том, что энергия осциллятора принимает дискретные значения, пропорциональные частоте колебаний, чем положил начало квантовой физики. Также Макс Планк внес большой вклад в развитие термодинамики.

В 1905 г. Альберт Эйнштейн объяснил закономерности фотоэффекта на основе представления о световых частицах – «*квантах*» света, «*фотонах*», масса которых

$$m_{\text{ф}} = \frac{E_0}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}.$$

Это соотношение связывает *корпускулярные характеристики излучения, массу и энергию кванта, с волновыми – частотой и длиной волны.*

Работы Планка и Эйнштейна явились началом развития *квантовой физики.*

Итак, обе теории – и волновая, и квантовая – одновременно развивались, имея свои несомненные достоинства и недостатки, и как бы дополняли друг друга. Ученые уже начали приходить к мнению, что свет является одновременно и волнами, и корпускулами. И вот в 1922 г. А. Комптон окончательно доказал, что рентгеновские электромагнитные волны – одновременно и корпускулы (фотоны, кванты), и волны.

Таким образом, длительный путь исследований привел к современным представлениям о *двойственной корпускулярно-волновой природе света.*

Интерес к оптическим явлениям понятен. Около 80 % информации об окружающем мире человек получает через зрение. Оптические явления всегда наглядны и поддаются количественному анализу. Очень многие основополагающие понятия, такие как интерференция, дифракция, поляризация и др., в настоящее время широко используются в областях, далеких от оптики, благодаря их предметной наглядности и точности теоретических представлений.

Примерно до середины XX столетия казалось, что оптика, как наука, закончила развитие. Однако в последние десятилетия в этой области физики произошли революционные изменения, связанные как с открытием новых закономерностей (принципы квантового усиления, лазеры), так и с развитием идей, основанных на классических и хорошо проверенных представлениях.

Наиболее важное событие в современной оптике – экспериментальное обнаружение методов генерации вынужденного излучения атомов и молекул – создание оптического квантового генератора (лазера) (А.М. Прохоров, Н.Г. Басов и Ч. Таунс, 1954 г.).

В современной физической оптике квантовые представления не противоречат волновым, а сочетаются на основе квантовой механики и квантовой электродинамики.

## Тема 8. ВОЛНОВАЯ ОПТИКА. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

### 8.1. Интерференция световых волн

### 8.2. Опыт Юнга

### 8.3. Когерентность и монохроматичность

### 8.4. Методы наблюдения интерференции

### 8.5. Интерференция в тонких пленках

### 8.6. Применение интерференции света

#### 8.1. Интерференция световых волн

Волновые свойства света наиболее отчетливо обнаруживают себя в *интерференции* и *дифракции*. Эти явления характерны для волн любой природы и сравнительно просто наблюдаются на опыте для волн на поверхности воды или для звуковых волн. Наблюдать же интерференцию и дифракцию световых волн можно лишь при определенных условиях. Свет, испускаемый обычными (нелазерными) источниками, не бывает строго монохроматическим. Поэтому для наблюдения интерференции свет от одного источника нужно разделить на два пучка и затем наложить их друг на друга. Существующие экспериментальные методы получения когерентных пучков из одного светового пучка можно разделить на *два класса*.

В *методе деления волнового фронта* пучок пропускается, например, через два близко расположенных отверстия в непрозрачном экране (опыт Юнга). Такой метод пригоден лишь при достаточно малых размерах источника.

В другом методе пучок делится на одной или нескольких частично отражающих, частично пропускающих поверхностях. Этот метод *деления амплитуды* может применяться и при протяженных источниках. Он обеспечивает большую интенсивность и лежит в основе действия разнообразных интерферометров. В зависимости от числа интерферирующих пучков различают двухлучевые и многолучевые интерферометры. Они имеют важные практические применения в технике, метрологии и спектроскопии.

Пусть две волны одинаковой частоты, накладываясь друг на друга, возбуждают в некоторой точке пространства колебания одинакового направления:

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1); \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

где под  $x$  понимаем напряженность электрического  $E$  и магнитного  $H$  полей волны, которые подчиняются принципу суперпозиции (см. п. 6).

Амплитуду результирующего колебания при сложении колебаний, направленных вдоль одной прямой, найдем по формуле (2.2.2):

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

*Если разность фаз колебаний, возбужденных волнами в некоторой точке пространства, остается постоянной во времени, то такие волны называются **когерентными**.*

В случае *некогерентных* волн разность фаз  $\varphi_2 - \varphi_1$  непрерывно изменяется, принимая с равной вероятностью любые значения, вследствие чего среднее по времени значение  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  равно нулю (изменяется от  $-1$  до  $+1$ ). Поэтому  $A^2 = A_1^2 + A_2^2$ .

Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды:  $J = A^2$ . Отсюда можно сделать вывод, что для *некогерентных источников* интенсивность результирующей волны всюду одинакова и равна сумме интенсивностей, создаваемых каждой из волн в отдельности:

$$J = J_1 + J_2 = 2J_1. \quad (8.1.1)$$

В случае *когерентных* волн  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \text{const}$  (для каждой точки пространства), так что

$$J = J_1 + J_2 + 2\sqrt{J_1J_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (8.1.2)$$

Последнее слагаемое в этом выражении  $2\sqrt{J_1J_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  называется **интерференционным членом**.

В точках пространства, где  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$ ,  $J > J_1 + J_2$  (в максимуме  $J = 4J_1$ ), где  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$ , интенсивность  $J < J_1 + J_2$  (в минимуме  $J = 0$ ). Следовательно, при наложении двух (или нескольких) когерентных световых волн происходит пространственное перераспределение светового потока, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других – минимумы интенсивности. Это явление называется **интерференцией света**.

Устойчивая интерференционная картина получается лишь при сложении когерентных волн. Некогерентность естественных источников света обусловлена тем, что излучение тела складывается из волн, испускаемых многими атомами. Фазы каждого **цуга волны** никак не связаны друг с другом. Атомы излучают хаотически.

*Периодическая последовательность горбов и впадин волн, образующихся в процессе акта излучения одного атома, называется **цугом волн** или **волновым цугом**.*

Процесс излучения одного атома длится примерно  $10^{-8}$  с. При этом длина цуга  $l = ct = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} = 3$  м.

В одном цуге укладывается примерно  $10^7$  длин волн.

### Условие максимума и минимума интерференции

Пусть разделение на две когерентные волны происходит в точке  $O$  (рис. 8.1).

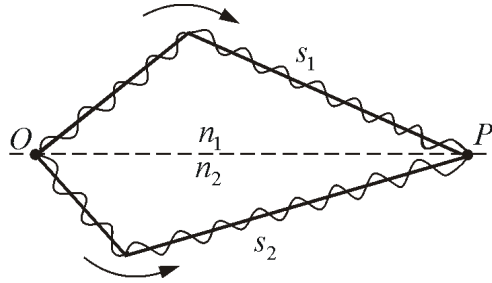


Рис. 8.1

До точки  $P$  первая волна проходит в среде с показателем  $n_1$  расстояние  $s_1$ , а вторая в среде с показателем преломления  $n_2$  расстояние  $s_2$ . Если в точке  $O$  фаза колебаний  $\omega t$  ( $\varphi = 0$ ), то первая волна возбуждает в точке  $P$  колебание

$$x_1 = A_1 \cos \omega \left( t - \frac{s_1}{v_1} \right), \quad \text{а вторая} \quad x_2 = A_2 \cos \omega \left( t - \frac{s_2}{v_2} \right),$$

где  $v_1 = \frac{c}{n_1}$ ,  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  – фазовые скорости первой и второй волны. Следовательно, разность фаз возбуждаемых волнами колебаний в точке  $P$  равна:

$$\delta = \omega \left( \frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 s_2 - n_1 s_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1).$$

Учитывая, что  $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ , получим выражение для разности фаз

двух когерентных волн:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta,$$

где  $\Delta = n_2 s_2 - n_1 s_1 = L_2 - L_1$  – оптическая разность хода,  $L$  – оптическая длина пути,  $s$  – геометрическая длина пути.

Если разность хода равна целому числу длин волн в вакууме

$$\Delta = \pm m \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.1.3)$$

то  $\delta = \pm 2m\pi$ , и колебания, возбуждаемые в точке  $P$  обеими волнами, будут происходить в одинаковой фазе. Следовательно, (8.1.3) является **условием интерференционного максимума**.

Если оптическая разность хода

$$\Delta = \pm(2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.1.4)$$

то  $\delta = \pm(2m + 1)\pi$ , и колебания, возбуждаемые в точке  $P$  обеими волнами, будут происходить в противофазе. Следовательно, (8.1.4) является *условием интерференционного минимума*.

## 8.2. Опыт Юнга

Как было уже показано, для наблюдения интерференции света необходимо иметь когерентные световые пучки, для чего применяются различные приёмы. В опыте Юнга когерентные пучки получали разделением и последующим сведением световых лучей, исходящих из одного и того же источника (*метод деления волнового фронта*).

Рассмотрим интерференционную картину, полученную методом Юнга (рис. 8.2).

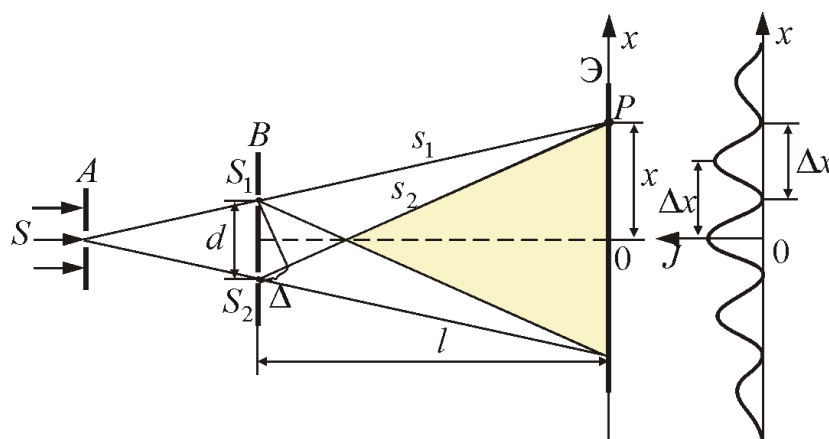


Рис. 8.2

Свет от источника  $S$ , прошедший через узкую щель в экране  $A$ , падает на экран  $B$  с двумя щелями  $S_1$  и  $S_2$ , расположенными достаточно близко друг к другу на расстоянии  $d$ . Эти щели являются когерентными источниками света. Интерференция наблюдается в области, в которой *перекрываются волны от этих источников (поле интерференции)*. На экране  $\mathcal{E}$  мы видим чередование полос с максимумом и минимумом интенсивности света.

Экран расположен на расстоянии  $l$  от щелей, причем  $l \gg d$ .

Рассмотрим две световые волны, исходящие из точечных источников  $S_1$  и  $S_2$ . Показатель преломления среды –  $n$ .

Вычислим ширину полос интерференции (темных и светлых полос).

Интенсивность в произвольной точке  $P$  экрана, лежащей на расстоянии  $x$  от  $O$ , определяется (для вакуума, когда  $n = 1$ ) оптической разностью хода  $\Delta = s_2 - s_1$ .

Из рис. 8.1 имеем

$$s_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2; \quad s_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2,$$

отсюда  $s_2^2 - s_1^2 = 2xd$ , или

$$\Delta = s_2 - s_1 = \frac{2xd}{s_1 + s_2}.$$

Из условия  $l \gg d$  следует, что  $s_1 + s_2 \approx 2l$ , поэтому

$$\Delta = \frac{xd}{l}. \quad (8.2.1)$$

Отсюда получим, что **максимумы интенсивности** будут наблюдаться в случае, если

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.2.2)$$

а **минимумы** – в случае, если

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda_0. \quad (8.2.3)$$

Расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами) равно:

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda_0, \quad (8.2.4)$$

и не зависит от порядка интерференции (величины  $m$ ) и является постоянной для данных  $l, d$ .

*Расстояние между двумя соседними максимумами называется расстоянием между интерференционными полосами, а расстояние между соседними минимумами – шириной интерференционной полосы.*

Т.к.  $\Delta x$  обратно пропорционально  $d$ , при большом расстоянии между источниками, например при  $d \approx l$ , отдельные полосы становятся неразличимыми, сравнимыми с длиной волны  $\lambda_0 \approx 10^{-7}$  м. Поэтому необходимо выполнять условие  $l \gg d$ .

Этот опыт показывает, что интерференционная картина, создаваемая на экране двумя когерентными источниками света, представляет собой чередование светлых и темных полос. *Главный максимум*, соответствующий  $m = 0$ , проходит через точку  $O$ . Вверх и вниз от него располагаются максимумы (минимумы) первого ( $m = 1$ ), второго ( $m = 2$ ) порядков и т. д.



Из перечисленных формул видно, что ширина интерференционной полосы и расстояние между ними зависят от длины волны  $\lambda$ . Только в центре картины при  $x = 0$  совпадут максимумы всех волн. По мере удаления от центра максимумы разных цветов смещаются друг относительно друга все больше и больше. Это приводит, при наблюдении в *белом свете*, ко все большему размытию интерференционных полос. Интерференционная картина будет окрашенной, но нечеткой (смазанной).

Измерив  $\Delta x$ , зная  $l$  и  $d$ , можно вычислить длину волны  $\lambda$ . Именно так вычисляют длины волн разных цветов в спектроскопии.

### 8.3. Когерентность и монохроматичность

Итак, необходимым условием интерференции волн является их **когерентность**, т.е. согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов. Этому условию удовлетворяют **монохроматические волны** – неограниченные в пространстве волны одной определенной и строго постоянной частоты. Так как ни один реальный источник не дает строго монохроматического света, то волны, излучаемые любыми независимыми источниками света, всегда некогерентны. Спектр частот реальной волны имеет конечную ширину  $\Delta\omega$ . Если в какой-то момент времени волны были в фазе, через некоторое время  $\tau_{\text{ког}}$  разность фаз будет уже равна  $\pi$  (волны в противофазе). Такую волну можно приближенно считать монохроматической только в течение времени

$$\Delta t \ll \tau_{\text{ког}} = \frac{\pi}{\Delta\omega}, \quad (8.3.1)$$

где  $\tau_{\text{ког}}$  – **время когерентности** некогерентной волны.

За промежуток времени  $\tau_{\text{ког}}$  разность фаз колебаний изменится на  $\pi$ .

**Время когерентности** – время, по истечении которого разность фаз волны в некоторой, но одной и той же точке пространства изменится на  $\pi$ .

Волна с циклической частотой  $\omega$  и фазовой скоростью  $v$  распространяется за это время на расстояние

$$l_{\text{ког}} = v\tau_{\text{ког}} = \frac{\pi v}{\Delta\omega}, \quad (8.3.2)$$

где  $l_{\text{ког}}$  – **длина когерентности** (**длина гармонического цуга**, образующегося в процессе излучения одного атома) – расстояние между точками, разность фаз в которых  $\pi$ .

Таким образом, длина когерентности есть расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность. От-

сюда следует, что наблюдение интерференции света возможно лишь при оптических разностях хода, которые меньше длины когерентности для используемого источника света.

Чем *ближе волна к монохроматической*, тем меньше ширина  $\Delta\omega$  и тем больше длина когерентности  $l_{\text{ког}}$ , а следовательно и время когерентности  $\tau_{\text{ког}}$ .

Например, для видимого света  $\nu_1 = 4 \cdot 10^{14}$  Гц;  $\nu_2 = 7 \cdot 10^{14}$  Гц,

$$\tau_{\text{ког}} = \frac{\pi}{2\pi\Delta\nu} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 10^{14}} 1,7 \cdot 10^{-15} \text{ с}; \quad l_{\text{ког}} = c\tau = 3 \cdot 10^8 \cdot 1,7 \cdot 10^{-15} \approx 0,5 \text{ мкм}.$$

*Когерентность колебаний, определяемая степенью монохроматичности волн, которая совершаются в одной и той же точке пространства, называется **временной когерентностью**.*

Интерференционная картина не будет наблюдаться, если максимум  $m$ -порядка для  $\lambda + \Delta\lambda$  будет совпадать с минимумом  $(m + 1)$ -порядка для  $\lambda$ . *Условие неразличимости интерференционной картины:*

$$m(\lambda + \Delta\lambda) = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{отсюда найдем критический максимум:}$$

$$m_{\text{кр}} = \frac{\lambda}{2\Delta\lambda}. \quad (8.3.3)$$

Мы можем четко наблюдать интерференционные максимумы при  $m \ll m_{\text{кр}}$ .

Найдем связь между порядком интерференционного максимума и оптической разностью хода. Для критического максимума оптическая разность хода  $\Delta = m\lambda$ , следовательно

$$\Delta_{\text{ког}} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}, \quad (8.3.4)$$

где  $\Delta_{\text{ког}}$  – *такая оптическая разность хода, при которой исчезает интерференционная картина.*

Чтобы наблюдать интерференционную картину, необходимо, чтобы оптическая разность хода была много меньше длины когерентности для данного источника света:  $\Delta_{\text{ког}} \ll l_{\text{ког}}$ , или

$$\frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda} \ll \frac{c\nu}{\Delta\omega}.$$

Наряду с временной когерентностью для описания когерентных свойств волн в плоскости, перпендикулярной направлению их распространения, вводится понятие ***пространственной когерентности***. Два источника, размеры и взаимное расположение которых позволяют наблюдать интерференцию, называются ***пространственно-***

*когерентными. Радиусом когерентности (или длиной пространственной когерентности) называется максимальное, поперечное направлению распространения волны расстояние, на котором возможно проявление интерференции.*

Таким образом, пространственная когерентность определится радиусом когерентности:

$$r_{\text{ког}} \sim \frac{\lambda}{\varphi},$$

где  $\lambda$  – длина волны света,  $\varphi$  – угловой размер источника.

Для того чтобы увеличить радиус когерентности или длину пространственной когерентности, необходимо световые лучи пропускать через очень малое отверстие в непрозрачном экране  $A$  (рис. 8.2).

## 8.4. Методы наблюдения интерференции

Свет, испускаемый обычными источниками, можно рассматривать как хаотическую последовательность отдельных цугов синусоидальных волн. Длительность отдельного цуга не превышает  $10^{-8}$  с даже в тех случаях, когда атомы источника не взаимодействуют (газоразрядные лампы низкого давления). Любой регистрирующий прибор имеет значительно большее время разрешения, поэтому наблюдение интерференции невозможно.

### Опыт Юнга

Образование интерференционной картины можно наблюдать в рассмотренном нами в п. 8.2 опыте Юнга, использующем метод деления волнового фронта (рис. 8.3).

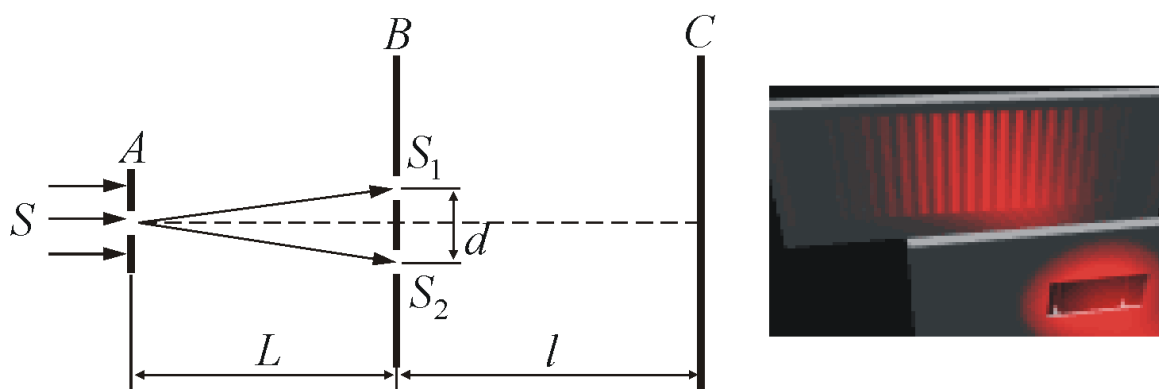


Рис. 8.3

Прошедший через узкую длинную щель  $S$  свет, вследствие дифракции образует расходящийся пучок, который падает на второй экран  $B$  с

двумя, параллельными между собой узкими щелями  $S_1$  и  $S_2$ , расположенными близко друг к другу на равных расстояниях от  $S$ . Эти щели действуют как вторичные синфазные источники, и исходящие от них волны, перекрываясь, создают интерференционную картину, наблюдаемую на удаленном экране  $C$ . Расстояние между соседними полосами равно:

$$\Delta x = \frac{\lambda l}{d}.$$

Измеряя ширину интерференционных полос, Юнг в 1802 г. впервые определил длины световых волн для разных цветов, хотя эти измерения и не были точными.

### Зеркала Френеля

Другой интерференционный опыт, аналогичный опыту Юнга, но в меньшей степени осложненный явлениями дифракции и более светосильный, был осуществлен О. Френелем в 1816 г. Две когерентные световые волны получаются в результате отражения от двух зеркал  $M$  и  $N$ , плоскости которых наклонены под небольшим углом  $\varphi$  друг к другу (рис. 8.4).

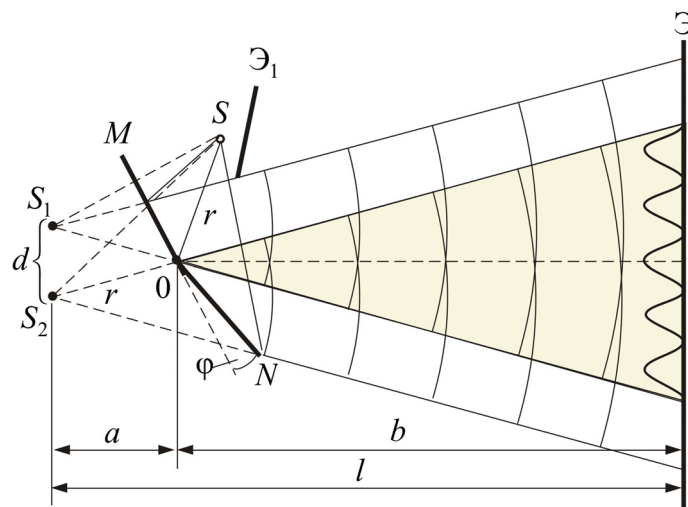


Рис. 8.4

Источником служит узкая ярко освещенная щель  $S$ , параллельная ребру между зеркалами. Отраженные от зеркал пучки падают на экран, и в той области, где они перекрываются (*поле интерференции*), возникает интерференционная картина. От прямого попадания лучей от источника  $S$  экран защищен ширмой  $\mathcal{E}_1$ . Для расчета освещенности  $J$  экрана можно считать, что интерферирующие волны испускаются вторичными источниками  $S_1$  и  $S_2$ , представляющими собой мнимые изо-

бражения щели  $S$  в зеркалах. Поэтому  $J$  будет определяться формулой двулучевой интерференции, в которой расстояние  $l$  от источников до экрана следует заменить на  $a + b$ , где  $a \approx r$  – расстояние от  $S$  до ребра зеркал,  $b$  – расстояние от ребра до экрана (см. рис 8.4.). Расстояние  $d$  между вторичными источниками равно:  $d \approx 2a\varphi$ . Поэтому ширина интерференционной полосы на экране равна:

$$\Delta x \approx \frac{\lambda l}{d} = \frac{\lambda(a+b)}{2a\varphi}.$$

### **Бипризма Френеля**

В данном интерференционном опыте, также предложенном Френелем, для разделения исходной световой волны на две используют призму с углом при вершине, близким к  $180^\circ$ .

Источником света служит ярко освещенная узкая щель  $S$ , параллельная преломляющему ребру бипризмы (рис. 8.5).

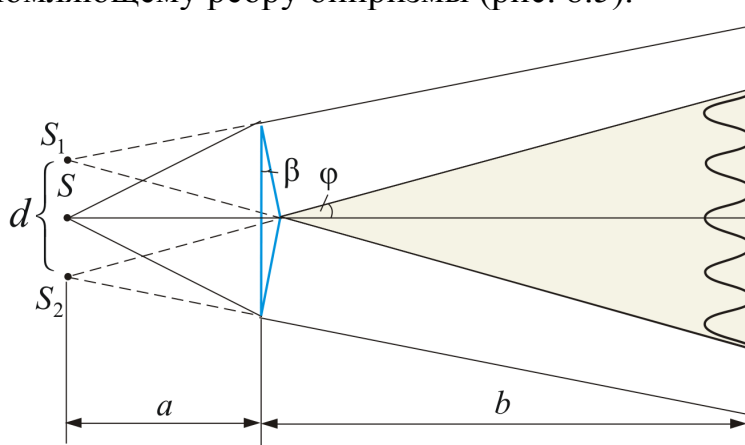


Рис. 8.5

Можно считать, что здесь образуются два близких мнимых изображения  $S_1$  и  $S_2$  источника  $S$ , так как каждая половина бипризмы отклоняет лучи на небольшой угол  $\varphi = (n - 1)\beta$ .

### **Билинза Бийе**

Аналогичное бипризме Френеля устройство, в котором роль когерентных источников играют действительные изображения ярко освещенной щели, получается, если собирающую линзу разрезать по диаметру и половинки немного раздвинуть (рис. 8.6).

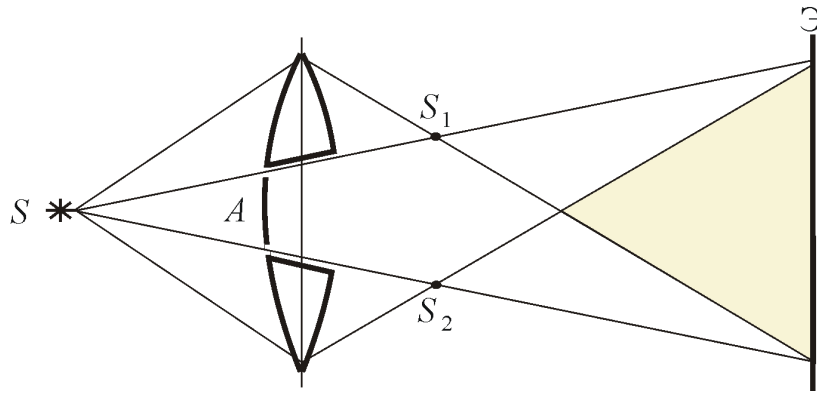


Рис. 8.6

Прорезь закрывается непрозрачным экраном  $A$ , а падающие на линзу лучи проходят через действительные изображения щели  $S_1$  и  $S_2$  и дальше перекрываются, образуя интерференционное поле.

### 8.5. Интерференция в тонких пленках

Интерференцию света по *методу деления амплитуды* во многих отношениях наблюдать проще, чем в опытах с *делением волнового фронта*. Один из способов, использующих такой метод, – *опыт Поля*.

В опыте Поля свет от источника  $S$  отражается двумя поверхностями тонкой прозрачной плоскопараллельной пластинки (рис. 8.7).

В любую точку  $P$ , находящуюся с той же стороны от пластинки, что и источник, приходят два луча. Эти луча образуют интерференционную картину.

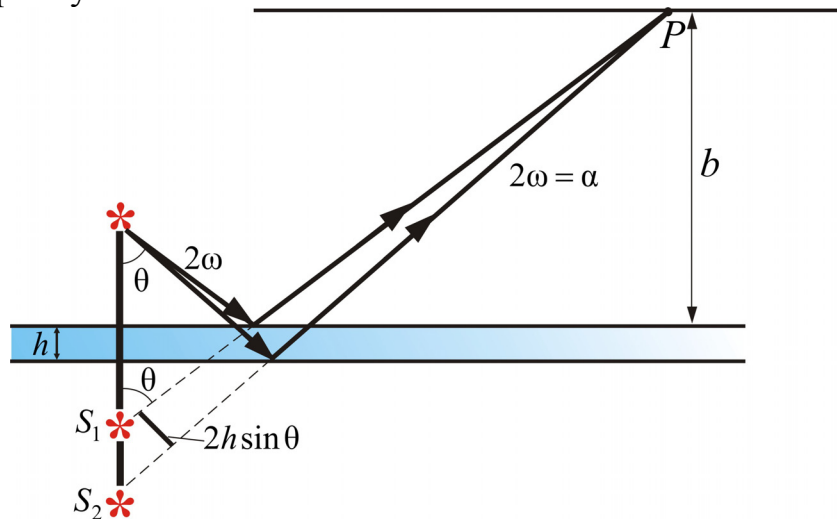


Рис. 8.7

Для определения вида полос можно представить себе, что лучи выходят из мнимых изображений  $S_1$  и  $S_2$  источника  $S$ , создаваемых поверхностями пластинки. На удаленном экране, расположенном парал-

лельно пластинке, интерференционные полосы имеют вид концентрических колец с центрами на перпендикуляре к пластинке, проходящем через источник  $S$ . Этот опыт предъявляет менее жесткие требования к размерам источника  $S$ , чем рассмотренные выше опыты. Поэтому можно в качестве  $S$  применить ртутную лампу без вспомогательного экрана с малым отверстием, что обеспечивает значительный световой поток. С помощью листочка слюды (толщиной 0,03 – 0,05 мм) можно получить яркую интерференционную картину прямо на потолке и на стенах аудитории. Чем тоньше пластинка, тем крупнее масштаб интерференционной картины, т.е. больше расстояние между полосами.

### *Полосы равного наклона*

Особенно важен частный случай интерференции света, отраженного двумя поверхностями плоскопараллельной пластинки, когда точка наблюдения  $P$  находится в бесконечности, т.е. наблюдение ведется либо глазом, аккомодированным на бесконечность, либо на экране, расположенном в фокальной плоскости собирающей линзы (рис. 8.8).

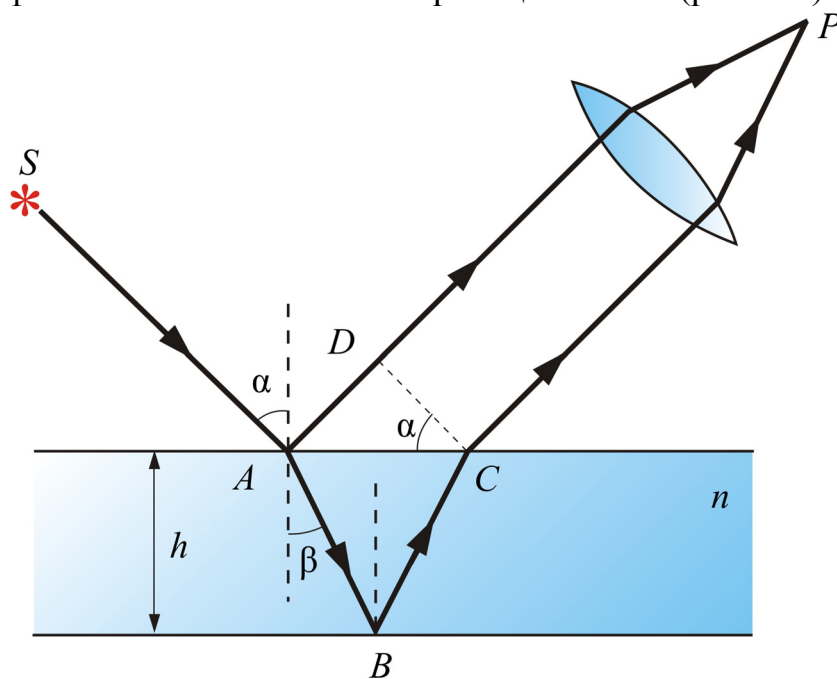


Рис. 8.8

В этом случае оба луча, идущие от  $S$  к  $P$ , порождены одним падающим лучом и после отражения от передней и задней поверхностей пластинки параллельны друг другу. Оптическая разность хода между ними в точке  $P$  такая же, как на линии  $DC$ :

$$\Delta = n |AB| + |BC| - |AD|.$$

Здесь  $n$  – показатель преломления материала пластинки. Предполагается, что над пластинкой находится воздух, т.е.  $n \approx 1$ . Так как  $|AB| = |BC| = \frac{2h}{\cos\beta}$ ,  $|AD| = 2htg\beta \sin\alpha$  ( $h$  – толщина пластинки,  $\alpha$  и  $\beta$  – углы падения и преломления на верхней грани;  $\sin\alpha = n \sin\beta$ ), то для разности хода получаем

$$\Delta = 2nh \cos\beta.$$

Следует также учесть, что при отражении волны от верхней поверхности пластинки в соответствии с формулами Френеля ее фаза изменяется на  $\pi$ . Поэтому разность фаз  $\delta$  складываемых волн в точке  $P$  равна:

$$\delta = \frac{4\pi nh \cos\beta}{\lambda_0 \pm \pi} = \frac{4\pi h \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\lambda_0 \pm \pi},$$

где  $\lambda_0$  – длина волны в вакууме.

В соответствии с последней формулой светлые полосы расположены в местах, для которых  $\frac{2nh \cos\beta \pm \lambda_0}{2} = 2m\lambda_0$ , где  $m$  – *порядок интерференции*. Полоса, соответствующая данному порядку интерференции, обусловлена светом, падающим на пластинку под вполне определенным углом  $\alpha$ . Поэтому такие полосы называют *интерференционными полосами равного наклона*. Если ось объектива расположена перпендикулярно пластинке, полосы имеют вид концентрических колец с центром в фокусе, причем в центре картины порядок интерференции максимален.

Полосы равного наклона можно получить не только в отраженном свете, но и в свете, прошедшем сквозь пластинку. В этом случае один из лучей проходит прямо, а другой – после двух отражений на внутренней стороне пластинки. Однако видимость полос при этом низкая.

Для наблюдения полос равного наклона вместо плоскопараллельной пластинки удобно использовать *интерферометр Майкельсона* (рис. 8.9). Рассмотрим схему интерферометра Майкельсона:  $z_1$  и  $z_2$  – зеркала. Полупрозрачное зеркало  $P_1$  посеребрено и делит луч на две части – луч 1 и 2. Луч 1, отражаясь от  $z_1$  и проходя  $P_1$ , дает  $1'$ , а луч 2, отражаясь от  $z_2$  и далее от  $P_1$ , дает  $2'$ . Пластинки  $P_1$  и  $P_2$  одинаковы по размерам.  $P_2$  ставится для компенсации разности хода второго луча. Лучи  $1'$  и  $2'$  когерентны и интерферируют.



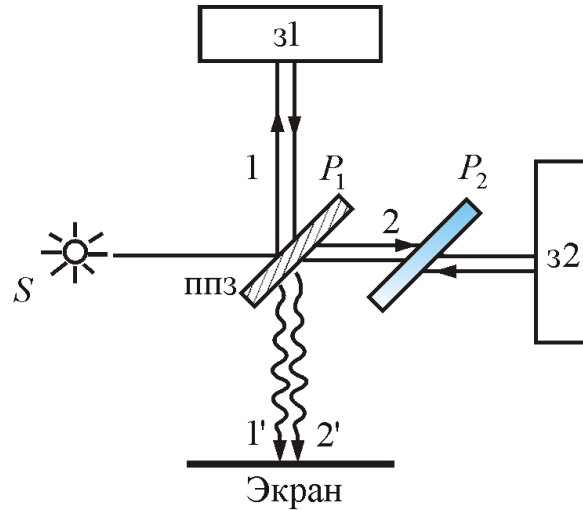


Рис. 8.9

### ***Интерференция от клина. Полосы равной толщины***

Мы рассмотрели интерференционные опыты, в которых деление амплитуды световой волны от источника происходило в результате частичного отражения на поверхностях плоскопараллельной пластинки. Локализованные полосы при протяженном источнике можно наблюдать и в других условиях. Оказывается, что для достаточно тонкой пластинки или пленки (поверхности которой не обязательно должны быть параллельными и вообще плоскими) можно наблюдать интерференционную картину, локализованную вблизи отражающей поверхности. Возникающие при этих условиях полосы называют ***полосами равной толщины***. В белом свете интерференционные полосы окрашены. Поэтому такое явление называют ***цветами тонких пленок***. Его легко наблюдать на мыльных пузырях, на тонких пленках масла или бензина, плавающих на поверхности воды, на пленках окислов, возникающих на поверхности металлов при закалке, и т.п.

Рассмотрим интерференционную картину, получаемую от пластинок переменной толщины (от клина).

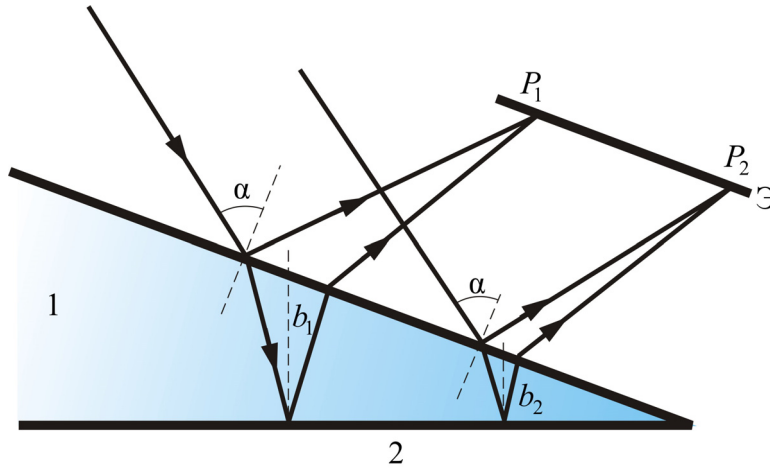


Рис. 8.10

Направления распространения световой волны, отраженной от верхней и нижней границы клина, не совпадают. Отраженные и преломленные лучи встречаются, поэтому интерференционную картину при отражении от клина можно наблюдать и без использования линзы, если поместить экран в плоскость точек пересечения лучей (хрусталик глаза помещают в нужную плоскость).

Интерференция будет наблюдаться только во 2-й области клина, так как в 1-й области оптическая разность хода будет больше длины когерентности.

Результат интерференции в точках  $P_1$  и  $P_2$  экрана определяется по известной формуле  $\Delta = 2b\sqrt{n^2 - \sin^2(\alpha)} \pm \frac{\lambda_0}{2}$ , подставляя в неё толщину пленки в месте падения луча ( $b_1$  или  $b_2$ ). Свет обязательно должен быть параллельным ( $\alpha = \text{const}$ ): если одновременно будут изменяться два параметра  $b$  и  $\alpha$ , то устойчивой интерференционной картины не будет.

Поскольку разность хода лучей, отразившихся от различных участков клина, будет неодинаковой, освещенность экрана будет неравномерной, на экране будут темные и светлые полосы (или цветные при освещении белым светом, как показано на рис. 8.11). Каждая из таких полос возникает в результате отражения от участков клина с одинаковой толщиной, поэтому их называют **полосами равной толщины**.

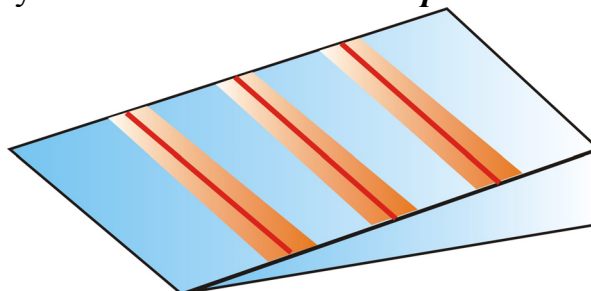


Рис. 8.11

## Кольца Ньютона

На рис. 8.12 изображена оправа, в которой зажаты две стеклянные пластины. Одна из них слегка выпуклая, так что пластины касаются друг друга в какой-то точке. И в этой точке наблюдается нечто странное: вокруг нее возникают кольца. В центре они почти не окрашены, чуть дальше переливаются всеми цветами радуги, а к краю теряют насыщенность цветов, блекнут и исчезают.

Так выглядит эксперимент, в XVII веке положивший начало современной оптике. Ньютон подробно исследовал это явление, обнаружил закономерности в расположении и окраске колец, а также объяснил их на основе корпускулярной теории света.

Кольцевые **полосы равной толщины**, наблюдаемые в воздушном зазоре между соприкасающимися выпуклой сферической поверхностью линзы малой кривизны и плоской поверхностью стекла (рис. 8.13), называют **кольцами Ньютона**.



Рис. 8.12

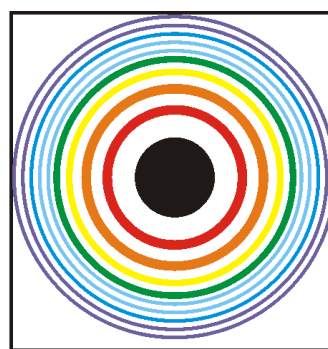
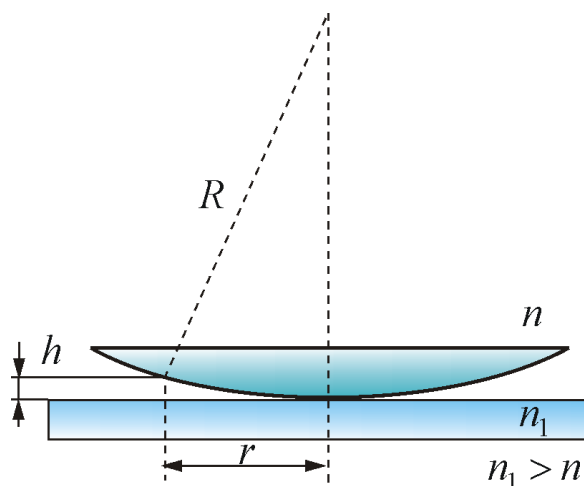


Рис. 8.13

Общий центр колец расположен в точке касания. В отраженном свете центр темный, так как при толщине воздушной прослойки, на много меньшей, чем длина волны  $\lambda$ , разность фаз интерферирующих волн обусловлена различием в условиях отражения на двух поверхно-

стях и близка к  $\pi$ . Толщина  $h$  воздушного зазора связана с расстоянием  $r$  до точки касания (рис. 8.13):

$$h = R - \sqrt{R^2 - r^2} = r \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \right) \approx \frac{r^2}{2R}.$$

Здесь использовано условие  $\left(\frac{r}{R}\right)^2 \ll 1$ . При наблюдении по норма-

ли темные полосы, как уже отмечалось, соответствуют толщине  $h = \frac{m\lambda}{2}$ ,

поэтому для радиуса  $r_m$   $m$ -го темного кольца получаем

$$r_m = \sqrt{mR\lambda} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Если линзу постепенно отодвигать от поверхности стекла, то интерференционные кольца будут стягиваться к центру. При увеличении расстояния на  $\lambda/2$  картина принимает прежний вид, так как место каждого кольца будет занято кольцом следующего порядка. С помощью колец Ньютона, как и в опыте Юнга, можно сравнительно простыми средствами приближенно определить длину волны света.

Полосы равной толщины можно наблюдать и с помощью интерферометра Майкельсона, если одно из зеркал  $z_1$  или  $z_2$  (рис. 8.9) отклонить на небольшой угол.

*Итак, полосы равного наклона* получаются при освещении пластинки постоянной толщины ( $b = \text{const}$ ) рассеянным светом, в котором содержатся лучи разных направлений. **Полосы равной толщины** наблюдаются при освещении пластинки переменной толщины (клина) ( $b \neq \text{const}$ ) параллельным пучком света. Полосы равной толщины локализованы вблизи пластинки.

## 8.6. Применение интерференции света

Явление интерференции волн находит разнообразное применение. Рассмотрим лишь некоторые примеры применения интерференции.

- Тот факт, что расположение интерференционных полос зависит от длины волны и разности хода лучей, позволяет по виду интерференционной картины (или их смещению) проводить точные измерения расстояний при известной длине волны или, наоборот, определять спектр интерферирующих волн (**интерференционная спектроскопия**). Для осуществления таких измерений разработаны различные схемы высокоточных измерительных приборов, называемых интерферометрами (двух- и многолучевые) (рис. 8.9). Незначительное перемещение одного из зеркал интерферометра приводит к смещению интерференционной

картины, что можно использовать для измерения длин с точностью до  $10^{-9}$  м. Измерения с помощью интерферометра Майкельсона привели к фундаментальным изменениям представлений о пространстве и времени. Доказали отсутствие эфира. Послужили основой специальной теории относительности.

- **По интерференционной картине можно выявлять и измерять неоднородности среды** (в т.ч. фазовые), в которой распространяются волны, или отклонения формы поверхности от заданной.

- Явление интерференции волн, рассеянных от некоторого объекта (или прошедших через него) с «опорной» волной, лежит в основе **голографии** (в т.ч. оптической, акустической или СВЧ-голографии).

- Интерференционные волны от отдельных «элементарных» излучателей используются **при создании сложных излучающих систем** (антенн) для электромагнитных и акустических волн.

- **Просветление оптики и получение высокопрозрачных покрытий и селективных оптических фильтров.** Одной из важных задач, возникающих при построении различных оптических и антенных устройств СВЧ-диапазона, является уменьшение потерь ( $\approx 4\%$ ) интенсивности света, мощности потока электромагнитной энергии **при отражении от поверхностей линз, обтекателей антенн и пр. приборов**, используемых для преобразований световых и радиоволн в разнообразных приборах фотоники, оптоэлектроники и радиоэлектроники. Для уменьшения потерь на отражение используется покрытие оптических деталей (линз) 3 пленкой 2 со специальным образом подобранными толщиной  $\delta$  и показателем преломления  $n$  (рис. 8.14).

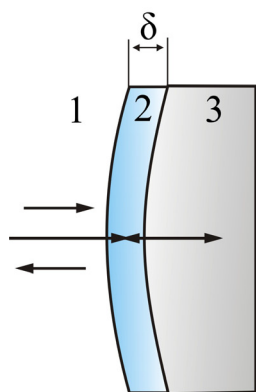


Рис. 8.14

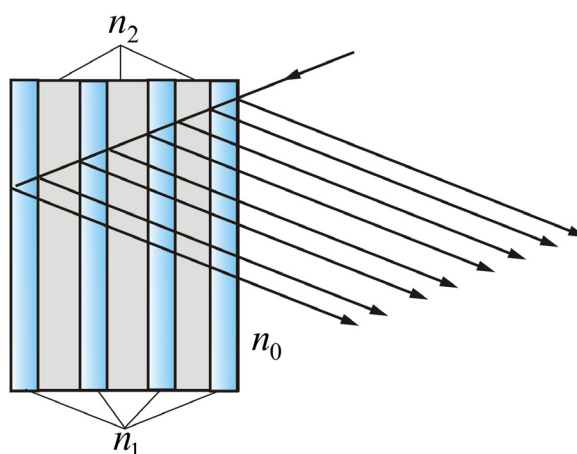


Рис. 8.15

Идея уменьшения интенсивности отраженного света от поверхности оптических деталей состоит в интерференционном гашении волны, отраженной от внешней поверхности детали 1, волной отражённой от

внутренней 2. Для осуществления этого амплитуды обеих волн должны быть равны, а фазы отличаться на  $180^\circ$ . В этом случае обеспечивается гашение отражённой волны. Необходимое соотношение между фазами  $\Delta\phi$  отражённых волн обеспечивается выбором толщины плёнки  $\delta$ , кратной нечётному числу четвертей длины волны проходящего через рассматриваемую деталь света:

$$\delta = (2m + 1)\lambda / 4. \quad (8.6.1)$$

Таким образом, если выполняется условие (8.6.1), то в результате интерференции наблюдается гашение отраженных лучей.

Так как добиться одновременного гашения для всех длин волн невозможно, то его делают для  $\lambda_0 = 0,55 \text{ мкм}$ . Поэтому объективы с просветленной оптикой кажутся голубыми.

• **Получение высокоотражающих диэлектрических зеркал**

Значительно повысить коэффициент отражения  $R$  зеркал можно, используя последовательность чередующихся диэлектрических слоев с высоким  $n_1$  и низким  $n_2$  показателями преломления (рис. 8.15).

Если оптическая толщина всех слоев одинакова и равна  $\lambda_0 / 4$  ( $n_1 l_1 = n_2 l_2 = \lambda_0 / 4$ ), то отраженные их границами волны находятся, как легко заметить, в одинаковой фазе и в результате интерференции усиливают друг друга. Такие многослойные диэлектрические покрытия дают высокую отражательную способность только в ограниченной области длин волн вблизи значения  $\lambda_0$ , для которого оптическая толщина слоев равна  $\lambda_0 / 4$ . Обычно наносят от 5 до 15 слоев сульфида цинка ( $n_1 = 2,3$ ) и криолита ( $n_2 = 1,35$ ). С семью слоями легко добиться  $R = 0,9$  в спектральной области шириной порядка 50 нм. Для получения коэффициента отражения  $R = 0,99$  надо нанести 11–13 слоев. Такие зеркала используются в лазерных резонаторах (Рис.8.16)

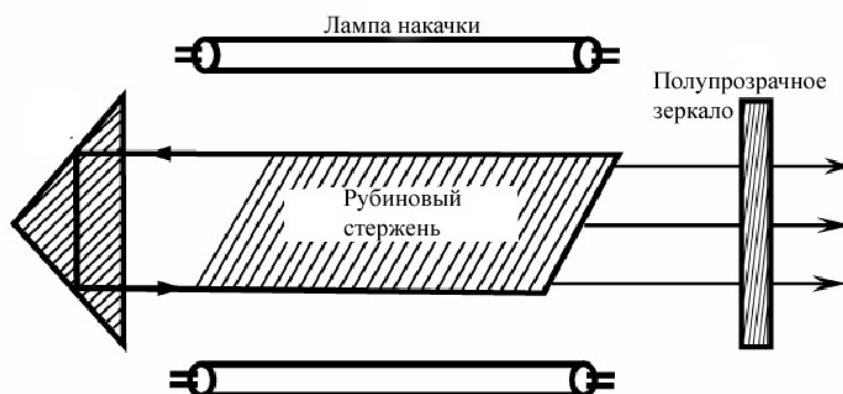


Рис. 8.16

## Контрольные вопросы

1. Каковы основные положения и выводы корпускулярной и волновой теорий света?
2. Почему возникло представление о двойственной корпускулярно-волновой природе света?
3. В чем заключается основная идея теории Планка?
4. Какую величину называют временем когерентности? длиной когерентности? Какова связь между ними?
5. Для чего вводятся понятия временной и пространственной когерентностей?
6. Что такое оптическая длина пути? оптическая разность хода?
7. Два когерентных световых пучка с оптической разностью хода  $\Delta = \frac{3}{2}\lambda$  интерферируют в некоторой точке. Максимум или минимум наблюдается в этой точке? Почему?
8. Почему интерференцию можно наблюдать от двух лазеров и нельзя от двух электроламп?
9. Как изменится интерференционная картина в опыте Юнга, если эту систему поместить в воду?
10. Будут ли отличаться интерференционные картины от двух узких, близко лежащих параллельных щелей при освещении их монохроматическим и белым светом? Почему?
11. Что такое полосы равной толщины и равного наклона? Где они локализованы?

## Тема 9. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

### 9.1. Принцип Гюйгенса–Френеля

### 9.2. Метод зон Френеля

### 9.3. Дифракция Френеля от простейших преград

### 9.4. Дифракция в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера)

### 9.5. Дифракция на пространственных решетках. Дифракция рентгеновских лучей

### 9.6. Понятие о голографии

#### 9.1. Принцип Гюйгенса–Френеля

*Дифракция света* – в узком, но наиболее употребительном смысле – *огибание* лучами света границы непрозрачных тел (экранов); проникновение света в область геометрической тени. Наиболее рельефно дифракция света проявляется в областях резкого изменения плотности потока лучей: вблизи каустик, фокуса линзы, границ геометрической тени и др. Дифракция волн тесно переплетается с явлениями распространения и рассеяния волн в неоднородных средах.

*Дифракцией* называется *совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями, размеры которых сравнимы с длиной волны, и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики.*

Огибание препятствий звуковыми волнами (дифракция звуковых волн) наблюдается нами постоянно (мы слышим звук за углом дома). Для наблюдения дифракции световых лучей нужны особые условия, это связано с малой длиной световых волн.

Между интерференцией и дифракцией нет существенных физических различий. Оба явления заключаются в перераспределении светового потока в результате суперпозиции волн.

Явление дифракции объясняется с помощью *принципа Гюйгенса*, согласно которому *каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн задает положение волнового фронта в следующий момент времени.*

Пусть плоская волна нормально падает на отверстие в непрозрачном экране (рис. 9.1). Каждая точка участка волнового фронта, выделенного отверстием, служит источником вторичных волн (в однородной изотопной среде они сферические).



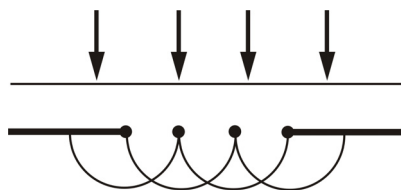


Рис. 9.1

Построив огибающую вторичных волн для некоторого момента времени, видим, что фронт волны заходит в область геометрической тени, т.е. волна огибает края отверстия.

Принцип Гюйгенса решает лишь задачу о направлении распространения волнового фронта, но не затрагивает вопроса об амплитуде и интенсивности волн, распространяющихся по разным направлениям.

Решающую роль в утверждении волновой природы света сыграл О. Френель в начале XIX века. Он объяснил явление дифракции и дал метод ее количественного расчета. В 1818 году он получил премию Парижской академии за объяснение явления дифракции и метод его количественного расчета.

Френель вложил в принцип Гюйгенса физический смысл, дополнив его идеей интерференции вторичных волн.

При рассмотрении дифракции Френель исходил из нескольких основных положений, принимаемых без доказательства. Совокупность этих утверждений и называется принципом Гюйгенса–Френеля.

Согласно *принципу Гюйгенса*, каждую *точку фронта* волны можно рассматривать как источник вторичных волн.

Френель существенно развил этот принцип.

- *Все вторичные источники фронта волны, исходящей из одного источника, когерентны между собой.*

- *Равные по площади участки волновой поверхности излучают равные интенсивности (мощности).*

- *Каждый вторичный источник излучает свет преимущественно в направлении внешней нормали к волновой поверхности в этой точке. Амплитуда вторичных волн в направлении, составляющем угол  $\alpha$  с нормалью, тем меньше, чем больше угол  $\alpha$ , и равна нулю при  $\alpha \geq \pi/2$ .*

- *Для вторичных источников справедлив принцип суперпозиции: излучение одних участков волновой поверхности не влияет на излучение других (если часть волновой поверхности прикрыть непрозрачным экраном, вторичные волны будут излучаться открытыми участками так, как если бы экрана не было).*

Используя эти положения, Френель уже мог сделать количественные расчеты дифракционной картины.

## 9.2. Метод зон Френеля

Френель предложил оригинальный метод разбиения волновой поверхности  $S$  на зоны, позволивший сильно упростить решение задач (*метод зон Френеля*).

Границей первой (центральной) зоны служат точки поверхности  $S$ , находящиеся на расстоянии  $l + \lambda/2$  от точки  $M$  (рис. 9.2). Точки сферы  $S$ , находящиеся на расстояниях  $l + 2\lambda/2$ ,  $l + 3\lambda/2$ , и т.д. от точки  $M$ , образуют 2, 3 и т.д. зоны Френеля.

Колебания, возбуждаемые в точке  $M$  между двумя соседними зонами, противоположны по фазе, так как разность хода от этих зон до точки  $M$   $\Delta = \lambda/2$ .

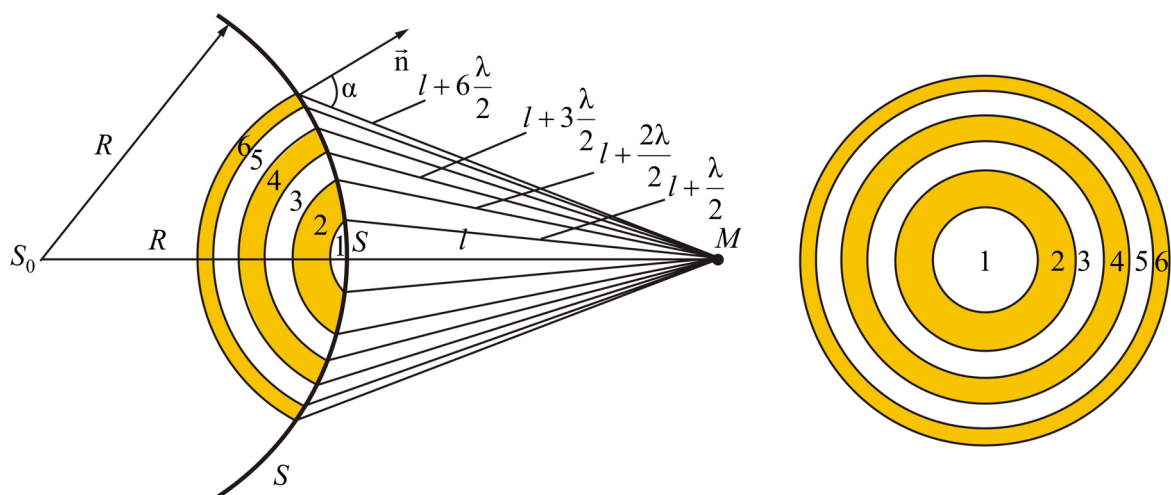


Рис. 9.2

Поэтому при сложении этих колебаний, они должны взаимно ослаблять друг друга:

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots + A_i, \quad (9.2.1)$$

где  $A$  – амплитуда результирующего колебания,  $A_i$  – амплитуда колебаний, возбуждаемая  $i$ -й зоной Френеля.

Величина  $A_i$  зависит от площади  $S_i$  зоны и угла  $\alpha_i$  между нормалью к поверхности и прямой, направленной в точку  $M$ .

Площадь одной зоны

$$\Delta S_i = S_i - S_{i-1} = \frac{\pi R l \lambda}{R + l} (i - i + 1) = \frac{\pi R l \lambda}{R + l}.$$

Отсюда видно, что площадь зоны Френеля не зависит от номера зоны  $i$ . Это значит, что *при не слишком больших  $i$  площади соседних зон одинаковы*.

В то же время с увеличением номера зоны возрастает угол  $\alpha_i$  и, следовательно, уменьшается интенсивность излучения зоны в направлении точки  $M$ , т.е. уменьшается амплитуда  $A_i$ . Она уменьшается также из-за увеличения расстояния до точки  $M$ :

$$A_1 > A_2 > A_3 > \dots > A_i > \dots$$

Общее число зон Френеля, уместяющихся на части сферы, обращенной в сторону точки  $M$ , очень велико: при  $R = l = 0,1$  м,  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м = 500 нм, число зон  $N \approx 3 \cdot 10^5$ , а радиус первой зоны  $r_1 \approx 0,16$  мм.

Отсюда следует, что углы между нормалью к зоне и направлением на точку  $M$  у соседних зон примерно равны, т.е. что **амплитуды волн, приходящих в точку  $M$  от соседних зон, примерно равны.**

Световая волна распространяется прямолинейно. Фазы колебаний, возбуждаемые соседними зонами, отличаются на  $\pi$ . Поэтому в качестве допустимого приближения можно считать, что амплитуда колебания  $A_m$  от некоторой  $m$ -й зоны равна среднему арифметическому от амплитуд примыкающих к ней зон, т.е.

$$A_m = \frac{A_{m-1} + A_{m+1}}{2}.$$

Тогда выражение (9.2.1) можно записать в виде

$$A = \frac{A_1}{2} + \left( \frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left( \frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots = \frac{A_1}{2}. \quad (9.2.2)$$

Так как площади соседних зон одинаковы, то выражения в скобках равны нулю, значит результирующая амплитуда  $A = \frac{A_1}{2}$ .

Интенсивность излучения  $J \sim A^2$ .

Таким образом, **результатирующая амплитуда, создаваемая в некоторой точке  $M$  всей сферической поверхностью, равна половине амплитуды, создаваемой одной лишь центральной зоной, а интенсивность  $J = J_1 / 4$ .**

Так как радиус центральной зоны мал ( $r_1 \approx 0,16$  мм), следовательно, можно считать, что свет от точки  $P$  до точки  $M$  **распространяется прямолинейно.**

Если на пути волны поставить непрозрачный экран с отверстием, оставляющим открытой только центральную зону Френеля, то амплитуда в точке  $M$  будет равна  $A_1$ . Соответственно, интенсивность в точке  $M$

будет в 4 раза больше, чем при отсутствии экрана (т.к.  $J = 4J_1$ ). *Интенсивность света увеличивается, если закрыть все четные зоны.*

Таким образом, принцип Гюйгенса–Френеля позволяет объяснить прямолинейное распространение света в однородной среде.

Правомерность деления волнового фронта на зоны Френеля подтверждена экспериментально. Для этого используются зонные пластинки – система чередующихся прозрачных и непрозрачных колец.

Опыт подтверждает, что с помощью зонных пластинок можно увеличить освещенность в точке  $M$ , подобно собирающей линзе.

### 9.3. Дифракция Френеля от простейших преград

Рассмотрим дифракцию в сходящихся лучах, или дифракцию Френеля, осуществляемую в том случае, когда дифракционная картина наблюдается на конечном расстоянии от препятствия, вызвавшего дифракцию.

#### *Дифракция от круглого отверстия*

Поставим на пути сферической световой волны непрозрачный экран с круглым отверстием радиуса  $r_0$ . Экран расположен так, что перпендикуляр, опущенный из  $S$  на непрозрачный экран, попадает точно в центр отверстия (рис. 9.3).

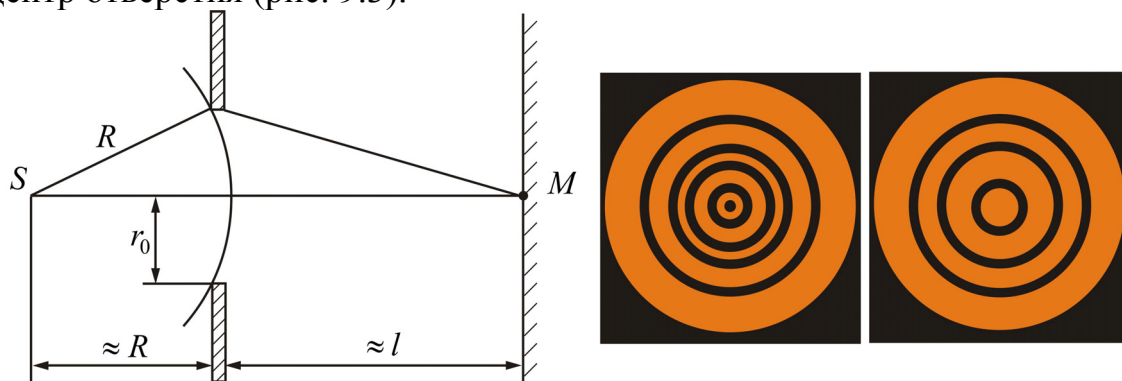


Рис. 9.3

На продолжении этого перпендикуляра возьмем точку  $M$  и рассмотрим, что мы будем наблюдать на экране.

Разобьем открытую часть волновой поверхности на зоны Френеля. *Вид дифракционной картины зависит от числа зон Френеля, открываемых отверстием.* Амплитуда результирующего колебания, возбуждаемого в точке  $M$  всеми зонами (9.2.1) и (9.2.2),

$$A = \begin{cases} 1/2(A_1 + A_m) & (m - \text{нечетное}), \\ 1/2(A_1 - A_m) & (m - \text{четное}). \end{cases} \quad (9.3.1)$$

Таким образом, когда отверстие открывает *нечетное число* зон Френеля, то амплитуда (интенсивность) в точке  $M$  будет больше, чем при свободном распространении волны; если *четное*, то амплитуда (интенсивность) будет равна нулю, как показано на рис. 9.3.

Естественно, что если  $r_0 \gg \lambda$ , то никакой дифракционной картины не будет.

### Дифракция от диска

Сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника  $S$ , встречает на своем пути диск (рис. 9.4).

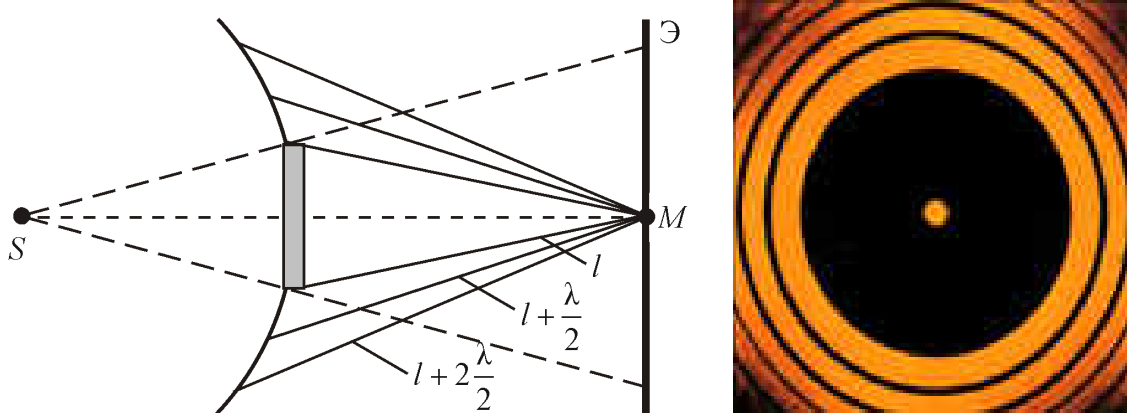


Рис. 9.4

Точка  $M$  лежит на перпендикуляре к центру диска. Первая зона Френеля строится от края диска и т. д.

Амплитуда световых колебаний в точке  $M$  равна половине амплитуды, обусловленной первой открытой зоной. Если размер диска невелик (охватывает небольшое число зон), то действие первой зоны немногим отличается от действия центральной зоны волнового фронта. Таким образом, освещенность в точке  $M$  будет такой же, как и в отсутствие экрана. Вследствие симметрии центральная светлая точка будет окружена кольцами света и тени (вне границ геометрической тени).

Парадоксальное, на первый взгляд, заключение, в силу которого в самом центре геометрической тени может находиться светлая точка, было выдвинуто Пуассоном в 1818 г. и впоследствии было названо его именем. «Пятно Пуассона» подтверждает правильность теории Френеля.

## 9.4. Дифракция в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера)

До сих пор мы рассматривали *дифракцию сферических волн*, изучая дифракционную картину в точке наблюдения, лежащей на конечном расстоянии от препятствия (*дифракция Френеля*).

Тип дифракции, при котором дифракционная картина образуется *параллельными пучками*, называется *дифракцией Фраунгофера*. Параллельные лучи проявятся, если источник и экран находятся в бесконечности. Практически используется две линзы: в фокусе одной – источник света, а в фокусе другой – экран.

Хотя принципиально дифракция Фраунгофера не отличается от дифракции Френеля, но практически именно этот случай важен, так как именно этот тип дифракции используется во многих дифракционных приборах (дифракционная решетка, например). Кроме того, здесь математический расчет проще и позволяет решать количественную задачу до конца (дифракцию Френеля мы рассматривали качественно).

### Дифракция света на одной щели

Пусть в непрерывном экране есть щель: ширина щели  $AB = b$ , длина щели (перпендикулярно плоскости листа)  $l \gg b$  (рис. 9.5). На щель падают параллельные лучи света. Для облегчения расчета считаем, что в плоскости щели  $AB$  амплитуды и фазы падающих волн одинаковы.

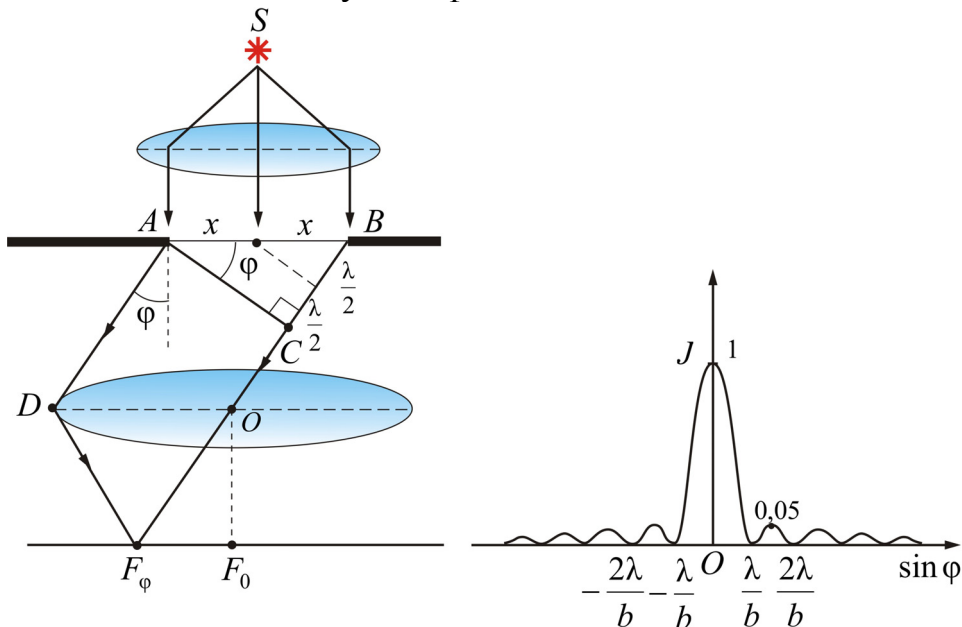


Рис. 9.5

Разобьем щель на зоны Френеля так, чтобы оптическая разность хода между лучами, идущими от соседних зон, была равна  $\lambda/2$ .

Если на ширине щели укладывается четное число таких зон, то в точке  $F_\varphi$  (**побочный фокус** линзы) будет наблюдаться минимум интенсивности, а если нечетное число зон, то максимум интенсивности:

$$b \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} - \text{условие минимума интенсивности}; \quad (9.4.1)$$

$$b \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} - \text{условие максимума интенсивности}. \quad (9.4.2)$$

Картина будет симметричной относительно **главного фокуса** точки  $F_0$ . Знак плюс и минус соответствует углам, отсчитанным в ту или иную сторону.

Интенсивность света  $J \sim A^2$ . Как видно из рис. 9.5, центральный максимум по интенсивности превосходит все остальные.

Рассмотрим влияние ширины щели.

Т.к. условие минимума имеет вид  $b \sin \varphi = \pm m\lambda$ , отсюда

$$\sin \varphi = \frac{m\lambda}{b}. \quad (9.4.3)$$

Из этой формулы видно, что с увеличением ширины щели  $b$  положения минимумов сдвигаются к центру, центральный максимум становится резче.

При уменьшении ширины щели  $b$  вся картина расширяется, расплывается, центральная полоска тоже расширяется, захватывая все большую часть экрана, а интенсивность ее уменьшается.

### **Дифракция света на дифракционной решетке**

Одномерная дифракционная решетка представляет собой систему из большого числа  $N$  одинаковых по ширине и параллельных друг другу щелей в экране, разделенных также одинаковыми по ширине непрозрачными промежутками (рис. 9.6).

Дифракционная картина на решетке определяется как результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей, т.е. в **дифракционной решетке** осуществляется **многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света, идущих от всех щелей**.

Обозначим:  $b$  – ширина щели решетки;  $a$  – расстояние между щелями;  $a + b = d$  – постоянная дифракционной решетки.

Линза собирает все лучи, падающие на нее под одним углом и не вносит никакой дополнительной разности хода.

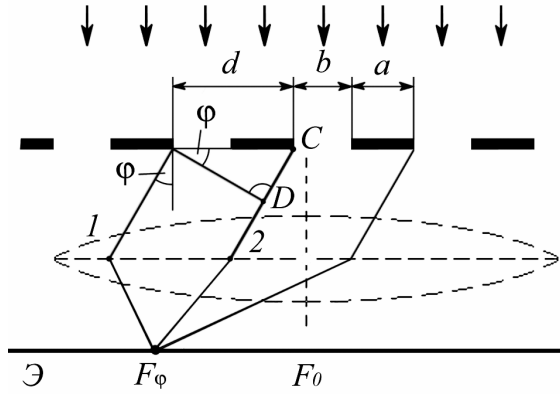


Рис. 9.6

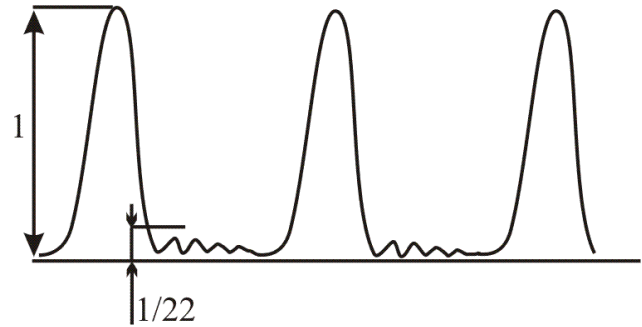


Рис. 9.7

Пусть луч 1 падает на линзу под углом  $\varphi$  (*угол дифракции*). Световая волна, идущая под этим углом от щели, создает в точке  $F_\varphi$  максимум интенсивности. Второй луч, идущий от соседней щели под этим же углом  $\varphi$ , придет в ту же точку  $F_\varphi$ . Оба эти луча придут в фазе и будут усиливать друг друга, если оптическая разность хода будет равна  $m\lambda$ :

$$\Delta = CD = d \sin \varphi.$$

*Условие максимума* для дифракционной решетки будет иметь вид:

$$d \sin \varphi = \pm m\lambda, \quad (9.4.4)$$

где  $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ .

Максимумы, соответствующие этому условию, называются *главными максимумами*. Значение величины  $m$ , соответствующее тому или иному максимуму называется *порядком дифракционного максимума*.

В точке  $F_0$  всегда будет наблюдаться *нулевой* или *центральный дифракционный максимум*.

Так как свет, падающий на экран, проходит только через щели в дифракционной решетке, то условие *минимума для щели* и будет *условием главного дифракционного минимума для решетки*:

$$b \sin \varphi = \pm m\lambda. \quad (9.4.5)$$

Конечно, при большом числе щелей, в точки экрана, соответствующие главным дифракционным минимумам, от некоторых щелей свет будет попадать и там будут образовываться *побочные дифракционные максимумы и минимумы* (рис. 9.7). Но их интенсивность, по сравнению с главными максимумами, мала ( $\approx 1/22$ ).

При условии  $\Delta = d \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$ ,

волны, посылаемые каждой щелью, будут гаситься в результате интерференции и появятся *дополнительные минимумы*.



Количество щелей определяет световой поток через решетку. Чем их больше, тем большая энергия переносится волной через нее. Кроме того, чем больше число щелей, тем больше дополнительных минимумов помещается между соседними максимумами. Следовательно, максимумы будут более узкими и более интенсивными (рис. 9.8).

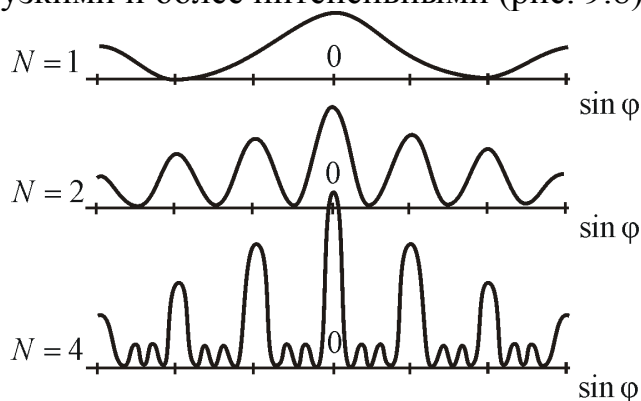


Рис. 9.8

Из (9.4.3) видно, что угол дифракции пропорционален длине волны  $\lambda$ . Значит, дифракционная решетка разлагает белый свет на составляющие, причем отклоняет свет с большей длиной волны (красный) на больший угол (в отличие от призмы, где все происходит наоборот).

Это свойство дифракционных решеток используется для определения спектрального состава света (дифракционные спектрографы, спектрометры, спектрометры).

## 9.5. Дифракция на пространственных решетках. Дифракция рентгеновских лучей

*Пространственной, или трехмерной, дифракционной решеткой* называется такая оптически неоднородная среда, в которой неоднородности периодически повторяются при изменении всех трех пространственных координат.

Условия прохождения света через обычную дифракционную решетку периодически изменяются только в одном направлении, перпендикулярном к оси щели. Поэтому такую решетку называют *одномерной*.

Простейшую двумерную решетку можно получить, сложив две одномерные решетки так, чтобы их щели были взаимно перпендикулярны. **Главные максимумы** двумерной решетки должны одновременно удовлетворять условию **максимума** для каждой из решеток:

$$d_1 \sin \varphi_1 = \pm m_1 \lambda \quad \text{и} \quad d_2 \sin \varphi_2 = \pm m_2 \lambda,$$

где  $\varphi$  – угол между направлением на главный максимум (направление луча) и нормалью к решетке;  $m$  – порядок дифракционного максимума.

Дифракционная картина представляет собой систему светлых пятен, расположенных в определенном порядке на плоскости экрана. Размеры этих пятен уменьшаются при увеличении числа щелей, а яркость возрастает. Такая же картина получается, если на одно стекло нанести ряд взаимно перпендикулярных полос.

Дифракция наблюдается также и на трехмерных структурах. Всякий монокристалл состоит из упорядоченно расположенных атомов (ионов), образующих пространственную трехмерную решетку (естественная пространственная решетка).

Период атомной решетки порядка  $10^{-10}$  м; длина волны света  $10^{-7}$  м. При таких условиях никаких дифракционных явлений на атомных дифракционных решетках с видимым светом не будет. Нужно излучение с меньшей длиной волны, например рентгеновское. Для рентгеновских лучей кристаллы твердых тел являются идеальными дифракционными решетками.

В 1913 г. русский физик Г.В. Вульф и английские ученые отец и сын Генри и Лоуренс Брэгги, независимо друг от друга, предложили простой метод расчета дифракции рентгеновских лучей в кристаллах. Они полагали, что дифракцию рентгеновских лучей можно рассматривать как результат отражения рентгеновских лучей *от плоскостей кристалла*. Это отражение, в отличие от обычного, происходит *лишь при таких условиях падения лучей на кристалл, которые соответствуют максимуму интерференции для лучей, отраженных от разных плоскостей*.

Направим пучок рентгеновских лучей 1 и 2 на две соседние плоскости кристалла  $AA'$  и  $BB'$  (рис. 9.9).

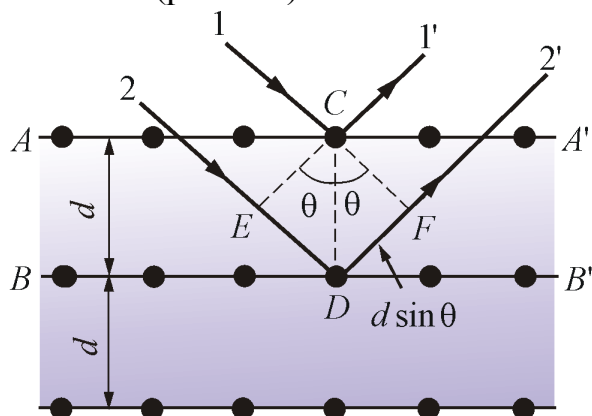


Рис. 9.9

Абсолютный показатель преломления всех веществ для рентгеновских лучей равен 1. Поэтому оптическая разность хода между лучами 1' и 2'

$$\Delta = ED + DF = 2d \sin \theta,$$

где  $\theta$  – угол между падающими и отраженными лучами и плоскостью кристалла (угол скольжения).

Интерференционные максимумы должны удовлетворять **условию Вульфа–Брэггов**:

$$2d \sin \theta = m\lambda, \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (9.5.1)$$

Из формулы (9.5.1) видно, что дифракция будет наблюдаться лишь при  $d > \lambda/2$ . Т. е. при условии  $\lambda \geq 2d$  будут отсутствовать дифракционные максимумы. Поэтому *условие  $\lambda \geq 2d$  называют условием оптической однородности кристалла*.

Из (9.5.1) следует, что наблюдение дифракционных максимумов возможно только при определенных соотношениях между  $\lambda$  и  $\theta$ . Этот результат лежит в основе *спектрального анализа* рентгеновского излучения, так как длину волны определяют по известным  $d$ ,  $m$  и измеренному на опыте углу.

Исследуя дифракцию рентгеновских лучей, можно решить и обратную задачу: если известна длина волны  $\lambda$  рентгеновских лучей, можно определить период кристаллической решетки  $d$  и ориентацию атомных плоскостей в пространстве. Эта идея была высказана немецким физиком М. Лауэ в 1912 г. и явилась существенным вкладом в развитие физики твердого тела.

Поликристаллические образцы представляют собой множество мелких кристалликов, ориентированных хаотически в пространстве. Направим на кристалл монохроматический пучок рентгеновских лучей с известной длиной волны  $\lambda$ , и всегда найдутся кристаллы, ориентированные под нужным углом, а рефлексы (светлые точки на фотопластинке) от разных кристаллов образуют концентрические окружности  $D_1, D_2, D_3$  (рис. 9.10).

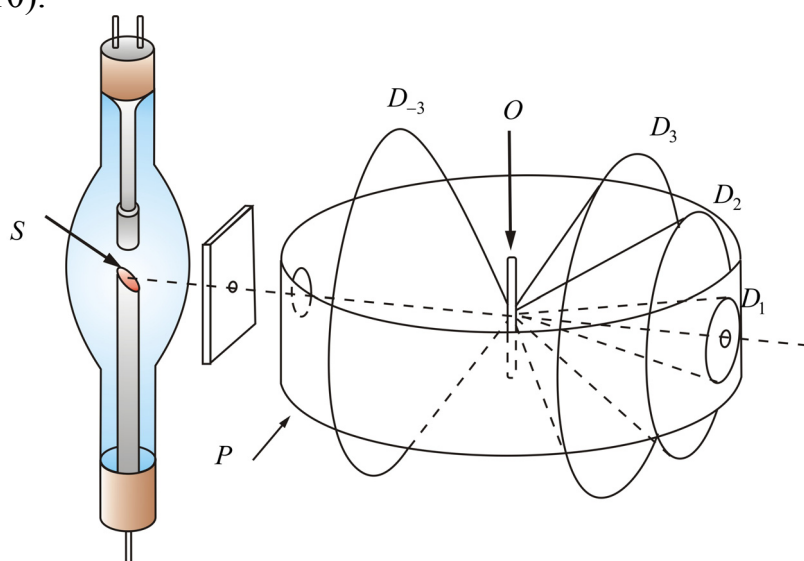


Рис. 9.10

При облучении монохроматическим рентгеновским излучением от источника  $S$  поликристаллического образца  $O$  с беспорядочной ориентацией кристаллических плоскостей для различных направлений возникают конусы направлений  $D_1, D_2, D_3, \dots$ , в которых выполнено условие Вульфа–Брэггов. Этот метод был предложен в 1926 г. П. Дебаем и П. Шеррером (*метод Дебая–Шеррера*).



Рис. 9.11

На рис. 9.11 показана *дебаяграмма* в методе *рентгеноструктурного анализа* Дебая–Шеррера.

## 9.6. Понятие о голографии

Голография (от греч. *holos grapho* – полная запись) – особый способ записи информации. В 1948 г. английский физик (венгр по национальности) Денис Габор высказал идею принципиально нового метода получения объемных изображений объектов. Он предложил регистрировать с помощью фотопластинки не только амплитуды и интенсивности, как с помощью обычной фотографии, но и фазы рассеянных объектом волн, воспользовавшись для этого явлением интерференции волн. Это позволяет избавиться от потери информации при фиксировании оптических изображений. Однако, практическое применение этот способ нашел только после изобретения лазеров – источников света высокой степени когерентности (временной и пространственной). В 1963 г. были получены первые лазерные голограммы.

Советский ученый Ю.Н. Денисюк в 1962 г. предложил оригинальный способ фиксирования голограмм на толстослойной эмульсии. Этот метод дает цветное изображение, и восстанавливается оно обычным белым светом.

Рассмотрим элементарный способ получения голограмм на толстослойной эмульсии (простейшая голографическая схема изображена на рис. 9.12 (**BS** – светоделитель, **M1–M3** – глухие зеркала, **L** – короткофокусная линза, **C** – коллиматор, **H** – голограмма)).

Испускаемый лазером луч, расширяется и делится на две части. Одна часть падает на фотопластинку, отразившись от зеркала (*опорный луч*), другая часть отражается от предмета (*предметный луч*). Оба пучка лучей должны быть когерентными. Опорный и предметный лучи скла-

дываются на фотопластинке, образуя интерференционную картину. Там, где максимумы интенсивности, эмульсия засвечивается сильнее, где минимумы – слабее.

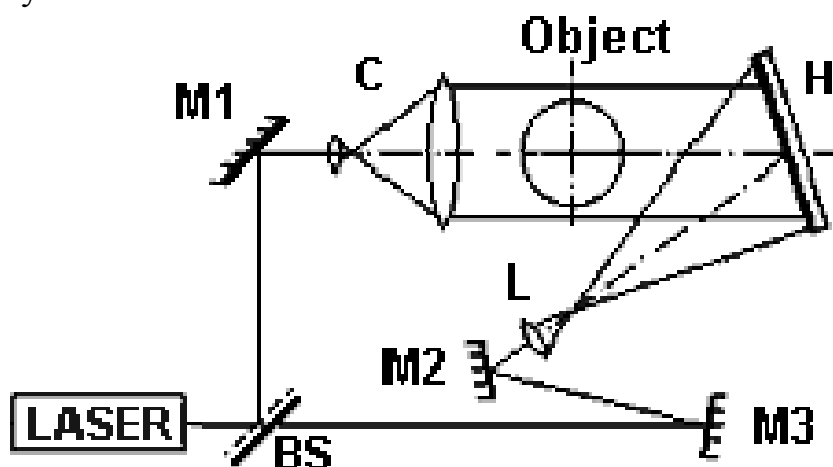


Рис. 9.12

Для восстановления изображения проявленную фотопластинку помещают в то самое место, в котором она находилась при фотографировании, и освещают опорным пучком света (часть лазерного пучка, которая освещала предмет, перекрывается). Опорный пучок *дифрагирует* на голограмме, в результате возникает волна точно такая же, как волна, отраженная предметом. Эта волна дает мнимое изображение предмета, которое воспринимается глазом наблюдателя.

Необходимо отметить, что обычная фотопластинка фиксирует только интенсивность, а голограмма – зависимость интенсивности от фазы.

Голограммы обладают следующими особенностями, отличающими их от фотографий.

- Голограмма дает объемное изображение.
- Голограмму можно разбить, и каждый осколок даст изображение. Объясняется это тем, что каждая точка пластинки при экспонировании подвергается действию волн, отраженных от всех точек предмета. При отделении части голограммы, уменьшается число «штрихов» своеобразной дифракционной решетки. Поэтому уменьшается разрешающая способность и интенсивность изображения при восстановлении, но картинка сохраняется.
- При воспроизведении изображения возможно его увеличение или уменьшение. Для увеличения необходимо при воспроизведении использовать излучение с большей частотой, чем при экспозиции. В этом случае масштаб увеличения можно определить по формуле.

• Цветные голограммы получают на толстослойных эмульсиях. При этом экспозиция проводится несколько раз с монохроматическим излучением. На голограмме фиксируется не плоская, а пространственная интерференционная картина и формируется пространственная решетка. Для воспроизведения голограмму освещают белым светом, и максимумы волн различной длины располагаются в различных точках пространства, формируя объемное цветное изображение, парящее в пространстве (рис. 9.13). На рис. 9.14 показан сильно увеличенный участок голографического негатива.



Рис. 9.13



Рис. 9.14

Хотя голографию изобрели в 1949 г., она получила широкое распространение лишь с начала шестидесятых годов, после изобретения лазера. В настоящее время голография представляет собой одно из главных направлений в оптических исследованиях. Ведутся исследования и разработки по применению голографии в медицине. Например, при получении оптических голограмм глаза, обеспечивающих единое трехмерное изображение хрусталика и сетчатки, или акустических голограмм тела, которые могут иметь важное преимущество по сравнению с двумерными рентгенограммами. К другим применениям голограммы относятся исследования и разработки по созданию кассетной видеозаписи, запоминающих электронно-вычислительных устройств, а также способов неразрушающих испытаний материалов.

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается принцип Гюйгенса?
2. Каковы дополнения Френеля к принципу Гюйгенса?
3. Чем отличается дифракция звука от дифракции света?

4. Какая теория объясняет принцип Гюйгенса-Френеля?
5. В чем заключается принцип построения зон Френеля?
6. В чем заключается принцип действия зонных пластинок?
7. В чем отличие дифракции Френеля на круглом отверстии при освещении его монохроматическим и белым светом?
8. Когда наблюдается дифракция Френеля? дифракция Фраунгофера?
9. Почему дифракция не наблюдается на больших отверстиях и больших дисках?
10. Чем определяется, будет ли число зон Френеля, открываемых отверстием, четным или нечетным? Ответ обосновать.
11. Каковы характерные особенности дифракционной картины, получающиеся при дифракции на малом непрозрачном диске?
12. Что называют "пятном Пуассона"?
13. Найдите направления на точки экрана в случае дифракции на щели, в которых интенсивность равна нулю; интенсивность максимальна.
14. Отличается ли дифракция на щели при освещении ее монохроматическим и белым светом?
15. Какова предельная ширина щели, при которой еще будут наблюдаться минимумы интенсивности?
16. Как влияет на дифракцию Фраунгофера от одной щели увеличение длины волны и ширины щели?
17. Почему дифракционная решетка разлагает белый свет в спектр?
18. Как определить наибольший порядок спектра дифракционной решетки?
19. Как изменится дифракционная картина при удалении экрана от решетки?
20. Почему при использовании белого света только центральный максимум белый, а боковые максимумы радужно окрашены?
21. Почему штрихи на дифракционной решетке должны быть тесно расположены друг к другу? Почему их должно быть большое число?
22. Запишите условия дифракционных минимумов для одной щели и главных максимумов для решетки. Каков характер этих дифракционных картин?

## Тема 10. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕТА С ВЕЩЕСТВОМ

### 10.1. Дисперсия света

### 10.2. Нормальная и аномальная дисперсия

### 10.3. Классическая теория дисперсии

### 10.4. Поглощение (абсорбция) света

### 10.5. Излучение Вавилова–Черенкова

#### 10.1. Дисперсия света

Одним из результатов взаимодействия света с веществом является его дисперсия.

*Дисперсией света* называется зависимость показателя преломления  $n$  вещества от частоты  $\nu$  (длины волн  $\lambda$ ) света или зависимость фазовой скорости световых волн  $v$  от их частоты.

Дисперсия света представляется в виде зависимости:

$$n = f(\nu) \text{ или } n = f(\lambda).$$

Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму (рис. 10.1). Первые экспериментальные наблюдения дисперсии света проводил в 1672 г. И. Ньютон. Он объяснил это явление различием масс корпускул.

Рассмотрим дисперсию света в призме. Пусть монохроматический пучок света падает на призму с *преломляющим углом*  $A$  и показателем преломления  $n$  (рис. 10.2) под углом  $\alpha_1$ .

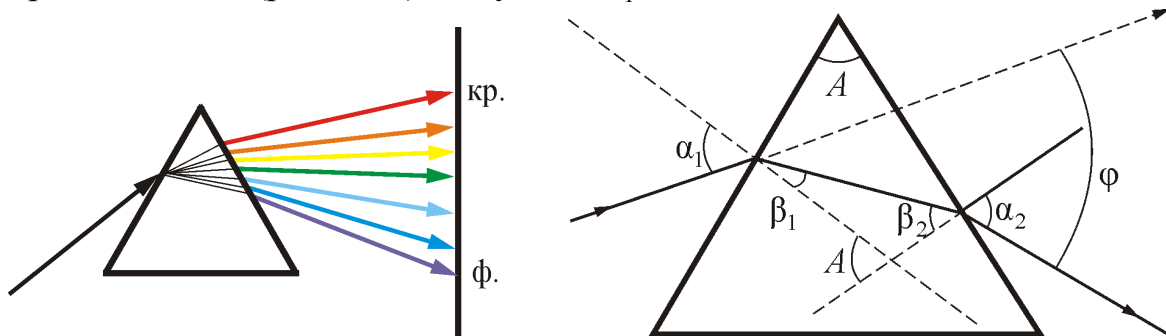


Рис. 10.1

Рис. 10.2

После двукратного преломления (на левой и правой гранях призмы) луч оказывается преломлен от первоначального направления на угол  $\varphi$ . Из рис. следует, что

$$\varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - A.$$

Предположим, что углы  $A$  и  $\alpha_1$  малы, тогда углы  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  будут также малы и вместо синусов этих углов можно воспользоваться их



значениями. Поэтому  $\alpha_1/\beta_1 = n$ ,  $\beta_2/\alpha_2 = 1/n$ , а т.к.  $\beta_1 + \beta_2 = A$ , то  $\alpha_2 = \beta_2 n = n(A - \beta_1) = n(A - \alpha_1/n) = nA - \alpha_1$  или  $\alpha_1 + \alpha_2 = nA$ .

Отсюда следует, что

$$\varphi = A(n-1), \quad (10.1.1)$$

т.е. *угол отклонения лучей призмой тем больше, чем больше преломляющий угол призмы.*

Из выражения (10.1.1) вытекает, что угол отклонения лучей призмой зависит от показателя преломления  $n$ , а  $n$  – функция длины волны, поэтому *лучи разных длин волн после прохождения призмы отклоняются на разные углы.* Пучок белого света за призмой разлагается в спектр, который называется **дисперсионным** или **призматическим**, что и наблюдал Ньютон. Таким образом, с помощью призмы, так же как с помощью дифракционной решетки, разлагая свет в спектр, можно определить его спектральный состав.

Рассмотрим различия в дифракционном и призматическом спектрах.

- *Дифракционная решетка разлагает свет непосредственно по длинам волн*, поэтому по измеренным углам (по направлениям соответствующих максимумов) можно вычислить длину волны (частоты). Разложение света в спектр в призме происходит по значениям показателя преломления, поэтому для определения частоты или длины волны света надо знать зависимость  $n = f(\nu)$  или  $n = f(\lambda)$ .

- *Составные цвета в дифракционном и призматическом спектрах располагаются различно.* Мы знаем, что синус угла в дифракционной решетке пропорционален длине волны  $\left(d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}\right)$ . Следовательно, *красные лучи, имеющие большую длину волны, чем фиолетовые, отклоняются дифракционной решеткой сильнее.* Призма же разлагает лучи света в спектре по значениям показателя преломления, который для всех прозрачных веществ с увеличением длины волны (т.е. с уменьшением частоты) уменьшается (рис. 10.3).

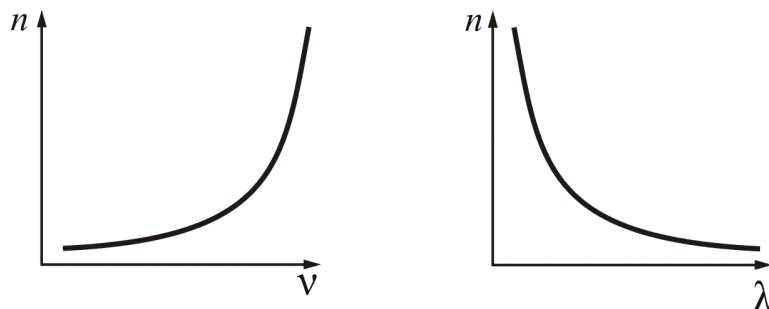


Рис. 10.3

Поэтому, красные лучи отклоняются призмой слабее, в отличие от дифракционной решетки.

Величина  $D = \frac{dn}{dv}$  (или  $D = \frac{dn}{d\lambda}$ ), называемая **дисперсией вещества**, показывает, как быстро меняется показатель преломления с длиной волны.

Из рис. 10.3 следует, что показатель преломления для прозрачных веществ с увеличением длины волны увеличивается, следовательно величина  $dn/d\lambda$  по модулю также увеличивается с уменьшением  $\lambda$ . Такая дисперсия называется **нормальной**. Вблизи линий и полос поглощения, ход кривой дисперсии  $n(\lambda)$  будет иным, а именно  $n$  уменьшается с уменьшением  $\lambda$ . Такой ход зависимости  $n$  от  $\lambda$  называется **аномальной дисперсией**. Рассмотрим подробнее эти виды дисперсии.

## 10.2. Нормальная и аномальная дисперсия

Итак, **дисперсия света** – это зависимость показателя преломления вещества от частоты световой волны  $n = f(\nu)$ . Эта зависимость не линейная и не монотонная. Области значения  $\nu$ , в которых

$$\frac{dn}{d\nu} > 0 \quad (\text{или} \quad \frac{dn}{d\lambda} < 0) \quad (10.2.1)$$

соответствуют **нормальной дисперсии света** (с ростом частоты  $\nu$  показатель преломления  $n$  увеличивается). Нормальная дисперсия наблюдается у веществ, прозрачных для света. Например, обычное стекло прозрачно для *видимого* света, и в этой области частот наблюдается **нормальная дисперсия света в стекле**. На основе явления нормальной дисперсии основано «разложение» света стеклянной призмой монохроматоров.

Дисперсия называется **аномальной**, если

$$\frac{dn}{d\nu} < 0 \quad (\text{или} \quad \frac{dn}{d\lambda} > 0), \quad (10.2.2)$$

т.е. с ростом частоты  $\nu$  показатель преломления  $n$  уменьшается. Аномальная дисперсия наблюдается в областях частот, соответствующих полосам интенсивного поглощения света в данной среде. Например, у обычного стекла в инфракрасной и ультрафиолетовой частях спектра наблюдается аномальная дисперсия.

Зависимости  $n$  от  $\nu$  и  $\lambda$  показаны на рис. 10.4 и 10.5.

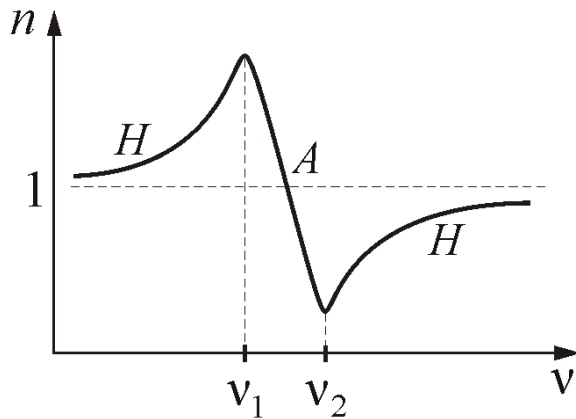


Рис. 10.4.

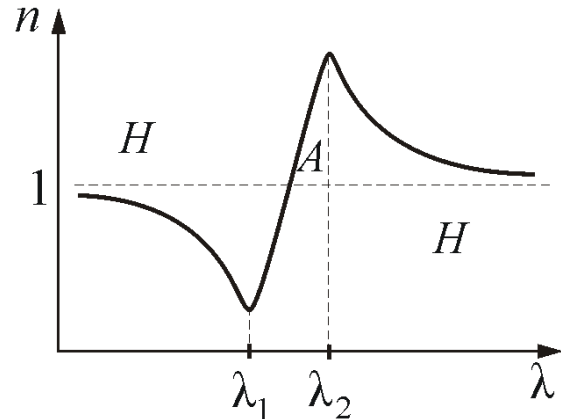


Рис. 10.5

В зависимости от характера дисперсии *групповая скорость*  $u$  в веществе может быть как больше, так и меньше *фазовой скорости*  $v$  (в недиспергирующей среде  $u = v$ ).

Групповая скорость  $u$  связана с циклической частотой  $\omega$  и волновым числом  $k$  соотношением:  $u = \frac{d\omega}{dk}$ , где  $\omega = 2\pi\nu$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\nu n}{c}$ .

Тогда

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\pi d\nu}{\frac{2\pi}{c} (n d\nu + \nu \frac{dn}{d\nu} d\nu)} = \frac{c}{n + \nu \frac{dn}{d\nu}}. \quad \text{Отсюда можно записать:}$$

$$u = \frac{v}{1 + \frac{\nu}{n} \frac{dn}{d\nu}}. \quad (10.2.3)$$

Таким образом, при *нормальной дисперсии*  $u < v$  и  $\frac{dn}{d\nu} > 0$ .

При *аномальной дисперсии*  $u > v$ , и, в частности, если  $n + \nu \frac{dn}{d\nu} < 1$ ,

то  $u > c$ . Этот результат не противоречит специальной теории относительности. Понятие групповой скорости правильно описывает распространение только такого сигнала (волнового пакета), форма которого не изменяется при перемещении сигнала в среде. (Строго говоря, это условие выполняется только для вакуума, т.е. в недиспергирующей среде). В области частот, соответствующих аномальной дисперсии, групповая скорость не совпадает со скоростью сигнала, так как вследствие значительной дисперсии форма сигнала так быстро изменяется, что не имеет смысла говорить о групповой скорости.

### 10.3. Классическая теория дисперсии

Классическую теорию, рассматривающую процессы, протекающие при условии  $E_m \ll E_A$ , называют *линейной оптикой*. (Здесь  $E_m$  – амплитудное значение напряженности электрического поля волны;  $E_A$  – амплитуда такой волны, энергия которой равна энергии связи частицы в структуре). Законы линейной оптики справедливы при  $E_m = 10 - 10^3$  В/м. Если амплитудное значение  $10^9 - 10^{11}$  В/м, то  $E_m \geq E_A$  и соответствующий раздел теории относят к нелинейной оптике.

*Дисперсия света является результатом взаимодействия электромагнитной волны с заряженными частицами, входящими в состав вещества.* Теория Максвелла не могла объяснить это явление, так как тогда не было известно о сложном строении атома. Классическая теория была разработана Х.А. Лоренцем лишь после создания им же электронной теории строения вещества. Он показал, что  $n = \sqrt{\epsilon}$ , а  $\epsilon$  – тоже зависит от частоты.

Для видимого света  $\nu \approx 10^{15}$  Гц существует только поляризация электрически упругого смещения. Смещаются в основном валентные электроны. В процессе *вынужденных* (под действием падающей световой волны) колебаний электронов с частотой  $\nu$  (частота вынуждающей силы) *периодически изменяются* дипольные электрические моменты атомов, частота которых тоже равна  $\nu$ . Среднее расстояние между атомами вещества много меньше протяженности одного цуга волн. Следовательно, вторичные волны, излучаемые большим числом соседних атомов, когерентны как между собой, так и с первичной волной. При сложении этих волн они интерферируют, в результате этой интерференции и получаются все наблюдаемые оптические явления, связанные со взаимодействием света с веществом. Фаза вторичной волны другая (сказывается запаздывание смещения электрона – смещение происходит только при достижении определенной величины электрического поля), но разность фаз первичной и вторичной волн постоянна. Скорость распространения фронта волны (фазовая скорость) зависит от результата сложения, т.е. от фазы результирующей волны.

В однородном изотропном веществе в результате интерференции образуется проходящая волна, направление распространения которой совпадает с направлением первичной волны.

В *оптически неоднородной среде* (с разным  $n$ ), сложение первой и второй волн приводит к рассеянию света.

При падении света на *границу раздела* двух сред, в результате интерференции возникает не только проходящая (преломленная), но и отраженная волна. Отражение происходит не от геометрической поверхности раздела, а от более или менее значительного слоя частиц среды, прилегающих к границе раздела.

Мы рассмотрим только элементарную теорию дисперсии в однородном изотропном диэлектрике. Найдем интересующую нас зависимость  $n = n(\omega)$ , где  $\omega$  – циклическая частота колебаний.

Мы знаем, что диэлектрическая проницаемость вещества

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}, \quad (10.3.1)$$

где  $E$  – мгновенное значение напряженности электрического поля световой волны;  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость среды;  $P$  – вектор поляризации (в данном случае – его проекция на направление внешнего поля  $E$ ), мы называли его электрическим моментом единицы объема.

Примем, что поляризация обусловлена смещением только валентных (оптических) электронов. Для атомов с одним оптическим электроном  $p = -er$ , тогда  $P = pn_0 = -n_0 er$ , где  $p$  – дипольный электрический момент атома;  $n_0$  – концентрация атомов;  $e$  – заряд электрона;  $r$  – смещение электрона. Тогда из (10.3.1), имея в виду, что  $n = \sqrt{\varepsilon}$ , получим

$$n^2 = 1 - \frac{n_0 e r}{\varepsilon_0 E}. \quad (10.3.2)$$

Оптический электрон совершает вынужденные колебания под действием следующих сил:

- возвращающей квазиупругой силы  $F_B = -m\omega_0^2 r$ , где  $m$ , и  $\omega_0$  – масса и частота свободных незатухающих колебаний электрона;
- силы сопротивления (со стороны других атомов)

$$F_{\text{сопр}} = -2\beta m \frac{dr}{dt}, \quad \text{где } \beta \text{ – коэффициент затухания;}$$

- вынуждающей силы  $F = -eE$ .

Уравнение вынужденных колебаний примет вид:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\beta \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = -\frac{eE}{m}. \quad (10.3.3)$$

В случае линейно-поляризованного монохроматического света, с циклической частотой  $\omega$ ,  $E = E_0 \cos \omega t$ . Тогда уравнение (10.3.3) примет вид:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\beta \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = -\frac{eE_0 \cos \omega t}{m}.$$

Его решение:  $r = -\frac{eE_0 \cos(\omega t + \varphi_0)}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$

Если среда не поглощает свет ( $\beta = 0$ ), то  $r = -\frac{eE}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$

Подставим в (10.3.2) и получим

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{или} \quad n = \sqrt{1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}}. \quad (10.3.4)$$

Для того чтобы понять, как зависит показатель преломления от частоты, проанализируем последний член в уравнении (10.3.4). При значениях частоты распространяющейся волны от  $\omega = 0$  до  $\omega = \omega_0$ , этот член будет увеличиваться с увеличением частоты волны  $\omega$ . При значениях  $\omega$ , близких к  $\omega_0$ , он стремится к бесконечности (условие резонанса). При малых значениях  $\omega$  последний член в уравнении (10.3.4) стремится к нулю, а показатель преломления близок к единице. Качественная зависимость  $n(\omega)$  показана на рис. 10.6.

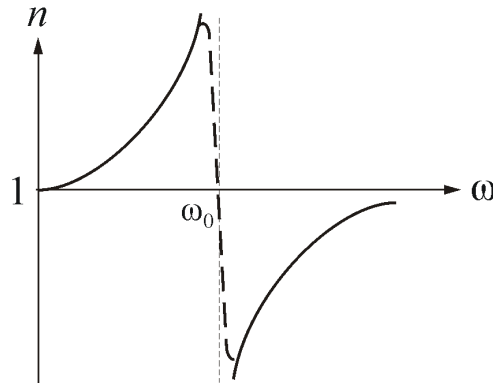


Рис. 10.6

В области значений  $\omega > \omega_0$  последний член в уравнении (10.3.4) отрицателен, но по модулю он увеличивается с ростом  $\omega$ . При этом значении показатель преломления изменяется от  $-\infty$  (при  $\omega = \omega_0$ ) до 1 (при  $\omega = \infty$ ).

## 9.4. Поглощение (абсорбция) света

*Поглощением (абсорбцией) света называется явление потери энергии световой волной, проходящей через вещество.*

Свет поглощается в тех случаях, когда проходящая волна затрачивает энергию на различные процессы. Среди них: преобразование энер-

гии волны во внутреннюю энергию – при нагревании вещества; затраты энергии на вторичное излучение в другом диапазоне частот (фотолюминесценция); затраты энергии на ионизацию – при фотохимических реакциях и т.п. При поглощении света колебания затухают и амплитуда электрической составляющей уменьшается по мере распространения волны. Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , имеем

$$E(x) = E_0 e^{-\beta t} = E_0 e^{-\alpha x}.$$

Здесь  $E(x)$  – амплитудное значение напряженности электрического поля волны в точках с координатой  $x$ ;  $E_0$  – амплитуда в точке с координатой  $x = 0$ ;  $t$  – время, за которое волна распространилась на расстояние, равное  $x$ ;  $\beta$  – коэффициент затухания колебаний;  $\alpha = \beta / v_{\text{ф}}$  коэффициент поглощения, зависящий от химической природы среды и от длины волны проходящего света.

Интенсивность волны будет изменяться *по закону Бугера* (П. Бугер (1698 – 1758) – французский ученый):

$$J(x) = J_0 e^{-\alpha x},$$

где  $J_0$  – интенсивность волны на входе в среду.

При  $\alpha = 1/x$ ,  $J = J_0 / e$ . Следовательно, *коэффициент поглощения – физическая величина, численно равная обратному значению толщины слоя вещества, в котором интенсивность волны убывает в  $e = 2,72$  раз.*

Зависимость коэффициента поглощения от длины волны определяет спектр поглощения материала. В веществе (например в газе) может присутствовать несколько сортов частиц, участвующих в колебаниях под действием распространяющейся электромагнитной волны. Если эти частицы слабо взаимодействуют, то коэффициент поглощения мал для широкого спектра частот, и лишь в узких областях он резко возрастает (рис. 10.7, а).

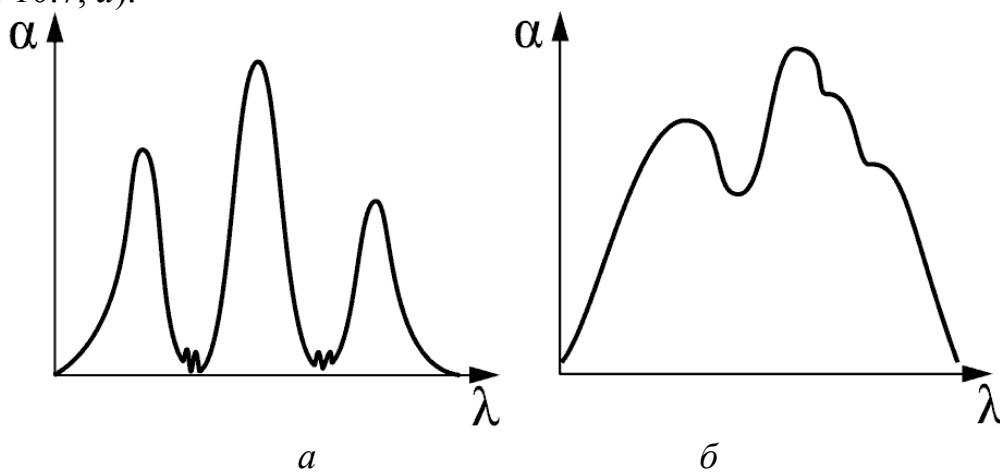


Рис. 10.7

Эти области соответствуют частотам собственных колебаний оптических электронов в атомах разных видов. Спектр поглощения таких веществ линейчатый и представляет собою темные полосы на радужной окраске спектра, если это видимая область. При увеличении давления газа полосы поглощения уширяются. В жидком состоянии они сливаются, и спектр поглощения принимает вид, показанный на рис. 10.7, б. Причиной уширения является усиление связи атомов (молекул) в среде.

Коэффициент поглощения, зависящий от длины волны  $\lambda$  (или частоты  $\omega$ ), для различных веществ различен. Например, одноатомные газы и пары металлов (т.е. вещества, в которых атомы расположены на значительных расстояниях друг от друга и их можно считать изолированными) обладают близким к нулю коэффициентом поглощения, и лишь для очень узких спектральных областей (примерно  $10^{-12} - 10^{-11}$  м) наблюдаются резкие максимумы (так называемый линейчатый спектр поглощения). Эти линии соответствуют частотам собственных колебаний электронов в атомах. Спектр поглощения молекул, определяемый колебаниями атомов в молекулах, характеризуется полосами поглощения (примерно  $10^{-10} - 10^{-7}$  м).

Коэффициент поглощения для диэлектриков невелик (примерно  $10^{-3} - 10^{-5}$  см<sup>-1</sup>), однако у них наблюдается селективное поглощение света в определенных интервалах длин волн, когда  $\alpha$  резко возрастает и наблюдаются сравнительно широкие полосы поглощения (примерно  $10^{-7} - 10^{-6}$  м), т.е. диэлектрики имеют сплошной спектр поглощения. Это связано с тем, что в диэлектриках нет свободных электронов и поглощение света обусловлено явлением резонанса при вынужденных колебаниях электронов в атомах и атомов в молекулах диэлектрика.

Коэффициент поглощения для металлов имеет большие значения (примерно  $10^3 - 10^4$  см<sup>-1</sup>), и поэтому металлы практически непрозрачны для света. В металлах из-за наличия свободных электронов, движущихся под действием электрического поля световой волны, возникают быстропеременные токи, сопровождающиеся выделением джоулевой теплоты. Поэтому энергия световой волны быстро уменьшается, превращаясь во внутреннюю энергию металла. Чем выше проводимость металла, тем сильнее в нем поглощение света.

На рис. 10.8 представлена типичная зависимость коэффициента поглощения  $\alpha$  от частоты света  $\nu$  и зависимость показателя преломления  $n$  от  $\nu$  в области полосы поглощения. Из рисунка следует, что внутри полосы поглощения наблюдается аномальная дисперсия ( $n$  убывает с увеличением  $\nu$ ). Однако поглощение вещества должно быть значительным, чтобы повлиять на ход показателя преломления.



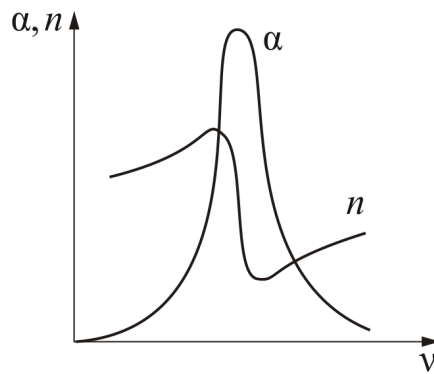
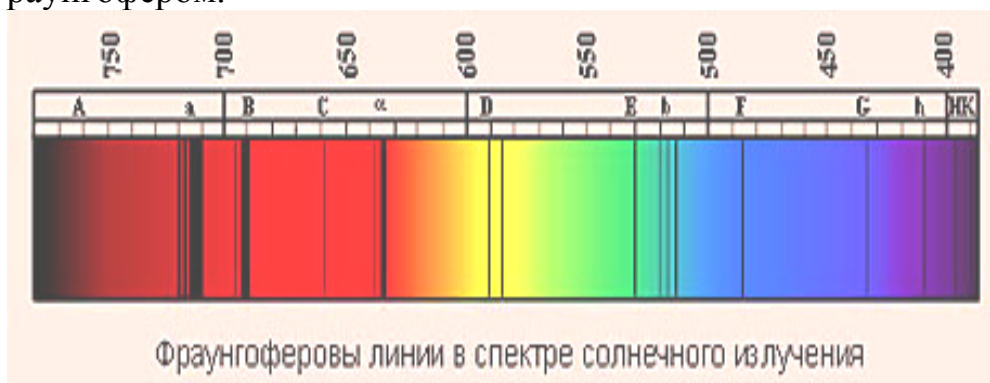


Рис. 10.8

Зависимость коэффициента поглощения от частоты (длины волны) объясняется окрашенностью поглощающих тел. Например, стекло, слабо поглощающее красные и оранжевые лучи и сильно поглощающее зеленые и синие, при освещении белым светом будет казаться красным. Если на такое стекло направить зеленый и синий свет, то из-за сильного поглощения света этих длин волн стекло будет казаться черным. Это явление используется для изготовления светофильтров, которые в зависимости от химического состава (стекла с присадками различных солей; пленки из пластмасс, содержащие красители; растворы красителей и т. д.) пропускают свет только определенных длин волн, поглощая остальные. Разнообразие пределов селективного (избирательного) поглощения у различных веществ объясняет разнообразие и богатство цветов и красок, наблюдающееся в окружающем мире.

Спектральный анализ позволяет получить информацию о составе Солнца, поскольку определенный набор спектральных линий исключительно точно характеризует химический элемент. Так, с помощью наблюдений спектра Солнца был открыт гелий.

Видимая часть солнечного излучения при изучении с помощью спектроанализирующих приборов оказывается неоднородной – в спектре наблюдаются **линии поглощения**, впервые описанные в 1814 году И. Фраунгофером.



Фраунгоферовы линии в спектре солнечного излучения

Рис. 10.9

С помощью спектрального анализа узнали, что звезды состоят из тех же самых элементов, которые имеются и на Земле.

Явление поглощения широко используется в абсорбционном спектральном анализе смеси газов, основанном на измерениях спектров частот и интенсивностей линий (полос) поглощения. Структура спектров поглощения определяется составом и строением молекул, поэтому изучение спектров поглощения является одним из основных методов количественного и качественного исследования веществ.

## 10.5. Излучение Вавилова–Черенкова

В 1934 году П.А.Черенков, работавший тогда под руководством С.Н. Вавилова, изучая действие электромагнитного излучения на вещество, обнаружил особый вид свечения жидкости под действием  $\gamma$ -лучей радия. Характерные особенности этого излучения: во-первых, свечение имело голубоватый цвет и наблюдалось у всех чистых прозрачных жидкостей, причем яркость и цвет свечения мало зависели от химического состава жидкости; во-вторых, в отличие от люминесценции, не наблюдалось ни температурного, ни примесного свечения. Вавилов предположил, что обнаруженное явление не является люминесценцией, свет излучают быстрые электроны, движущиеся в жидкости. В 1937 году И.Е. Тамм и И.М. Франк объяснили механизм свечения и создали количественную теорию, основанную на уравнениях классической электродинамики. В 1940 году В.Л. Гинзбург создал квантовую теорию, которая привела к тем же результатам.

***Излучение Вавилова–Черенкова – это излучение электрически заряженной частицы, движущейся в среде с групповой скоростью и превышающей фазовую скорость света в этой среде:***

$$\frac{c}{n} < u < c .$$

Согласно электромагнитной теории, заряд, движущийся равномерно не излучает электромагнитной волны. Однако Тамм и Франк показали, что это справедливо лишь для скоростей частиц, не превышающих фазовую скорость волны в данной среде. В процессе излучения Вавилова–Черенкова энергия и скорость излучающей свободной частицы уменьшается, то есть частица тормозится.

Заряженная частица вызывает кратковременную поляризацию вещества в окрестности тех точек, через которые она проходит при своем движении. Поэтому молекулы среды, лежащие на пути частицы, становятся кратковременно действующими когерентными источниками эле-

ментарных электромагнитных волн, которые интерферируют друг с другом.

При движении заряженной частицы в изотропной среде со скоростью  $u < v = \frac{c}{n}$  элементарные волны будут представлять собой сферы

(рис. 10.10), распространяющиеся со скоростью  $v = \frac{c}{n}$ .

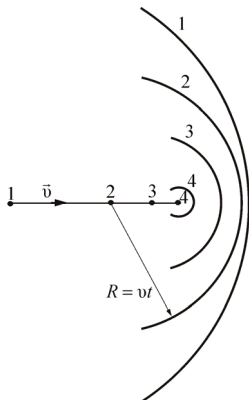


Рис. 10.10

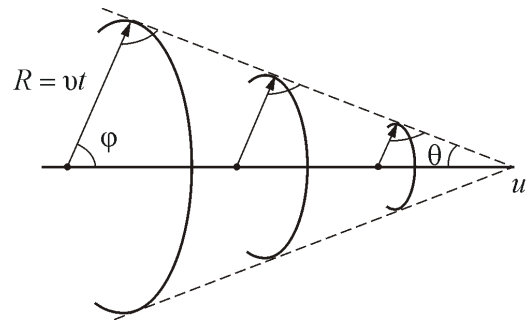


Рис. 10.11

Согласно принципу Гюйгенса–Френеля, в результате интерференции элементарные волны гасят друг друга всюду, за исключением их общей огибающей. А при движении частицы со скоростью  $u < v$  общей огибающей волн нет: все окружности лежат одна в другой. Поэтому заряд, движущийся равномерно прямолинейно со скоростью  $u < v$ , свет не излучает.

Если частица движется быстрее, чем распространяются волны в среде, то соответствующие элементарным волнам сферы пересекаются и их общая огибающая (волновая поверхность) представляет собой конус с вершиной в точке, совпадающей с мгновенным положением движущейся частицы (рис.10.11). Нормали к образующим конуса определяют волновые векторы, т.е. направления распространения света. Угол  $\varphi$ , который составляет волновой вектор с направлением движения частицы,

удовлетворяет соотношению:  $\cos \varphi = \frac{v}{u} = \frac{c}{nu}$ .

В этих направлениях вторичные волны будут усиливаться и формировать излучение Вавилова–Черенкова. Свет, возникающий на каждом малом участке траектории частицы, распространяется вдоль образующей конуса, ось которого совпадает с направлением движения освобожденного электрона  $v_e$ , а угол при вершине равен  $2\varphi$  (рис. 10.12).

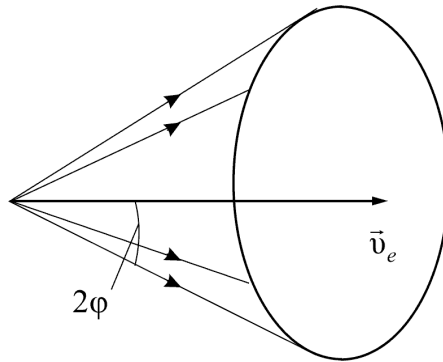


Рис. 10.12

В жидкостях и твердых телах условие  $u > v$  начинает выполняться для электронов при  $W > 10^5$  эВ, а для протонов при  $W > 10^8$  эВ.

Описанный эффект используют в счетчиках Черенкова, предназначенных для регистрации заряженных микрочастиц (электронов, протонов, мезонов и т.п.). В них световая вспышка, возникающая при движении частицы, преобразуется в электрический сигнал с помощью фотумножителя, который и регистрируется. В некоторых черенковских счетчиках можно определить угол  $\varphi$ , по условию  $\cos \varphi = c/(nv_e)$ , оценить скорость частицы и, зная массу, определить ее энергию.

### Контрольные вопросы

1. Что такое дисперсия света?
2. Как связаны между собой преломляющий угол призмы и угол отклонения лучей ею?
3. Что показывает дисперсия вещества?
4. Чем отличается нормальная дисперсия от аномальной?
5. По каким признакам можно отличить спектры, полученные с помощью призмы и дифракционной решетки?
6. В чем заключаются основные положения и выводы электронной теории дисперсии света?
7. Почему металлы сильно поглощают свет?
8. В чем основное отличие эффекта Доплера для световых волн от эффекта Доплера в акустике?
9. Почему поперечный эффект Доплера является релятивистским эффектом? Чем он обусловлен?
10. Когда возникает излучение Черенкова – Вавилова?

## Тема 11. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

### 11.1. Естественный и поляризованный свет

### 11.2. Поляризация при отражении и преломлении

### 11.3. Двойное преломление света

### 11.4. Закон Малюса

### 11.5. Интерференция поляризованного света

### 11.6. Искусственная анизотропия

#### 11.1. Естественный и поляризованный свет

При изучении явлений интерференции и дифракции вопрос о том, являются световые волны *продольными* или *поперечными*, имел второстепенное значение. Там мы изучали способы оценки модуля вектора напряженности электрической составляющей электромагнитной волны. Здесь мы обсудим его направление.

Основное свойство электромагнитных волн – **поперечность** колебаний векторов напряжённости электрического и магнитного полей по отношению к направлению распространения волны (рис. 11.1).

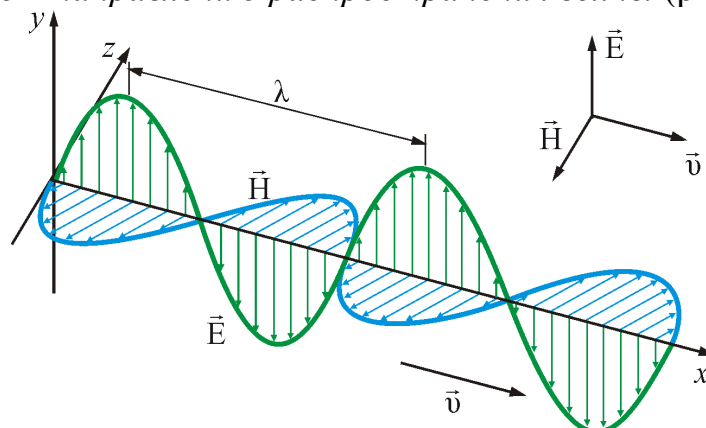


Рис. 11.1

В каждом отдельном случае (для каждого цуга волн) имеется та или иная ориентация векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в пространстве по отношению к распространению (направления луча). Такая *асимметрия* характерна только для **поперечных волн**. *Продольная волна всегда симметрична относительно направления распространения*.

Как правило, излучение естественных источников представляет собой пример электромагнитных волн со всевозможными равновероятными ориентациями вектора  $\vec{E}$ , т.е. с неопределённым состоянием поляризации. Такой свет называют **неполяризованным** или **естественным** (рис. 11.2, а).

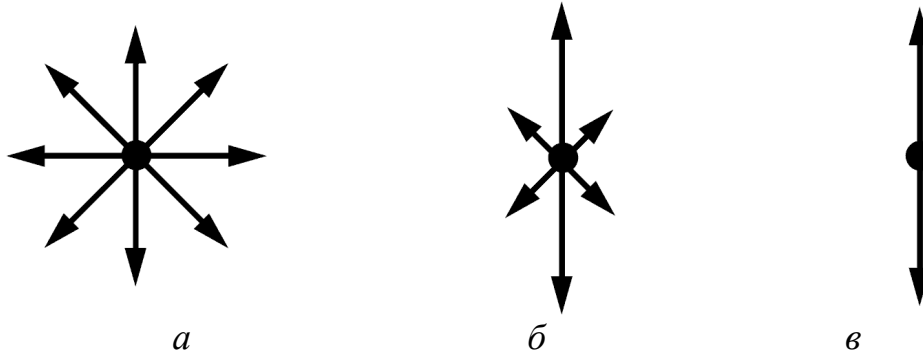


Рис. 11.2

Свет с преимущественным (но не исключительным) направлением колебаний вектора  $\vec{E}$  называют **частично поляризованным светом** (рис. 11.2, б).

В природе существует обширный класс электромагнитных волн, в которых колебания электрического и магнитного полей совершаются в строго определённых направлениях. Такое свойство определяет состояние **поляризации** электромагнитной волны. Если вектор напряжённости электрического поля электромагнитной волны колеблется вдоль некоторого направления в пространстве, говорят о **линейной поляризации** рассматриваемой электромагнитной волны (рис. 11.2, в). Электромагнитная волна в этом случае называется **полностью поляризованной**.

Из уравнений Максвелла следует существование полностью поляризованных электромагнитных волн, у которых по мере распространения волны векторы напряжённости электрического и магнитного полей изменяются таким образом, что траектория их движения в плоскости, поперечной направлению распространения волны, представляет собой эллипс или окружность. В этом случае говорят, соответственно, об **эллиптической**, или **круговой**, поляризации электромагнитной волны (рис. 11.3, а, б). В п. 2.4 мы подробно рассмотрели различные виды поляризации колебаний.

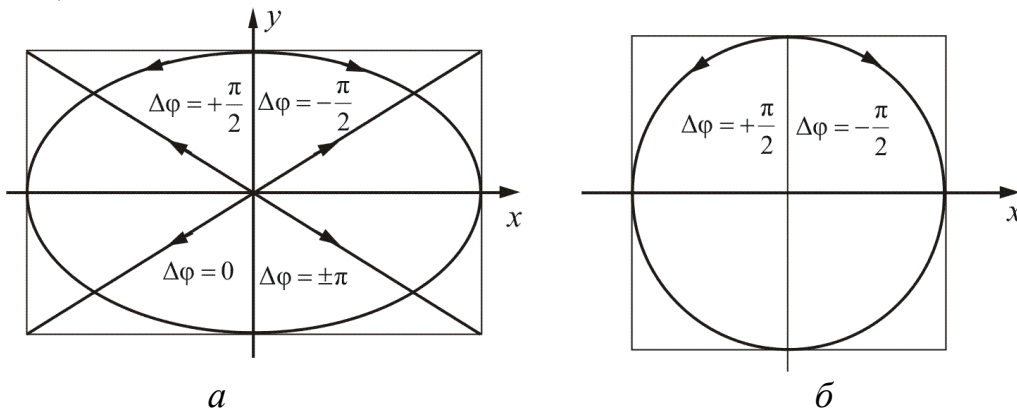


Рис. 11.3

Пространственную структуру эллиптически поляризованных волн поясняет рис. 11.4.

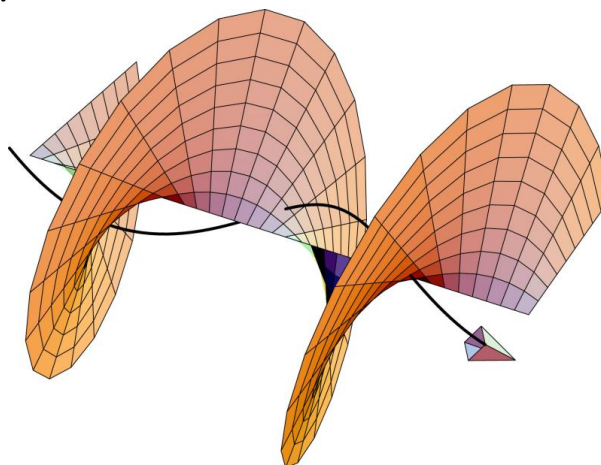


Рис. 11.4

Винтовая линия, изображенная на этом рисунке, есть геометрическое место концов вектора  $\vec{E}$ , относящихся к различным значениям  $z$  в один и тот же момент времени  $t$ . Шаг винта равен длине волны  $\lambda$ . С изменением  $t$  эта винтовая линия, не деформируясь, перемещается со скоростью света в направлении распространения волны. При этом мы получим поле  $\vec{E}$ , вращающееся по часовой стрелке (если смотреть навстречу волне).

Как показывает опыт, реальные световые волны во многих случаях можно описывать с помощью рассмотренных выше моделей эллиптически поляризованных волн.

При распространении электромагнитной волны в реальных средах возможно превращение неполяризованных волн в полностью поляризованные и наоборот. Примером такого превращения является **поляризация электромагнитной волны при отражении**.

Другой практически важный способ поляризации электромагнитных волн, в частности световых волн, представляет рассматриваемое в этой теме распространение электромагнитных волн в **оптически анизотропных средах**.

Естественно, что инструментом для исследования асимметрии поперечных волн может служить система, сама являющаяся асимметричной. Газ, жидкость, твердые аморфные тела изотропны.

Асимметрией обладают кристаллические тела. Их свойства могут различаться в различных направлениях. Они **анизотропны**. Отсюда следует, что **асимметрию поперечных световых лучей можно изучать, пропуская свет через анизотропные кристаллы**.

Устройства, позволяющие получать линейно поляризованный свет, называются **поляризаторами**. Когда те же самые приборы используют

для анализа поляризации света, их называют **анализаторами**. Через такие устройства проходит только та часть волны, у которой вектор  $\vec{E}$  колеблется в определенном направлении. Это направление называют **главной плоскостью поляризатора (анализатора)**.

Пусть естественный свет падает на кристалл поляризатора  $P$  (рис. 11.5).

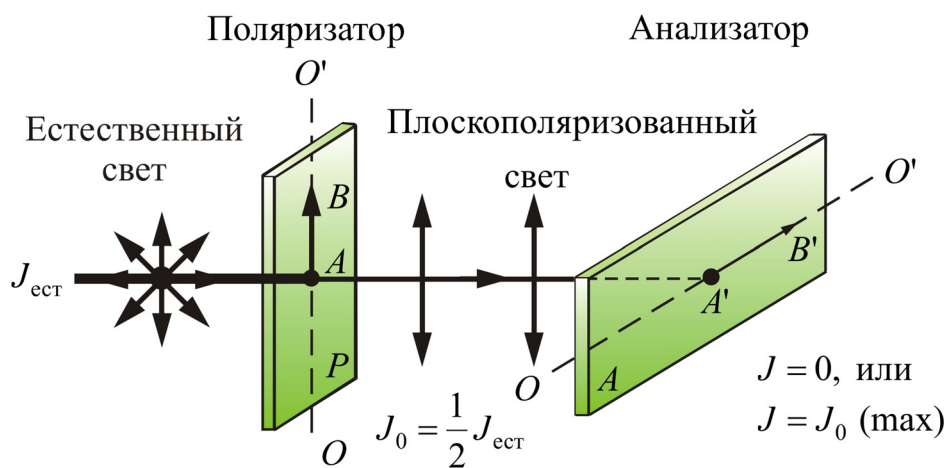


Рис. 11.5

После прохождения поляризатора, он будет линейно поляризован в направлении  $OO'$ . Интенсивность света при этом уменьшится на половину. Это объясняется тем, что при случайных ориентациях вектора  $\vec{E}$  все направления равновероятны.

Если вращать поляризатор вокруг светового луча, то никаких особых изменений не произойдет. Если же на пути луча поставить еще и второй кристалл – анализатор  $A$ , то интенсивность света будет изменяться в зависимости от того, как ориентированы друг относительно друга обе пластины. *Интенсивность света будет максимальна, если оси обоих кристаллов параллельны, и равна нулю, если оси перпендикулярны друг другу.*

Все это можно объяснить следующим образом:

- световые волны поперечны, однако в естественном свете нет преимущественного направления колебаний;
- кристалл поляризатора пропускает лишь те волны, вектор  $\vec{E}$  которых имеет составляющую, параллельную оси кристалла (именно поэтому поляризатор ослабляет свет в два раза);
- кристалл анализатора, в свою очередь, пропускает свет, когда его ось параллельна оси поляризатора.



## 11.2. Поляризация при отражении и преломлении

В этом и следующем параграфах мы рассмотрим способы получения линейно – поляризованного света, используемые при изготовлении поляризаторов и анализаторов.

Свет поляризуется при **отражении** от границы двух сред и при **прохождении** границы – при **преломлении**.

Если угол падения света на границу раздела двух диэлектриков (например воздух – стекло) *отличен от нуля*, то *отраженный и преломленный свет оказывается **частично поляризованным***. (При отражении света от проводящей поверхности свет получается эллиптически поляризованным).

В отраженном луче преобладают колебания, **перпендикулярные** плоскости падения, а в преломленном луче – колебания **параллельные** плоскости падения (рис. 11.6, а).

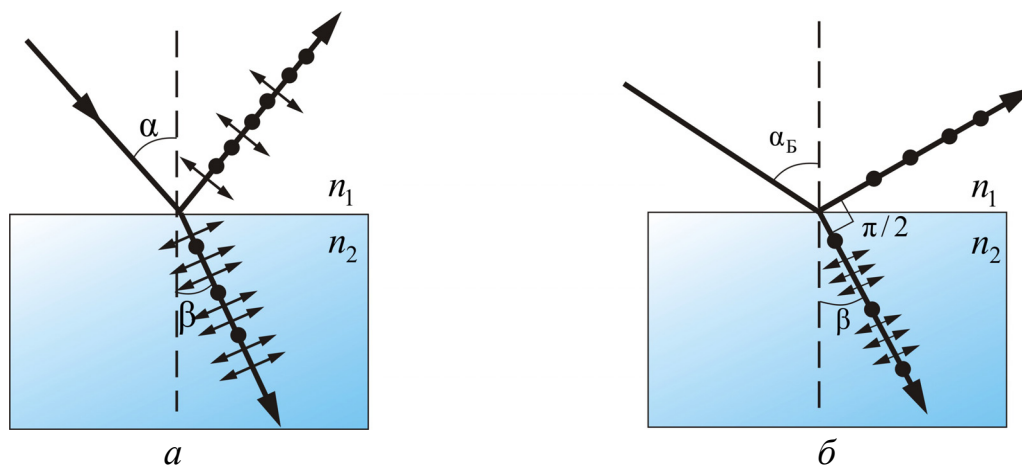


Рис. 11.6

Степень поляризации зависит от угла падения.

Если луч падает на границу двух сред под углом  $\alpha$ , удовлетворяющим условию  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$ , где  $n_{21}$  – показатель преломления второй среды относительно первой, то **отраженный луч оказывается полностью поляризованным. Преломленный луч – поляризован частично** (рис. 11.6, б).

Угол  $\alpha$ , удовлетворяющий условию  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{n_2}{n_1}$ , называется **углом**

**Брюстера**. При  $\alpha = \alpha_B$  угол между отраженным и преломленным лучами равен  $\pi/2$ .

При отражении естественного света от диэлектрика (диэлектрического зеркала) используется **формула Френеля** для расчета степени поляризации:

$$P = \frac{J_x - J_y}{J_x + J_y}, \quad (11.2.1)$$

где  $J_x$  и  $J_y$  – интенсивности света по осям  $x$  и  $y$ .

Таким образом, пластинка прозрачного диэлектрика *сортирует* лучи естественного света, отражая лучи с одним направлением колебаний и преломляя с другим.

### 11.3. Двойное преломление света

В 1669 г. датский ученый Эразм Бартолин опубликовал работу, в которой сообщил об открытии нового физического явления – **двойного преломления света**. Рассматривая преломление света в кристалле исландского шпата ( $\text{CaCO}_3$ ), Бартолин обнаружил, что луч внутри кристалла расщепляется на два луча (рис. 11.7). Если кристалл поворачивать относительно направления первоначального луча, то поворачиваются оба луча, прошедшие через кристалл. Один из лучей вел себя согласно известному закону преломления света, а второй совершенно необычно. Поэтому Бартолин первый луч назвал **обыкновенным**, а второй **необыкновенным**.

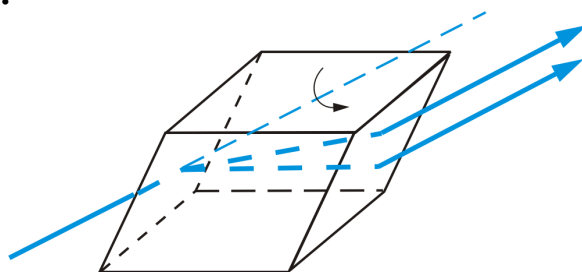


Рис. 11.7

Кроме того, Бартолин обнаружил, что луч света, падая в определенном направлении в кристалле исландского шпата, не раздваивается.

Объяснение этому явлению дал современник Бартолина – голландский ученый Христиан Гюйгенс. Он показал, что необычное поведение луча света, проходящего через исландский шпат, связано с **анизотропией кристалла**. Направление, вдоль которого падающий луч не раздваивается, Гюйгенс назвал **оптической осью**, и кристаллы, имеющие одну оптическую ось, – **одноосными кристаллами** (исландский шпат, турмалин). Оптические свойства одноосного кристалла одинаковы вдоль всех направлений, образующих один и тот же угол с оптической осью. Любая плоскость, проходящая через оптическую ось, называется

**главным сечением кристалла.** Существуют кристаллы, у которых имеются две оптические оси. Такие кристаллы называют **двухосными** (*гипс, слюда*).

В своей книге «Трактат о свете», изданной в Лейдене в 1690 г., Гюйгенс подробно объяснил явление двойного преломления света. Благодаря своим исследованиям Гюйгенс подошел к открытию явления поляризации света, однако решающего шага он сделать не смог, поскольку световые волны в его теории предполагались продольными.

Рассмотрим подробнее явление двойного лучепреломления. Оно заключается в том, что луч внутри кристалла расщепляется на два луча. Один из них подчиняется известному закону преломления Снеллиуса:

$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$ , этот луч **обыкновенный**, а другой не подчиняется – **необыкновенный** луч *e*. Выглядит это так, как показано на рис. 11.8, а.

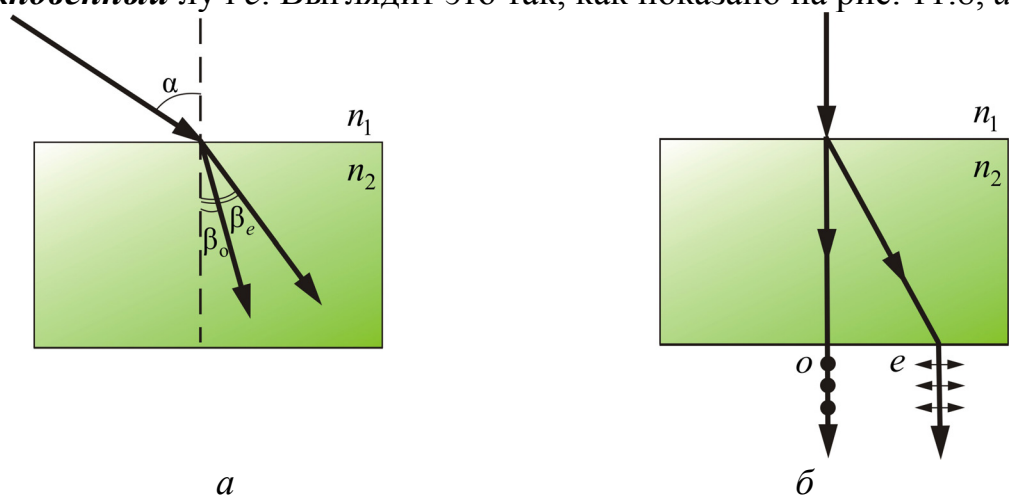


Рис. 11.8

Исследования показали, что обыкновенный и необыкновенный лучи являются полностью поляризованными во взаимно перпендикулярных направлениях.

Плоскость колебаний обыкновенного луча перпендикулярна главному сечению, а необыкновенного луча – совпадает с главным сечением. На выходе из кристалла оба луча распространяются в одинаковом направлении и различаются лишь направлением поляризации (рис. 11.8, б).

Явление двойного лучепреломления используется для получения поляризованного света.

В некоторых кристаллах один из лучей поглощается сильнее другого (**дихроизм**). Очень сильным дихроизмом в видимом свете обладает кристалл турмалина (прозрачное кристаллическое вещество зеленоватой окраски). В нем обыкновенный луч практически полностью погло-

щается на длине 1 мм, а необыкновенный луч выходит из кристалла. В кристалле сульфата йодистого хинина один из лучей поглощается на длине 0,1 мм. Это явление используется для создания поляроидов. На выходе поляроида получается один поляризованный луч.

Часто в качестве поляризатора используется так называемая призма Николя. Это призма из *исландского шпата*, разрезанная по диагонали и склеенная канадским бальзамом (рис. 11.9).

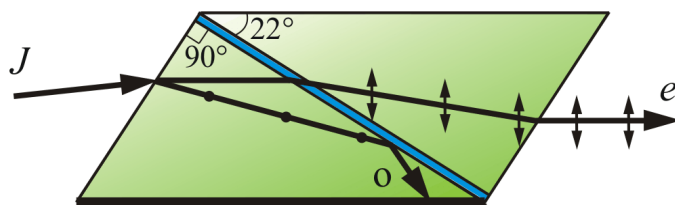


Рис. 11.9

Показатель преломления канадского бальзама лежит между значениями показателей  $n_o$  и  $n_e$  для обыкновенного и необыкновенного лучей в исландском шпате ( $n_o > n > n_e$ ). За счет этого обыкновенный луч претерпевает на прослойке бальзама полное внутреннее отражение и отклоняется в сторону. Необыкновенный луч свободно проходит через эту прослойку и выходит из призмы.

Двойное лучепреломление объясняется анизотропией кристаллов. В таких кристаллах диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  зависит от направления. В одноосных кристаллах диэлектрическая проницаемость в направлении оптической оси  $\epsilon_x$  и в направлениях перпендикулярных к ней  $\epsilon_y$  имеет разные значения.

Поскольку  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , а в диэлектриках  $\mu = 1$ , то  $n = \sqrt{\epsilon}$ . Следовательно, из анизотропии  $\epsilon$  вытекает, что электромагнитные волны разных направлений колебаний вектора  $\vec{E}$  имеют разный показатель преломления, и следовательно разную скорость распространения. Скорость распространения обыкновенного луча  $v_o = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_y}}$ , а необыкновенного

$v_e = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_x}}$ , причем необыкновенный луч распространяется перпендикулярно оптической оси кристалла. В соответствии с этим одноосные кристаллы характеризуются показателем преломления обыкновенного луча

$n_o = \frac{c}{v_o}$  и показателем преломления необыкновенного луча  $n_e = \frac{c}{v_e}$ . В зависимости от того, какая из скоростей  $v_o$  или  $v_e$  больше, различают

положительные и отрицательные одноосные кристаллы. При условии, когда  $v_o > v_e$  – кристалл *положительный*,  $v_o < v_e$  – *отрицательный*.

## 11.4. Закон Малюса

В 1809 г. французский инженер Э. Малюс открыл закон, названный впоследствии его именем. В опытах Малюса свет последовательно пропусклся через две одинаковые пластинки из турмалина.

Пластинки могли поворачиваться друг относительно друга на угол  $\varphi$  (рис. 11.10).

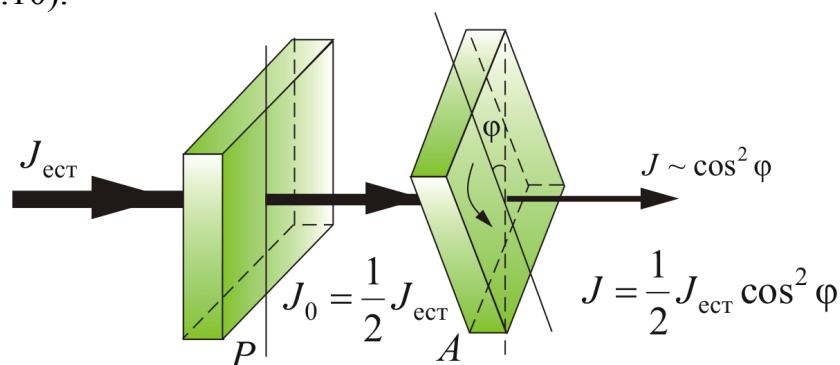


Рис. 11.10

Интенсивность прошедшего света оказалась прямо пропорциональной:  $\cos^2 \varphi$ :  $J \sim \cos^2 \varphi$ .

Ни двойное лучепреломление, ни закон Малюса не нашли объяснения в рамках теории продольных волн. Для продольных волн направление распространения луча является осью симметрии. В продольной волне все направления в плоскости, перпендикулярной лучу, равноправны. В поперечной волне (например в волне, бегущей по резиновому жгуту) направление колебаний и перпендикулярное ему направление не равноправны (рис. 11.11).

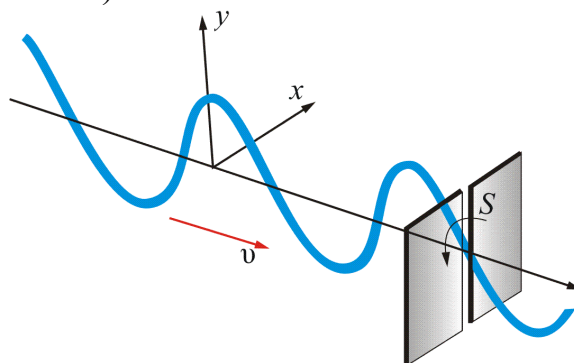


Рис. 11.11

Из рисунка видно, что поворот щели  $S$  вызовет затухание волны.

С помощью разложения вектора  $\vec{E}$  на составляющие по осям можно объяснить закон Малюса (рис. 11.10).

В каждый момент времени вектор  $\vec{E}$  может быть спроектирован на две взаимно перпендикулярные оси (рис. 11.12).

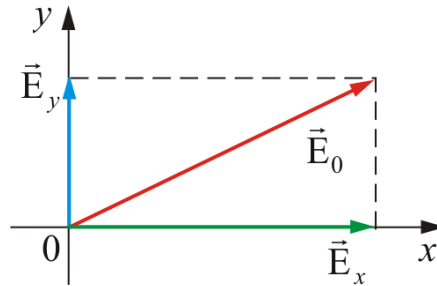


Рис. 11.12

Рассмотрим прохождение естественного света последовательно через два идеальных поляроида  $P$  и  $A$  (рис. 11.10), разрешенные направления которых развернуты на некоторый угол  $\varphi$ . Первый поляроид играет роль поляризатора. Он превращает естественный свет в линейно-поляризованный. Второй поляроид служит для анализа падающего на него света. Здесь также используется явление *дихроизма*.

Световую волну с амплитудой  $E_0$  разложим на две составляющие.

$$E_x = E_0 \cos \varphi, \quad E_y = E_0 \sin \varphi,$$

$E_x$  – пройдет через поляризатор, а  $E_y$  – не пройдет.

Найдем интенсивность проходящего света. Т.к.  $J \sim E^2$ , то  $J \sim E_0^2 \cos^2 \varphi$  и  $J_0 \sim E_0^2$ , откуда получим **закон Малюса**:

$$J = J_0 \cos^2 \varphi. \quad (11.4.1)$$

В естественном свете все значения  $\varphi$  равновероятны и среднее значение  $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$ . Поэтому интенсивность естественного света, прошедшего один поляризатор уменьшается в *два раза*.

Поставим на пути естественного света два поляризатора, плоскости которых образуют угол  $\varphi$ . Из первого поляризатора выйдет луч интенсивностью  $J_0 = \frac{1}{2} J_{\text{ест}}$ . Согласно **закону Малюса** интенсивность света, прошедшего второй поляризатор,

$$J = J_0 \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} J_{\text{ест}} \cos^2 \varphi. \quad (11.4.2)$$

Это без учета поглощения света в кристалле.

$$J = J_{\text{max}} = \frac{1}{2} J_{\text{ест}} \text{ при } \varphi = 0.$$

При  $\varphi = \pi/2$   $J = 0$  – скрещенные поляризаторы свет не пропускают.

Таким образом, в электромагнитной теории света закон Малюса находит естественное объяснение на основе разложения вектора  $\vec{E}$  на составляющие.

### 11.5. Интерференция поляризованного света

Явления интерференции поляризованных лучей исследовались в классических опытах Френеля и Арго (1816 г.), доказавших поперечность световых колебаний. Суть их в зависимости результата интерференции от угла между плоскостями световых колебаний: полосы наиболее контрастны при параллельных плоскостях и исчезают, если волны поляризованы ортогонально. Трудность получения интерференции поляризованных волн состоит в том, что при наложении двух когерентных лучей, поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, никакой интерференционной картины с максимумами и минимумами интенсивности получиться не может. Интерференция возникает только в том случае, если колебания во взаимодействующих лучах совершаются вдоль одного и того же направления. Колебания в двух лучах, первоначально поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях, можно свести в одну плоскость, пропустив эти лучи через поляризующую кристаллическую пластинку.

Рассмотрим схему получения интерференции поляризованных лучей (рис. 11.13).

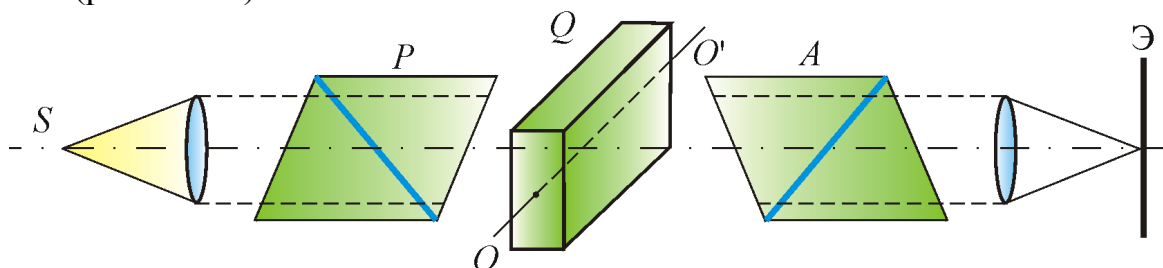


Рис. 11.13

Прошедшее через поляризатор  $P$  излучение точечного источника  $S$  попадает на полуволновую кристаллическую пластинку  $Q$ , которая позволяет изменять угол между плоскостями поляризации интерферирующих лучей: ее поворот на угол  $\alpha$  поворачивает вектор  $\vec{E}$  на  $2\alpha$ . Если наблюдать интерференционные полосы через анализатор  $A$ , то при его повороте на  $\pi/2$  картина, наблюдаемая на экране  $\mathcal{E}$ , инвертируется: из-за дополнительной разности фаз  $\pi$  темные полосы становятся светлыми и наоборот. *Анализатор здесь необходим также для того, чтобы свести колебания двух различно поляризованных лучей в одну плоскость.*

При прохождении поляризованного света через кристаллическую пластинку разность хода между двумя компонентами поляризации зависит от толщины пластинки, среднего угла преломления и разности показателей  $n_o$  и  $n_e$ . Очевидно, что возникающая при этом разность фаз

$$\delta = 2\pi\Delta / \lambda \quad (11.5.1)$$

различна для разных длин волн, и тем самым интерференционная картина оказывается окрашенной. Для плоскопараллельных пластинок наблюдаются *полосы равного наклона*, а для тонких клиновидных пластинок – *полосы равной толщины*.

Приведенная формула позволяет для любой фазовой пластинки рассчитать интенсивность на выходе при скрещенных поляризаторе и анализаторе:

$$J_i = 0,5I_0 \sin^2 2\varphi \sin^2 \delta / 2. \quad (11.5.2)$$

## 10.6. Искусственная анизотропия

Двойное лучепреломление можно наблюдать и в изотропных средах (аморфных телах), если подвергнуть их механическим нагрузкам.

Изотропное тело, подвергнутое упругим деформациям, может стать анизотропным и изменить состояние поляризации проходящего света. Это явление, открытое в 1818 г. Брюстером, получило название фотоупругости или пьзооптического эффекта. При одностороннем растяжении или сжатии тело становится подобным одноосному кристаллу с оптической осью, параллельной направлению приложенной силы. Мерой возникающей при этом оптической анизотропии служит разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей. Опыт показывает, что эта разность пропорциональна напряжению  $\sigma = \frac{dF}{dS}$  в дан-

ной точке тела. От этого напряжения будет зависеть разность показателей преломления:  $n_o - n_e = k\sigma$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от свойств вещества.

Поместим стеклянную пластинку  $Q$  между двумя поляризаторами  $P$  и  $A$  (рис. 11.14).

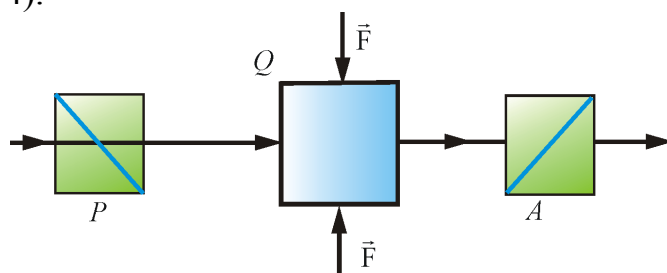


Рис. 11.14



В отсутствие механической деформации свет через них проходить не будет. Если же стекло подвергнуть деформации, то свет может пройти, причем картина на экране получится цветная. По распределению цветных полос можно судить о распределении напряжений в стеклянной пластинке (рис. 11.15).

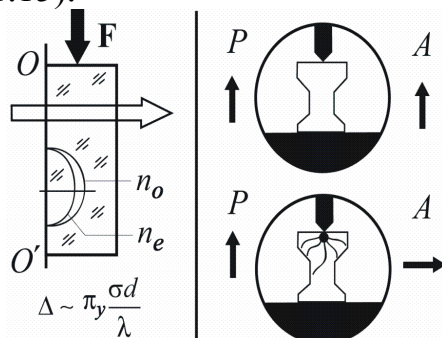


Рис. 11.15

Это явление широко используется для определения прочности деталей. Помещая прозрачные фотоупругие модели между поляризатором и анализатором и подвергая их различным нагрузкам, можно изучать распределения возникающих внутренних напряжений.

Явление искусственной анизотропии может возникать в изотропных средах под воздействием электрического поля (**эффект Керра**). На рис. 11.16 изображена так называемая **ячейка Керра**.

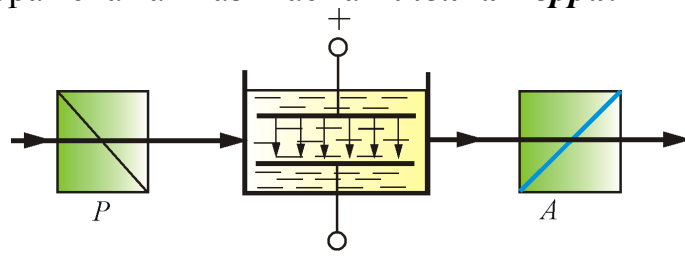


Рис. 11.16

Если поляризаторы скрещены, то в отсутствие поля свет через ячейку Керра не проходит. В электрическом поле между пластинками конденсатора жидкость (используется обычно нитробензол) становится анизотропной. Свет, прошедший через кювету, поворачивает плоскость поляризации, и система становится прозрачной. Ячейка Керра может служить затвором света, который управляется потенциалом одного из электродов конденсатора, помещенного в ячейку.

На основе ячеек Керра построены практически безынерционные затворы и модуляторы света с временем срабатывания до  $10^{-12}$  с.

Величина двойного лучепреломления прямо пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля:  $\Delta n = nkE^2$  (закон Керра). Здесь  $n$  – показатель преломления вещества в отсутствие поля,

$\Delta n = n_e - n_o$ , где  $n_e$  и  $n_o$  – показатели преломления для необыкновенной и обыкновенной волн,  $k$  – постоянная Керра.

### Контрольные вопросы

1. Что называется естественным светом? плоскополяризованным светом? частично поляризованным светом? эллиптически поляризованным светом?
2. Как изменяется интенсивность света за поляризатором при его вращении вокруг пучка естественного света?
3. Как практически отличить плоскополяризованный свет от естественного?
4. Что такое угол Брюстера?
5. Покажите, что при выполнении закона Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.
6. Интенсивность естественного света, пропущенного через два поляризатора, уменьшилась вдвое. Как ориентированы поляризаторы?
7. Что называется оптической осью кристалла? Чем отличаются двухосные кристаллы от одноосных?
8. Чем обусловлено двойное преломление в оптически анизотропном одноосном кристалле?
9. Чем отличаются отрицательные кристаллы от положительных? Приведите построение волновых поверхностей для о- и е-лучей.
10. Какие поляризационные приборы вы знаете? В чем заключается принцип их действия?
11. Что называется пластинкой в четверть волны? в полволны?
12. На поляризатор падает циркулярно поляризованный свет с интенсивностью  $I_0$ . Какова интенсивность света за поляризатором?
13. Как, используя пластинку в четверть волны и поляризатор, отличить циркулярно поляризованный свет от естественного?
14. Каково будет действие пластинки в полволны на естественный свет? на плоскополяризованный свет, плоскость поляризации которого составляет угол  $45^\circ$  с оптической осью пластинки?
15. Объясните действие светового затвора ячейки Керра в сочетании с поляризатором и анализатором.
16. Что такое эффект Керра? Какова физическая причина его возникновения? Где применяется?
17. Какие вещества называются оптически активными?
18. В чем отличие оптической активности от двойного лучепреломления?

## Заключение

В этой книге рассмотрены важнейшие вопросы классической и современной физики, касающиеся механических и электромагнитных колебаний и распространения волн, включая учение об электромагнитных волнах, геометрическую и волновую оптику.

Все построение современного курса физики представляет собой последовательное и непрерывное углубление сведений о явлениях природы, о законах, которые управляют процессами, происходящими в окружающем на мире.

С полной очевидностью этот вывод подтверждается в колебательных и волновых процессах и распространении волн различной природы.

Современная физика принадлежит к числу наиболее быстро развивающихся наук. Ее динамический характер особенно сказывается в таких разделах, как механические и электромагнитные колебания, геометрическая, волновая и квантовая оптика, распространение электромагнитных волн и их взаимодействие с веществом. Вряд ли можно было подумать несколько десятков лет назад, что возникнут теория колебаний плазмы, квантовая оптика, квантовая радиотехника, плазменная электроника и другие важнейшие разделы физики.

При изложении основных физических идей, методов и результатов автор стремился показать, что между классической и современной физикой нет глубокой пропасти и разрыва. Физика представляет собой непрерывно развивающуюся науку, в которой одни физические идеи, теории и результаты закономерно сменяются другими.

Однако, несмотря на большие достижения физики во всех ее разделах, в том числе в теории колебаний и волн, остается масса вопросов. Например, построение квантовой теории тяготения, развитие и совершенствование квантовых генераторов, проблемы физиологической оптики, изучающей строение и функционирование всего аппарата зрения – от глаза до коры мозга.

Из этих заключительных замечаний ясно, какое место имеет для будущего инженера изучение данных разделов физики.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Объемные сейсмические волны

Чрезвычайно важным примером волн в упругом твердом теле являются сейсмические волны, возникающие в ограниченной области пространства (очаге) размером в несколько километров и распространяющиеся на огромные расстояния под поверхностью Земли. Эти волны бывают поперечными (волны сдвига) и продольными (сжатия и разрежения) и могут пронизывать всю нашу планету. Это позволяет (подобно рентгеновскому анализу) исследовать внутреннее строение Земли. Этим занимается отдельная наука, называемая сейсмологией. Долгое время сейсмология, одним из основателей которой является русский физик Б.Б. Голицын, была наукой о землетрясениях и сейсмических волнах. В настоящее время сейсмология занимается анализом разнообразных движений в земной толще.

Скорость продольных волн приблизительно в 1,7 раза больше скорости поперечных, поэтому эти волны регистрируются на сейсмограммах последовательно: вначале приходят более быстрые продольные (первичные), которые называются  $p$ -волнами, а потом поперечные (вторичные), называемые  $s$ -волнами. Кроме того, сейсмографы регистрируют и заметный фон, или шумы, связанные как с работой промышленных установок и транспорта, так и с сейсмическими волнами (микросейсмами), генерируемыми штормами и волнением в океанах.

Если бы скорости  $p$ - и  $s$ -волн в Земле не менялись бы с глубиной, то волны распространялись бы по прямым линиям (прямым сейсмическим лучам). В действительности скорости продольной  $c_p$  и поперечной  $c_s$  волн возрастают с погружением в недра Земли, за исключением небольшой зоны на глубинах 50–250 км. Поэтому сейсмические лучи искривляются. В сейсмологии экспериментально определяют годограф – время  $\tau$  пробега сейсмических волн как функцию эпицентрального расстояния  $\Delta$  (расстояния в градусах или километрах по дуге большого круга между эпицентром и приемником волн;  $1^\circ = 111$  км). Ясно, что функция  $\tau = \tau(\Delta)$  связана с распределением скорости волны  $c(l)$  ( $l$  – глубина), и поиск этого распределения представляет интерес при исследовании внутреннего строения Земли.

На рис. 1 показаны пути  $p$ -волн и указано время их распространения в недрах Земли от эпицентра Э до установленного на поверхности приемника. Прерывистые линии (изохроны) указывают время прихода  $p$ -волн в различные точки земной поверхности. Из-за искривления лучей волны не попадают в обширную зону тени.



Рис. 1

Исследование зависимости скоростей  $c_p(l)$  и  $c_s(l)$  от глубины позволило сделать вывод, что Земля разделяется на три основные части: кору, мантию и ядро. Кора отделена от мантии резкой сейсмической границей, на которой скачкообразно возрастают плотность  $\rho$  и скорости  $c_p$  и  $c_s$ . Эта граница была открыта в 1909 г. югославским сейсмологом Мохоровичем и носит название границы М. Толщина лежащей выше границы М земной коры меняется от величины  $\approx 10$  км (под слоем воды в океанических областях) до нескольких десятков километров в горных районах континентальных областей. Ниже коры в интервале до глубин  $\sim 2900$  км расположена силикатная оболочка, или мантия, Земли. Существование ядра с плотностью, превосходящей среднюю плотность Земли  $\sim 5,5$  г/см<sup>3</sup>, следует из того факта, что плотность земной коры (от  $\sim 2,8$  г/см<sup>3</sup> у гранитов до  $\sim 3,0$  г/см<sup>3</sup> у базальтов) существенно меньше этой средней плотности.

Глубинные зависимости скоростей  $p$ - и  $s$ -волн, и на базе этих зависимостей проведено разбиение Земли на три области. Такая модель Земли называется классической моделью Джеффриса–Гутенберга. Она оставалась неизменной до конца 60-х годов XX века. Особенности изменения скоростей волн с глубиной связаны с изменением структуры земных пород. При переходе от коры (граниты, базальты) к мантии (ультраосновные горные породы) скорости возрастают. Увеличение скоростей при приближении к ядру связано с наличием фазовых переходов минералов в более плотные и жесткие в механическом отношении кристаллические модификации. Падение скорости  $p$ -волн при переходе из мантии в ядро есть следствие того, что внешняя часть ядра жидкая. Ядро состоит в основном из железа и небольшой примеси

легких элементов. Во внешнем ядре плавное возрастание скорости  $c_p$  связано с нарастанием давления к центру Земли. Во внутреннем ядре скорость  $p$ -волн не меняется, так как давление к центру Земли возрастает незначительно. Естественно, что поперечные  $s$ -волны во внешней (жидкой) части ядра распространяться не могут.

В последние годы была выявлена детальная структура мантии Земли. Земная кора и верхний слой мантии до глубины  $l \approx 70$  км образуют наружную зону – литосферу, или литосферную плиту. Эта жесткая плита расколота примерно на 10 больших плит, по границам которых расположено подавляющее число очагов землетрясений. Под жесткой литосферной плитой на глубинах  $70 < l < 250$  км расположен слой повышенной текучести, называемый астеносферой. Из-за её малой вязкости литосферные плиты как бы плавают в «астеносферном океане» Земли. В астеносфере, где температура вещества близка к температуре плавления, скорости волн понижены. Начиная с  $l \approx 250$  км скорости возрастают из-за увеличения давления. При  $l \approx 400$  км возрастание скорости есть результат фазовых переходов (минералы оливины переходят в шпинелевую модификацию), а на глубинах  $400 < l < 650$  км скорость возрастает из-за роста давления. На глубинах  $650 < l < 700$  км расположена вторая зона фазовых переходов, однако остается открытым вопрос о том, какие конкретно переходы ответственны за быстрый рост скорости.

На рис. 2 изображен разрез Земли, построенный в соответствии с современными сейсмическими данными.

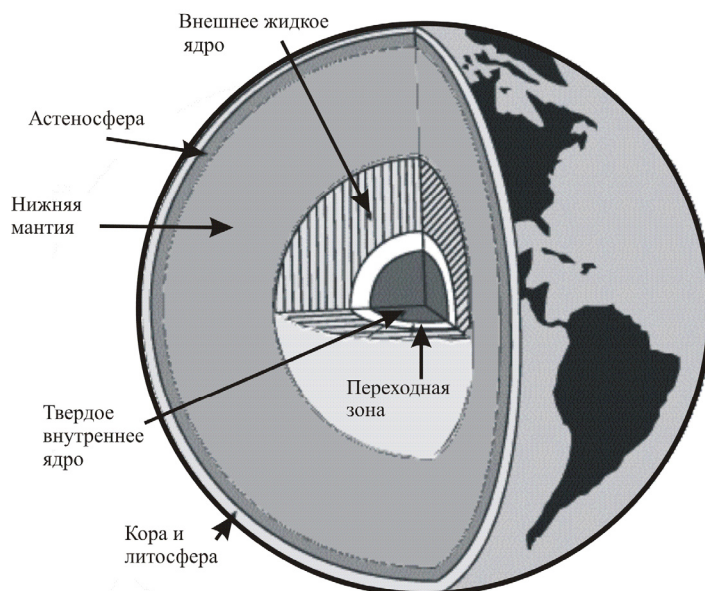


Рис. 2

При распространении объемной сейсмической волны в трехмерном случае амплитуда уменьшается с расстоянием  $r$ , пройденным волной от

точечного источника. Уравнение такой волны, называемой сферической, имеет вид:

$$s(r,t) = \frac{s_0}{r} e^{-\alpha r} \sin \left[ t - \frac{r}{c} \right]. \quad (1)$$

Из этого уравнения видно, что амплитуда волны убывает, во-первых, из-за ее геометрического расхождения во все стороны от эпицентра; это убывание происходит обратно пропорционально пройденному волной расстоянию  $r$ . Во-вторых, амплитуда волны убывает из-за перехода части энергии волны в тепло вследствие неидеальной упругости земных недр. Это ослабление характеризуется коэффициентом затухания  $\alpha$ . Коэффициент  $\alpha$  пропорционален частоте сейсмической волны, поэтому короткие волны затухают быстрее длинных. Расчет показывает, что для коэффициентов затухания  $s$ - и  $p$ -волн могут быть записаны соотношения:

$$\alpha_s (\text{км}^{-1}) \sim 1 \cdot 10^{-3} \nu (\text{Гц}); \quad \alpha_p (\text{км}^{-1}) \sim 0,25 \cdot 10^{-3} \nu (\text{Гц}).$$

Частоты объемных сейсмических волн лежат в инфразвуковом диапазоне  $0,1 \text{ Гц} < \nu < 10 \text{ Гц}$ . Следовательно, для волн с частотой  $\nu \sim 1 \text{ Гц}$  уменьшение амплитуды в  $e$  раз у поперечной волны происходит на пути  $\sim 1000 \text{ км}$ , а у продольной волны – на пути  $\sim 4000 \text{ км}$ .

Помимо бегущих волн, в объеме Земли могут наблюдаться и стоячие волны, когда вся Земля колеблется, как целое, с различными частотами, соответствующими различным модам колебаний. Конфигурации этих мод относятся к двум основным типам: сфероидальные колебания (наибольший период  $\sim 55$  мин, частота  $\sim 3 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$ ) и торсионные (крутильные) колебания (наибольший период  $\sim 44$  мин, частота  $\sim 3,8 \cdot 10^{-4} \text{ Гц}$ ). В настоящее время спектр этих колебаний насчитывает несколько тысяч экспериментально обнаруженных частот.

### **Поверхностные сейсмические волны**

Наряду с объемными, по Земле могут распространяться и поверхностные волны. Эти волны бывают двух типов и называются волнами Рэлея и Лява. Они были теоретически предсказаны Дж. Рэлеем в 1855 г. и Лявом в 1911 г. В Рэлеевской волне частицы грунта смещаются в вертикальной плоскости, ориентированной вдоль направления распространения волн, а траектории их движения представляют собой эллипсы (см. далее гравитационные волны на поверхности жидкости). В волне Лява частицы движутся в горизонтальной плоскости поперек направления распространения волны.

Длины поверхностных волн  $\lambda$ , возбуждаемых при землетрясении, лежат в интервале от десятков до многих сотен километров. В поверхностных волнах амплитуда убывает с глубиной, и на глубине  $l > \lambda$  колебания мантии малы. Поэтому с помощью таких волн можно исследовать лишь наружные слои Земли.

Из-за двумерного распространения амплитуда поверхностных волн убывает медленнее (обратно пропорционально  $\sqrt{r}$ ), чем у объемных волн. Поэтому такие волны могут по несколько раз обегать вокруг Земного шара. Скорость поверхностных волн зависит от частоты, т.е. они обладают дисперсией.

На рис. 3 показаны зависимости групповых скоростей волн Рэлея  $c_R$  и Лява  $c_L$  от периода колебания волны. Легко видеть, что волны Лява быстрее волн Рэлея.

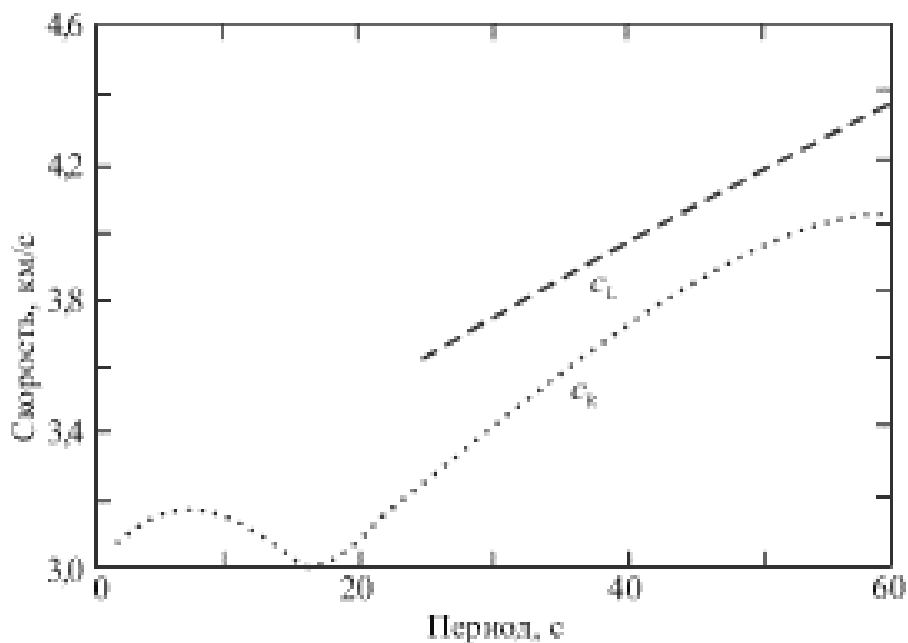


Рис. 3

Сейсмические волны можно вызвать при помощи взрыва. Небольшие взрывы используются в инженерной сейсмологии для проведения разведки полезных ископаемых (нефти, руды, газа и т.д.). Подземные ядерные взрывы создают интенсивные волны, которые можно регистрировать на любых расстояниях. Это дает возможность надежно проводить контроль над подземными ядерными испытаниями.

### Шкала Бофорта

Сила ветра у земной поверхности по шкале Бофорта (на стандартной высоте 10 м над открытой ровной поверхностью)



Таблица П.1

Баллы Бофор- та	Словесное определе- ние силы ветра	Скорость ветра, м/с	Действие ветра	
			на суше	на море
1	2	3	4	5
0	Штиль	0–0,2	Штиль. Дым поднимается вертикально	Зеркально гладкое море
1	Тихий	0,3–1,5	Направление ветра заметно по дыму	Рябь, пены на гребнях нет
2	Лёгкий	1,6–3,3	Шелестят листья, приводится в движение флюгер	Короткие волны, гребни не опрокидываются и кажутся стекловидными
3	Слабый	3,4–5,4	Листья и тонкие ветви деревьев всё время колышутся, ветер развеивает верхние флаги	Короткие, хорошо выраженные волны. Гребни, опрокидываясь, образуют пену, образуются белые барашки
4	Умеренный	5,5–7,9	Ветер поднимает пыль и приводит в движение тонкие ветви	Волны удлиненные, белые барашки видны во многих местах
5	Свежий	8,0–10,7	Качаются тонкие стволы деревьев, на воде появляются волны с гребнями	Хорошо развитые в длину, но не очень крупные волны. Повсюду видны белые барашки

Продолжение таблицы				
1	2	3	4	5
6	Сильный	10,8– 13,8	Качаются толстые сучья деревьев, гудят телеграфные провода	Начинают образовываться крупные волны. Белые пенистые гребни занимают значительные площади (вероятны брызги)
7	Крепкий	13,9– 17,1	Качаются стволы деревьев, идти против ветра трудно	Волны громоздятся, гребни срываются, пена ложится полосами по ветру
8	Очень крепкий	17,2– 20,7	Ветер ломает сучья деревьев, идти против ветра очень трудно	Умеренно высокие длинные волны. По краям гребней начинают взлетать брызги. Полосы пены ложатся рядами по направлению ветра
9	Шторм	20,8– 24,4	Небольшие повреждения; ветер срывает дымовые колпаки и черепицу	Высокие волны. Пена широкими плотными полосами ложится по ветру. Гребни волн начинают опрокидываться и рассыпаться.

Окончание таблицы				
1	2	3	4	5
10	Сильный шторм	24,5– 28,4	Значительные разрушения строений, деревья вырываются с корнем. На суше бывает редко	Очень высокие волны с длинными загибающимися вниз гребнями. Образующаяся пена выдувается ветром большими хлопьями в виде густых белых полос. Сильный грохот волн подобен ударам. Видимость плохая
11	Жестокий шторм	28,5– 32,6	Большие разрушения на значительном пространстве. На суше наблюдается очень редко	Исключительно высокие волны. Суда скрываются из виду. Море всё покрыто длинными хлопьями пены, располагающимися по ветру. Видимость плохая
12	Ураган	32,7 и более		Воздух наполнен пеной и брызгами. Море всё покрыто полосами пены. Очень плохая видимость

## Справочные данные Таблицы физических величин

### Фундаментальные физические постоянные

Гравитационная постоянная	$G = 6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$
Скорость света в вакууме	$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 12,5663706144 \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Постоянная Планка	$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Масса покоя электрона	$m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона	$m_p = 1,6726485 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя нейтрона	$m_n = 1,6749543 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Элементарный заряд	$e^- = 1,6021892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Постоянная Больцмана	$k = 1,380662 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Нормальное атмосферное давление	$P_0 = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$

### Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований

Множитель	Приставка	Обозначение
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	тера	Т
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$	гига	Г
$1\ 000\ 000 = 10^6$	мага	М
$1\ 000 = 10^3$	кило	к
$100 = 10^2$	гекто	г
$10 = 10^1$	дека	да
$0,1 = 10^{-1}$	деци	д
$0,01 = 10^{-2}$	санци	с
$0,001 = 10^{-3}$	милли	м
$0,000001 = 10^{-6}$	микро	мк
$0,000000001 = 10^{-9}$	нано	н
$0,000000000001 = 10^{-12}$	пико	п
$0,000000000000001 = 10^{-15}$	фемто	ф
$0,000000000000000001 = 10^{-18}$	атто	а

### Производные единицы СИ, имеющие собственные наименования

Величина	Единица		Выражение производной единицы	
	Наименование	Обозначение	Через другие единицы СИ	Через основные единицы СИ
Частота	герц	Гц		$\text{с}^{-1}$
Сила	ньютон	Н		$\text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Давление	паскаль	Па	$\text{Н}/\text{м}^2$	$\text{м}^{-1} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Энергия, работа	джоуль	Дж	Н/м	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}$
Мощность, поток энергии	ватт	Вт	Дж/с	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3}$
Электрический заряд	кулон	Кл	А·с	с·А
Напряжение, потенциал	вольт	В	Вт/А	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$
Электрическая ёмкость	фарада	Ф	Кл/В	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^4 \cdot \text{А}^2$
Сопротивление	ом	Ом	В/А	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^2$
Проводимость	сименс	См	А/В	$\text{м}^{-2} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^3 \cdot \text{А}^2$
Поток магнитной индукции	вебер	Вб	В·с	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Магнитная индукция	тесла	Т	Вб/м <sup>2</sup>	$\text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$
Индуктивность	генри	Г	Вб/А	$\text{м}^2 \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-2}$
Световой поток	люмен	лм		кд·ср
Освещенность	люкс	лк		$\text{м}^{-2} \cdot \text{кд} \cdot \text{ср}$

### Внесистемные единицы измерений и их перевод в единицы СИ

Единица	Обозначение	Перевод в единицы СИ
микрон	мкм	$1 \cdot 10^{-6}$ м
ангстрем	Å	$1 \cdot 10^{-10}$ м
световой год	св. год	$9,46 \cdot 10^{15}$ м
парсек	пк	$3,09 \cdot 10^{16}$ м
литр	л	$1 \cdot 10^{-3}$ м <sup>3</sup>
минута	мин	60 с
час	ч	3600 с
сутки	сут	86400 с
секунда	"	$4,85 \cdot 10^{-6}$ рад
минута	'	$2,9 \cdot 10^{-4}$ рад
градус	°	0,017 рад
оборот	об	6,28 рад
полный телесный угол	-	12,57 ср
оборот в секунду	об/с	$1 \text{ с}^{-1}$
оборот в минуту	об/мин	$0,0167 \text{ с}^{-1}$
километр в час	км/ч	0,278 м/с
оборот в секунду	об/с	6,28 рад/с
оборот в минуту	об/мин	0,105 рад/с
киловатт-час	кВт·ч	$3,6 \cdot 10^6$ Дж
электронвольт	эВ	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж
ампер-час	А·ч	$3,6 \cdot 10^{-3}$ Кл
рентген	Р	$2,58 \cdot 10^{-3}$ Кл/кг
рад	рад	0,01 Дж/кг
кюри	Ки	$3,7 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$
распад в секунду	расп./с	$1 \text{ с}^{-1}$

### Скорость звука в различных средах

Среда	$t, ^\circ\text{C}$	$v, \text{ м/с}$	Среда	$t, ^\circ\text{C}$	$v, \text{ м/с}$
Воздух	0	331	Ртуть	20	1451
Азот	0	334	Спирт метиловый	20	1123
Ацетон	20	1192	Алюминий	20	5080
Водород	0	1284	Медь	20	3710
Гелий	0	965	Железо	20	5170
Кислород	0	316	Стекло кварцевое	20	5370
Углек. газ	0	259	Дерево ель	0	4800
Вода морская	17	1510-1550	Дерево пробковое	-	430-530
Вода пресная	25	1497	Каучук	-	50

### Величина силы звука для основных значений шкалы децибел

Вид звука	дБ	Сила звука, мкВт/м
Предел чувствительности человеческого уха	0	$10^{-6}$
Шопот на расстоянии 1 м	10	$10^{-5}$
Шорох листьев в саду; падение капель воды на расстоянии 1 м	20	$10^{-4}$
Средний уровень шума в зрительном зале; негромкий разговор	30	$10^{-3}$
Негромкая музыка. Шум в жилом помещении	40	$10^{-2}$
Шум в учреждении с открытыми окнами	50	$10^{-1}$
Средний уровень разговорной речи на расстоянии 1 м.	60	1
Шум мотора грузового автомобиля	70	10
Симфонический оркестр	80	$10^2$
Автомобильный гудок	90	$10^3$
Клепальная машина	100	$10^4$
Пневмомолот	110	$10^5$
Сильные удары грома, мотор самолета	120	$10^6$
Болевой предел. Звук уже не слышен	130	$10^7$

### Характеристики колебаний в механической системе и соответствующие им величины в электрической цепи

Механическая система		Электрическая цепь (контур)	
Масса	$m$	Индуктивность	$L$
Упругость (жесткость)	$k$	Величина	$1/C$
Коэффициент трения	$\mu$	Сопротивление	$R$
Сила	$F$	ЭДС	$\mathcal{E}$
Отклонение от положения равновесия	$x$	Заряд на конденсаторе	$q$
Скорость	$v$	Ток	$I$
Потенциальная энергия	$U$	Энергия электрического поля	$W_e$
Кинетическая энергия	$K$	Энергия магнитного поля	$W_m$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### *Основная*

1. Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю. Физика. Ч.2. Электричество и магнетизм: учебное пособие для технических университетов. – Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 2003. – 738 с.
2. Тюрин Ю.И., Чернов И.П., Крючков Ю.Ю. Физика. Ч. 3. Оптика. Квантовая физика: учебное пособие для технических университетов. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2004. – 740 с.
3. Савельев И.В. Курс общей физики: в 5 кн.: Волновая оптика. Кн. 4: учебное пособие для вузов. – М.: АСТ. Астрель, 2006. – 256 с.
4. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики: учебное пособие для вузов. – 4-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2002. – 718 с.
5. Трофимова Т.И. Курс физики: учеб. пособие для вузов. – Изд. 9-е, перераб. и доп. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 560 с.
6. Фейман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Феймановские лекции по физике: в 9 т. – М.: Мир, 1978. – Т. 3. – 291 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: в 10 т.: Электромагнетизм. – М.: Физматлит, 2002. – Т. 4.– 224 с.

### *Дополнительная*

1. Джанколли Д. Физика. – М.: Мир, 1989. – 342 с.
2. Гольд Р.М. Физика для геологов: Колебания и волны: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 130 с.
3. Ларионов В.В., Иванкина М.С., Мурашко А.Т. Физический практикум: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 1993. – 92 с.
4. Тюрин Ю.И., Ларионов В.В., Чернов И.П. Физика: сборник задач (с решениями). Часть 3. Оптика. Атомная и ядерная физика: учебное пособие. – Томск: Изд-во Том. гос. ун-та, 2005. – 256 с.
5. Ботаки А.А., Ульянов В.Л., Ларионов В.В., Поздеева Э.В. Основы физики: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 103 с.



## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b> .....	3
<b>1. Гармонические колебания</b> .....	4
1.1. Виды и признаки колебаний.....	4
1.2. Параметры гармонических колебаний.....	6
1.3. Графики смещения скорости и ускорения.....	8
1.4. Основное уравнение динамики гармонических колебаний.....	9
1.5. Энергия гармонических колебаний.....	11
1.6. Гармонический осциллятор.....	13
<b>2. Сложение гармонических колебаний</b> .....	17
2.1. Способы представления гармонических колебаний.....	17
2.2. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения.....	18
2.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.....	22
2.4. Фигуры Лиссажу (частные случаи).....	23
<b>3. Влияние внешних сил на колебательные процессы</b> .....	26
3.1. Свободные затухающие механические колебания.....	26
3.2. Коэффициент затухания и логарифмический декремент затухания.....	27
3.3. Вынужденные механические колебания.....	29
3.4. Автоколебания.....	32
<b>4. Электрические колебания</b> .....	34
4.1. Квазистационарные токи.....	34
4.2. Свободные колебания в электрическом контуре без активного сопротивления.....	34
4.3. Свободные затухающие электрические колебания.....	36
4.4. Вынужденные электрические колебания.....	39
4.5. Мощность, выделяемая в цепи переменного тока.....	42
<b>5. Упругие волны</b> .....	47
5.1. Распространение волн в упругой среде.....	47
5.2. Уравнения плоской и сферической волн.....	48
5.3. Фазовая скорость.....	50
5.4. Принцип суперпозиции. Групповая скорость.....	51
5.5. Стоячие волны.....	55
5.6. Волновое уравнение.....	57
5.7. Эффект Доплера.....	58
<b>6. Электромагнитные волны (ЭМВ)</b> .....	64
6.1. Генерация ЭМВ.....	64
6.2. Дифференциальное уравнение ЭМВ.....	67
6.3. Экспериментальное исследование ЭМВ.....	69
6.4. Энергия и импульс электромагнитного поля.....	73

<b>7. Геометрическая оптика. Корпускулярно–волновая теория света</b> .....	80
7.1. Оптика и ее виды .....	80
7.2. Геометрическая оптика .....	81
7.3. Развитие взглядов на природу света .....	88
<b>8. Волновая оптика. Интерференция света</b> .....	92
8.1. Интерференция световых волн .....	92
8.2. Опыт Юнга .....	95
8.3. Когерентность и монохроматичность .....	97
8.4. Методы наблюдения интерференции .....	99
8.5. Интерференция в тонких пленках .....	102
8.6. Применение интерференции света .....	108
<b>9. Дифракция света</b> .....	112
9.1. Принцип Гюйгенса–Френеля .....	112
9.2. Метод зон Френеля .....	114
9.3. Дифракция Френеля от простейших преград .....	116
9.4. Дифракция в параллельных лучах (дифракция Фраунгофера) .....	118
9.5. Дифракция на пространственных решетках. Дифракция рентгеновских лучей .....	121
9.6. Понятие о голографии .....	124
<b>10. Взаимодействие света с веществом</b> .....	128
10.1. Дисперсия света .....	128
10.2. Нормальная и аномальная дисперсия .....	130
10.3. Классическая теория дисперсии .....	132
10.4. Поглощение (абсорбция) света .....	134
10.5. Излучение Вавилова–Черенкова .....	138
<b>11. Поляризация света</b> .....	141
11.1. Естественный и поляризованный свет .....	141
11.2. Поляризация при отражении и преломлении .....	145
11.3. Двойное преломление света .....	146
11.4. Закон Малюса .....	149
11.5. Интерференция поляризованного света .....	151
11.6. Искусственная анизотропия .....	152
<b>Заключение</b> .....	155
<b>Приложение. Объемные сейсмические волны</b> .....	156
<b>Справочные данные</b> .....	164
<b>Список литературы</b> .....	168

Сергей Иванович Кузнецов

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.  
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ И ВОЛНОВАЯ ОПТИКА

Учебное пособие

Научный редактор кандидат физико-математических наук, доцент  
В.В. Ларионов

Редактор О.Н. Свинцова

Компьютерный набор и верстка: Л. А. Комаров

Подписано к печати 12.04.07. Формат 60x84/16. Бумага «классика».

Печать RISO. Усл. печ. л. 9,88 Уч.-изд. л. 8,95


Заказ № Тираж 150 экз..



Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества



Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2000

Издательство  ТПУ. 634050, Томск, пр. Ленина, 30.