

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Л.К. Бурулько

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

ЧАСТЬ 1

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ
ПЕРЕМЕННОГО ТОКА**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 621.31:519.876(075.8)

ББК 31.2:22.1я73

Б91

Бурулько Л.К.

Б91 Математическое моделирование электромеханических систем: учебное пособие. Часть 1. Математическое моделирование преобразователей электрической энергии переменного тока / Л.К. Бурулько; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 104 с.

В учебно-методическом пособии рассмотрены основные принципы и методы математического моделирования элементов, входящих в силовую часть электромеханических систем переменного тока.

Пособие подготовлено на кафедре электропривода и электрооборудования, соответствует программе дисциплины «Математическое моделирование электромеханических систем» и предназначено для студентов направления 140400 «Электроэнергетика и электротехника».

УДК 621.31:519.876(075.8)

ББК 31.2:22.1я73

Рецензенты

Доктор технических наук, профессор кафедры КИБЭВС
Томского университета систем управления и радиоэлектроники

В.А. Бейнарович

Старший научный сотрудник, кандидат технических наук
13 отдела НИИАЭМ ТУСУРа

Н.А. Михневич

© ФГБОУ ВПО НИ ТПУ, 2014

© Бурулько Л.К., 2014

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2014

ВВЕДЕНИЕ

Автоматизация современных технологических объектов сопровождается применением большого числа электромеханических систем (ЭМС), с помощью которых решаются задачи повышения качества продукции и эффективности технологического оборудования.

Современные электромеханические системы – это динамические системы, характеристики которых изменяются в зависимости от времени и места их использования в составе технологического оборудования. Поэтому оказывается затруднительным расчет требуемых для них управляющих сигналов. При этом системы имеют большое число входов и выходов, так как в состав технологического оборудования могут входить десятки электроприводов, объединенных по цепям управления, питания и нагрузки.

В настоящее время наиболее эффективным и универсальным методом для решения многих задач, возникающих в различных областях человеческой деятельности, является метод математического моделирования.

Современной формой метода математического моделирования, базирующейся на мощной вычислительной базе в виде ЭВМ и программного обеспечения, реализующего алгоритмы численного решения, является вычислительный эксперимент, рассматриваемый как новый теоретический метод исследования различных явлений и процессов. Этот теоретический метод включает существенные черты методологии экспериментального исследования, но эксперименты выполняются не над реальным объектом, а над его математической моделью, и экспериментальной установкой является ПЭВМ или персональный компьютер.

Поэтому владение комплексом знаний и умений, связанных с освоением метода математического моделирования, в настоящее время является необходимым элементом технической культуры и востребованности специалистов на рынке труда, важной частью их профессиональной подготовки и переподготовки.

Эти обстоятельства и являются побудительным мотивом для разработки учебного пособия «Математическое моделирование электромеханических систем» по одноименной дисциплине. Дисциплина «Математическое моделирование электромеханических систем» является общетехнической для бакалаврской подготовки студентов по направлению 140400 «Электроэнергетика и электротехника». Областями профессиональной деятельности для специалистов данного направления под-

готовки являются электромеханика, энергетика и электротехника, где наиболее широко применяются современные взаимосвязанные между собой электромеханические системы.

Указанные области науки и техники, выбраны не случайно, так как именно здесь наиболее эффективно используют исследователи и инженеры при решении задач управления электромеханическими и энергетическими системами метод математического моделирования.

В качестве базового программного обеспечения в учебном пособии при решении задач моделирования использована математическая система MathCAD. При математическом моделировании исследуемых объектов и различного рода систем с использованием системы MathCAD необходимо строго соблюдать порядок выполнения следующих этапов, связанных с разработкой модели, а именно:

- математическое описание динамики объекта анализа и исследования в виде систем дифференциальных и алгебраических уравнений;
- формирование исходных и начальных условий, определяемых физическим смыслом задачи (пуск, реверс, остановка системы, наброс и сброс нагрузки и управление электромеханической или энергетической системой);
- составление математического описания внешних воздействий на электромеханическую и энергетическую систему (управляющие и возмущающие воздействия);
- выбор метода решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений;
- интерпретация результатов математического моделирования (анализ показателей качества динамики электромеханических систем, выработка выводов и рекомендаций по настройке регуляторов и защит).

Несоблюдение последовательности и порядка выполнения вышеперечисленных этапов не позволяет создать работоспособную математическую модель исследуемого объекта и системы в целом в MathCAD.

Глава 1

ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭМС

Для конца XX века характерно широкое использование в самых различных областях человеческой деятельности, особенно в образовании, метода математического познания действительности, а именно изучение реальных объектов или объектов, уже описанных в других областях знаний, с целью их более глубокого познания и решения всех возникающих в этих реальных ситуациях задач с помощью математического аппарата.

Для поддержки метода математического познания (метода математического моделирования) разработаны системы компьютерной математики, например, Maple, Mathematica, MathCAD, MATLAB, VisSim и др. Они позволяют создавать формальные и блочные модели как простых, так и сложных процессов и устройств и легко менять параметры моделей в ходе моделирования.

В учебном пособии отражены возможности для разработки математических моделей электромеханических систем с использованием системы компьютерной математики MathCAD.

1.1. Основные понятия и определения

Основным объектом исследования, изучения с помощью метода математического моделирования являются электромеханические системы, широко используемые в таких областях науки и техники, как энергетика, электромеханика и электротехника.

Электромеханическая система (ЭМС) – это система, осуществляющая преобразование электрической энергии в механическую энергию и наоборот.

Энергетика – это отрасль промышленности, совокупность больших естественных и искусственных подсистем, служащих для преобразования, распределения и использования энергетических ресурсов всех видов. Основная задача энергетики и входящих в нее структур – обеспечение производства электрической или тепловой энергии.

В энергетике с помощью электромеханической системы реализуется преобразование механической и тепловой энергии в электрическую энергию. Основным элементом в энергетической электромеханической си-

стеме (ЭЭМС) является электрический генератор, с помощью которого реализуется принцип электромеханического преобразования энергии [7].

Электромеханика – область науки, изучающая взаимное преобразование механической и электрической энергии, а также преобразование электрической энергии с одними параметрами в электрическую энергию с другими параметрами. В настоящее время основным объектом электромеханики как специфического отдела электротехники является не постройка и эксплуатация электрических двигателей и машин, а создание и эксплуатация электромеханических систем, обеспечивающих движение различных транспортных средств: автомобилей, электровозов, самолетов – и автоматизацию современных технологических объектов.

Электротехника – отрасль науки и техники, связанная с применением электрических и магнитных явлений для преобразования энергии, получения и изменения химического состава веществ, производства и обработки материалов, передачи информации, охватывающая вопросы получения, преобразования и использования электрической энергии в практической деятельности человека.

Моделирование как философская категория – это метод опосредованного познания. Понятие моделирования непосредственно связано с такими понятиями, как оригинал, модель, подобие.

Оригинал – это объект, подлежащий исследованию, т. е. реально существующий или проектируемый объект, а также явление, режим или процесс.

Модель – аналог оригинала, т. е. вспомогательный объект, находящийся в определенном соответствии с оригиналом, но более удобный для решения задачи конкретного исследования.

Между моделью и оригиналом должно существовать известное подобие. Оно заключается или в сходстве физических характеристик модели и оригинала, или в сходстве выполняемых функций, либо в тождестве поведения модели и оригинала. Таким образом, понятие модели всегда требует введения понятия подобия.

Подобие – это взаимно-однозначное соответствие между исследуемым объектом (моделью) и оригиналом, при котором правила перехода от параметров модели к параметрам оригинала известны, а математическое описание допускает их преобразование к тождественному виду.

Моделирование как процесс содержит в себе три элемента:

- субъект (исследователь),
- объект исследования,
- модель, определяющую (отражающую) отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Методы моделирования делятся на две группы: *материальное (предметное)* и *идеальное моделирование*. Материальное моделирова-

ние основано на материальной аналогии объекта и модели. Оно осуществляется с помощью воспроизведения основных геометрических, физических или функциональных характеристик изучаемого объекта.

Физическое моделирование – это частный случай материального моделирования, когда модель и моделируемый объект имеют одну и ту же физическую природу. Физические модели воспроизводят весь комплекс свойств изучаемых явлений. При физическом моделировании в дополнение к геометрическому подобию предусматривается подобие скоростей, сил, материальных сред и т. д.

Математическое моделирование представляет собой группу методов идеального моделирования. Математическое моделирование осуществляется средствами логико-математических построений математических моделей.

Математическая модель – это описание оригинала с помощью математической символики. Это система математических объектов (чисел, переменных, матриц, множеств и т. п.) и отношений между ними, которые характеризуют некоторые свойства оригинала.

Система MathCAD – это уникальная система для работы с формулами, числами, текстами и графиками. MathCAD позволяет записывать на экране компьютера формулы в их привычном виде. С их помощью можно решить почти любую мыслимую математическую задачу в численном или символическом виде.

1.2. Цели и задачи математического моделирования электроэнергетических систем

Компьютер в настоящее время внес радикальные изменения как в управление сложными энергетическими и электроэнергетическими системами и электротехническими устройствами, так и в их автоматизированное проектирование и исследование протекающих в них процессов. Поэтому основная цель дисциплины «Математическое моделирование электроэнергетических систем» – это освоение метода математического моделирования и приобретение практических навыков построения и использования математических моделей электротехнических устройств различных типов для изучения и исследования процессов в энергетических и электроэнергетических системах и электротехнических устройствах электроэнергетики и электроэнергетики.

Все многообразие задач, решаемых путем математического моделирования, в таких дисциплинах, как электротехника, электроэнергетика и электроэнергетика можно свести к следующим основным типам:

- *расчет и проектирование отдельных устройств и элементов электроэнергетических и электротехнических систем и систем в целом;*
- *анализ процессов и явлений, протекающих в системах;*

- *оптимизация устройств и систем;*
- *синтез электромеханических и энергетических систем.*

Расчет и проектирование состоят в определении параметров и характеристик отдельных элементов, звеньев, блоков, устройств, частей системы и всей системы в целом. Для этого на основе определенных физических зависимостей и закономерностей, заложенных в основу их принципа действия, составляются алгоритмы и методики их расчета, позволяющие рассчитать:

- их нагрузочные (внешние) и рабочие характеристики (зависимости) от мощности и иных параметров;
- их амплитудные фазочастотные характеристики и передаточные функции;
- выходные и потребляемые мощности, энергетические показатели и коэффициенты усиления и передачи как отдельных элементов и частей системы, так и системы в целом.

Как правило, наряду с методиками расчета в этом случае формируются базы данных по электротехническим, конструктивным и другим материалам, из которых изготавливаются отдельные устройства систем, а также базы данных по готовым серийным элементам и изделиям.

Задачи анализа сводятся к определению свойств и показателей системы и конкретного ее объекта при изменении их внутренних параметров или внешних воздействий, в исследовании переходных и установившихся режимов работы, условий устойчивости и т. д. Возможны при этом различные виды анализа, а именно:

- анализ системы, ее частей и элементов в частотной области с помощью амплитудных $A(\omega)$ и фазочастотных $\varphi(\omega)$ характеристик;
- анализ во временной области с помощью переходной $h(t)$ и импульсной $w(t)$ характеристик, первая из которых определяется при входном воздействии ступенчатой единичной функции

$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

или воздействием в виде синусоидальной функции

$$x(t) = \sin(\omega \cdot t), \quad (1.2)$$

а вторая – при воздействии единичного δ -импульса (δ -функции);

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0; \end{cases} \quad (1.3)$$

- статистический анализ при случайном изменении и анализ чувствительности при детерминированном изменении параметров элементов системы;

- анализ влияния изменений внешних параметров окружающей среды (температурных, электрических, магнитных, радиационных и других) на выходные статические и динамические характеристики системы в целом и ее отдельных объектов и элементов в частности.

Оптимизация состоит в определении такой оптимальной комбинации значений внутренних параметров элементов и устройств системы и системы в целом при их неизменной структуре, при которой одна или несколько внешних характеристик или параметров объекта исследований имеют наилучшие значения, согласно выбранному критерию. При этом составляется функция цели, в концентрированной форме отражающая конечный смысл решаемой задачи: поиск оптимальной характеристики объекта с учетом определенных ограничений. Поиск же глобального минимума или максимума функции цели, в зависимости от характера решаемой задачи, осуществляется по нескольким методам, составляющим предмет нелинейного программирования.

Синтез заключается в определении структуры проектируемого объекта и значений параметров его элементов, при которых устройство наилучшим образом, согласно выбранному критерию, отвечает необходимым требованиям. Поэтому очень часто оптимизацию рассматривают как частный случай синтеза. Более того, при оптимизации с перебором нескольких, наиболее подходящих для рассматриваемого случая структур исследуемого объекта, она практически смыкается с синтезом. Поэтому оптимизацию называют также параметрическим синтезом.

При математическом моделировании технических систем и электротехнических устройств с использованием схемотехнического подхода, когда составляются расчетных схемы замещения, задачи анализа и синтеза систем можно рассматривать как задачи анализа и синтеза электрических цепей, методы, решения которых разработаны в электротехнике на основе теории электромагнитного поля и теории электрических и магнитных цепей [26].

- Задача анализа электрических цепей (схем) состоит в определении реакции цепи $y(t)$ на заданное внешнее воздействие $x(t)$.
- Задача синтеза цепи заключается в построении цепи по заданной реакции $y(t)$ на некоторое внешнее воздействие $x(t)$.

Исходными данными в задаче анализа в таком случае являются эквивалентная схема с параметрами всех входящих в нее элементов и описание внешнего воздействия $x(t)$, задаваемого в виде совокупности токов и напряжений идеализированных неуправляемых или управляемых источников. В частном случае задача анализа может сводиться к определению соотношений между реакциями цепи на отдельных выходах $y_i(t)$ и воз-

действиями, $x_i(t)$ приложенными к определенным входам. Такие соотношения называются характеристиками (системными функциями, передаточными функциями) цепи. В зависимости от того, какая величина – частота или время – является аргументом в выражениях, описывающих соотношения между откликом и внешним воздействием, различают частотные и временные характеристики. Определение и исследование соответствующих характеристик представляют собой задачу анализа цепи в частотной области или задачу анализа во временной области.

Задачи синтеза цепей сводятся к нахождению цепи, обладающей заданными характеристиками. В том случае, когда синтез цепи ведется по ее частотным характеристикам, его называют синтезом в частотной области, а при синтезе цепи по ее временным характеристикам – синтезом во временной области.

Синтез электрических цепей (схем) показывает, что различные по топологии и типу элементы цепи могут обладать одинаковыми характеристиками. Поэтому решение задачи синтеза, если оно существует, не является единственным.

В связи с этим процесс синтеза обычно совмещают с оптимизацией цепей по какому-либо критерию. В ряде случаев задачи синтеза не имеют решения, а заданная характеристика (схема с заданной характеристикой) не является физически реализуемой. Понятие физической реализуемости имеет смысл только тогда, когда определено, из каких типов идеализированных элементов может состоять синтезируемая цепь. Набор таких элементов называют *элементным базисом цепи*. В зависимости от элементного базиса различают задачи синтеза *реактивных* (составленных только из индуктивностей и емкостей), *безиндуктивных* (составленных только из сопротивлений и емкостей), *безъёмкостных* (составленных только из сопротивлений и индуктивностей), *пассивных* общего вида и *активных* цепей.

Синтез цепи (схемы) осуществляют по входным и передаточным характеристикам, заданным относительно внешних зажимов. Если синтез проводят по входным характеристикам, заданным относительно какой-либо пары зажимов, то искомая цепь (схема замещения) может быть представлена в виде двухполюсника. Если синтез проводится по входным и передаточным характеристикам, заданным относительно двух пар внешних выводов, то синтезируемая цепь представляется в виде четырехполюсника. При большем числе пар выводов, относительно которых задаются характеристики, цепь представляется в виде многополюсника.

Реализация и решение задач анализа и синтеза электрических цепей (схем замещения технических и физических систем) требуют выполнения следующих основных этапов.

Для задач анализа:

- провести математическое описание процессов с использованием электрической схемы замещения в исследуемой технической системе;
- выполнить решение уравнений, с помощью которых проведено описание процессов.

Для задач синтеза:

- определить минимальное число элементов определенного типа и значения параметров реализуемой цепи (системы);
- осуществить переход от эквивалентной схемы замещения к реальной принципиальной схеме, что составляет задачу *технической реализации*, которая выходит за рамки теории цепей.

1.3. Моделирование как метод исследования и метод научного познания

Моделирование как метод исследования является мощным инструментом познания на протяжении всей истории развития человечества. Одним из примеров созданной человеком системы моделей, адекватно отражающей широкий класс явлений и процессов реального мира, являются модели классической механики.

Моделирование как инструмент познания требует творческого подхода и определенного искусства владения им. С другой стороны, моделирование как наука опирается на научные знания той области, где этот инструмент познания используется.

Моделирование как метод научного познания основан на изучении каких-либо объектов посредством их моделей. Появление этого метода вызвано тем, что иногда изучаемый объект или явление оказываются недоступными для прямого вмешательства познающего субъекта или такое вмешательство по ряду причин является нецелесообразным.

Примером этому служит социальный заказ – выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, которые не могли быть реализованы традиционными методами. Математическое моделирование справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полеты ракет и спутников предварительно осуществлены в недрах ЭВМ с помощью математических моделей и лишь затем претворены в практику.

При использовании методов моделирования в электромеханике, энергетике и электротехнике, как показывает практика, наиболее эффективным и универсальным инструментом исследователя и инженера при решении задач анализа, синтеза и управления электромеханическими и энергетическими системами и установками является *метод математического моделирования*.

Одним из примеров этого является удачный выбор математической модели асинхронного двигателя с преобразованием координат и ориентацией системы координат по вектору потокосцепления ротора. В результате на основе этой модели был разработан новый эффективный технический принцип *ориентации по полю* и были созданы известные высококачественные системы регулирования TRANSVEKTOR, представляющие собой значительный этап развития электроприводов переменного тока.

Сам процесс исследования методом математического моделирования можно разбить на четыре этапа. На *первом* этапе осуществляется построение математической модели в результате математической формулировки задачи. На *втором* этапе выбирается или разрабатывается метод исследования (аналитический, численный, точный, приближенный и т. д.) системы. На *третьем* этапе осуществляют исследование на математических моделях с целью получения определенных результатов. На *четвертом* этапе проводят анализ полученных результатов и дают их интерпретацию с точки зрения реальной системы и возможности понимания и улучшения ее свойств.

Достоинствами метода математического моделирования является то, что модель представляет собой формализованную запись тех или иных законов природы, управляющих функционированием системы. Однако определенные трудности возникают при попытке построения математической модели очень сложной системы.

Математическое моделирование технических объектов с использованием ЭВМ и персональных компьютеров опирается на взаимосвязь фундаментальных наук – физики и математики – с развивающимися прикладными науками – численным анализом и информатикой.

1.4. Общие вопросы математического моделирования

Основой для построения математических моделей электромеханических систем служат физические законы, определяющие принципы функционирования этих систем и их элементов. При этом в зависимости от поставленной задачи необходимо выделить те законы, которые существенным образом влияют на важнейшие характеристики исследуемого объекта, и отказаться от учета второстепенных факторов, не усложняя модель без необходимости.

Затем принятые во внимание физические закономерности необходимо математически описать. В зависимости от степени детализации рассматриваемых физических процессов математические модели технических систем принято делить на три уровня, а именно: математические модели *макроуровня*, *микроуровня* и *метауровня*.

Математическое моделирование электромеханических систем на *макроуровне* реализуется с использованием систем обыкновенных диф-

ференциальных уравнений с заданными начальными условиями. Системы уравнений формируются на основе так называемых компонентных уравнений, описывающих физические законы функционирования отдельных элементов, и топологических уравнений связи между элементами электромеханической системы. В качестве независимых переменных фигурирует время, а зависимыми переменными являются электрические напряжения и токи, силы, скорости, температуры и т. д. Они характеризуют проявление внешних свойств элементов при взаимодействии между собой и внешней средой в схемах или конструкциях.

С помощью таких моделей исследуются установившиеся и переходные (динамические) режимы работы отдельных объектов и электромеханических систем в целом.

При математическом моделировании на *микроуровне* основой являются системы дифференциальных уравнений с частными производными, описывающие процессы в физических средах с заданными граничными условиями. Независимыми переменными в таких моделях являются пространственные координаты и время. В качестве зависимых переменных выступают фазовые переменные, такие как потенциалы, напряженности полей и т. д. С помощью таких моделей рассчитываются электрические, магнитные, тепловые поля и т. д.

На *метауровне* с помощью дальнейшего абстрагирования от характера физических процессов удается получить приемлемое по сложности описание информационных процессов, протекающих в объектах. При этом в качестве элементов принимают достаточно сложные совокупности деталей. В моделях не описываются внутренние для элементов фазовые переменные, а фигурируют только фазовые переменные, относящиеся к взаимным связям элементов. Для многих объектов модели на метауровне по-прежнему представляются системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

На метауровне в основном моделируют две категории технических объектов: объекты, являющиеся предметом исследования теории автоматического управления, и объекты, являющиеся предметом исследований теории массового обслуживания.

В любом случае важно, чтобы в окончательной формулировке система уравнений математической модели со всеми начальными, граничными и другими дополнительными условиями имела единственное решение.

Наиболее существенное влияние на процесс математического моделирования оказывает выбор соответствующих методов решения уравнений математической модели. Для задач, которые в настоящее время представляют интерес при исследовании, анализе, синтезе и проектировании электромеханических систем, редко удается получить решение в аналитическом виде. В основном оно находится приближенно с ис-

пользованием методов аппроксимации и численного анализа. С развитием средств вычислительной техники и прикладного программного обеспечения, с использованием «компьютерной математики», численный анализ практически вытеснил другие классические методы решения уравнений. В настоящее время он является важнейшим инструментом математического моделирования при разработке математических моделей технических систем, а поэтому ему уделяется особое внимание.

Заключительным этапом построения математической модели является подготовка алгоритма и пользовательской программы с учетом типа ЭВМ, характерных ее особенностей и прикладного программного обеспечения типа MathGAD, MatLAB, Elcut, Multisim и т. д.

Схему построения математической модели любого элемента электромеханической системы можно представить в следующем виде (рис. 1.1).

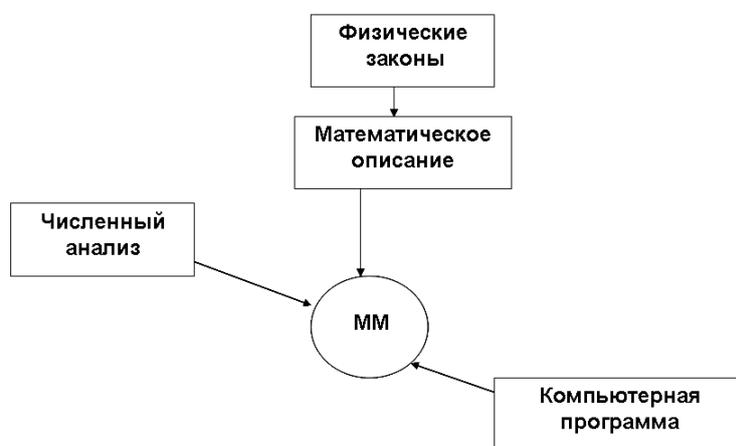


Рис. 1.1. Схема построения математической модели

Используя интерфейсный подход при рассмотрении современных электромеханических систем (современный автоматизированный электропривод), структуру их можно представить в виде рис. 1.2 [1].

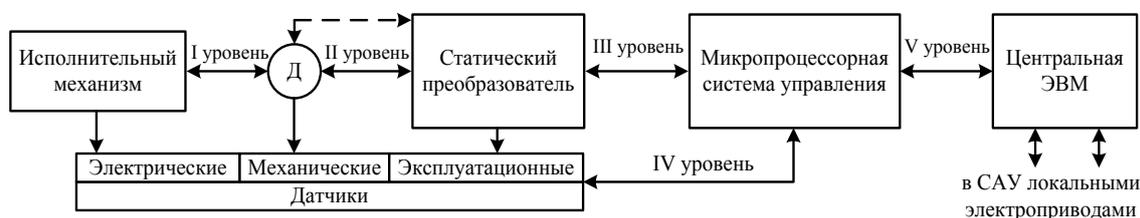


Рис. 1.2. Структура многоуровневой системы интерфейсов электропривода

Интерфейсный подход позволяет определить возможности и требования для разработки математических моделей как отдельных элементов системы, так и системы в целом. Для интерфейсов I, II, III уровня, где реа-

лизуются механико-энергетические, электроэнергетические взаимодействия и локальное управление и регулирование параметров энергетического канала привода, можно разработать математические модели как для отдельных элементов энергетического канала, так и для всей его структуры.

Изучение и исследование процессов в энергетическом канале привода приводит к необходимости создания и построение обобщенной модели объекта, отражающей важнейшие факторы и взаимосвязи. На практике это комплекс моделей с развитыми динамическими и информационными связями между ними в соответствии с блок-схемой рис. 1.3.

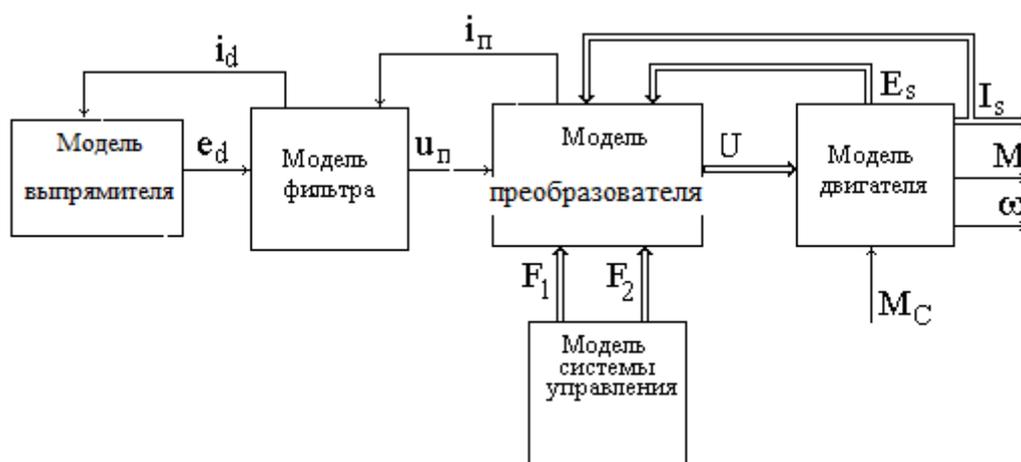


Рис. 1.3. Блок-схема модели энергетического канала электропривода

Математическое моделирование элементов, входящих в состав интерфейсов IV, V уровня, также реализуют как определенную взаимосвязанную между собой группу моделей. Однако процессы в структурной модели данной части системы рассматривают вне зависимости от процессов в энергетическом канале.

При математическом моделировании в электромеханических системах надо хорошо знать возможности отдельных компонентов системы. Так для энергетического канала характерно наличие нижеследующих компонентов [21].

Преобразователи электроэнергии (статические преобразователи), которые выполняются главным образом как полупроводниковые преобразователи в виде неуправляемых и управляемых выпрямителей, автономных инверторов напряжения и тока, инверторов, ведомых сетью, преобразователей частоты с непосредственной связью, фильтрокомпенсирующих устройств. Виды преобразователей и их комбинации определяются типом электродвигателя и задачами управления, мощностью,

диапазоном регулирования, необходимостью рекуперации энергии в сеть, влиянием преобразователей на питающую сеть.

Электромеханические преобразователи (ЭМП). Развитие ЭМП происходит в направлениях: конструирование машин с учетом их совместной работы с управляемыми полупроводниковыми преобразователями; применение новых магнитных материалов; разработка разнообразных гибридных электромеханических преобразователей, совершенствование или исключение контактных узлов; использование интенсивных методов охлаждения машин; развитие работ по высокотемпературной сверхпроводимости.

Механические преобразователи. Тенденции развития механических преобразователей связаны с упрощением механических компонентов технологического оборудования и усложнением электротехнических компонентов. При проектировании нового технологического оборудования стремятся к использованию «коротких» механических передач и безредукторных электроприводов.

Информационные устройства. Это устройства преобразования, хранения, распределения и выдачи информации, которые входят в состав модулей программируемых контроллеров.

В современном оборудовании контролю подвергаются: температура в коммутационных аппаратах, узлах электродвигателей, управляемых преобразователях, опорах механизмов; уровни вибраций во всех функционально значимых механических узлах системы; зазоры в механических передачах; усилия и упругие моменты в механизмах; износ технологического оборудования.

Компьютерные системы управления электроприводами, механизмами, технологическими агрегатами и комплексами выполняются по единой идеологии с гибким варьированием аппаратных и программных средств. В общем случае в состав систем входят: программируемые контроллеры, модули интеллектуальной периферии, системы визуализации и обслуживания, средства коммутаций, программаторы, персональные компьютеры.

При математическом моделировании каждого из перечисленных компонентов модель разрабатывается в соответствии со схемой рис. 1.1.

Методологической же основой моделирования любой электромеханической системы является системный анализ, центральной процедурой которого является построение обобщенной (единой) модели объекта.

В настоящем пособии рассмотрены и представлены следующие модели силовой части электропривода: математические модели электромеханических преобразователей энергии постоянного и переменного тока; математические модели силовой части полупроводниковых пре-

образователей энергии и модели систем управления полупроводниковыми преобразователями.

1.5. Классификация математических моделей

Классификация математических моделей является условной, так как зависит от области применения этих моделей, методов разработки и реализации и т. д. Классификация затруднена также тем фактом, что, как правило, одна и та же модель отвечает различным классификационным признакам.

Область применения рассматриваемых в учебном пособии моделей определяется ранее перечисленными задачами (п. 1.2 настоящего пособия), которые решаются в таких отраслях науки и техники, как электромеханика, энергетика и электротехника.

Математические модели, используемые в системах автоматизированного проектирования электромеханических систем (САПР ЭМС), по характеру отображаемых свойств объекта делятся на **структурные** и **функциональные модели**.

Структурные модели представляют объект как систему со своим устройством и механизмом функционирования и предназначены для отображения структурных свойств объекта. Различают структурные **топологические** и **геометрические** модели. В **топологических** моделях отображается состав и взаимосвязи элементов объекта. Топологические модели могут иметь форму графов, таблиц (матриц), списков и т. д.

В **геометрических** моделях отображают не только взаимное расположение элементов объекта в пространстве, но и геометрические свойства объектов. Геометрические модели могут быть представлены в аналитической (как совокупность уравнений, линий и поверхностей), алгебрологической, каркасной и кинематической форме. Геометрические модели применяются при решении задач конструирования.

Структурные модели делятся на иерархические уровни. На низших иерархических уровнях преобладают геометрические модели, а на высших – топологические модели.

К структурным моделям ЭМС можно отнести кинематические схемы механических подсистем и структурные схемы систем управления, выполненные по принципу подчиненного регулирования [18, 22].

Функциональные математические модели предназначены для отображения физических или информационных процессов, протекающих в электромеханической системе и ее элементах при их функционировании.

Как правило, функциональные модели более сложные, чем структурные, так как в них отражаются и сведения о структуре объектов.

Обычно функциональные модели представляют собой системы уравнений, решение которых дает значения фазовых переменных в установившихся состояниях и в переходных режимах.

Примером функциональной модели является система уравнений (1.4), описывающая динамические процессы, при параллельном включении преобразователей, работающих на один двигатель [21]:

$$\begin{aligned} e_1 - u_{\text{пр}} &= (R_1 + L_1 p)i_1, \quad e_2 - u_{\text{пр}} = (R_2 + L_2 p)i_2; \\ u_{\text{пр}} - e_{\text{я}} &= (R_{\text{я}} + L_{\text{я}} p)i_{\text{я}}; \\ i_{\text{я}} &= i_1 + i_2, \quad e_{\text{я}} = c_{\text{д}}\omega, \quad M = c_{\text{д}}i_{\text{я}}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $e_1, e_2, i_1, i_2, R_1, R_2, L_1, L_2$ – ЭДС и токи, сопротивления и индуктивности, параллельно включенных преобразователей, работающих на один двигатель; $u_{\text{пр}}, e_{\text{я}}, i_{\text{я}}, R_{\text{я}}, L_{\text{я}}$ – напряжение, подведенное к обмотке якоря двигателя, ЭДС, ток, сопротивление и индуктивность обмотки якоря; $c_{\text{д}}, M, \omega$ – коэффициент связи и электромагнитный момент двигателя постоянного тока, частота вращения якоря.

Функциональные модели делятся на *аналитические* и *алгоритмические*.

Аналитические модели представляют собой явные выражения выходных параметров как функций входных (1.5). Однако получить такие выражения можно лишь при принятии существенных допущений и ограничений, снижающих точность и сужающих область адекватности моделей.

$$Y = F(X, Q), \quad (1.5)$$

где $Q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$ – вектор внешних воздействий, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ – вектор выходных параметров, $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – вектор внутренних параметров.

Система соотношений (1.5) является примером математической модели объекта. Однако получить модель такого вида удастся только для очень простых объектов. Чаще математическое описание объекта задается в форме системы уравнений, в которой фигурирует вектор фазовых переменных V :

$$LV(Z) = f(Z). \quad (1.6)$$

Здесь L – некоторый оператор, Z – вектор независимых переменных, в общем случае включающий время и пространственные координаты, $f(Z)$ – заданная функция независимых переменных.

Фазовые переменные характеризуют физическое или информационное состояние объекта, а их изменения во времени – переходные процессы в объекте.

Алгоритмическая модель – математическая модель, представленная в форме алгоритма, перерабатывающего множество входных данных во множество выходных. Они выражают связи выходных параметров с внут-

ренными и внешними параметрами в форме алгоритма. Алгоритмической моделью является система уравнений (1.6), дополненная алгоритмом выбранного численного метода решения и алгоритмом вычисления вектора выходных параметров как функционалов решения системы уравнений $V(Z)$.

Среди алгоритмических моделей важный класс составляют **имитационные модели**, предназначенные для имитации физических или информационных процессов в объекте при задании различных зависимостей входных воздействий от времени. Примерами имитационных моделей являются модели электронных схем в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений или модели систем массового обслуживания, предназначенные для имитации процессов прохождения заявок через систему.

В соответствии с видом модели используются различные формы их представления:

- **инвариантная форма** (запись соотношений модели с помощью традиционного математического языка, независимого от метода решения уравнений модели);
- **аналитическая, алгоритмическая форма** (запись соотношений модели и выбранного численного метода решения в форме алгоритма);
- **схемная (графическая) форма** (представление модели на некотором графическом языке, например на языке графов, эквивалентных схем и т. д.).

Если состояние системы меняется со временем, то модели называют **динамическими**, в противном случае – **статическими**.

Динамические модели используются при анализе переходных процессов в системе, при синтезе систем с требуемыми динамическими показателями качества и разработке систем управления объектом регулирования. **Статические модели** позволяют рассчитать статические характеристики и провести анализ установившихся (стационарных) процессов в системах.

В зависимости от используемого математического аппарата математические модели подразделяются на **детерминированные**, в которых при изменении любого параметра системы значения выходных величин определяется однозначно, и **статистические**, в которых результат определяется с определенной степенью достоверности, т. е. неоднозначно, определяется заданными параметрами.

1.6. Классификация электромеханических систем

Электромеханические системы принято подразделять на **общепромышленные системы**, с помощью которых решаются задачи повышения качества продукции и эффективности технологического оборудования, и **системы автоматики**. Различие между ними в выполняемых функциях и задачах проектирования.

Главной задачей общепромышленных ЭМС является обеспечение силовых характеристик – момента, тока, КПД, $\cos\varphi$ и т. п. Одной из важнейших проблем при разработке общепромышленных ЭМС является выбор преобразовательного устройства, способного обеспечить требуемые напряжения (амплитуды, частоты) и токи питания, без чего невозможно управление двигателем. В общепромышленных ЭМС часто используются двигатели большой мощности – более 10 кВт.

ЭМС автоматики являются составной частью систем автоматического управления более высокого уровня. Они отличаются обычно меньшими значениями мощности, повышенными требованиями к качеству регулирования, являются преимущественно замкнутыми. Обычно используются сравнительно маломощные электродвигатели – до 10 кВт. При проектировании ЭМС автоматики наибольшую проблему представляет обеспечение показателей качества регулирования. Поэтому они имеют более сложные структуры, большее разнообразие управляющих устройств и датчиков. Ввиду малой мощности двигателей выбор преобразовательного устройства не представляет сложности и главной задачей становится разработка устройства управления.

Поскольку большинство типов электродвигателей выпускается на самые разные мощности, принципы работы как общепромышленных ЭМС, так и ЭМС автоматики в целом одинаковы.

ЭМС можно классифицировать по различным признакам. Основными из них являются:

- наличие обратных связей (разомкнутые или замкнутые системы);
- по основной управляемой координате (позиционные, скоростные и моментные системы);
- по типу используемого двигателя (постоянного тока, асинхронные, синхронные и др.);
- по типу преобразовательного устройства (тиристорные или транзисторные электропривода, система «управляемый выпрямитель – двигатель», система «преобразователь частоты – двигатель», система «генератор – двигатель», система «магнитный усилитель – двигатель» и др.);
- по возможности регулирования – регулируемые и нерегулируемые;
- по способу управления двигателем;
- по принципу построения замкнутых систем.

Разомкнутые системы и замкнутые ЭМС существенно отличаются друг от друга. В разомкнутых системах отсутствуют датчики, и поэтому точность регулирования невысока. При этом используются системные свойства самого электродвигателя, который сам по себе уже является электромеханической системой с внутренними электромагнитными связями. Поэтому даже без датчиков и регуляторов двигатель способен поддерживать заданную скорость в переходных и установившихся ре-

жимах, хотя и не всегда с требуемой точностью. При моделировании в разомкнутых системах отрабатываются способы управления двигателями, которые затем используются в замкнутых ЭМС.

Основным принципом построения замкнутых систем является принцип обратной связи. По сложности структуры замкнутые системы можно разделить на две группы:

- одноконтурные электромеханические системы;
- многоконтурные электромеханические системы.

Структура одноконтурной системы показана на рис. 1.4.

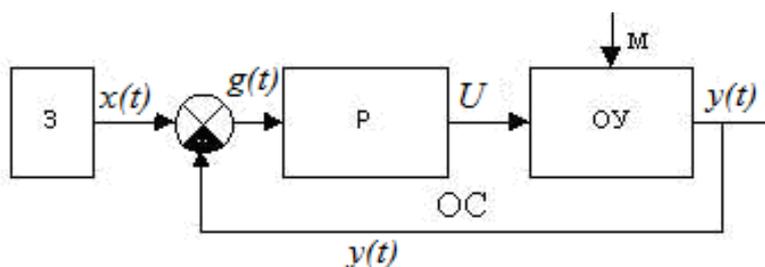


Рис. 1.4. Структурная схема одноконтурной системы

Основными элементами этой структуры являются задатчик (З), регулятор (Р) и объект управления (ОУ). Система обеспечивает стабилизацию регулируемой величины $y(t)$ или обработку различных типов задающих воздействий $x(t)$. В функции регулятора входит преобразование информации об ошибке $g(t) = x(t) - y(t)$ в управляющий сигнал U в соответствии с законом (алгоритмом) управления.

Более сложными являются многоконтурные системы, структура которых показана на рис. 1.5.

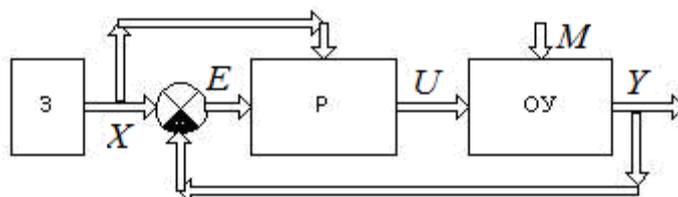


Рис. 1.5. Структурная схема многоконтурной системы

Такие системы, кроме информации об основной регулируемой переменной, используют измерение других координат, вектора состояния Y и вектора внешних воздействий M . В электромеханических системах получил распространение определенный класс многоконтурных систем – систем подчиненного управления, структурная схема которых показана на рис. 1.6.

В этих системах объект и регулятор разбиваются на ряд последовательных звеньев, и структура содержит ряд вложенных друг в друга контуров управления.

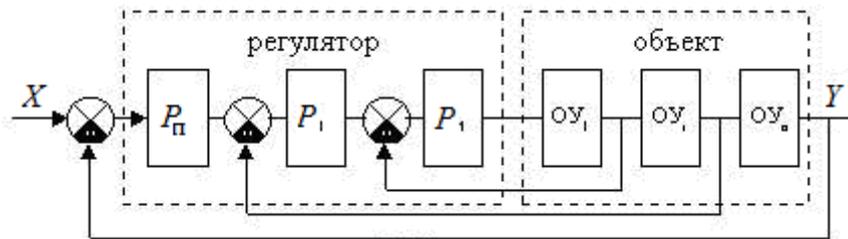


Рис. 1.6. Структурная схема системы подчиненного управления

Для вращающегося двигателя естественной управляемой координатой обычно является скорость (только у шаговых двигателей – угол поворота). Поэтому все разомкнутые ЭМС – скоростные.

В тех случаях, когда требуется обеспечить перемещение в заданную точку пространства, для этого служат позиционные ЭМС. В них управляемой координатой является угол поворота. Типичным представителем позиционных систем является следящий электропривод. Позиционные ЭМС всегда должны быть замкнутыми (кроме ЭМС с шаговыми двигателями), так как без датчика угла поворота невозможно определить тот момент времени, когда следует приложить напряжение питания, а когда его снять.

Механизмы, в которых требуется создавать некоторое усилие, например прессы, вибраторы, устройства для прижимания деталей, удержания предметов на весу и т. п., оснащаются моментными системами. В качестве силового элемента в них часто используются вращающиеся двигатели, но в режиме работы на упор, т. е. без вращения ротора. Они строятся несколько иначе, чем обычные ЭМС перемещений. Моментные ЭМС всегда замкнутые, с обратными связями по току и специальными преобразовательными устройствами (усилителями мощности). В них, кроме обычных двигателей, используются двигатели специального исполнения, также называемые моментными двигателями. Они спроектированы с учетом повышенного нагрева обмоток.

Способ управления системы связан с типом двигателя. Он значительно предопределяет возможные варианты построения замкнутых электромеханических систем.

Например, в ЭМС с двигателем постоянного тока имеется только одна управляющая координата – ток или напряжение питания.

В ЭМС с асинхронным двигателем могут быть три управляющих координаты (амплитуда, частота, фаза питающих напряжений). Причем может быть как любая одна, так и любые две и, наконец, все три управляющие координаты. Получается вектор управляющих координат. Формировать управление и анализировать процессы в таком случае значительно сложнее. Аналогично – в случае ЭМС с синхронным двигателем.

Глава 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ЭНЕРГИИ

Окружающий человека мир природных и технических систем состоит из преобразователей энергии, вещества и информации. Важной частью этого мира являются электромеханические преобразователи, которыми используется более 60 % всей производимой электроэнергии.

2.1. Электромеханический преобразователь энергии

Основным элементом современной ЭМС является управляемый электромеханический преобразователь энергии. Электромеханический преобразователь энергии (ЭМП) представляет собой сложный технический объект, функционирующий на основе многих физических законов, принципиальное значение из которых имеют законы электромагнетизма и механики. На их основе осуществляется принцип электромеханического преобразования энергии. Принцип электромеханического преобразования энергии базируется на электромагнитном взаимодействии электрического тока и магнитного поля (закон электромагнитной индукции и закон Ампера) и втором законе Ньютона (законе равновесия моментов и сил).

Если электрическая энергия преобразуется в механическую работу и тепло, тогда ЭМП является электрическим двигателем (ЭД). Когда механическая работа преобразуется в электрическую энергию и тепло, тогда ЭМП является электрическим генератором (ЭГ); когда электрическая энергия одного вида преобразуется в электрическую энергию другого вида, тогда ЭМП является электромеханическим преобразователем электрической энергии (ЭМПЭЭ), и когда механическая и электрическая энергии преобразуются в тепло, тогда ЭМП является электромагнитным тормозом (ЭМТ).

Поскольку в процессе преобразования энергии соблюдается закон сохранения энергии, то можно записать уравнение баланса энергии:

$$\text{энергия на входе} = \text{энергия на выходе} + \text{запасенная энергия} + \text{потери энергии.}$$

Если электромеханический преобразователь энергии работает в режиме двигателя, то *энергия на входе* – электрическая, *энергия на вы-*

ходе – механическая, *запасенная энергия* связана с накопителями энергии магнитного поля, *потери энергии* – тепловая энергия, возникающая вследствие потерь в проводниках (электрические потери), магнитопроводе (магнитные потери), на трение в подшипниках и вращающихся частях в воздухе (механические потери).

Общая функциональная схема электромеханического преобразователя как системы может быть представлена в следующем виде (рис. 2.1).

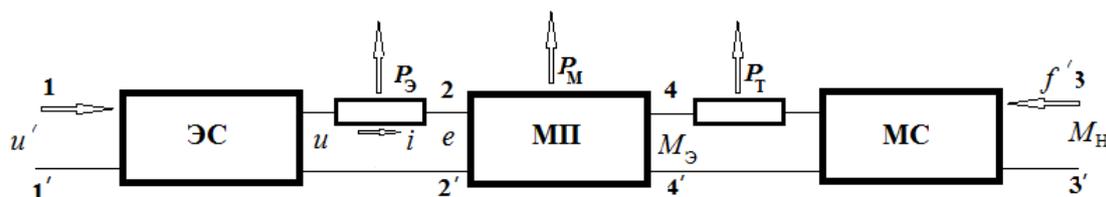


Рис. 2.1. Функциональная схема электромеханического преобразователя

На схеме показаны составляющие системы и их связи, а именно: ЭС – электрическая часть системы; МС – механическая часть системы; МП – магнитное поле связи в пространстве, разделяющем неподвижную и подвижную части преобразователя. Далее 11' – электрический вход (электрические зажимы), 22' – электрический вход магнитного поля связи, 33' – механический вход (вал для вращающегося преобразователя), 44' – механический вход магнитного поля связи, $P_Э$ – электрические потери, $P_М$ – магнитные потери, $P_Т$ – механические потери; со стороны электрических зажимов обозначения переменных обычные – u , i , e (соответственно напряжение, ток, электродвижущая сила), со стороны механических – это ν , f (или ω , $M_Н$) – скорость и сила соответственно (или угловая скорость и момент нагрузки). В поле связи формируется электромагнитный момент двигателя $M_Э$. *Пространство, разделяющее неподвижную и подвижную части преобразователя, называют рабочим зазором.*

Преобразование энергии в рассматриваемой системе полагает присутствие в зазоре, в соответствии с определением вектора *Пойнтинга*, и электрического, и магнитного поля. Но, когда внутренняя среда преобразователя является ферромагнитной, он определяется как магнитный.

В электротехнике выделяют два подхода к изучению (описанию и анализу) типичных явлений в электротехнических устройствах – это *теория электрических цепей* и *теория электромагнитного поля*. При математическом моделировании ЭМП ограничиваются часто использованием теории электрических цепей и соответствующих ей по формальному описанию методами анализа теории магнитных цепей. Эти разделы электротехники совместно устанавливают необходимое единство электрических и магнитных явлений в электромеханических преобразователях.

Для большинства ЭМП выделяют вращающуюся (подвижную) часть и неподвижную часть, а также воздушный зазор, их разделяющий. Что является общим характерным конструктивным признаком электро-механических преобразователей энергии. На подвижной и неподвижной части преобразователя в пазах размещаются обмотки с некоторым числом контуров s [3]. На рис. 2.2. показан пример такого ЭМП с общим числом контуров $s = 6$.

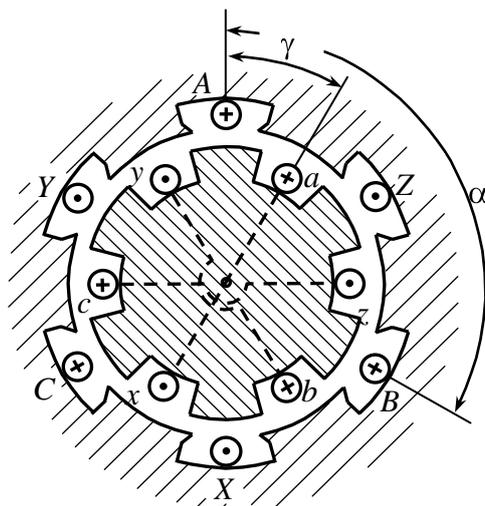


Рис. 2.2. Многообмоточная вращающаяся электрическая машина.

Три контура (фазы) находятся на неподвижной части (статоре) – $AХ$, $ВУ$, $СZ$, а другие три контура на вращающейся части (роторе) – $ах$, by , $сz$.

При допущении о бесконечно большой проницаемости материала магнитопровода электромагнитные процессы в таком ЭМП описываются системой уравнений Кирхгофа для контуров обмоток. Механические процессы, связанные с движением вращающейся части машины (ротором), описываются уравнением движения ротора, которое составляется на основе закона равновесия моментов.

Потокосцепление любого k -го контура равно сумме потокосцеплений, создаваемых током этого контура, и потокосцеплений от взаимной индукции с другими контурами:

$$\Psi_k = \Psi_{kk} + \sum_{n=1}^s \Psi_{kn} = L_{kk}i_k + \sum_{n=1}^s L_{kn}i_n, \quad (2.1)$$

где $\Psi_{kk} = L_{kk}i_k$ – потокосцепление рассматриваемого контура, создаваемого его током; L_{kn} – взаимные индуктивности k -го контура со всеми остальными контурами обмоток статора и ротора; i_n – токи во всех контурах обмоток, кроме k -го контура.

Полное потокосцепление многофазной обмотки представляют обычно в виде суммы главного потокосцепления и потокосцепления рассеяния.

Главное потокосцепление многофазной обмотки обусловлено созданным ею основным магнитным полем, замыкающимся через воздушный зазор и сцепленным с обеими обмотками машины. Потокосцепление рассеяния обусловлено той частью магнитного поля рассеяния, которая сцеплена с данной обмоткой и замыкается в основном по воздуху.

Индуктивность контура (фазы) L_{kk} определяется потокосцеплением, образованным током в этой фазе, и включает в себя индуктивность от полей рассеяния L_{ks} , т. е.

$$L_{kk} = L_{km} + L_{ks}, \quad (2.2)$$

где L_{km} – индуктивность от основного потока, когда его ось совпадает с осью контура (фазы).

Взаимные индуктивности L_{kn} определяются потокосцеплениями, образованными токами, протекающими во всех контурах (фазах), кроме k -го контура. При этом различают взаимные индуктивности между контурами (фазами) только обмотки статора и между контурами обмоток статора и ротора.

Взаимные индуктивности L_{kn} между контурами (фазами) обмотки статора можно представить через значение индуктивности L_{km} с учетом их пространственного сдвига α по расточке магнитопровода в виде

$$L_{kn} = L_{km} \cos \alpha_{AN}. \quad (2.3)$$

Взаимные индуктивности L_{kn} между контурами (фазами) обмотки статора и ротора зависят от косинуса электрического угла между их осями

$$L_{kn} = L_{km} \cos \gamma_{AN}. \quad (2.4)$$

При рассмотрении и определении потокосцеплений и взаимных индуктивностей между контурами (фазами) обмотки статора их индексы обозначают большими буквами латинского алфавита, например

$$L_{AB} = L_{km} \cos \alpha_{AB}.$$

В том случае, когда определяют потокосцепление и взаимные индуктивности между контурами (фазами) обмоток статора и ротора, то индексы контура вторичной обмотки обозначают малыми буквами латинского алфавита, так, например,

$$L_{Ab} = L_{km} \cos \gamma_{Ab}.$$

Главную индуктивность контура (фазы) от основного потока обмотки статора количественно определяют, например, для первого контура по выражению [5, 8, 17, 26]:

$$L_{1m} = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} W_1 k_{\text{об1}}^2 \frac{\tau l}{\delta k_\delta}. \quad (2.5)$$

Из этого выражения видно, что она зависит от геометрических размеров области зазора (l , τ , δ , k_δ), магнитных свойств среды зазора (μ_0) и обмоточных данных обмотки статора (p , W_1 , $k_{\text{об}}$). В случае равномерного зазора она зависит от взаимного расположения фаз и не зависит от взаимного расположения статора и ротора.

Максимальную взаимную индуктивность между контурами (фазами) обмоток статора и ротора определяют по выражению

$$L_{1m} = \frac{4\mu_0}{p\pi^2} W_1 k_{\text{об1}} W_2 k_{\text{об2}} \frac{\tau l}{\delta k_\delta}. \quad (2.6)$$

При этом оси, например, контуров фаз A и a обмоток статора и ротора совпадают и электрический угол между ними равен $\gamma_{Aa} = 0$.

Из выражения (2.4) видно, что при вращении ротора с угловой скоростью ω угол $\gamma_{Ab} = \omega pt$ линейно возрастает, а взаимная индуктивность L_{kn} изменяется гармонически.

В общем случае все индуктивности L_{kk} и взаимные индуктивности L_{kn} , как показано выше, зависят от размеров обмоток и магнитопроводов и являются функциями углового положения ротора $L_{kn} = f(\gamma)$. Система же уравнений Кирхгофа, с помощью которых описываются процессы в контурах обмоток статора и ротора, состоит из s уравнений, составленных для каждого контура.

Для k -го контура уравнение равновесия напряжений имеет вид

$$u_k = R_k i_k + \frac{d\Psi_k}{dt} = R_k i_k + \sum_{n=1}^s \left(L_{kn} \frac{di_n}{dt} + i_n \omega \frac{dL_{kn}}{d\gamma} \right), \quad (2.7)$$

где $L_{kn} \frac{di_n}{dt}$ – трансформаторная ЭДС, связанная с изменением тока в

k -м контуре; $i_n \frac{dL_{kn}}{dt} = -i_n \omega \frac{dL_{kn}}{d\gamma}$ – ЭДС вращения, связанная с изменением взаимной индуктивности с n -м контуром (при $n \neq k$) или с изменением индуктивности k -го контура (при $n = k$).

Трансформаторная ЭДС имеет ту же природу, что и ЭДС во взаимноподвижных обмотках трансформатора. ЭДС вращения появляется только при вращении ротора с некоторой угловой скоростью $\omega = \frac{d\gamma}{dt}$.

Все уравнения равновесия напряжений в контурах записываются через мгновенные значения токов, напряжений и ЭДС. Такая форма за-

писи уравнений наиболее полно и точно отражает физические процессы в электрической машине. Для контуров, присоединенных к внешней электрической сети, напряжение u_k принимается как ЭДС этой сети. Для короткозамкнутых контуров обмотки ротора $U_k = 0$.

Исходя из закона сохранения энергии, можно выразить величину механической мощности, полученную в результате преобразования электрической мощности, потребляемой машиной из сети. Для этого следует определить значение мгновенной электрической мощности, поступающей в контур k из сети,

$$p_k = u_k i_k = R_k i_k^2 + i_k \sum_{n=1}^s L_{kn} \frac{di_n}{dt} + i_k \omega \sum_{n=1}^s i_n \frac{dL_{kn}}{d\gamma}. \quad (2.8)$$

Суммируя мощности всех контуров, находят полную мгновенную электрическую мощность, поступающую в машину

$$\sum_{k=1}^s p_k = \sum_{k=1}^s R_k i_k^2 + \sum_{k=1}^s i_k \sum_{n=1}^s L_{kn} \frac{di_n}{dt} + \omega \sum_{k=1}^s i_k \sum_{n=1}^s i_n \frac{dL_{kn}}{d\gamma}. \quad (2.9)$$

Анализ этого уравнения показывает, что часть мощности, а именно

$$p_\rho = \sum_{k=1}^s R_k i_k^2,$$

выделяется в виде тепла в активных сопротивлениях R_k контуров и представляет собой потери мощности. Другая ее часть идет на изменение энергии магнитного поля вследствие изменения токов в контурах и индуктивностей и преобразуется в механическую мощность.

Представим энергию магнитного поля, запасенную во всех контурах (фазах) машины, в виде

$$W_M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s i_k \sum_{n=1}^s i_n L_{kn}. \quad (2.10)$$

Для изменения этой энергии необходимо израсходовать мощность

$$p_W = \frac{dW_M}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^s i_n \sum_{k=1}^s L_{kn} \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s i_k \sum_{n=1}^s L_{kn} \frac{di_n}{dt} + \frac{1}{2} \omega \sum_{k=1}^s i_k \sum_{n=1}^s i_n \frac{dL_{kn}}{d\gamma}. \quad (2.11)$$

Первая и вторая составляющая полученного уравнения (2.11) определяются как произведение токов контуров на трансформаторную ЭДС. Их сумма равна мощности, которая идет на изменение энергии магнитного поля вследствие изменения токов в контурах, а поэтому можно считать, что

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^s i_n L_{kn} \sum_{k=1}^s \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s i_k L_{kn} \sum_{n=1}^s \frac{di_n}{dt} = \sum_{k=1}^s i_k L_{kn} \sum_{n=1}^s \frac{di_n}{dt}. \quad (2.12)$$

Таким образом, на изменение энергии магнитного поля идет полностью сумма мощностей, определяемых как произведение токов контуров на трансформаторную ЭДС, а также полусумма мощностей, определяемых как произведение токов контуров на ЭДС вращения.

Остальная мощность преобразуется в механическую мощность и передается через вал к сопряженной машине

$$P_{\text{мех}} = \sum_{k=1}^s P_k - P_{\text{э}} - P_W = \frac{\omega}{2} \sum_{k=1}^s i_k \sum_{n=1}^s i_n \frac{dL_{kn}}{d\gamma}. \quad (2.13)$$

Из этого уравнения следует, что процесс электромеханического преобразования энергии связан только с ЭДС вращения, трансформаторная ЭДС непосредственно в этом преобразовании участия не принимает. Заметим, что мощность, расходуемая на изменение энергии магнитного поля, не теряется безвозвратно и в среднем равна нулю. Это объясняется тем, что в электрической машине все величины (токи, индуктивности, взаимные индуктивности и т. д.) изменяются периодически и через интервал времени, равный одному периоду, снова приобретают те же значения, что и в начале периода. Это означает, что изменение энергии магнитного поля в течение периода равно нулю.

Электромагнитный момент M , действующий на ротор в данное мгновение, можно выразить через мгновенную механическую мощность

$$M = \frac{P_{\text{мех}}}{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s i_k \sum_{n=1}^s i_n \frac{dL_{kn}}{d\gamma}, \quad (2.14)$$

или $M = \frac{dW}{d\gamma}$, если токи в контурах (фазах) электрической машины

имеют фиксированные значения ($i_k = \text{const}$, $i_n = \text{const}$). В случае когда производная имеет положительное значение, то момент направлен в сторону вращения (или возрастания угла γ) и происходит преобразование электрической энергии в механическую, и наоборот.

Электромагнитный момент, развиваемый электрическим двигателем, уравновешивается согласно закону Ньютона моментом сопротивления M_c со стороны рабочего механизма и динамическим моментом инерции $J \frac{d\omega}{dt}$, возникающим при изменении частоты вращения ротора

$$M = J \frac{d\omega}{dt} + M_c. \quad (2.15)$$

Таким образом, полное математическое описание электромеханических процессов преобразования энергии в электрической машине переменного тока можно представить в виде системы уравнений равновесия

напряжений в контурах (фазах) обмоток статора и ротора, уравнения равновесия моментов и выражения для электромагнитного момента

$$U_k = R_k i_k + \sum_{n=1}^s \left(L_{kn} \frac{di_n}{dt} + i_n \omega \frac{dL_{kn}}{d\gamma} \right), \quad (2.16)$$

$$M - M_c = J \frac{d\omega}{dt}, \quad (2.17)$$

$$M = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s i_k \sum_{n=1}^s i_n \frac{dL_{kn}}{d\gamma}. \quad (2.18)$$

Эта система уравнений содержит столько уравнений равновесия напряжений, сколько контуров (фаз) в обмотках статора и ротора. В представленной форме систему уравнений в настоящее время решить не представляется возможным, так как нет общих методов аналитического решения таких систем. Обусловлено это тем, что она представлена в естественных физических фазовых координатах, коэффициенты перед переменными в этом случае периодически изменяются и величины их зависят от состояния магнитной цепи, которое в переходных режимах не остается постоянным.

2.2. Обобщенный электромеханический преобразователь

При разработке математических моделей электромеханических преобразователей в теории электрических машин при их исследовании пользуются так называемым обобщенным электромеханическим преобразователем [10, 25]. Для этого любую многофазную электрическую машину (электромеханический преобразователь) с n -фазной обмоткой на неподвижной части (статоре) и m -фазной обмоткой на подвижной части (роторе) при условии равенства полных сопротивлений фаз статора (ротора) представляют в виде эквивалентной двухфазной двухполюсной ЭМ, рис. 2.3 [1, 2, 18].

Приняты следующие обозначения: $U_{su}, U_{sv}, U_{ru}, U_{rv}$ – напряжения, подводимые к обмоткам статора и ротора, расположенным на ортогональных осях ($u, v, 0$), вращающихся в пространстве с частотой ω_k ; $e_{su}, e_{sv}, e_{ru}, e_{rv}$ – ЭДС вращения, наводимые в обмотках статора и ротора реальной машины.

Описание процессов в обобщенном электромеханическом преобразователе осуществляют при следующих основных допущениях:

- машина имеет гладкий воздушный зазор без пазов на роторе и статоре;
- реальная нелинейная характеристика намагничивания машины заменяется линейной;
- магнитодвижущие силы обмоток синусоидальны;
- магнитная цепь ее ненасыщена и потери мощности в ней отсутствуют;

- параметры обмоток статора и ротора сосредоточены.

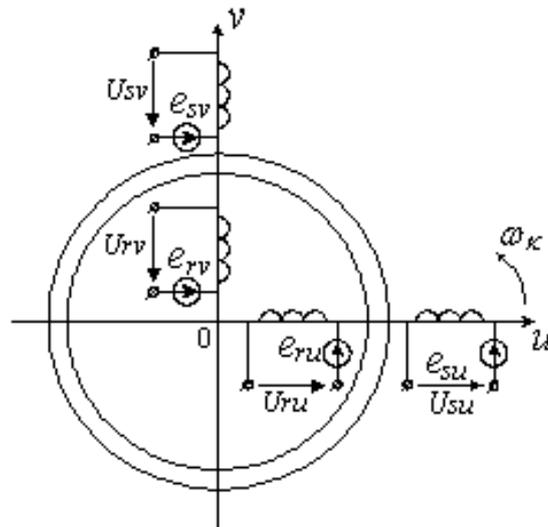


Рис. 2.3. Схема обобщенного электромеханического преобразователя

Необходимость перехода при разработке математических моделей ЭМП от реальной многофазной машины полное и строгое математическое описание процессов в которой отражено уравнениями (2.16, 2.17, 2.19) к идеализированной двухфазной связано с тем, что при использовании этих уравнений для исследования машины встречаются серьезные трудности. Суть этих трудностей состоит в следующем:

- общее количество взаимосвязанных уравнений равно 16, а количество коэффициентов – 44;
- коэффициенты взаимоиндукции между обмотками в уравнениях являются функцией угла поворота вращающейся части относительно неподвижной, то есть эти уравнения являются уравнениями с переменными коэффициентами;
- уравнение (2.18) является нелинейным, так как в нем перемножаются переменные.

На пути перехода от математического описания реальной электрической машины к математическому описанию процессов идеализированной двухфазной двухполюсной электрической машины (обобщенного электромеханического преобразователя) выделяют ряд этапов [1, 10], связанных с упрощением математического описания процессов в электрических машинах:

- этап описания процессов в единой системе с векторными переменными состояния;
- записи уравнений в единой прямоугольной системе координат, вращающейся с произвольной скоростью ω_k ;

- определения электромагнитного момента электрической машины в виде векторного произведения пары векторов;
- описания принципа электромеханического преобразования энергии в обобщенном ЭМП;
- представления уравнений через безразмерные (относительные) величины.

Суть **первого этапа** состоит в том, что мгновенные значения симметричных многофазных (в частности трехфазных) переменных состояния (напряжения, токи, потокосцепления) можно математически преобразовать так, чтобы они были представлены одним пространственным вектором. Это математическое преобразование имеет вид (например, для тока неподвижной части электрической машины):

$$\vec{i} = \frac{2}{3} \left(i_A + \vec{a}i_B + \vec{a}^2i_C \right), \quad (2.19)$$

где $\vec{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$, $\vec{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}}$ – единичные вектора, учитывающие пространственное смещение обмоток; $i_A = I_m \cos \omega t$, $i_B = I_m \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$,

$i_C = I_m \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$ – симметричная трехфазная система токов статора.

Подставив в уравнение (2.19) значение мгновенных токов, получают математическое описание пространственного вектора статорного тока:

$$\vec{i}_S = \frac{2}{3} I_m \left(\cos \omega t + e^{j\frac{2\pi}{3}} \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + e^{j\frac{4\pi}{3}} \cos \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = I_m e^{j\omega t}.$$

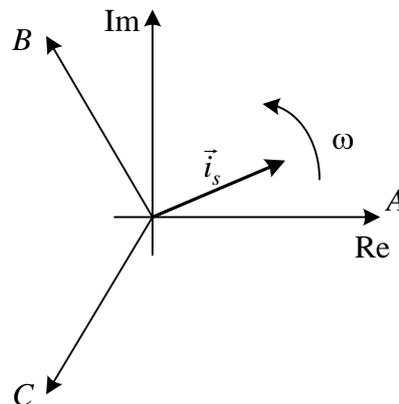


Рис. 2.4. Пространственный вектор тока

На рис. 2.4 представлена геометрическая интерпретация пространственного вектора тока – это вектор на комплексной плоскости с модулем (длиной) I_m , вращающийся с угловой скоростью ω в положительном направлении. Проекции вектора \vec{i}_s на фазные оси A, B, C определяют мгновенные токи в фазах. Аналогично пространственными векторами можно представить все напряжения, токи и потокосцепления, входящие в уравнения, описывающие процессы в машине. Теперь можно переходить к упрощению уравнений.

Для преобразования уравнений (2.16) в мгновенных значениях к уравнениям в пространственных векторах умножают их на выражения: первые уравнения на $\frac{2}{3}$, вторые – на $\frac{2}{3}\vec{a}$, третьи – на $\frac{2}{3}\vec{a}^2$, и складывают отдельно для подвижной и неподвижной части.

Тогда получают:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_s &= R_s \vec{i}_s + \frac{d\vec{\psi}_s}{dt} \\ \vec{u}_r &= R_r \vec{i}_r + \frac{d\vec{\psi}_r}{dt} \\ \vec{\psi}_s &= L_s \vec{i}_s + L_m(\theta) \vec{i}_r \\ \vec{\psi}_r &= L_m(\theta) \vec{i}_s + L_r \vec{i}_r \end{aligned} \right\}, \quad (2.20)$$

где L_s, L_r – собственные индуктивности статора и ротора, L_m – взаимная индуктивность между статором и ротором. Таким образом, вместо двенадцати уравнений (2.16) получено лишь четыре уравнения (2.20).

Этап второй. Переменные коэффициенты взаимной индукции в уравнениях для потокосцеплений (2.20) являются результатом того, что уравнения равновесия ЭДС для статора записаны в неподвижной системе координат, связанной со статором, а уравнения равновесия ЭДС для ротора записаны во вращающейся системе координат, связанной с ротором. Метод пространственного вектора позволяет записать эти уравнения в единой системе координат, вращающейся с произвольной скоростью ω_k . В этом случае уравнения (2.20) преобразуются к виду [1, 18]:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u}_s &= R_s \vec{i}_s + \frac{d\vec{\psi}_s}{dt} + j\omega_k \vec{\psi}_s \\ \vec{u}_r &= R_r \vec{i}_r + \frac{d\vec{\psi}_r}{dt} + j(\omega_k - \omega) \vec{\psi}_r \\ \vec{\psi}_s &= L_s \vec{i}_s + L_m \vec{i}_r \\ \vec{\psi}_r &= L_m \vec{i}_s + L_r \vec{i}_r \end{aligned} \right\}, \quad (2.21)$$

где $\omega = p\omega_0$, p – число пар полюсов в машине.

В уравнениях (2.21) все коэффициенты являются величинами постоянными, имеют четкий физический смысл и могут быть определены по паспортным данным двигателя либо экспериментально.

При этом заданные физические переменные статора, определяемые в системе координат (α, β) , связанной со статором, и физические переменные ротора, определяемые в системе координат (d, q) , связанной с ротором, определяются как суммы проекций физических переменных на новые оси (u, v) , вращающиеся с произвольной скоростью [1, 2, 18].

С учетом преобразований математическое описание модели обобщенного электромеханического преобразователя (электрической машины (ЭМ)) записывают в виде:

$$\begin{aligned} U_{su} &= R_s \cdot i_{su} + \frac{d\psi_{su}}{dt} - \omega_k \cdot \psi_{sv}; \\ U_{sv} &= R_s \cdot i_{sv} + \frac{d\psi_{sv}}{dt} + \omega_k \cdot \psi_{su}; \\ U_{ru} &= R_r \cdot i_{ru} + \frac{d\psi_{ru}}{dt} - (\omega_k - \omega) \cdot \psi_{rv}; \\ U_{rv} &= R_r \cdot i_{rv} + \frac{d\psi_{rv}}{dt} - (\omega_k - \omega) \cdot \psi_{ru}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Потокосцепления обмоток статора и ротора во вращающейся системе координат для неявнополюсной ЭМ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \psi_{su} &= L_s i_{su} + L_m i_{ru}; \\ \psi_{sv} &= L_s i_{sv} + L_m i_{rv}; \\ \psi_{ru} &= L_r i_{ru} + L_m i_{su}; \\ \psi_{rv} &= L_r i_{rv} + L_m i_{sv}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $U_{su}, U_{sv}, U_{ru}, U_{rv}, i_{su}, i_{sv}, i_{ru}, i_{rv}, \psi_{su}, \psi_{sv}, \psi_{ru}, \psi_{rv}$ – проекции векторов напряжения, токов и потокосцеплений обмоток статора и ротора.

Этап третий. Этап определения момента. Момент, в соответствии с законом Ленца, сформулированным, как правило левой руки, связывает векторные величины момента, потокосцепления и тока.

$$\vec{M} = k(\vec{\psi} \times \vec{i}). \quad (2.24)$$

В общем случае момент в уравнениях обобщенного ЭМП определяется как векторное произведение любой пары векторов.

Таких пар, в соответствии с уравнениями (1.27), может быть шесть $(\vec{i}_s, \vec{i}_r); (\vec{\psi}_s, \vec{\psi}_r); (\vec{i}_s, \vec{\psi}_s); (\vec{i}_s, \vec{\psi}_r); (\vec{i}_r, \vec{\psi}_s); (\vec{i}_r, \vec{\psi}_r)$.

Кроме этого, в рассмотрение вводится потокосцепление взаимной индукции $\vec{\psi}_m = L_m(\vec{i}_s + \vec{i}_r)$. Тогда появляется еще четыре возможности представления электромагнитного момента машины через следующие пары: $(\vec{i}_s, \vec{\psi}_m); (\vec{i}_r, \vec{\psi}_m); (\vec{\psi}_s, \vec{\psi}_m); (\vec{\psi}_r, \vec{\psi}_m)$. После выбора той или иной пары векторов уравнение момента приобретает определенность, а выражение для электромагнитного момента обобщенного ЭМП определяется чаще всего выражениями следующего вида [1, 18, 21]:

$$M = p(\psi_{su}i_{sv} - \psi_{sv}i_{su}), \quad (2.25)$$

или

$$M = p(\psi_{rv}i_{ru} - \psi_{ru}i_{rv}), \quad (2.26)$$

или

$$M = \frac{pL_m}{L_sL_r - L_m^2}(\psi_{rv}i_{ru} - \psi_{ru}i_{rv}). \quad (2.27)$$

При составлении математических моделей многофазных машин выражения для электромагнитного момента (2.25–2.27) необходимо умножить на коэффициент $m/2$, где m – число фаз.

Этап четвертый. Это описание электромеханического преобразования энергии в обобщенном электромеханическом преобразователе в системе координат, вращающейся с произвольной скоростью. Полная система уравнений, описывающая принцип электромеханического преобразования энергии, содержит уравнения равновесия напряжений, описывающие электромагнитные процессы, выражение для электромагнитного момента, уравнение равновесия моментов и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
U_{su} &= R_s \cdot i_{su} + \frac{d\psi_{su}}{dt} - \omega_k \cdot \psi_{sv}; \\
U_{sv} &= R_s \cdot i_{sv} + \frac{d\psi_{sv}}{dt} + \omega_k \cdot \psi_{su}; \\
U_{ru} &= R_r \cdot i_{ru} + \frac{d\psi_{ru}}{dt} - (\omega_k - \omega) \cdot \psi_{rv}; \\
U_{rv} &= R_r \cdot i_{rv} + \frac{d\psi_{rv}}{dt} - (\omega_k - \omega) \cdot \psi_{ru}; \\
\psi_{su} &= L_s i_{su} + L_m i_{ru}; \\
\psi_{sv} &= L_s i_{sv} + L_m i_{rv}; \\
\psi_{ru} &= L_r i_{ru} + L_m i_{su}; \\
\psi_{rv} &= L_r i_{rv} + L_m i_{sv}; \\
M &= \frac{m}{2} \frac{pL_m}{L_s L_r - L_m^2} (\psi_{rv} i_{ru} - \psi_{ru} i_{rv}), \\
J \frac{\omega}{dt} &= \frac{m}{2} \frac{pL_m}{L_s L_r - L_m^2} (\psi_{rv} i_{ru} - \psi_{ru} i_{rv}) - M_n.
\end{aligned}$$

Этап пятый. На этом этапе уравнения приводятся к безразмерным (относительным) величинам. В качестве основных базовых величин выбираются амплитудные номинальные значения фазного напряжения и тока, а также номинальное значение угловой частоты:

$$U_b = \sqrt{2}U_1, I_b = \sqrt{2}I_1, \omega_b = \omega_1 = 2\pi f_1, \quad (2.28)$$

на этой основе определяются базовые значения всех переменных и коэффициентов, входящих в уравнения, а также базового времени:

$$R_b = \frac{U_b}{I_b}, L_b = \frac{U_b}{\omega_b I_b}, \psi_b = \frac{U_b}{\omega_b}, M_b = \frac{3}{2} p \frac{U_b I_b}{\omega_b}, t_b = \frac{1}{\omega_b}, J_b = \frac{M_b}{\omega_b^2}. \quad (2.29)$$

В дальнейшем используются уравнения только в относительных величинах. Обобщенная система уравнений для описания обобщенной электрической машины в векторной форме принимает вид (2.30). В этих уравнениях все переменные относительные, полученные как результат деления реальных значений на базовые, все коэффициенты также безразмерные, полученные аналогично

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{u}_s &= r_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} + j\alpha_k \bar{\psi}_s; \\
 \bar{u}_r &= r_r \bar{i}_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt} + j\alpha_k - p\mathcal{G} \bar{\psi}_r; \\
 \bar{\psi}_s &= x_s \bar{i}_s + x_m \bar{i}_r; \\
 \bar{\psi}_r &= x_m \bar{i}_s + x_r \bar{i}_r; \\
 m &= k \text{Mod } \bar{\psi}_i \times \bar{i}_k; \\
 \bar{T}_m \frac{d\mathcal{G}}{dt} &= m - m_n.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Переменные и параметры в относительных единицах:

$\bar{u} = \frac{\bar{u}}{U_b}$, $\bar{i} = \frac{\bar{i}}{I_b}$, $\bar{\psi} = \frac{\bar{\psi}}{\Psi_b}$ – относительные электромагнитные переменные

состояния, $\alpha_k = \frac{\omega_k}{\omega_b}$, $\nu = \frac{\omega_m}{\omega_b}$ – относительная частота статора и относи-

тельная скорость ротора, $m = \frac{M}{M_b}$ – относительный момент на валу

машины, $r_s = \frac{R_s}{R_b}$, $r_r = \frac{R_r}{R_b}$, $x_s = \frac{\omega_b L_s}{R_b}$, $x_r = \frac{\omega_b L_r}{R_b}$, $x_m = \frac{\omega_b L_m}{R_b}$, $\bar{T}_m = \frac{J\omega_b^2}{M_b}$ –

относительные параметры.

В уравнениях (2.30) время принято безразмерным $\bar{t} = \frac{t}{t_b} = \omega_b t$.

Следует заметить, что введение относительных величин позволяет:

- распространять полученные для одного объекта исследования результаты на аналогичные объекты большей мощности;
- существенно сокращает время моделирования и позволяет устранить многие проблемы при моделировании;
- провести структурный синтез систем управления электроприводами в целом.

2.3. Системы координатных осей

Математические модели электромеханических преобразователей (электрических машин), разработанные на основе обобщенного ЭМП, базируются на дифференциальных уравнениях, характеризующихся применением различных координатных осей и физических переменных величин. В практике моделирования электрических машин применяют

различные ортогональные системы координат, отличающиеся угловой скоростью вращения координатных осей.

Система координатных осей с произвольной угловой скоростью вращения ω_k является основополагающей. Обозначается она как система (u, v) , а все остальные координатные системы являются ее частным случаем. В настоящее время широко используют при исследовании переходных процессов следующие ортогональные системы координат

$$(d, q); (\alpha, \beta); (x, y); (g, i).$$

В первой системе координатных осей d, q угловая скорость вращения осей ω_k равна частоте вращения ротора, т. е. $\omega_k = \omega$. Поэтому ее часто называют системой координатных осей неподвижной относительно ротора, и применяется она при рассмотрении переходных процессов в синхронных электрических машинах с несимметрией ротора.

Система координатных осей α, β неподвижна относительно статора, т. е. $\omega_k = 0$, и ею пользуются при описании процессов в электроприводах, в которых выходное напряжение вентильного преобразователя частоты (ВПЧ) несинусоидальное или же несимметрична обмотка статора. Она имеет одно преимущество, а именно ток в фазе, совпадающей с осью α , всегда соответствует реальному фазному току.

Третья система координатных осей x, y вращается относительно статора с синхронной скоростью, т. е. $\omega_k = \omega_c$, что позволяет считать, что эта система осей неподвижна по отношению к магнитному полю машины. Она используется при анализе переходных процессов в симметричных машинах.

Если рассмотренные выше координатные системы используются в основном для упрощения математического описания переходных процессов, то система координатных осей g, i применяется как для исследования процессов в электроприводах, так и для создания замкнутых систем регулирования приводом. Она обычно называется саморегулирующей, и, в отличие от всех, остальных скорость координатных осей у нее строго детерминирована и определяется характером самого переходного процесса.

Переход из одной в системы координат в другую можно показать на конкретном примере. Пусть имеются две координатные системы, оси координат которых вращаются в пространстве со скоростью ω_k и $\omega_k = 0$, т. е. системы u, v и α, β (рис. 2.5).

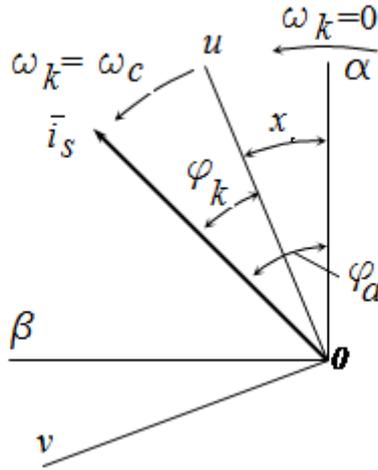


Рис. 2.5. Переход вектора из одной системы координат в другую

Обобщенный вектор статорного тока в этих системах запишется следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{i}_{sk} &= I_m e^{j\varphi_k} - \text{система } u, v, \\ \bar{i}_{s\alpha} &= I_m e^{j\varphi_\alpha} - \text{система } \alpha, \beta. \end{aligned}$$

Выразим модули векторов, записанных в системах u, v и α, β ,

$$I_m = \frac{\bar{i}_{sk}}{e^{j\varphi_k}}, \quad I_m = \frac{\bar{i}_{s\alpha}}{e^{j\varphi_\alpha}}.$$

Тогда из равенства $\frac{\bar{i}_{sk}}{e^{j\varphi_k}} = \frac{\bar{i}_{s\alpha}}{e^{j\varphi_\alpha}}$ обобщенный вектор статорного тока \bar{i}_{sk} можно представить в виде

$$\bar{i}_{sk} = \bar{i}_{s\alpha} \frac{e^{j\varphi_k}}{e^{j\varphi_\alpha}} = \bar{i}_{s\alpha} e^{j(\varphi_k - \varphi_\alpha)} = \bar{i}_{s\alpha} e^{-jx},$$

где $x = \varphi_k - \varphi_\alpha$ – угол между осями координатных систем u, v и α, β (рис. 2.5).

Выразив значение угла x через скорость вращения координатных осей, обобщенный вектор статорного тока можно записать в виде

$$\bar{i}_{sk} = \bar{i}_{s\alpha} e^{-j\omega_k t},$$

так как $x = \frac{2\pi}{T_k} t$, где T_k – период вращения координатных осей.

В случае когда обе координатные оси вращаются с разными скоростями, значение обобщенного вектора, к примеру тока ротора, можно записать в виде

$$\bar{i}_{rk} = \bar{i}_r e^{-j(\omega_k - \omega)t},$$

где $\bar{i}_r = I_m e^{j\omega t}$ – обобщенный вектор тока ротора в координатной системе d, q .

В соответствии с проделанными операциями при переходе из одной системы координат были получены уравнения (2.22) в координатной системе u, v с произвольной скоростью вращения ω_k . Для этого уравнение равновесия напряжений (2.22) обмотки статора умножили на $e^{-j\varphi_k}$, а уравнения для ротора на $e^{-j(\varphi_k - \varphi)}$.

Обобщенные векторы потокосцеплений обмоток статора и ротора являются пространственно-временными векторами, поэтому их значения в соответствующих осях, связанных со статором и ротором, запишем в виде

$$\bar{\Psi}_s = \bar{\Psi}_{sk} e^{j\varphi_k}, \quad \bar{\Psi}_r = \bar{\Psi}_{rk} e^{j(\varphi_k - \varphi)},$$

где $\bar{\Psi}_{sk}$ и $\bar{\Psi}_{rk}$ определяет их зависимости от времени, а $e^{j\varphi_k}$ и $e^{j(\varphi_k - \varphi)}$ – пространственное положение в данный момент времени.

При выборе физических переменных, а именно потокосцеплений или токов, используют уравнения связи между этими переменными [1].

Для потокосцеплений

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_s &= \bar{i}_s L_s + \bar{i}_r L_m; \\ \bar{\Psi}_r &= \bar{i}_r L_r + \bar{i}_s L_m, \end{aligned} \tag{2.31}$$

для токов

$$\begin{aligned} \bar{i}_s &= \frac{L_r \bar{\Psi}_s - L_m \bar{\Psi}_r}{L_s L_r - L_m^2}; \\ \bar{i}_r &= \frac{L_s \bar{\Psi}_r - L_m \bar{\Psi}_s}{L_s L_r - L_m^2}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Глава 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАНСФОРМАТОРОВ И ФИЛЬТРОВ ЭМС

Энергия, подводимая к ЭМС от источника и используемая для выполнения некоторой механической работы, проходит в силовом канале стадии электрического, электромеханического и механического преобразования. В электрическом преобразовании энергии в силовом канале ЭМС принимают, наряду с полупроводниковыми преобразователями (выпрямителями и инверторами), участие трансформаторы и электрические фильтры.

Трансформаторы предназначены для преобразования переменного (синусоидального) тока одного напряжения в переменный ток другого напряжения той же частоты. В энергетическом канале они выполняют наряду с изменением величины напряжения роль разделителя (буфера) между первичной и вторичной сетью, последняя из которых является источником электрической энергии для ЭМС.

Изучение основ теории трансформаторов, разработка их математических моделей и исследование процессов в них важно не только само по себе, но и является той базой, на основе которой изучаются асинхронные и синхронные машины.

Современный регулируемый электропривод как постоянного, так и переменного тока содержит силовые преобразователи электрической энергии, выполненные на силовых полупроводниковых ключах и являющиеся дискретными устройствами.

Поэтому работа вентиля входного (сетевого) выпрямителя преобразователя частоты вызывает ухудшение качественных показателей электрической энергии в точке их подключения к питающей сети.

Работа же силовых активных элементов преобразователя частоты в ключевых режимах с короткими фронтами импульсов напряжения и тока с частотой следования до нескольких килогерц является источником промышленных радиопомех, средой распространения которых являются проводящие электрический ток предметы (провода, кабели, оболочки, электрические двигатели и т. д.). Основными источниками таких помех являются работа биполярных транзисторов и запираемых тиристоров инверторного звена, переключающихся с высокой частотой и очень крутыми фронтами.

Такие помехи называются помехами проводимости, или кондуктивными помехами. Их уровень, выраженный в децибелах и диапазоном частот, определяемых допустимыми нормами для промышленных радиопомех, определяется напряжением на зажимах сети [14, 16, 26].

В связи с этим все современные автоматизированные электропривода оснащены различного рода электрическими фильтрами, изучение основ теории которых и исследование процессов в них с использованием математических моделей необходимо для создания и разработки электроприводов, отвечающих требованиям электромагнитной совместимости.

3.1. Описание электромагнитных процессов в трансформаторах

Трансформатор, при математическом описании процессов в нем, представляют в виде магнитно-связанных контуров. Магнитно-связанные контуры являются элементом, часто встречающимся в современных электрических аппаратах и машинах и различных средствах автоматического управления. Пусть на ферромагнитном сердечнике расположены две обмотки, каждая из которых связана с общим (полезным) потоком Φ и собственным потоком рассеяния Φ_{s1} и Φ_{s2} (рис. 3.1).

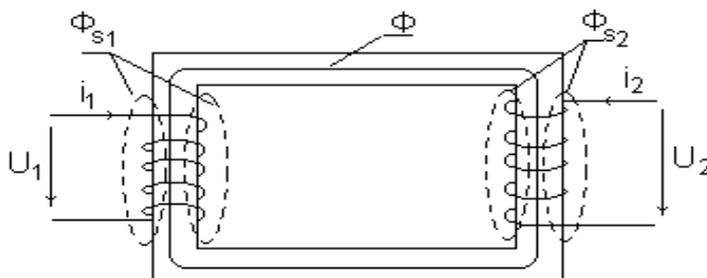


Рис. 3.1. Ферромагнитный сердечник с обмотками возбуждения

В цепи каждой обмотки действуют приложенные извне напряжения U_1 и U_2 , под действием которых по обмоткам протекают токи i_1 и i_2 . Такой конструктивной формой исполнения обладает двухобмоточный трансформатор, схема замещения которого, при допущении отсутствия потерь в стали, имеет следующий вид (рис. 3.2) [16, 19].

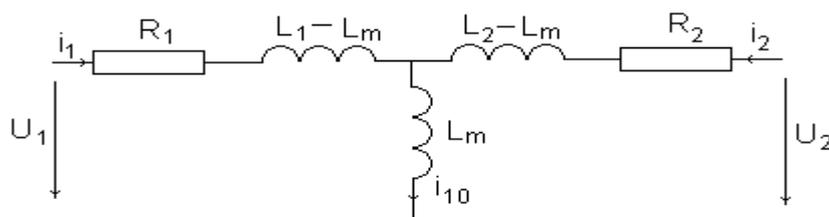


Рис. 3.2. Схема замещения

На рис. 3.2 $L_1 = L_{1\sigma} + L_m$; $L_2 = L_{2\sigma} + L_m$ – собственные индуктивности первой и второй обмоток; L_m – взаимная индуктивность обмоток; $L_{1\sigma}$ и $L_{2\sigma}$ – индуктивности рассеяния обмоток.

Пользуясь методом контурных токов, связь между токами и напряжениями в обмотках трансформатора можно выразить в виде следующей системы линейных дифференциальных уравнений [22]:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 \cdot i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + L_m \frac{di_2}{dt}; \\ u_2 &= R_2 \cdot i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + L_m \frac{di_1}{dt}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В установившемся режиме работы трансформатора, при переменном синусоидальном токе с частотой $\omega = 2\pi f$, решение для токов можно получить алгебраически, если заменить символ дифференцирования d/dt комплексом $j\omega$. В этом случае исходные дифференциальные уравнения превращаются в алгебраические комплексные уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $Z_{11} = R_1 + jX_{11}$; $Z_{22} = R_2 + jX_{22}$; $Z_{21} = Z_{12} = jX_m$; $X_{11} = \omega L_1$; $X_{22} = \omega L_2$; $X_m = \omega L_m$.

Решение систем уравнений (2.33) и (2.34), с помощью которых описываются установившиеся и переходные процессы в магнитно-связанных контурах, тем или иным методом позволяет разработать ряд математических моделей многих электромагнитных преобразователей энергии.

3.2. Математическая модель трансформатора

Для выполнения расчетов и исследования переходных процессов в трансформаторе по уравнениям обобщенного электромеханического преобразователя представим его электрическую схему в координатных осях $\alpha, \beta, 0$, неподвижных в пространстве, в следующем виде, рис. 3.3.

Система дифференциальных уравнений для схемы рис. 3.3, при наличии сопротивления R_H во вторичной обмотке, можно представить в виде следующих двух уравнений равновесия напряжений:

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha s} &= i_{\alpha s} R_s + \frac{d\Psi_{\alpha s}}{dt}; \\ 0 &= i_{\alpha r} R_r + \frac{d\Psi_{\alpha r}}{dt} + i_{\alpha r} R_H, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где $\Psi_{\alpha s} = i_{\alpha s} L_s + i_{\alpha r} L_m$; $\Psi_{\alpha r} = i_{\alpha r} L_r + i_{\alpha s} L_m$ – потокосцепления первичной и вторичной обмоток трансформатора, а L_s и L_r – собственные ин-

дуктивности первичной и вторичной обмоток трансформатора, L_m – взаимная индуктивность обмоток.

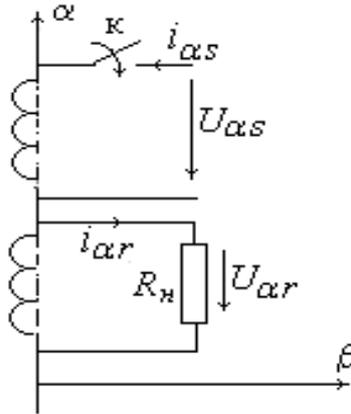


Рис. 3.3. Расчетная схема трансформатора

Подставив значения потокосцеплений в систему уравнений (3.3), получают новую систему уравнений, где в качестве переменных выступают токи в первичной и вторичной обмотках:

$$\left. \begin{aligned} U_{\alpha s} &= i_{\alpha s} R_s + L_s \frac{di_{\alpha s}}{dt} + L_m \frac{di_{\alpha r}}{dt}; \\ 0 &= i_{\alpha r} R_r + L_r \frac{di_{\alpha r}}{dt} + L_m \frac{di_{\alpha s}}{dt} + i_{\alpha r} R_H. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Для представления математической модели трансформатора необходимо записать первое уравнение системы (3.4) относительно производной для тока $i_{\alpha s}$, а второе уравнение относительно производной для тока $i_{\alpha r}$, исключив при этом составляющие $L_m \frac{di_{\alpha r}}{dt}$ и $L_m \frac{di_{\alpha s}}{dt}$.

В результате таких преобразований получают следующую систему уравнений в форме Коши

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_{\alpha s}}{dt} &= U_{\alpha s} \cdot \frac{1}{L_s} - \alpha'_s i_{\alpha s} + \alpha'_r K_s i_{\alpha r}; \\ \frac{di_{\alpha r}}{dt} &= -U_{\alpha s} K_r \frac{1}{L_s} - \alpha'_r i_{\alpha r} + \alpha'_s K_r i_{\alpha s}, \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

где $\alpha'_s = \frac{R_s}{L_s \sigma}$ – коэффициент затухания процессов в первичной обмотке

трансформатора при замкнутой вторичной; $\alpha'_r = \frac{R_r + R_H}{L_r \sigma}$ –

коэффициент затухания процессов во вторичной обмотке трансформатора

тора при замкнутой первичной; $K_s = \frac{L_m}{L_s}$; $K_r = \frac{L_m}{L_r}$ – коэффициенты связи первичной и вторичной обмоток трансформатора; $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$ – коэффициент рассеяния трансформатора.

Так как трансформатор является электромагнитным преобразователем, то система уравнений (3.5) является необходимой и достаточной для математического моделирования этого устройства. Расчет переходных процессов производится при включении трансформатора, работающего под нагрузкой, с нулевыми начальными условиями: $t=0$; $U_{\alpha s} = U_m \sin t = 0$; $U_{\alpha r} = R_H i_{\alpha r} = 0$; $i_{\alpha s} = i_{\alpha r} = 0$.

Система итерационных уравнений, при реализации модели с использованием системы MathCAD, имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} t_{j+1} \\ i_{\alpha s_{j+1}} \\ i_{\alpha r_{j+1}} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} t_j + \Delta t \\ i_{\alpha s_j} + \Delta t \left[\left[U_m \sin t_j \right] \frac{1}{L_s \sigma} - \alpha'_s i'_{\alpha_j} + \alpha'_s K_r i_{\alpha r_j} \right] \\ i_{\alpha r_j} + \Delta t \left[\left[-U_m \sin t_j \right] \frac{K_s}{L_r \sigma} - \alpha'_r i'_{\alpha_j} + \alpha'_r K_s i_{\alpha s_j} \right] \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

На рис. 3.4 как результат математического моделирования приведены временные диаграммы токов трансформатора.

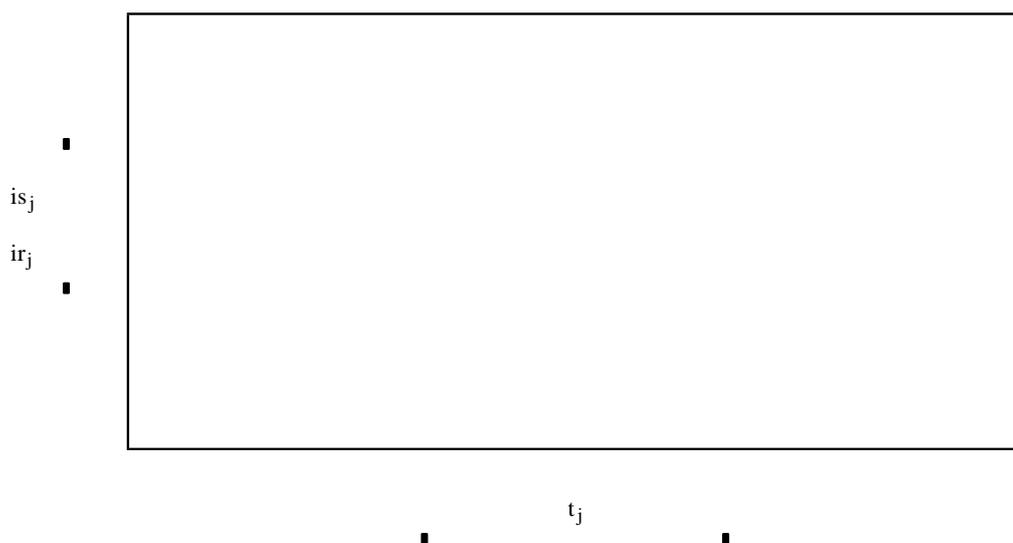


Рис. 3.4. Временные диаграммы токов трансформатора

Используя данную математическую модель трансформатора, можно провести анализ влияния на показатели качества переходного процесса параметров нагрузки и его собственных параметров, а именно:

- 1) влияния активного сопротивления трансформатора:
 - на ударные значения токов первичной и вторичной обмоток трансформатора;
 - установившиеся значения токов первичной и вторичной обмоток трансформатора;
 - длительность переходного процесса;
- 2) влияния характера нагрузки на переходные процессы в трансформаторе;
- 3) влияние начальной фазы напряжения включения трансформатора на переходные процессы.

3.4. Передаточные функции трансформатора

При разработке операторно-структурных схем систем управления и автоматизации пользуются так называемыми звеньями с вход-выходными отображениями.

Отношение выходного к входному сигналу, описанное с помощью преобразований Лапласа, называют системными (передаточными) функциями [2]. Системные функции используют для связи самых разнообразных входных воздействий с реакцией (с выходным сигналом) системы. Передаточные функции системы позволяют получить структурные схемы и частотные характеристики. С использованием структурных схем осуществляется выбор и синтез корректирующих звеньев и регуляторов в системах автоматического управления (САУ). Частотные характеристики используют при анализе систем в частотной области.

Передаточную функцию трансформатора как элемента (звена) системы можно получить, воспользовавшись уравнениями (3.4). Для этого напряжение \dot{U}_2 при наличии сопротивления нагрузки $Z_H = R_H + jX_H$ можно, в соответствие с законом Ома, записать в виде:

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \cdot Z_H, \quad (3.7)$$

а систему уравнений (3.4) в виде

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2; \\ 0 &= Z_{12} \dot{I}_1 + Z_{2H} \dot{I}_2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $Z_{2H} = Z_H + Z_{22} = R_H + jX_H + R_{22} + jX_{22}$.

Тогда соотношения между первичными и вторичными токами можно получить, выразив из второго уравнения системы вторичный ток \dot{I}_2 через первичный ток \dot{I}_1 :

$$\dot{i}_2 = -\frac{Z_{12}}{Z_{2H}} \cdot \dot{i}_1 = K_i \cdot \dot{i}_1, \quad (3.9)$$

где $K_i = \frac{|\dot{i}_2|}{|\dot{i}_1|}$ – коэффициент передачи (трансформации) трансформатора

по току, а $K_i(j\omega) = -\frac{Z_{12}}{Z_{2H}} = -\frac{j\omega L_m}{R_2 + j\omega L_2 + Z_H}$ – передаточная функция трансформатора по току.

Подставляя (3.9) в первое уравнение исходной системы (3.8), получим:

$$\dot{U}_1 = (Z_{11} + \frac{Z_{12}^2}{Z_{2H}}) \cdot \dot{i}_1, \quad (3.10)$$

где выражение в скобках представляет собой входное сопротивление трансформатора $Z_{\text{вх}}$:

$$Z_{\text{вх}} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{(j\omega L_m)^2}{R_2 + j\omega L_2 + Z_H}.$$

Передаточная функция по напряжению трансформатора $K_u(j\omega)$ определяется как отношение

$$K_u(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{i}_2 \cdot Z_H}{\dot{i}_1 \cdot Z_{\text{вх}}} = K_i(j\omega) \cdot \frac{Z_H}{Z_{\text{вх}}} = -\frac{Z_{21}Z_H}{Z_{11}Z_{2H} - Z_{12}^2}, \quad (3.11)$$

или в окончательном виде

$$K_u(j\omega) = -\frac{j\omega L_m Z_H}{(R_1 + j\omega L_1) \cdot (R_2 + j\omega L_2 + Z_H) + \omega^2 L_m^2}. \quad (3.12)$$

На характер передаточной функции $K_u(j\omega)$ существенное влияние оказывает частота ω . При низких частотах ($\omega \rightarrow 0$), когда определяющими в знаменателе $K_u(j\omega)$ являются активные сопротивления обмоток R_1 и R_2 , коэффициент передачи по напряжению убывает, т. е.

$K_u = \frac{|\dot{U}_2|}{|\dot{U}_1|} \rightarrow 0$. В области средних и высоких частот, когда влияние этих

сопротивлений мало, значениями R_1 и R_2 можно пренебречь. Тогда соотношение для $K_u(j\omega)$ можно переписать в виде

$$K_u(j\omega) = -\frac{j\omega L_m Z_H}{j\omega L_1 \cdot Z_H + \omega^2 (L_m^2 - L_1 L_2)}. \quad (3.13)$$

В области высоких частот спад коэффициента передачи по напряжению $K_u(j\omega)$ определяется членом, содержащим ω^2 в знаменателе.

Если коэффициент связи $k = L_m / L_1 L_2 = 1$, что характерно для совершенного трансформатора [2], то этот член отсутствует и уменьшение $K_u(j\omega)$ в области высоких частот обусловлено рассеянием магнитного потока обмоток. Коэффициент передачи совершенного трансформатора при коэффициенте связи $k = 1$ определяют по выражению $K_u = L_m / L_1$. Используя выражения для индуктивностей обмоток с совершенной связью $L_m = w_1 w_2 / R_M$ и $L_1 = w_1^2 / R_M$, запишем последнее выражение в виде $K_u = -w_2 / w_1 = -1 / c$. Отношение числа витков первичной и вторичной обмоток трансформатора $w_1 / w_2 = c$ называется *коэффициентом трансформации*.

Таким образом, у совершенного трансформатора при нулевых активных сопротивлениях обмоток и отсутствии рассеяния коэффициент передачи по напряжению K_u не зависит от частоты и определяется отношением числа витков обмоток трансформатора.

В заключении можно отметить, что математическая модель трансформатора для исследования переходных процессов во временной области представляет собой систему уравнений (3.6), а для исследований в частотной области необходимо использовать уравнения (3.11, 3.12, 3.13).

Установившиеся режимы работы и характеристики трансформатора рассчитывают с использованием системы уравнений (3.8).

3.5. Математические модели фильтров

Под электрическими фильтрами понимают четырехполюсники, включаемые между источником питания и приемником (нагрузкой), назначение которых состоит в том, чтобы беспрепятственно (без затухания) пропускать к приемнику токи одних частот и задерживать или пропускать, но с большим затуханием, токи других частот.

Диапазон частот, пропускаемых фильтром без затухания, называется полосой прозрачности или полосой пропускания. Диапазон частот, пропускаемых с затуханием называется полосой затухания.

В простых тиристорных двухзвенных преобразователях частоты, выполненных по схеме «управляемый выпрямитель – LC фильтр – автономный инвертор напряжения», фильтр предназначен для сглаживания пульсаций выпрямленного выпрямителем напряжения, поступающего на вход инвертора. Электрическая схема таких фильтров представлена на рис. 2.9.

Как правило, индуктивное сопротивление катушек намного превосходит их активное сопротивление $\omega L \gg R$, а проводимостью конденсаторов, обусловленной токами утечки, пренебрегают.

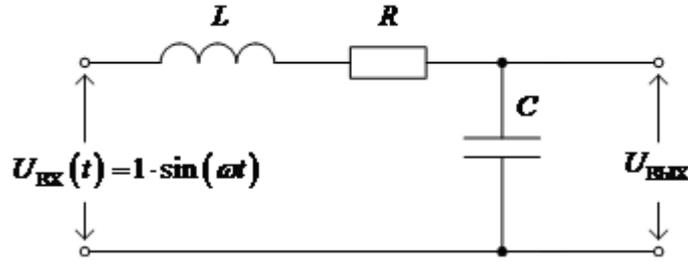


Рис. 3.5. Схема LCR-фильтра низких частот на холостом ходу

Фильтр в цепи питания инвертора описывается следующими скалярными уравнениями, в соответствии с блок-схемой модели энергетического канала электропривода, рис. 1.3 [23].

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} &= \frac{1}{L_d}(e_d - R_d i_d - u_{\Pi}); \\ \frac{du_{\Pi}}{dt} &= \frac{1}{C_{\Phi}} i_c; \\ i_c &= i_d - i_{\Pi}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где e_d – ЭДС источника питания (напряжение на выходе выпрямителя); i_d – ток, потребляемый от источника питания; i_c – ток конденсатора фильтра; C_{Φ} – емкость конденсатора фильтра; L_d, R_d – параметры фильтра (определяются с учетом внутреннего сопротивления источника e_d).

При анализе процессов в фильтре как в объекте исследования записывают следующие дифференциальные уравнения, описывающие процессы в схеме, рис. 2.9.

$$\begin{cases} u_{\text{вх}}(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + u_{\text{вблх}}(t); \\ u_{\text{вблх}}(t) = \frac{1}{C} \int i dt \Rightarrow \frac{du_{\text{вблх}}(t)}{dt} = \frac{1}{C} i. \end{cases} \quad (3.15)$$

Для приведения математической модели фильтра к виду вход-состояние-выход сводят совокупность дифференциальных уравнений (2.47) к форме Коши, а затем объединяют в векторно-матричное уравнение состояния. Для этого задают векторы состояния и входа

$$\vec{X}(t) = \begin{bmatrix} i \\ u_{\text{вблх}}(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{U}(t) = u_{\text{вх}}(t).$$

Для рассматриваемого случая уравнение состояния в развернутой форме имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ u_{\text{вблх}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_{\text{вблх}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_{\text{вх}}. \quad (3.16)$$

Раскрыв матричные скобки, получают

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = a_{11}i + a_{12}u_{\text{вх}}(t) + b_1u_{\text{вх}}(t), \\ \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt} = a_{21}i + a_{22}u_{\text{вх}}(t) + b_2u_{\text{вх}}(t). \end{cases} \quad (3.17)$$

Приведем систему уравнений (2.47) к виду (2.49), используя при отсутствии переменной в правых частях нулевые коэффициенты:

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}i - \frac{1}{L}u_{\text{вх}}(t) + \frac{1}{L}u_{\text{вх}}(t), \\ \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt} = \frac{1}{C}i + 0u_{\text{вх}}(t) + 0u_{\text{вх}}(t). \end{cases} \quad (3.18)$$

Зная все компоненты матриц параметров, уравнение состояния можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i \\ u_{\text{вх}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ u_{\text{вх}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_{\text{вх}}. \quad (3.19)$$

Таким образом, матрицы параметров имеют следующий вид

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда в векторно-матричной форме систему уравнений (3.19) можно представить в виде уравнения состояния и выхода [20]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{X}(t) &= A\vec{X}(t) + B\vec{U}(t), \\ \vec{Y}(t) &= C\vec{X}(t), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $\vec{X}(t)$ – вектор состояния, $\vec{U}(t)$ – вектор входа, $\vec{Y}(t)$ – вектор выхода.

При исследовании процессов, протекающих в фильтре во времени, т. е. для анализа их по переходным характеристикам, систему уравнений (3.20) представляют в виде итерационных уравнений.

Исходными данными являются параметры L , C , R и напряжение $u_{\text{вх}}(t)$.

Нулевые начальные условия и итерационные циклы представляют в виде:

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ i_0 \\ u_{\text{ВЫХ}_0} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad dt := \min, \quad j := 0..n.$$

Примечание.

Для устойчивого решения системы итерационных уравнений необходимо, чтобы шаг dt был меньше удвоенного значения минимальной постоянной времени исследуемого объекта, т. е.

$$dt < 2\tau_{\min}.$$

Общее число шагов для итерационного цикла в первом приближении примерно равно отношению четырех максимальных постоянных времени исследуемого объекта к двум минимальным постоянным времени, а именно:

$$j = \frac{4\tau_{\max}}{2\tau_{\min}}.$$

Система итерационных уравнений в этом случае имеет вид:

$$\begin{bmatrix} t_{j+1} \\ i_{j+1} \\ u_{\text{ВЫХ}_{j+1}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} t_j + dt \\ i_j + dt \cdot \left\{ \frac{1}{L} \cdot [u_{\text{ВХ}}(t_j) - Ri_j - u_{\text{ВЫХ}}(t_j)] \right\} \\ u_{\text{ВЫХ}_j} + dt \cdot \frac{1}{C} \cdot i_j \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Система итерационных уравнений (3.21) позволяет проанализировать процессы, протекающие в фильтре, представленном в виде LRC цепи, в так называемом идеальном холостом ходе. Результаты моделирования представлены на рис. 3.6 в виде переходных характеристик напряжения $u_{\text{ВЫХ}} = f(t)$ и тока $i = f(t)$.

Для анализа процессов в фильтре при наличии на его выходе нагрузочного активного сопротивления $R_{\text{Н}}$ (рис. 3.6) система итерационных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} t_{j+1} \\ i_{j+1} \\ u_{\text{ВЫХ}_{j+1}} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} t_{j+1} + dt \\ i_j + dt \cdot \left\{ \frac{1}{L} \cdot [u_{\text{ВХ}}(t_j) - R \cdot i_j - u_{\text{ВЫХ}_j}] \right\} \\ u_{\text{ВЫХ}_j} + dt \cdot \left\{ \frac{1}{C} \cdot \left[i_j + \frac{u_{\text{ВЫХ}_j}}{R_{\text{Н}}} \right] \right\} \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

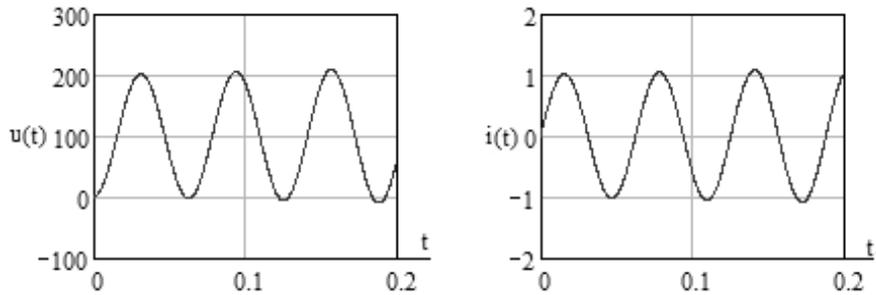


Рис. 3.6. Переходные характеристики фильтра на холостом ходу

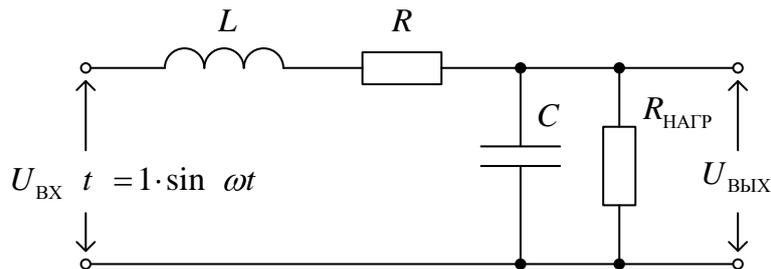


Рис. 3.7. Схема LCR-фильтра низких частот под нагрузкой

Осциллограммы переходных характеристик при значениях $R_H = 10 \cdot R$, $R_H = 100 \cdot R$, $R_H = 1000 \cdot R$ приведены на (рис. 3.7).

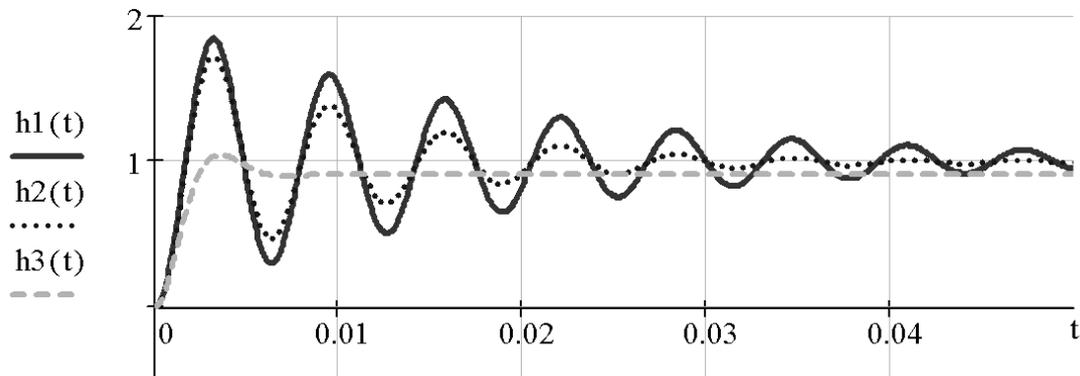


Рис. 3.8. Переходные характеристики LRC-фильтра

3.6. Передаточные функции фильтров

Для разработки модели фильтра как элемента системы автоматического управления (САУ) необходимо систему уравнений состояния и выхода (2.52) представить в виде векторно-матричных операторных уравнений, которые позволяют получить передаточные функции фильтра по напряжению и току [20]. Применяв преобразование Лапласа, получим систему векторно-матричных операторных уравнений

$$\begin{aligned} s\vec{X}(s) &= A\vec{X}(s) + B\vec{U}(s), \\ \vec{Y}(s) &= C\vec{X}(s). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Связь векторов состояния и векторов управления в операторной форме можно представить в виде:

$$\begin{bmatrix} I(s) \\ U_{\text{ВЫХ}}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{bmatrix} \cdot \vec{U}_{\text{ВХ}}(s) = H(s)\vec{U}_{\text{ВХ}}(s), \quad (3.24)$$

где $W_1(s)$ и $W_2(s)$ – передаточные функции фильтра по току и по напряжению соответственно, а именно [1, 2, 20]:

$$W_1(s) = \frac{I(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)}, \quad W_2(s) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}(s)}{U_{\text{ВХ}}(s)}. \quad (3.25)$$

Для представления передаточных функций (3.25) через параметры фильтра выразим из первого уравнения системы (3.23) вектор переменных состояний, осуществив следующие преобразования:

$$s\vec{X}(s) - A\vec{X}(s) = B\vec{U}(s),$$

тогда

$$\vec{X}(s) = \frac{1}{(sE - A)} B\vec{U}(s), \quad (3.26)$$

где E – единичная матрица,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $H(s)$ можно представить в виде:

$$H(s) = (sE - A)^{-1} B, \quad (3.27)$$

где полином общего знаменателя $\det(sE - A)$ для всех передаточных функций фильтра является характеристическим уравнением

$$\varphi_A(s) = \det(sE - A) = 0. \quad (3.28)$$

Подставив в (2.58) выражения для матрицы параметров A и единичной матрицы E , получим после преобразований следующее характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \varphi_A(s) = \det(sE - A) &= \det \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \right) = \\ &= s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Определим обратную матрицу $(sE - A)^{-1}$, а именно:

$$(sE - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot \text{adj} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}.$$

Тогда в окончательном виде получим

$$H(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) \\ W_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \cdot \begin{bmatrix} s & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \\ \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \end{bmatrix},$$

где передаточные функции фильтра по току $W_1(s)$ и напряжению $W_2(s)$ имеют следующий вид [20]:

$$W_1(s) = \frac{I(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{\frac{s}{L}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}, \quad (3.30)$$

$$W_2(s) = \frac{U_{\text{вых}}(s)}{U_{\text{вх}}(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \quad (3.31)$$

Все преобразования представленные выражениями, начиная с (3.27) и ниже, легко выполняются с помощью компьютера, имеющего программу символьной математики, как в MathCAD.

При анализе свойств фильтра в частотной области необходимо с помощью передаточных функций (3.30 и 3.31) получить амплитудные частотные и фазовые частотные характеристики, которые позволяют определить полосу пропускания и затухания фильтров.

3.7. Частотные характеристики фильтров

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и систем в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием. При анализе показателей качества часто используют амплитудные частотные (АЧХ) и фазовые частотные (ФЧХ) характеристики, которые являются амплитудой

и аргументом комплексной частотной характеристики системы, представленной в полярных координатах [1.2]:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.32)$$

где $A(\omega) = |W(j\omega)|$ – амплитудная частотная характеристика системы, а $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ – фазовая частотная характеристика.

Амплитудная частотная характеристика представляет собой отношение амплитуды установившегося выходного гармонического сигнала к амплитуде установившегося входного гармонического сигнала при частоте входного сигнала ω .

Фазовая частотная характеристика показывает, насколько по фазе выходной гармонический сигнал при частоте ω сдвинут относительно входного сигнала.

Комплекснозначную функцию $W(j\omega)$ обычно представляют в виде

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (3.33)$$

где $P(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega)$ – вещественная частотная характеристика и $Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$ – мнимая частотная характеристика.

При фиксированном значении ω функцию $W(j\omega)$ однозначно определяет точка на комплексной плоскости с декартовыми координатами $P(\omega)$, $Q(\omega)$ или полярными координатами $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ (рис. 3.7).

Метод частотных передаточных функций является одной из задач, связанных с расчетом, анализом и синтезом электромеханических систем.

Рассмотрим задачу получения и анализа частотных характеристик однозвенного нагруженного Γ -образного LCR -фильтра низких частот (рис. 3.6), передаточная функция которого имеет следующий вид:

$$W_s = \frac{1}{L \cdot s + R \cdot \left(C \cdot s + \frac{1}{R_H} \right) + 1}. \quad (3.34)$$

Частотную передаточную функцию получают путем замены в выражении передаточной функции оператора Лапласа s на переменную $j\omega$. При этом на вход фильтра подан синусоидальный гармонический сигнал с угловой частотой ω , а j – мнимая единица. Тогда выражение (3.34) для операторной передаточной функции ФНЧ можно представить в виде частотной передаточной функции.

$$W_{j \cdot \omega} = \frac{1}{L \cdot j \cdot \omega + R \cdot \left(C \cdot j \cdot \omega + \frac{1}{R_H} \right) + 1}. \quad (3.35)$$

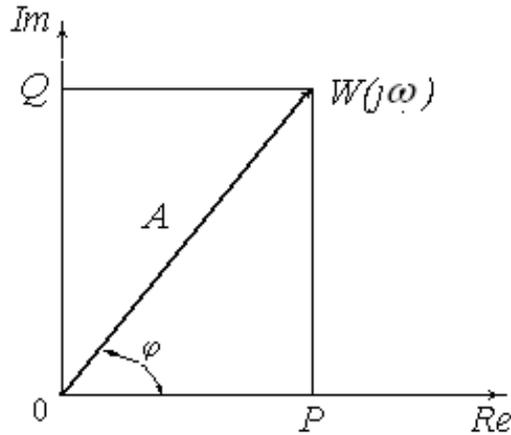


Рис. 3.9. Векторное представление функции $W(j\omega)$

Преобразуем знаменатель выражения (3.35), выделив действительную и мнимую части:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 - L \cdot C \cdot \omega^2 + \frac{R}{R_H} + j \cdot \omega \cdot \left(R \cdot C + \frac{L}{R_H} \right)}. \quad (3.36)$$

Избавимся от мнимой части в знаменателе, помножив его на сопряженное комплексное число. Тогда вещественную (3.37) и мнимую (3.38) частотные характеристики можно представить в виде:

$$P(\omega) = \frac{1 - L \cdot C \cdot \omega^2 + \frac{R}{R_H}}{\left(1 - L \cdot C \cdot \omega^2 + \frac{R}{R_H} \right)^2 + \omega^2 \cdot \left(R \cdot C + \frac{L}{R_H} \right)^2}. \quad (3.37)$$

$$Q(\omega) = -\frac{\omega \cdot \left(R \cdot C + \frac{L}{R_H} \right)}{\left(1 - L \cdot C \cdot \omega^2 + \frac{R}{R_H} \right)^2 + \omega^2 \cdot \left(R \cdot C + \frac{L}{R_H} \right)^2}. \quad (3.38)$$

Амплитудная частотная и фазовая частотная характеристики ФНЧ фильтра имеют следующий вид (рис. 3.10, 3.11):

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}; \quad (3.39)$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}. \quad (3.40)$$

Амплитудные частотные и фазовые частотные характеристики ФНЧ при значениях $R_H = 10 \cdot R$, $R_H = 100 \cdot R$, $R_H = 1000 \cdot R$ приведены на рис. 3.8 и 3.9.

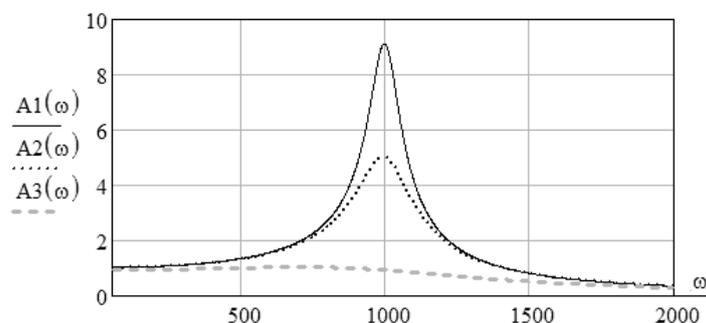


Рис. 3.10. Амплитудные частотные характеристики

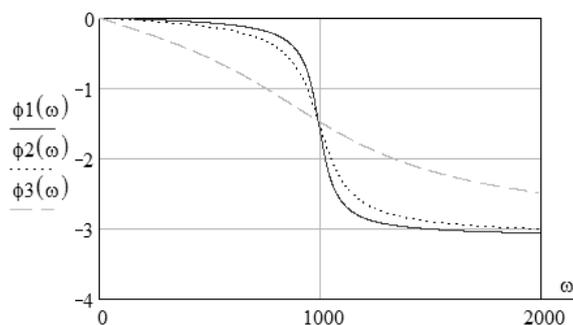


Рис. 3.11. Фазовые частотные характеристики

Анализ представленных на рис. 3.10 и 3.11 характеристик показывает, что с уменьшением добротности фильтра $D = \frac{L}{R + R_H}$ при увеличении значения нагрузочного сопротивления R_H уменьшается полоса пропускания фильтра и изменяется фазовый сдвиг между напряжением и током в дорезонансной и послерезонансной областях. При исследовании двухзвенных и многозвенных фильтров фазовые частотные характеристики определяются как разности аргументов частотных передаточных функций отдельных звеньев многозвенных фильтров, а именно [2]:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q_1(\omega)}{P_1(\omega)}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{Q_2(\omega)}{P_2(\omega)}\right) + \dots \quad (3.41)$$

Глава 4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Основой для разработки математических моделей асинхронного двигателя (АД) является математическое описание процессов электро-механического преобразования энергии в обобщенном электромеханическом преобразователе. При этом частота вращения ротора не равна частоте вращения магнитного поля в воздушном зазоре $\omega_r \neq \omega_c$. Поля же ротора и статора неподвижны относительно друг друга, так как частоты протекающих в обмотках статора и ротора токов связаны соотношением $f_2 = f_1 s$.

4.1. Математическое описание процессов в двухфазной модели асинхронного двигателя

Наиболее широкое применение в промышленности среди асинхронных машин получили асинхронные двигатели с короткозамкнутым ротором. Двухфазная структурная модель такого двигателя во вращающейся с произвольной скоростью ω_k системе координат имеет следующий вид, рис. 4.1 [1, 16, 21, 23]. Получают эту модель, замыкая обмотки ротора обобщенной электрической машины (рис. 2.3), что соответствует нулевым значениям проекций напряжения ротора на оси.

Математическое описание процессов электро-механического преобразования энергии в такой модели в наиболее компактной форме имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \vec{U}_s &= R_s \vec{i}_s + \frac{d}{dt} \vec{\Psi}_s + j\omega_k \vec{\Psi}_s; \\
 0 &= R_r \vec{i}_r + \frac{d}{dt} \vec{\Psi}_r + j(\omega_k - \omega) \vec{\Psi}_r; \\
 M &= \frac{3}{2} p_n \text{Im}(\vec{\Psi}_s \times \vec{i}_s); \\
 J_\Sigma \frac{d}{dt} \omega &= M - M_c,
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

где $\vec{i}_s, \vec{i}_r, \vec{\Psi}_s, \vec{\Psi}_r, \vec{U}_s$ – обобщенные пространственные вектора токов, потокосцеплений и напряжений обмоток статора и ротора, R_s, R_r – активные сопротивления фаз обмоток статора и ротора, ω, ω_k – угловые скорости ротора и координатных осей соответственно; M, M_c – электромагнитный момент двигателя и момент сопротивления на его валу; J_Σ – суммарный момент инерции; p_n – число пар полюсов.

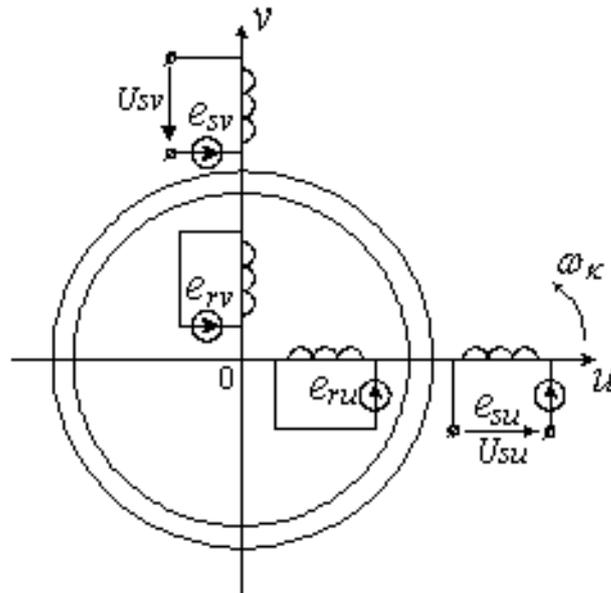


Рис. 4.1. Схема двухфазной модели асинхронного двигателя

Векторы потокосцеплений и токов в любой системе координат представляют в виде уравнений электромагнитной связи (2.31 и 2.32). Эти уравнения используют при формировании моделей, записанных относительно токов статора и ротора (\vec{i}_s, \vec{i}_r), потокосцеплений статора и ротора $\vec{\Psi}_s, \vec{\Psi}_r$. При проектировании современных систем управления асинхронными двигателями с короткозамкнутыми роторами модель двигателя записывают в токах статора и потокосцеплениях ротора при ориентации координатной системы по направлению вектора потокосцепления ротора [27, 28, 29].

В настоящее время разработано и используется для исследования динамических режимов работы АД во временной области более 50 различных математических моделей. Поэтому ограничимся более детальным рассмотрением математических моделей АД с короткозамкнутым ротором разработанных в координатных системах $\alpha, \beta; x, y$ и координатной системе d, q , ориентированной по вектору потокосцепления ротора и вращающейся с произвольной скоростью ω_k .

Математическое описание этих моделей является основой математического аппарата векторного управления синхронными и асинхронными двигателями, поэтому выбор данных математических моделей для изучения не случаен. Кроме этого, они позволяют провести анализ процессов электромеханического преобразования энергии в ЭМС как в установившихся, так и в динамических режимах работы, исследовать и оценить влияние формы питающего напряжения и тока преобразователей на работу двигателей переменного тока и на ЭМС в целом. Изучить влияние электрической и магнитной несимметрии на процессы в электрических машинах переменного тока.

Представив результирующие вектора в виде проекций на комплексной плоскости, можно записать их через вещественные и мнимые части в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \vec{U}_s &= U_{su} + jU_{sv}; \\
 \vec{i}_r &= i_{ru} + j\dot{i}_{rv}; \\
 \vec{i}_r &= i_{su} + j\dot{i}_{sv}; \\
 \vec{\Psi}_r &= \Psi_{ru} + j\Psi_{rv}; \\
 \vec{\Psi}_s &= \Psi_{su} + j\Psi_{sv}.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Систему уравнений (4.1) в этом случае для координатных осей x, y , где $\omega_k = \omega_c$, можно записать следующим образом [1, 17, 18, 21]:

$$\begin{aligned}
 U_{sx} &= i_{sx}R_s + \frac{d}{dt}\Psi_{sx} - \omega_c\Psi_{sy}; \\
 U_{sy} &= i_{sy}R_s + \frac{d}{dt}\Psi_{sy} + \omega_c\Psi_{sx}; \\
 0 &= i_{rx}R_r + \frac{d}{dt}\Psi_{rx} - (\omega_c - \omega)\Psi_{ry}; \\
 0 &= i_{ry}R_r + \frac{d}{dt}\Psi_{ry} + (\omega_c - \omega)\Psi_{rx}; \\
 M &= \frac{3}{2}p_n \frac{K_r}{L_s\sigma} (\Psi_{sx}i_{sy} - \Psi_{sy}i_{sx}); \\
 J_\Sigma \frac{d}{dt}\omega &= M - M_c.
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Для координатных осей α, β , когда $\omega_k = 0$, система уравнений (4.1) принимает следующий вид [1, 17, 18, 21]:

$$\begin{aligned}
U_{s\alpha} &= i_{s\alpha} R_s + \frac{d}{dt} \Psi_{s\alpha}; \\
U_{s\beta} &= i_{s\beta} R_s + \frac{d}{dt} \Psi_{s\beta}; \\
0 &= i_{r\alpha} R_r + \frac{d}{dt} \Psi_{r\alpha} + \omega \Psi_{r\beta}; \\
0 &= i_{r\beta} R_r + \frac{d}{dt} \Psi_{r\beta} - \omega \Psi_{r\alpha}; \\
M &= \frac{3}{2} p_n (\Psi_{s\alpha} i_{s\beta} - \Psi_{s\beta} i_{s\alpha}); \\
J_\Sigma \frac{d}{dt} \omega &= M - M_c.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Для разработки математических моделей с ориентацией по вектору потокосцепления ротора исходную систему уравнений (4.1) записывают относительно токов статора и потокосцепления ротора в следующем виде [18, 21]

$$\begin{aligned}
\frac{di_{su}}{dt} &= -\frac{R_r L_m^2 + R_s L_r^2}{L_r L} i_{su} + \omega_k i_{sv} + \frac{L_m R_r}{L_r L} \Psi_{ru} + \frac{L_m}{L} \omega_r \Psi_{rv} + \frac{L_r}{L} u_{su}; \\
\frac{di_{sv}}{dt} &= -\frac{R_r L_m^2 + R_s L_r^2}{L_r L} i_{sv} - \omega_k i_{su} + \frac{L_m R_r}{L_r L} \Psi_{rv} - \frac{L_m}{L} \omega_r \Psi_{ru} + \frac{L_r}{L} u_{sv}; \\
\frac{d\Psi_{ru}}{dt} &= \frac{R_r L_m}{L_r} i_{su} - \frac{R_r}{L_r} \Psi_{ru} + (\omega_k - \omega_r) \Psi_{rv}; \\
\frac{d\Psi_{rv}}{dt} &= \frac{R_r L_m}{L_r} i_{sv} - \frac{R_r}{L_r} \Psi_{rv} - (\omega_k - \omega_r) \Psi_{ru}; \\
M &= \frac{3}{2} p \frac{L_m}{L_r} (\Psi_{ru} i_{sv} - \Psi_{rv} i_{su}),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где $L = L_s L_r - L_m^2$, p – число пар полюсов, m – число фаз.

4.2. Моделирование прямого пуска асинхронного двигателя

В неподвижной комплексной системе координат, когда $\omega_k = 0$, вещественная ось обозначается как ось α , а мнимая – ось β .

При постоянной скорости вращения двигателя $\omega_r = \text{const}$ векторы напряжений, токов и потокосцеплений (статора и ротора) в установившемся режиме будут вращаться синхронно с полем статора со скоро-

стью $\omega_c = 2\pi f$. Проекции этих векторов на оси имеют постоянные амплитуды и представляют собой синусоидальные зависимости.

При моделировании АД в системе координат α, β , как в любой другой системе, используя уравнения электромагнитных связей, можно выразить токи через потокосцепления в виде:

$$\vec{i}_s = \frac{L_r \vec{\Psi}_s - L_m \vec{\Psi}_r}{L_s L_r - L_m^2}, \quad \vec{i}_r = \frac{L_s \vec{\Psi}_r - L_m \vec{\Psi}_s}{L_s L_r - L_m^2}. \quad (4.6)$$

Тогда систему уравнений (4.4), приведя к виду Коши, можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_{s\alpha} &= U_{s\alpha} - \alpha'_s \Psi_{s\alpha} + \alpha'_s K_r \Psi_{r\alpha}; \\ \frac{d}{dt} \Psi_{s\beta} &= -\alpha'_s \Psi_{s\beta} + \alpha'_s K_r \Psi_{r\beta}; \\ \frac{d}{dt} \Psi_{r\alpha} &= -\alpha'_r \Psi_{r\alpha} + \alpha'_r K_s \Psi_{s\alpha} + \omega_r \Psi_{r\beta}; \\ \frac{d}{dt} \Psi_{r\beta} &= -\alpha'_r \Psi_{r\beta} + \alpha'_r K_s \Psi_{s\beta} - \omega_r \Psi_{r\alpha}; \\ M &= \frac{3}{2} p_n \omega_c \frac{K_s}{x_c \sigma} (\Psi_{r\alpha} \Psi_{s\beta} - \Psi_{s\alpha} \Psi_{r\beta}); \\ \frac{d}{dt} \omega &= \frac{p_n}{J_\Sigma} (M - M_c), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $U_{s\alpha} = U_m \cos(2\pi f \cdot t)$ – проекция вектора напряжения на ось α ;

$\alpha'_s = \frac{R_s}{L_s \sigma}$ – коэффициент затухания электромагнитных процессов в об-

мотке статора при замкнутой обмотке ротора; $\alpha'_r = \frac{R_r}{L_r \sigma}$ – коэффициент

затухания электромагнитных процессов в обмотке ротора при замкну-

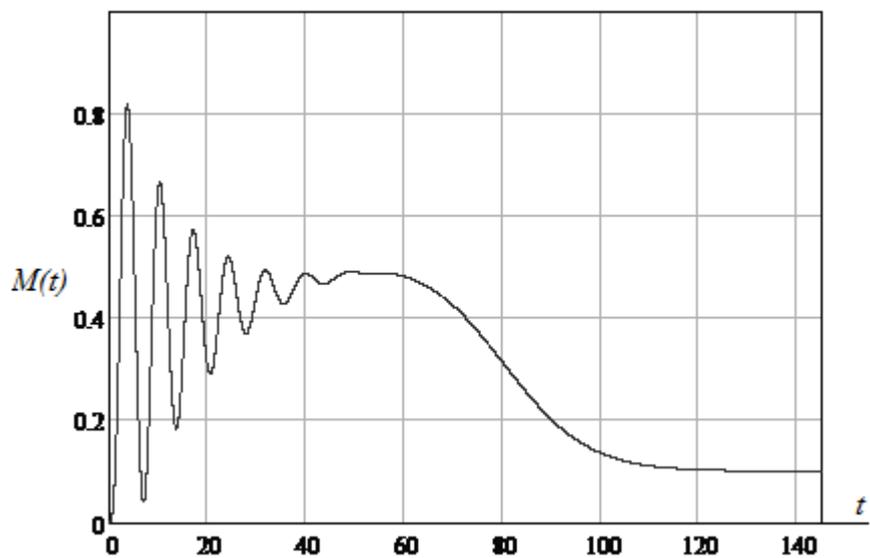
той обмотке статора; $K_s = \frac{L_m}{L_s}$ и $K_r = \frac{L_m}{L_r}$ – коэффициенты связи обмот-

ки статора с обмоткой ротора и обмотки ротора с обмоткой статора со-
ответственно.

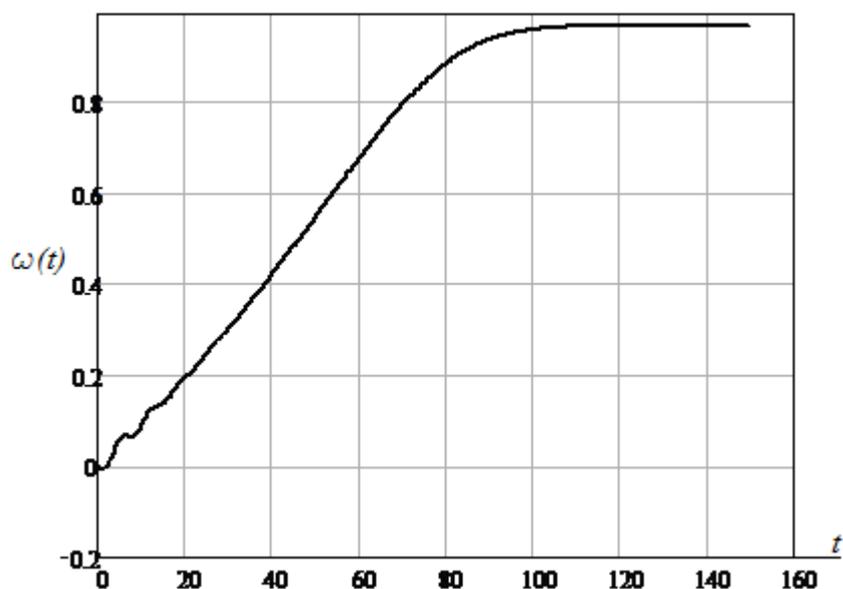
Пользовательская программа модели АД в неподвижной системе координат приведена в приложении 2, а осциллограммы электромагнитного момента и скорости от времени представлены на рис. 4.2.

Приведенная в приложении математическая модель АД позволяет проанализировать влияние параметров машины на динамические характеристики, а также при представлении питающих напряжений $U_{s\alpha}$ и $U_{s\beta}$

в виде импульсов выходного напряжения транзисторного или тиристорного преобразователей, оценить влияние формы выходного напряжения на работу асинхронного двигателя.



a



б

Рис. 4.2. Временные зависимости электромагнитного момента (а) и скорости (б) при пуске двигателя

Для оценки влияния формы выходного напряжения полупроводникового преобразователя на электромагнитный момент и скорость АД при пуске необходимо представить эти напряжения в виде знакопере-

менных импульсных функций, которые записывают в виде суммы гармонических составляющих, не содержащих гармоник, кратных двум и трем [29]. Так, например, для фазных напряжений

$$u_{\phi}(\vartheta) = \frac{2}{\pi} U_{\Pi} (\sin \vartheta' + \frac{1}{5} \sin 5\vartheta' + \frac{1}{7} \sin 7\vartheta' + \frac{1}{11} \sin 11\vartheta' + \dots),$$

а для линейных

$$u_{\lambda}(\vartheta) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} U_{\Pi} (\sin \vartheta' - \frac{1}{5} \sin 5\vartheta' - \frac{1}{7} \sin 7\vartheta' + \frac{1}{11} \sin 11\vartheta' + \dots),$$

где U_{Π} – напряжение источника питания инвертора; $\vartheta = \Omega_s t$ – время в угловых единицах, определяемое частотой Ω_s выходного напряжения инвертора. Графики фазных и линейных напряжения источника питания АД для этого случая представлены на рис. 4.3.

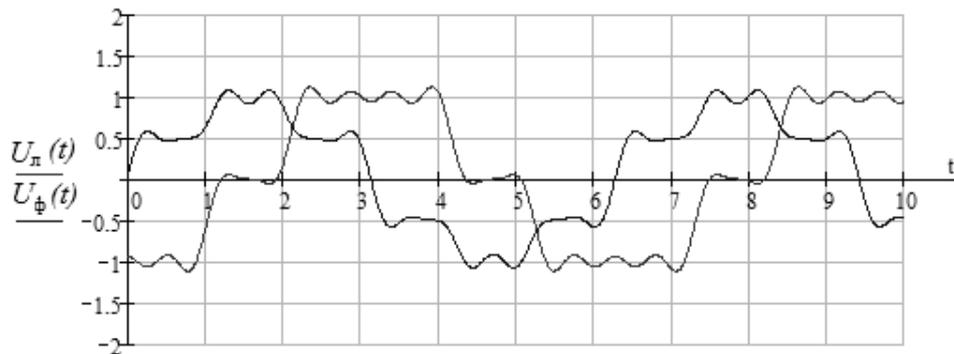


Рис. 4.3. Графики фазных и линейных напряжений

В случае использования при описании выходных напряжений полупроводниковых преобразователей коммутационных функций выражения для фазных и линейных напряжений записывают в виде [1, 2, 5, 6, 29]:

$$F(t) = \Phi_F(Z(t), X(t)), \quad (4.8)$$

где $Z(t)$ – вектор переменных, управляющих состоянием импульсных ключевых элементов (ИКЭ); $X(t)$ – вектор переменных состояний. Коммутационные функции $F_{i,j}(t)$ изменяют свои значения по логическим условиям функционирования модели относительно знакопеременной функции $\varphi_{ij}(t) > 0$ ($\varphi_{ij}(t) < 0$). Изменение значений коммутационных функций происходит скачком на границе неравенства в моменты переключения ИКЭ. Для их математического описания применяют сигнальные функции следующего вида: $\text{sign } \varphi(t)$. Временные зависимости напряжений по осям α, β для неподвижной системы координат в математической модели представляют в виде следующих выражений:

$$U\alpha(t) = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \cdot 2.34U_{\Pi} \cdot f_{\alpha}(t), \quad U\beta(t) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{\pi} \cdot 2.34 \cdot U_{\Pi} f_{\beta}(t), \quad (4.9)$$

где $f_{\alpha}(t)$ – коммутационная функция переключения ИКЭ в фазе А инвертора, так как в неподвижной системе координат проекция обобщенного вектора на ось α соответствует мгновенному значению напряжения в этой фазе; $f_{\beta}(t)$ – коммутационная функция переключения ИКЭ для линейного напряжения U_{BC} , так как это напряжение соответствует проекции обобщенного вектора на ось β .

В этом случае временные зависимости $U\alpha(t)$ и $U\beta(t)$ имеют следующий вид (рис. 4.4).

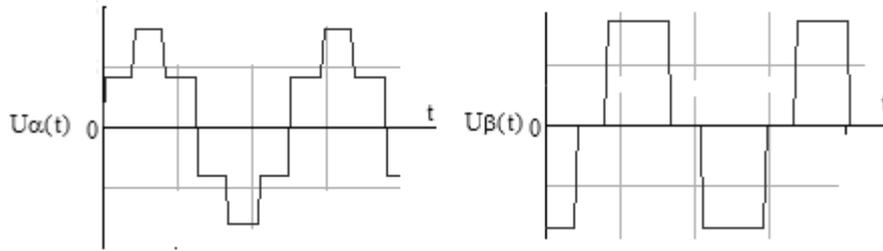


Рис. 4.4. Временные зависимости напряжений по осям α и β

Систему уравнений для формирования математической модели АД, обмотки статора которого подключены к импульсному источнику питания, можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi_{s\alpha} &= U\alpha(t) - \alpha'_s \Psi_{s\alpha} + \alpha'_s K_r \Psi_{r\alpha}; \\ \frac{d}{dt} \Psi_{s\beta} &= U\beta(t) - \alpha'_s \Psi_{s\beta} + \alpha'_s K_r \Psi_{r\beta}; \\ \frac{d}{dt} \Psi_{r\alpha} &= -\alpha'_r \Psi_{r\alpha} + \alpha'_r K_s \Psi_{s\alpha} + \omega_r \Psi_{r\beta}; \\ \frac{d}{dt} \Psi_{r\beta} &= -\alpha'_r \Psi_{r\beta} + \alpha'_r K_s \Psi_{s\beta} - \omega_r \Psi_{r\alpha}; \\ M &= \frac{3}{2} p_n \omega_c \frac{K_s}{x_c \sigma} (\Psi_{r\alpha} \Psi_{s\beta} - \Psi_{s\alpha} \Psi_{r\beta}); \\ \frac{d}{dt} \omega &= \frac{p_n}{J_{\Sigma}} (M - M_c). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Пользовательская программа приведена в приложении. Она позволяет оценить не только влияние формы питающего напряжения на процесс пуска АД, но определить влияние гармонического состава этого

напряжения на электромагнитный момент двигателя. При этом можно проанализировать влияние частоты питающего напряжения на пуск двигателя при различных значениях частоты и постоянном по величине амплитудном значении напряжения.

Временные зависимости электромагнитного момента и скорости для данного случая представлены на рис. 4.5.



Рис. 4.5. Временные зависимости электромагнитного момента и скорости при пуске двигателя от импульсного источника

4.3. Схемы замещения асинхронного двигателя при частотном управлении

Для описания физических явлений в АД, связанных с воздействием на него со стороны источника питания, в теории электрических машин пользуются магнитными и электрическими схемами замещения. Первый тип схем замещения используют для исследований магнитных полей и при определении электромагнитного момента, а электрические схемы при моделировании процессов в двигателе используют для определения его параметров [29]. Модели АД в виде схемы замещения недостаточно совершенны, но позволяют приобрести необходимое понимание в вопросах, связанных с частотным управлением асинхронным короткозамкнутым двигателем. Они позволяют также оценить влияние на статические и динамические характеристики асинхронного двигателя изменяющихся напряжений, тока и/или частоты питания [6, 23, 27, 28].

Для анализа режимов преобразования энергии при частотном управлении пользуются выражением намагничивающего тока машины [18]

$$\vec{i}_\mu = \vec{i}_s + \vec{i}_r. \quad (4.8)$$

С учетом (4.8) уравнения потокосцеплений могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_s &= L_{s\sigma}\vec{i}_s + L_m\vec{i}_\mu; \\ \bar{\Psi}_r &= L_{r\sigma}\vec{i}_r + L_m\vec{i}_\mu,\end{aligned}\quad (4.9)$$

где $L_{s\sigma} = L_s - L_m$, $L_{r\sigma} = L_r - L_m$ – индуктивности рассеяния статорной и роторной обмоток.

Для статического режима, когда $\frac{d}{dt}\bar{\Psi}_s = \frac{d}{dt}\bar{\Psi}_r = 0$, а $\omega_r = s\omega_c$, уравнения равновесия напряжений в синхронной системе координат можно записать в виде

$$\begin{aligned}\vec{U}_s &= R_s\vec{i}_s + j\omega_c\bar{\Psi}_s = (R_s + j\omega_c L_{s\sigma})\vec{i}_s + j\omega_c L_m\vec{i}_\mu = (R_1 + jX_1)\vec{i}_1 + jX_m\vec{i}_m; \\ 0 &= R_r\vec{i}_r + j\omega_r\bar{\Psi}_r = (R_r + js\omega_c L_{r\sigma})\vec{i}_r + js\omega_c L_m\vec{i}_m = (R'_2 + jsX'_2)\vec{i}_r + jsX_m\vec{i}_m,\end{aligned}$$

или в комплексной форме в виде [18]

$$\begin{aligned}\dot{U}_s &= \dot{I}_s(R_1 + jX_1) + j\dot{I}_\mu X_\mu; \\ 0 &= \dot{I}'_r(R'_2 + jX'_2/s) + j\dot{I}_\mu X_\mu s,\end{aligned}\quad (4.10)$$

где

$$X_1 = \omega_c L_{s\sigma} = 2\pi f L_{s\sigma}; \quad X'_2 = \omega_c L_{r\sigma}; \quad X_\mu = \omega_c L_m; \quad s = (\omega_c - \omega) / \omega_c.$$

В уравнениях (4.10) величина $\dot{I}_\mu X_\mu$ представляет собой ЭДС фазы двигателя

$$\dot{E}_1 = -\dot{E}'_2 = j\dot{I}_\mu X_\mu = j\omega_c L_m \dot{I}_\mu = j\omega_c \Psi_\mu.$$

Поэтому уравнения (4.10) можно записать в общепринятом виде [9, 18]

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{I}_1(R_1 + jX_1) + \dot{E}_1; \\ \dot{E}_2 &= \dot{I}'_2 R'_2 / s + j\dot{I}'_2 X'_2.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Таким образом, математический аппарат обобщенной электрической машины позволяет получить традиционные уравнения равновесия напряжений, схему замещений и векторную диаграмму для статических режимов работы, известных из курса электрических машин.

При анализе установившихся и переходных режимов работы асинхронных частотно-регулируемых электроприводов пользуются схемой замещения АД с короткозамкнутым ротором в неподвижной системе координат α, β , рис. 4.6. [20, 23].

Векторная форма записи уравнений равновесия напряжений для представленной схемы замещения имеет вид:

$$\vec{U}_s = R_s \vec{i}_s + \frac{d\vec{\Psi}_s}{dt};$$

$$0 = R_r \vec{i}_r + \frac{d\vec{\Psi}_r}{dt} + j \cdot \omega_{\text{эл.п}} \vec{\Psi}_r,$$
(4.12)

где $R_r = R'_2$ – приведенное к статору сопротивление обмотки ротора; $\omega_{\text{эл.п}}, \frac{\text{эл.рад}}{\text{с}} = \omega_r$ – угловая частота ЭДС вращения, наводимая в обмотках ротора.

При постоянной скорости вращения двигателя $\omega_r = \text{const}$ (в установившемся режиме) для оценки влияния частоты питающего напряжения схему замещения представляют в следующем виде (рис. 4.7) [1, 18].

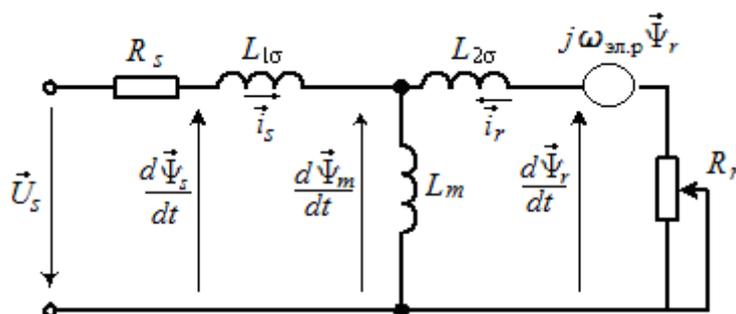


Рис. 4.6. Схема замещения асинхронного двигателя с короткозамкнутым ротором в неподвижной системе координат α, β

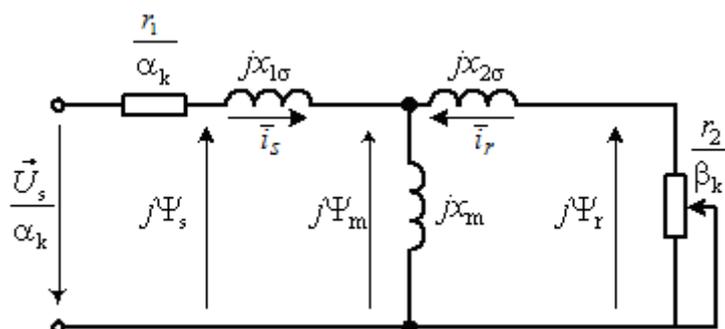


Рис. 4.7. Схема замещения АД с короткозамкнутым ротором в установившемся режиме

Схема замещения (рис. 4.7) позволяет при разработке пользовательской программы получить основные соотношения для параметров электродвигателя при частотном управлении, оценить влияние частоты на величину магнитного потока и получить формулу для расчета момента двигателя при частотном управлении.

В системе координат x, y , вращающейся со скоростью ω_c , уравнения равновесия напряжений имеют вид:

$$\begin{aligned}\vec{U}_s &= R_s \vec{i}_s + \frac{d}{dt} \vec{\Psi}_s + j\omega_c \vec{\Psi}_s; \\ 0 &= R_r \vec{i}_r + \frac{d}{dt} \vec{\Psi}_r + j(\omega_c - \omega_r) \vec{\Psi}_r.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Составляющие $j\omega_c \vec{\Psi}_s$ и $j(\omega_c - \omega_r) \vec{\Psi}_r$ в уравнениях системы (4.13) представляют собой ЭДС вращения, наводимых в статорной и роторной обмотке. Если вектора \vec{U}_s , \vec{i}_s , \vec{i}_r , $\vec{\Psi}_s$, $\vec{\Psi}_r$ и оси координатной системы x, y вращаются в электрическом пространстве с одинаковой угловой скоростью, то в установившемся режиме проекции этих векторов на оси представляют собой действительные числа. Схема замещения в этом случае имеет следующий вид (рис. 4.8).

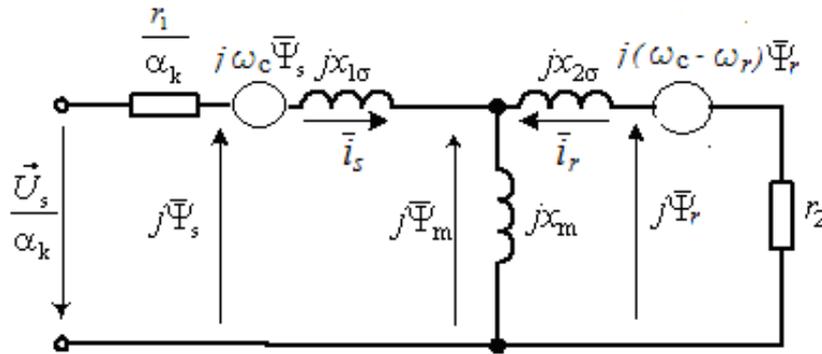


Рис. 4.8. Схема замещения АД в установившемся режиме в осях x, y

В схемах замещения АД рис. 4.6 и 4.8 введены добавочные ЭДС вращения, которые определяются следующим образом. Так для схемы замещения АД с короткозамкнутым ротором в неподвижной системе координат α, β (рис. 4.6), когда ЭДС вводится только в ротор, ее определяют в виде:

$$\vec{E}_2 = j \cdot \omega_r \vec{\Psi}_r.\tag{4.14}$$

Для схемы замещения АД с короткозамкнутым ротором во вращающейся системе координат, вращающейся со скоростью ω_c (рис. 4.8), добавочные ЭДС вращения вводят как в статор, так и в ротор. Определяют их в следующем виде:

для статорной обмотки

$$\vec{E}_1 = j \cdot \omega_c \vec{\Psi}_s;\tag{4.15}$$

для роторной обмотки

$$\vec{E}_2 = j \cdot (\omega_c - \omega_r) \vec{\Psi}_r.\tag{4.16}$$

4.4. Основные соотношения для асинхронного двигателя при частотном управлении

При определении основных соотношений принимают x_{1H} , x'_{2H} , x_m – индуктивные сопротивления обмотки статора, приведенной обмотки ротора и контура намагничивания при номинальной частоте питающей сети. На схеме замещения (рис. 4.4) $\alpha_k = \frac{f_1}{f_{1H}}$ – относительная частота напряжения (тока) статора; $\beta_k = \frac{\Delta\omega}{\omega_{1H}} = \frac{f_2}{f_{1H}}$ – абсолютное скольжение, или относительная частота ротора.

Для оценки влияния регулирования напряжения на показатели электропривода пользуются коэффициентом $\gamma = \frac{U}{U_{1H}}$ (относительное напряжение на статоре). При этом значение скольжения определяют в виде $s = \frac{\Delta\omega}{\omega_1} = \frac{\beta_k}{\alpha_k}$.

Напряжение \dot{U}_1 питающей сети при частотном управлении АД можно представить в виде

$$\dot{U}_1 = U_{1H} \gamma e^{j2\pi f_{1H} \alpha_k t}, \quad (4.13)$$

где $\gamma = \frac{U_1}{U_{1H}}$ – относительное значение действующего напряжения

на зажимах статора, относительный момент нагрузки равен $\mu = \frac{M}{M_H}$,

$\alpha_k = \frac{f_1}{f_{1H}}$ – относительная частота напряжения (тока) статора.

При принятых обозначениях сопротивления отдельных участков схемы замещения можно записать в следующем виде:

1. Полное сопротивление обмотки ротора

$$\dot{z}'_2 = r'_2 \frac{\alpha_k}{\beta_k} + jx_{1H} \alpha_k = \alpha_k \dot{z}'_2. \quad (4.14)$$

2. Сопротивление контура намагничивания

$$\dot{z}_m = jx_m \alpha_k. \quad (4.15)$$

3. Полное сопротивление обмотки статора

$$\underline{z}_1 = R_1 + jx_{1H}\alpha_k = \underline{z}_{1H}\alpha_k, \quad (4.16)$$

где $\underline{z}_{1H} = \frac{R_1}{\alpha} + jx_{1H}$.

4. Эквивалентное сопротивление двух параллельных ветвей

$$\underline{z}_{\text{ЭКВ}} = \frac{jx_m\alpha_k \cdot \alpha_k \underline{z}'_{2H}}{jx_m\alpha_k + jx'_{2H} + r'_2 \frac{\alpha_k}{\beta_k}} = \alpha_k \frac{jx_m \left(jx'_{2H} + \frac{r'_2}{\beta_k} \right)}{\frac{r'_2}{\beta_k} + jx'_r}, \quad (4.17)$$

где $x'_r = x'_{2H} + x_m$ – приведенное к статору полное индуктивное сопротивление обмотки ротора при номинальной частоте.

5. Полное комплексное сопротивление схемы замещения АД определяется следующим выражением

$$\underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_{\text{ЭКВ}} = \alpha \left[\frac{R_1}{\alpha} + jx_{1H} + \frac{jx_m \left(jx'_{2H} + \frac{jx'_{2H}}{\beta} \right)}{\frac{r'_2}{\beta} + jx'_r} \right]. \quad (4.18)$$

Из выражений (4.14)–(4.18) следует, что все сопротивления пропорциональны частоте питающей сети и любое изменение частоты влияет на их величину.

Зависимость внутренних параметров АД от частоты приводит к изменению значений токов, ЭДС и магнитного потока в зазоре машины, а соответственно, и к изменению рабочих характеристик. Следовательно, необходимо определить соотношения для значений токов, ЭДС и магнитного потока при частотном управлении. Исходя из схемы замещения и при принятых обозначениях, примем

$$A \quad \alpha, \beta = \left(\frac{R_1}{\alpha_k} \frac{r'_2}{\beta_k} - x_{1H}x'_r - x_mx'_{2H} \right)^2 + \left(\frac{R_1}{\alpha_k} x'_r + x_m \frac{r'_2}{\beta_k} \right)^2,$$

$$B \quad \beta = \left(\frac{r'_2}{\beta} \right)^2 + x_r'^2, \quad D \quad \beta = \left(\frac{r'_2}{\beta} \right)^2 + x_{2H}'^2.$$

Действующие значения токов в ветвях схемы замещения АД можно представить в виде

$$I_1 = \frac{U_{1н}\gamma}{\alpha_k} \frac{\sqrt{\left(\frac{r_2'}{\beta_k}\right)^2 + x_r'^2}}{\sqrt{\left(\frac{R_1}{\alpha_k} \frac{r_2'}{\beta} - x_{1н}x_r' - x_m x_{2н}'\right)^2 + \left(\frac{R_1}{\alpha_k} x_r' + x_m \frac{r_2'}{\beta_k}\right)^2}} = \frac{U_{1н}\gamma}{\alpha_k} \sqrt{\frac{B \beta}{A \alpha, \beta}},$$

$$I_2' = I_1 \frac{x_m}{\sqrt{\left(\frac{r_2'}{\beta_k}\right)^2 + x_r'^2}} = \frac{U_{1н}\gamma}{\alpha} \frac{x_m}{\sqrt{A \alpha, \beta}},$$

$$I_m = I_1 \frac{\sqrt{\left(\frac{r_2'}{\beta_k}\right)^2 + x_{2н}'^2}}{\sqrt{\left(\frac{r_2'}{\beta_k}\right)^2 + x_r'^2}} = \frac{U_{1н}\gamma}{\alpha_k} \sqrt{\frac{D \beta}{B \beta}}.$$

Влияние частоты питающего напряжения на магнитный поток машины легко установить из уравнения равновесия напряжений в фазе обмоток статора, т. е. $\dot{U}_1 = \dot{E}_1 + \dot{I}_1 z_1$, ЭДС равно $\dot{E}_1 = C_1 \dot{\Phi} f_1 = C_1 \dot{\Phi} f_{1н} \alpha_k$, где $C_1 = 4,44 k_{об1} w_1$ – конструктивная постоянная машины; $k_{об1}$ – обмоточный коэффициент, w_1 – число витков фазы обмотки статора.

Тогда уравнение равновесия запишется в виде

$$\dot{U}_1 = C_1 \dot{\Phi} f_{1н} \alpha_k + \dot{I}_1 R_1 + j x_{1н} \dot{I}_1 \alpha_k. \quad (4.19)$$

Из уравнения (4.19), пренебрегая в первом приближении влиянием тока статора на поток двигателя, т. е. полагая $|U_1| = |E_1|$, можно представить выражение для магнитного потока в виде

$$\dot{\Phi} = \frac{\dot{U}}{C_1 f_{1н} \alpha_k}. \quad (4.20)$$

Отсюда следует, что основным фактором, определяющим рабочий магнитный поток двигателя, является соотношение между напряжением и частотой. Следовательно, регулировать поток двигателя можно изменением отношения амплитуды напряжения на зажимах обмотки статора к заданному значению частоты.

Грубое приближение можно уточнить, если учесть падение напряжения на индуктивных сопротивлениях обмотки статора. Такая идеализация АД (пренебрежением активным сопротивлением обмотки статора) в нормальных условиях работы, при номинальной частоте используется

довольно часто, так как ошибка в этом случае невелика. При $R_1 = 0$ магнитный поток двигателя равен

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{C_1 f_{1н}} \left(\frac{\dot{U}}{\alpha_k} - j \dot{I}_1 x_{1н} \right). \quad (4.21)$$

Из полученного выражения следует, что магнитный поток зависит не только от отношения напряжения и частоты, но и от момента нагрузки, так как $\dot{I}_1 = \dot{I}_m + \dot{I}'_2$, а ток $\dot{I}'_2 = \sqrt{\frac{M \Delta \omega}{m_2 r_2}}$ из выражения электромагнитного момента двигателя, полученного через электрические потери ротора.

Влияние нагрузки на поток в данном случае оказывается одинаковым при всех частотах, если отношение напряжения к частоте имеет постоянное значение $\frac{U}{\alpha_k} = \frac{U_n}{1} = \text{const}$, то поток не зависит от частоты. При любом значении частоты поток изменяется так же, как и при номинальной частоте.

В действительности же из-за наличия активных сопротивлений статора влияние нагрузки на поток двигателя зависит от частоты. Это достаточно легко установить из следующего выражения

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{C_1 f_{1н}} \left(\frac{\dot{U}}{\alpha_k} - j \dot{I}_1 x_{1н} - \dot{I}_1 \frac{R_1}{\alpha_k} \right). \quad (4.22)$$

Анализ выражения (4.22) показывает, что влияние активного сопротивления статора особенно велико при низких частотах, так как величина слагаемого, учитывающего падение напряжения на этих сопротивлениях, пренебрежимо мала при номинальной частоте, а при уменьшении частоты, гиперболически, с начала медленно, а затем круто возрастает до бесконечности при $\alpha_k = 0$.

Таким образом, можно сделать следующий вывод:

- средством управления магнитным потоком служит отношение напряжения к частоте;
- на поток оказывает влияние момент нагрузки, причем эта зависимость возрастает с понижением частоты из-за падения напряжения на активных сопротивлениях статора.

Из проведенного выше анализа видно, что при частотном управлении на процессы в машине существенное влияние оказывает ток ротора, величину и зависимость которого можно определить из уравнения

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_{2s}}{r_2 + j x_{2s}},$$

где $E_{2s} = C_2 \Phi f_2$ – ЭДС в обмотке ротора, определяемая потоком и соответствующая частотой ротора; $x_{2s} = 2\pi L_2 f_2$ – индуктивное сопротивление, соответствующее этой частоте.

Частота тока ротора пропорциональна его абсолютному скольжению

$$f_2 = \beta_k f_{1н}.$$

Относительное скольжение ротора равно отношению параметра абсолютного скольжения β_k к параметру тока статора α_k , т. е. $s = \frac{f_2}{f_1} = \frac{\beta_k}{\alpha_k}$.

Тогда выражение для тока \dot{I}_2 можно представить в виде

$$\dot{I}_2 = \frac{c_2 \Phi f_2}{r_2 + j \omega_{2\alpha} L_2}.$$

Умножим числитель и знаменатель на отношение $\frac{f_1}{f_2}$, тогда

$$\dot{I}_2 \frac{c_2 \Phi f_1}{r_2 \frac{f_1}{f_2} + j \omega_{2\alpha} L_2 \frac{f_1}{f_2}} = \frac{\dot{E}_{2\alpha}}{r_2 \frac{f_1}{f_2} + j x_{2\alpha}}, \quad (4.23)$$

где $\dot{E}_{2\alpha}$ и $x_{2\alpha}$ – ЭДС и индуктивное сопротивление ротора при частоте статора $f_1 = \alpha_k f_{1н}$.

Подставив в (4.23) $f_1 = f_{1н\alpha}$ и $f_2 = f_{1н\beta}$, получим $\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_{2\alpha}}{r_2 \frac{1}{\beta} + j x_2}$,

т. е. ток ротора зависит только от потока и абсолютного скольжения и не зависит от частоты тока статора.

Учитывая, что ток ротора I_2 , электромагнитный момент $M_{эм}$ двигателя и электрические потери в роторе связаны равенством

$$P_{M2} = M \Delta \omega = m_2 = m_2 r_2 I_2^2,$$

выражение электромагнитного момента двигателя имеет вид

$$M = \frac{m_2 r_2 I_2^2}{\Delta \omega}. \quad (4.24)$$

Подставим в (4.24) значения тока ротора и абсолютного скольжения, получим следующее выражение

$$M = \frac{m_2 r_2 E_2^2}{\omega_{1н} \beta_k \left[\left(r_2 \frac{1}{\beta_k} \right)^2 + x_2^2 \right]}.$$

Учитывая приведение параметров ротора к цепи статора, в окончательном виде выражение электромагнитного момента двигателя запишется как

$$M = \frac{m_1 c_1^2 f_{1H}^2}{\omega_{1H}} \Phi^2 \frac{r_2^1}{r_2'^2 + x_2'^2 \beta}. \quad (4.25)$$

Таким образом, при заданном значении потока Φ электромагнитный момент определяется параметром абсолютного скольжения β_k и не зависит от частоты питающей сети.

4.5. Статические и динамические характеристики асинхронного двигателя при частотном управлении

Анализ основных соотношений при скалярном частотном управлении асинхронного двигателя позволяет сделать вывод о том, что [7, 15, 18, 27, 28]:

- все величины (E_1 , Φ , I_1 , I_2 , I_m , M) зависят от относительных переменных α_k , β_k , γ ;
- статические и динамические характеристики АД определяются принятым законом частотного управления.

Практическая реализация скалярного частотного управления осуществляется изменением напряжения U_1 в функции частоты f_1 без компенсации или с компенсацией падения напряжения между входом системы (см. схема замещения рис. 4.7) и выбранной на ней верхней точкой.

$$\frac{\dot{U}_s}{f_1} = \text{const};$$

$$\frac{\dot{U}_s}{f_1} = \text{const} (\vec{\Psi}_s = \text{const}), \dot{U}_1 = \dot{U}_s + R_1 \cdot \dot{I}_1;$$

$$\frac{\dot{U}_m}{f_1} = \text{const} (\vec{\Psi}_m = \text{const}), \dot{U}_1 = \dot{U}_s + R_1 \cdot \dot{I}_1 + j \cdot x_1 \cdot \dot{I}_1;$$

$$\frac{\dot{U}_r}{f_1} = \text{const} (\vec{\Psi}_r = \text{const}), \dot{U}_1 = \dot{U}_s + R_1 \cdot \dot{I}_1 + j \cdot x_1 \cdot \vec{I}_1 + j \cdot x_m \cdot \dot{I}_m + j \cdot x_2' \cdot \dot{I}_2.$$

При этом можно говорить о линейном законе управления $\frac{\dot{U}_1}{f_1} = \text{const}$ и квадратичном законе управления $\frac{\dot{U}_1}{f_1^2} = \text{const}$, которые определяет характер нагрузки.

4.5.1. Расчет статических характеристик АД при частотном управлении

Расчетные выражения для механических и электромеханических характеристик асинхронного двигателя при скалярном частотном управлении получают на основании схемы замещения (рис. 4.6) [27, 28].

При этом различают точные и упрощенные выражения для практических расчетов механических $M(s)$ и электромеханических характеристик двигателя $I_1(s)$ при переменных значениях питающего напряжения и частоты.

Точные выражения для расчета механических и электромеханических характеристик используют при исследовании влияния эффектов вытеснения тока и насыщения магнитной системы двигателя основным магнитным потоком и потоками рассеяния. Для глубокопазных двигателей эти выражения позволяют оценить влияние поверхностного эффекта на увеличение эквивалентного активного сопротивления и уменьшения индуктивности рассеяния обмотки ротора.

При расчетах статических механических $M(s)$ и электромеханических $I_1(s)$ характеристик двигателя при переменных значениях питающего напряжения и частоты пользуются упрощенными выражениями [23, 28].

$$M(s) = \frac{3 \cdot U_{1\phi j}^2 \cdot \frac{R'_2}{s}}{\omega_0 \left[\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + x_{1H} \cdot \alpha_k + x_{2H} \cdot \alpha_k^2 + \left(\frac{R_1 \cdot R'_2}{s \cdot x_m \cdot \alpha_k} \right)^2 \right]}; \quad (4.26)$$

$$I_1(s) = \sqrt{I_0^2 + I_2'^2(s) + 2 \cdot I_0 \cdot I_2'(s) \cdot \sin \varphi_2(s)}; \quad (4.27)$$

$$I_2'(s) = \frac{U_{1\phi j}}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + x_{1H} \cdot \alpha_k + x_{2H} \cdot \alpha_k^2 + \left(\frac{R_1 \cdot R'_2}{s \cdot x_m \cdot \alpha_k} \right)^2}}; \quad (4.28)$$

$$I_0 = \frac{U_{1\phi j}}{\sqrt{R_1^2 + x_{1H} \cdot \alpha_k + x_{2H} \cdot \alpha_k^2}}; \quad (4.29)$$

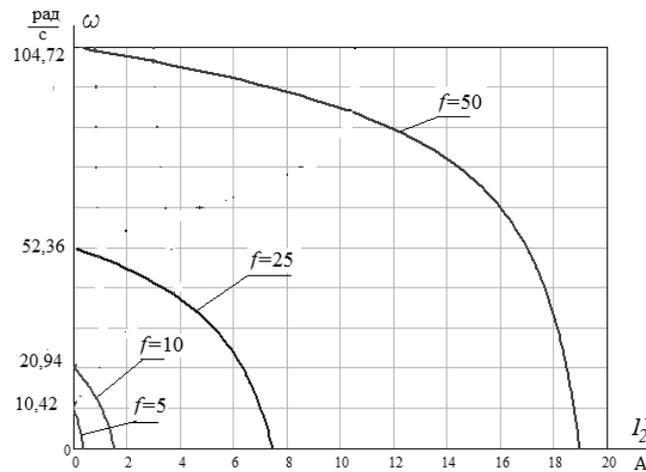
$$\sin \varphi_2(s) = \frac{x_{1H} \cdot \alpha_k + x_{2H} \cdot \alpha_k}{\sqrt{\left(R_1 + \frac{R'_2}{s} \right)^2 + x_{1H} \cdot \alpha_k + x_{2H} \cdot \alpha_k^2 + \left(\frac{R_1 \cdot R'_2}{s \cdot x_m \cdot \alpha_k} \right)^2}}, \quad (4.30)$$

где I_0 – ток холостого хода

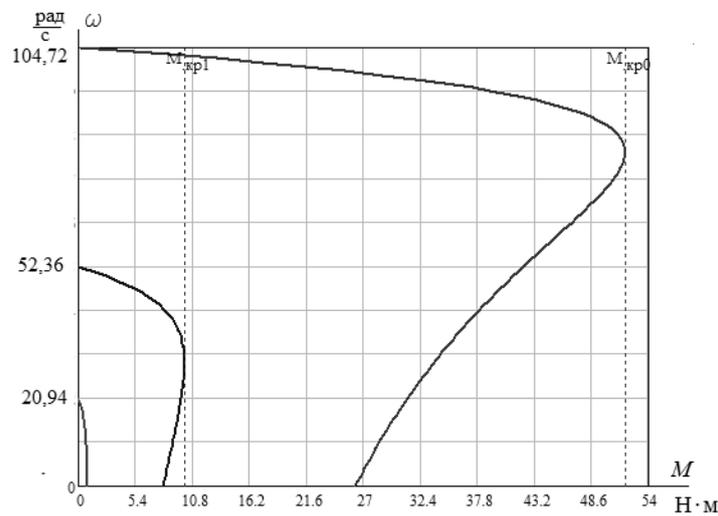
Для построения механических $\omega(M)$ и электромеханических $\omega(I_1)$ характеристик значение угловой скорости вращения двигателя определяются по выражению

$$\omega = \omega_0 \cdot (1 - s).$$

На рис. 4.8, а, б приведены электромеханические и механические характеристики асинхронного двигателя серии RA112M6, рассчитанные для частотного закона управления $\frac{U}{f^2}$.



а



б

Рис. 4.8. Электромеханические (а) и механические (б) характеристики АД

Листинг пользовательской программы для расчета статических характеристик АД приведен в приложении.

4.5.2. Модель частотно-регулируемого асинхронного двигателя

Частотное регулирование скорости вращения ротора асинхронного двигателя осуществляется с применением полупроводниковых преобразователей напряжения и частоты сети в двух основных видах, а именно скалярным и векторным способами управление. Исторически первым видом было скалярное регулирование, когда частота вращения вала задавалась плавным изменением частоты трехфазного напряжения (частоты сети) и пропорциональным уменьшением напряжения, подаваемого на двигатель. Регулирование частоты и напряжения при этом осуществляется с помощью полупроводниковых преобразователей, форма выходного напряжения и тока которых формируется в виде импульсов. В настоящее время наиболее широко распространен способ широтной импульсной модуляции (ШИМ) [1, 28].

Таким образом, при разработке математической модели частотно-регулируемого АД объектом моделирования является система «преобразователь частоты – асинхронный двигатель» (ПЧ-АД). Поэтому, кроме общепринятых допущений для АД, необходим определенный уровень идеализации и допущения для полупроводникового преобразователя [1, 29]. Уровень идеализации и допущения для полупроводникового преобразователя определяют исходя из концепции отдельного рассмотрения рабочих и коммутационных процессов [29], а именно:

- вентили инвертора – идеальные ключи, сопротивление которых в проводящем состоянии равно нулю, в непроводящем – бесконечность, а время их переключения принимают равным нулю;
- вентили инвертора – полностью управляемые элементы, процессы, связанные с искусственной коммутацией которых, не влияют на форму выходного напряжения инвертора;
- источник питания инвертора представляют идеальным источником ЭДС.

При математическом описании рабочих процессов в силовых цепях системы ПЧ-АД пользуются следующей схемой замещения (рис. 4.9).

В схеме замещения все вентили, представленные идеальными ключами УК1–УК6, разбиты на блоки катодных и анодных групп соединений. Для ключей анодной группы соединений, согласно представленной схеме замещения, можно выделить напряжения u_{1a} , u_{1b} , u_{1c} , для катодной группы – u_{2a} , u_{2b} , u_{2c} . Напряжение питания инвертора, подводимое от идеального источника ЭДС, обозначено через $u_{п}$. Напряжение u_0 – разность потенциалов между точкой соединения обмоток статора и средней точкой источника питания инвертора.

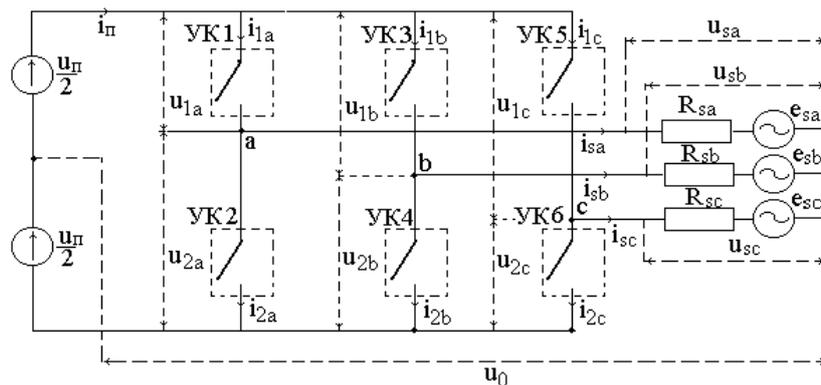


Рис. 4.9. Схема замещения системы ПЧ-АД

В данной схеме для удобства записи основных соотношений искусственно вводится средняя точка источника питания инвертора, а двигатель представляют в виде трехфазного источника ЭДС с конечным внутренним сопротивлением, фазы которого соединены в звезду без нейтрального провода.

В случае соединения фаз нагрузки в m -фазную звезду, как это представлено на рис. 4.9, токи в фазах нагрузки инвертора можно записать в виде

$$i_{sk} = u_{sk} \cdot g_{sk} - e_{sk} \cdot g_{sk}, \quad (4.31)$$

где u_{sk} – фазные напряжения, e_{sk} , g_{sk} – ЭДС и проводимость фазы двигателя, k – обозначение фаз a, b, c .

Кроме этого, при любом законе коммутации для каждой пары вентиля, соединенных с фазой обмотки статора, возможны три допустимых состояния, например для фазы a :

- идеальный ключевой элемент (ИКЭ) УК1 находится в проводящем состоянии, второй УК2 – в непроводящем;
- УК2 – в проводящем состоянии, УК1 – в непроводящем;
- оба ИКЭ в непроводящем состоянии.

Для того чтобы сформировать напряжение на выходе инвертора, необходимо одновременное выполнение двух условий:

- к силовым электродам вентиля приложено прямое напряжение;
- на вентиль подан управляющий (включающий) сигнал.

Для определения состояния ключей и, соответственно, напряжений на вентильных блоках преобразователя пользуются пороговыми функциями и аппаратом алгебры логики.

Уравнения состояния идеальных ключевых элементов, которым соответствуют принятые допущения и схема замещения, определяют через коммутационные вектор-функции непрерывного скалярного аргумента θ_u^* в виде [29]:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} f_A \\ f_B \\ f_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign}(\sin\theta_u^*) \\ \text{sign}(\sin\theta_u^* - \varphi) \\ \text{sign}(\sin\theta_u^* + \varphi) \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

где f_A, f_B, f_C – фазные коммутационные функции, $\theta_u^* = \theta_{uk} + \theta_k$ – угол поворота управляющего вектора относительно оси $O\alpha$ неподвижной системы координат $\alpha, \beta, 0$; θ_{uk} – угол, определяющий положение управляющего вектора во вращающейся системе координат $\alpha, \beta, 0$; $\theta_k = \omega_k t$ – угол поворота вращающейся системы координат относительно неподвижной системы координат; $\varphi = 2\pi/3$ – угол сдвига фаз между напряжениями.

Проекции вектор-функции \bar{F} на оси α, β соответствуют проекциям управляющего вектора \bar{U} на данные оси, а его проекции по осям α и β имеют следующий вид [3]:

$$U_\alpha(t) = \frac{2}{\pi} U_m f_\alpha(t);$$

$$U_\beta(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} U_m f_\beta(t),$$

где $f_\alpha(t), f_\beta(t)$ – проекции вектор-функции по осям α и β соответственно, U_m – амплитудное значение питающего напряжения.

При этом проекцию вектор-функции \bar{F} на ось α можно представить в виде

$$f_\alpha(t) = f_A = \text{sign}(\sin\theta_u^*), \quad (4.33)$$

а на ось β

$$f_\beta(t) = \frac{f_B - f_C}{\sqrt{3}} = \frac{\text{sign}(\sin\theta_u^* - \varphi) - \text{sign}(\sin\theta_u^* + \varphi)}{\sqrt{3}}. \quad (4.34)$$

Таким образом, полная система уравнений, описывающих процессы в системе ПЧ-АД (рис. 4.9), имеет следующий вид:

- для модели преобразователя

$$\theta_u^* = \theta_{uk} + \theta_k = \theta_{uk} + \omega_k t;$$

$$\varphi(t) = \sin(\theta_{uk} + \omega_k t);$$

$$\begin{bmatrix} f_A(\theta) \\ f_B(\theta) \\ f_C(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sign}(\sin\theta_u^*) \\ \text{sign}(\sin\theta_u^* - \varphi) \\ \text{sign}(\sin\theta_u^* + \varphi) \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
f_\alpha(t) &= f_A(\theta) = \text{sign}(\sin \theta_u^*); \\
f_\beta(t) &= \frac{\text{sign}(\sin \theta_u^* - \varphi) - \text{sign}(\sin \theta_u^* + \varphi)}{\sqrt{3}}; \\
U_\alpha(t) &= \frac{2}{\pi} U_m f_\alpha(t); \\
U_\beta(t) &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi} U_m f_\beta(t).
\end{aligned}$$

Для модели двигателя

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Psi_{s\alpha} &= U_\alpha(t) - \alpha'_s \Psi_{s\alpha} + \alpha'_s K_r \Psi_{r\alpha}; \\
\frac{d}{dt} \Psi_{s\beta} &= U_\beta(t) - \alpha'_s \Psi_{s\beta} + \alpha'_s K_r \Psi_{r\beta}; \\
\frac{d}{dt} \Psi_{r\alpha} &= -\alpha'_r \Psi_{r\alpha} + \alpha'_r K_s \Psi_{s\alpha} + \omega_r \Psi_{r\beta}; \\
\frac{d}{dt} \Psi_{r\beta} &= -\alpha'_r \Psi_{r\beta} + \alpha'_r K_s \Psi_{s\beta} - \omega_r \Psi_{r\alpha}; \\
M &= \frac{3}{2} p_n \omega_c \frac{K_s}{x_c \sigma} (\Psi_{r\alpha} \Psi_{s\beta} - \Psi_{s\alpha} \Psi_{r\beta}); \\
\frac{d}{dt} \omega &= \frac{p_n}{J_\Sigma} (M - M_c).
\end{aligned}$$

Приведенная математическая модель системы ПЧ-АД позволяет исследовать электромеханические процессы пуска двигателя при разных значениях частоты и напряжениях питающей сети. При этом выходное напряжение преобразователя имеет форму знакопеременной импульсной функции, принимающей значения [29]

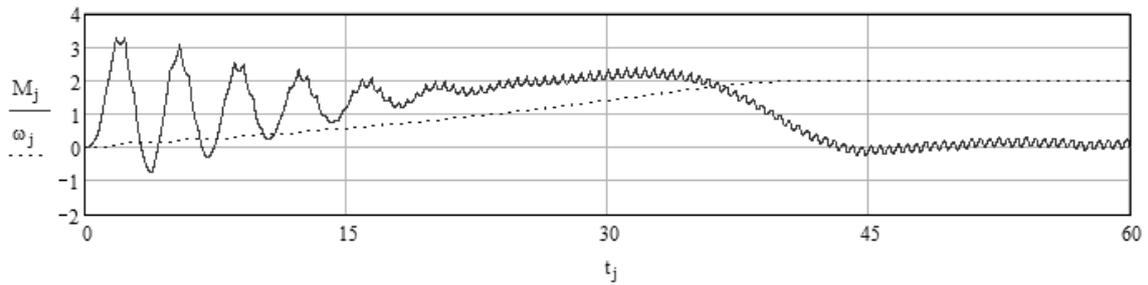
$$u_\Phi(\theta) = u_\alpha(\theta) = \begin{cases} +\frac{1}{3} U_\Pi & \text{при } 0 < \theta < \pi/3, \\ +\frac{2}{3} U_\Pi & \text{при } \pi/3 < \theta < 2\pi/3, \\ +\frac{1}{3} U_\Pi & \text{при } 2\pi/3 < \theta < \pi; \end{cases} \quad (4.35)$$

$$u_\Phi(\theta + \pi) = -u_\Phi(\theta).$$

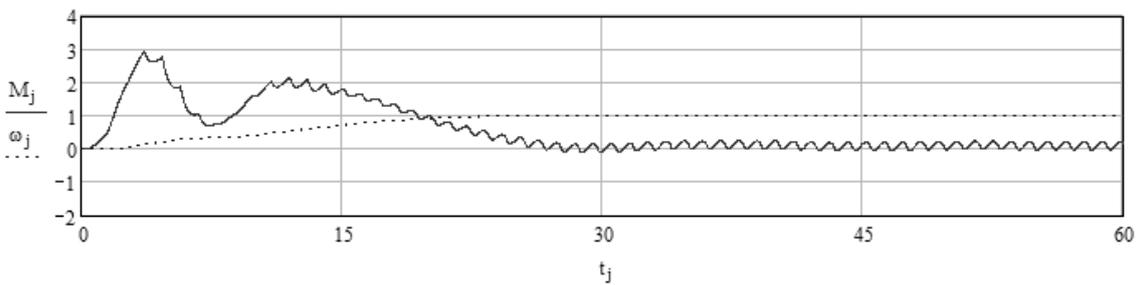
Результаты моделирования в виде переходных характеристик $M = f(t)$ и $\omega = f(t)$ приведены на рис. 4.10. Анализ этих характеристик показывает, что при номинальном значении напряжения и при увеличе-

нии частоты в два раза время переходного процесса при пуске двигателя увеличивается пропорционально увеличению частоты питающего напряжения (рис. 4.10, а, б). Установившееся значение частоты вращения вала двигателя также возрастает (рис. 4.10, а). Увеличение пропорционально частоте значения напряжения уменьшает время разгона двигателя. При этом ударное значение электромагнитного момента увеличивается примерно в три раза (рис. 4.10, в).

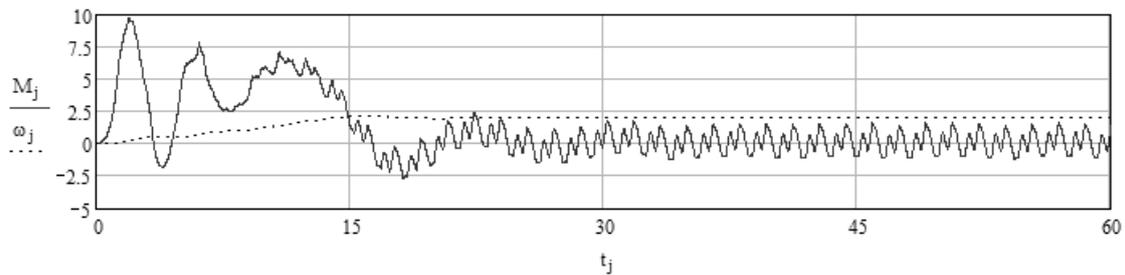
Динамическая характеристика $\omega = f(M)$ АД, соответствующая данным рис. 4.10, а) приведена на рис. 4.11.



а)



б)



в)

Рис. 4.10. Переходные характеристики $M = f(t)$ и $\omega = f(t)$ АД:

а) при $f = 100$ Гц и номинальном напряжении;

б) при $f = 50$ Гц и номинальном напряжении;

в) $f = 100$ Гц и увеличенном в два раза напряжении

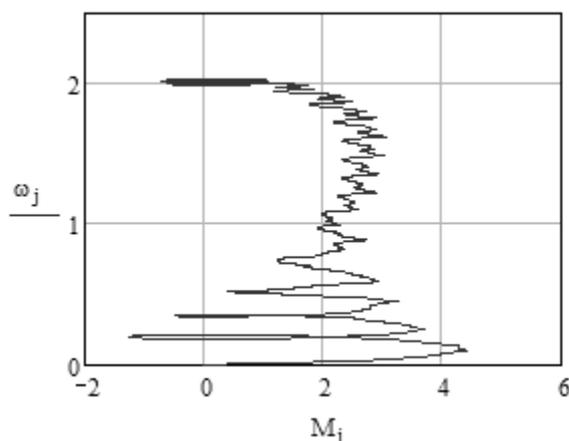


Рис. 4.11 Динамическая механическая характеристика АД

Листинг пользовательской программы для расчета переходных и динамических характеристик АД при частотном управлении приведен в приложении.

4.6. Структурные схемы частотно-регулируемых электроприводов

Асинхронный привод с частотным управлением является наиболее распространенным приводом. В настоящее время при исследовании таких приводов в основном используют векторные модели АД, которые позволяют получить его точную структурную схему.

Структурные схемы асинхронного двигателя используются для имитационного моделирования частотно-регулируемых электроприводов, для программной реализации систем управления этими приводами и определения необходимого, по возможности минимального, числа элементов, при разработке функциональной схемы асинхронного электропривода.

Рассмотрим на примере модели короткозамкнутого АД методику получения передаточных функций сложных объектов с помощью векторных уравнений обобщенной электрической машины.

Пусть система координат модели АД ориентирована по вектору напряжения статора. Ее угловая частота вращения будет определяться частотой сети ω_c . Тогда с учетом того, что $\omega_c - \omega = \omega_2$, можно записать следующую систему уравнений равновесия напряжений в векторной форме

$$\begin{aligned} \vec{U}_s &= R_s \vec{i}_s + \frac{d}{dt} \vec{\Psi}_s + j\omega_c \vec{\Psi}_s; \\ 0 &= R_r \vec{i}_r + \frac{d}{dt} \vec{\Psi}_r + j\omega_2 \vec{\Psi}_r. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Для вычисления модуля электромагнитного момента АД используем векторы потокосцепления статора $\vec{\Psi}_s$ и тока ротора \vec{i}_r , т. е. $\vec{i}_s = \frac{\vec{\Psi}_s - \vec{i}_r L_m}{L_s}$, тогда выражение для момента можно записать в виде

$$M = -\frac{3}{2} p_n K_s [\vec{\Psi}_s \times \vec{i}_r] = \frac{3}{2} p_n K_s (\Psi_{sy} i_{rx} - \Psi_{sx} i_{ry}), \quad (4.37)$$

где $K_s = \frac{L_m}{L_s}$ – коэффициент связи статора.

При указанном выборе векторов, определяющих электромагнитный момент, исключим в уравнениях (4.36) векторы $\vec{\Psi}_r = \vec{\Psi}_s K_s + \vec{i}_r L_r$ и $\vec{i}_s = \frac{\vec{\Psi}_s}{L_s} - \vec{i}_r K_s$. Тогда, переходя к операторным функциям, получим

$$\vec{U}_s = \vec{\Psi}_s \left(\frac{1}{T} + p + j\omega_c \right) - \vec{i}_r K_s R_s; \quad (4.38)$$

$$0 = \vec{\Psi}_s (p + j\omega_2) + \vec{i}_r (R_r + L'_2 p + j\omega_2 L'_2) / K_s,$$

где $L'_2 = \frac{L_s L_r - L_m^2}{L_s} = L_r \sigma$ а $\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r}$ – коэффициент рассеяния, $T_1 = \frac{L_s}{R_s}$ – постоянная времени, определяемая электромагнитными процессами в обмотке статора.

Вычитая из первого уравнения системы (4.38) второе уравнение, можно получить следующее выражение для вектора питающего напряжения

$$\vec{U}_s = \vec{\Psi}_s \left(\frac{1}{T_1} + j\omega \right) - \vec{i}_r \left(\frac{R'(1 + pT') + j\omega_2 L'_2}{K_s} \right), \quad (4.39)$$

где $T' = \frac{L'_2}{R'}$, $R' = K_s^2 R_s + R_r$ – постоянная времени и эквивалентное активное сопротивление роторной обмотки.

Разделим векторы в выражении (4.39) на вещественные и мнимые составляющие и выразим проекции тока ротора

$$U_{sx} = (\Psi_{sx} + j\Psi_{sy}) \left(\frac{1}{T_1} + j\omega \right) - (i_{rx} + ji_{ry}) \frac{R'(1 + pT') + j\omega_2 L'_2}{K_s}, \quad (4.40)$$

где

$$\begin{aligned} i_{rx} &= \frac{K_s}{R'(1 + pT')} \left(\frac{\Psi_{sx}}{T_1} - \Psi_{sy} \omega - U_{sx} + i_{2y} \omega_2 \frac{L'_2}{K_s} \right); \\ i_{ry} &= \frac{K_s}{R'(1 + pT')} \left(\frac{\Psi_{sy}}{T_1} - \Psi_{sx} \omega - i_{2x} \omega_2 \frac{L'_2}{K_s} \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Полученные уравнения позволяют построить структурную схему преобразования напряжения U_{sx} и частоты ω_c статора в фазные токи ротора i_{rx} и i_{ry} обобщенного АД при известных проекциях вектора потокосцепления статора Ψ_{sx}, Ψ_{sy} и частоты вращения ротора ω . При этом потокосцепление статора можно выразить через ток ротора с помощью выражений

$$\Psi_{sx} = \frac{T_1}{(1 + pT_1)} (U_{sx} + i_{rx} K_s R_s + \Psi_{sy} \omega_c);$$

$$\Psi_{sy} = \frac{T_1}{(1 + pT_1)} (i_{ry} K_s R_s + \Psi_{sx} \omega_c).$$
(4.42)

Тогда с учетом основного уравнения привода

$$J \frac{d\omega}{dt} = M - M_c.$$

и в соответствии с уравнениями (4.39, 4.40, 4.41 и 4.42) можно получить структурную схему АД, приведенную на рис. 4.12.

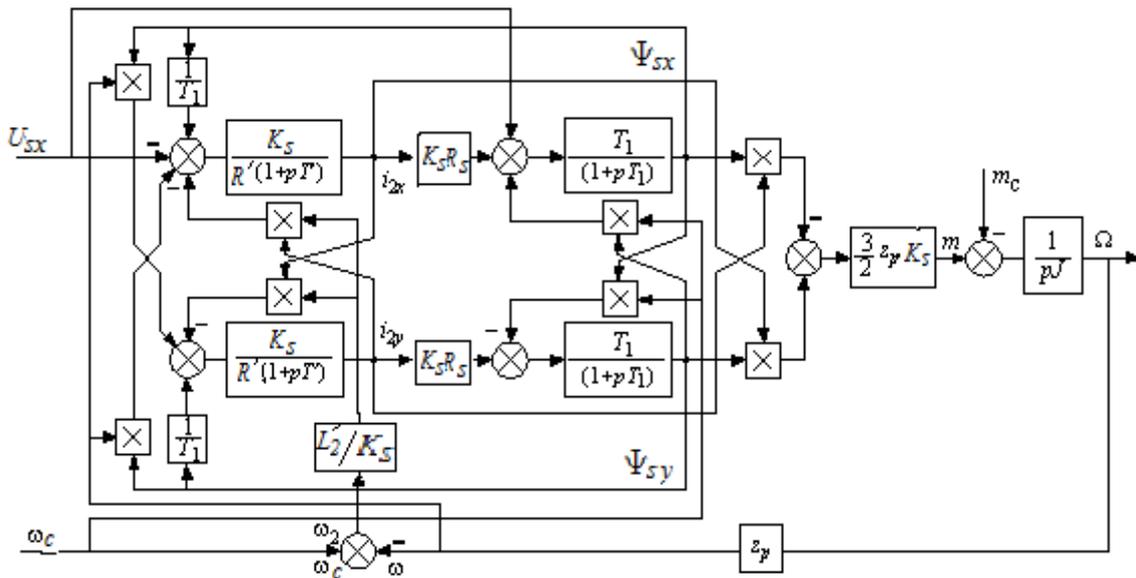


Рис. 4.12. Структурная схема АД, управляемого частотой и напряжением

Как следует из рисунка, структура АД нелинейная и имеет четыре перекрестные связи. Упростить ее для получения передаточных функций по каналам управления напряжением и частотой крайне затруднительно, но не представляет большого труда построить эту модель в системе *MatLab/Simulink* и получить требуемые характеристики привода

при различных законах управления, связывающих какой-либо функцией $U=f(\omega_c)$ входы управления частотой и напряжением статора.

При векторном управлении полная управляемость электропривода обеспечивается, если реализовать управление электромагнитным моментом двигателя. В случае АД для построения системы управления можно использовать выражения для электромагнитного момента [27].

$$\begin{aligned} M &= \frac{3}{2} p_n [\vec{\Psi}_s \times \vec{i}_s] = -\frac{3}{2} p_n [\vec{\Psi}_r \times \vec{i}_r] = \frac{3}{2} p_n [\vec{i}_r \times \vec{\Psi}_r]; \\ M &= \frac{3}{2} p_n L_m [\vec{i}_r \times \vec{i}_s] = -\frac{3}{2} p_n \frac{L_m}{L_s} [\vec{\Psi}_s \times \vec{i}_r] = \frac{3}{2} p_n \frac{L_m}{L_r} [\vec{\Psi}_r \times \vec{i}_s], \end{aligned} \quad (4.43)$$

где p_n – число пар полюсов.

Для этого требуется независимо управлять координатами векторов, входящих в выбранное уравнение электромагнитного момента. Выбор уравнения для построения системы управления играет большую роль, т. к. многие величины, в особенности у короткозамкнутых АД, не могут быть измерены. Кроме того, этот выбор существенно влияет на сложность передаточных функций системы, иногда в несколько раз увеличивая порядок уравнений. Однако при любом выборе структуры выражения электромагнитного момента *общий принцип моделирования и построения системы управления АД заключается в том, что для этого используется система координат, постоянно ориентированная по направлению какого-либо вектора, определяющего электромагнитный момент. Тогда проекция этого вектора на другую ось координат и соответствующее ей слагаемое в выражении для электромагнитного момента будут равны нулю, и формально оно принимает вид, идентичный выражению для электромагнитного момента двигателя постоянного тока, который пропорционален по величине току якоря и основному магнитному потоку.*

Таким образом, для построения системы векторного управления АД нужно выбрать вектор, относительно которого будет ориентирована система координат, и соответствующее выражение для электромагнитного момента, а затем определить входящие в него величины из уравнений (4.36) для цепи статора и/или ротора.

В качестве примера рассмотрим модель АД, управляемого током статора, в системе координат, ориентированной по потокосцеплению ротора. Опорным вектором в этом случае выбираем потокосцепление ротора и ориентируем по нему координатную систему так, чтобы ее вещественная ось совпадала с направлением $\vec{\Psi}_r$, а угловая частота вращения системы координат ω_k будет равна угловой частоте питания ста-

тора ω_c , т. к. векторы потокосцеплений статора и ротора вращаются с одинаковой частотой. Такому способу ориентации соответствуют следующие математические условия [23, 27, 28]:

$$\left| \vec{\Psi}_r \right| = \Psi_{rx} = \Psi_{rd}; \quad \Psi_{ry} = \Psi_{rq} = 0; \quad \omega_k = \omega_\Psi.$$

Тогда система уравнения (4.36) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{di_{sx}}{dt} &= -\frac{R_r L_m^2 + R_s L_r^2}{L_r L} i_{sx} + \omega_\Psi i_{sy} + \frac{L_m R_r}{L_r L} \Psi_r + \frac{L_r}{L} u_{sx}; \\ \frac{di_{sy}}{dt} &= -\frac{R_r L_m^2 + R_s L_r^2}{L_r L} i_{sy} - \omega_\Psi i_{sx} - \frac{L_m}{L} \omega_r \Psi_r + \frac{L_r}{L} u_{sy}; \\ \frac{d\Psi_r}{dt} &= \frac{R_r L_m}{L_r} i_{sx} - \frac{R_r}{L_r} \Psi_r; \\ 0 &= \frac{R_r L_m}{L_r} i_{sy} - \frac{R_r}{L_r} \Psi_{rv} - (\omega_\Psi - \omega_r) \Psi_{ru}; \\ M &= \frac{3}{2} p_n \frac{L_m}{L_r} \Psi_r i_{sy}; \\ \frac{J}{p_n} \frac{d\omega_r}{dt} &= M - M_c. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Выразив из четвертого уравнения системы (4.44) частоту вращения координат ω_Ψ , подставим ее в остальные уравнения системы. Тогда математическая модель асинхронного двигателя во вращающейся системе координат, ориентированной по направлению вектора потокосцепления ротора, принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{di_{sx}}{dt} &= \frac{L_m R_r \Psi_r - (R_r L_m^2 + R_s L_r^2) i_{sx} + L_r^2 u_{sx}}{L_r L} + \omega_r i_{sy} + \frac{L_m R_r}{L_r} \frac{i_{sy}^2}{\Psi_r}; \\ \frac{di_{sy}}{dt} &= -\frac{L_m L_r \omega_r \Psi_r - (R_r L_m^2 + R_s L_r^2) i_{sy} + L_r^2 u_{sy}}{L_r L} - \omega_r i_{sx} - \frac{R_r L_m}{L_r} \frac{i_{sx} i_{sy}}{\Psi_r}; \\ \frac{d\Psi_r}{dt} &= \frac{R_r L_m}{L_r} i_{sx} - \frac{R_r}{L_r} \Psi_r; \\ M &= \frac{3}{2} p_n \frac{L_m}{L_r} \Psi_r i_{sy}; \\ \frac{J}{p_n} \frac{d\omega_r}{dt} &= M - M_c, \end{aligned} \tag{4.45}$$

где проекции вектора напряжения при $\omega_k = \omega_\psi$ необходимо записать в виде

$$\begin{aligned} u_{sx} &= U_s \sin \gamma; \\ u_{sy} &= -U_s \sin \gamma, \end{aligned} \quad (4.46)$$

где $\gamma = \omega_c t - \omega_\psi t$ – угол отставания вектора потокосцепления ротора от поля статора, U_s – амплитуда напряжения статора.

Данную модель можно реализовать, решая полученную систему уравнений в пространстве состояний. Приведя систему уравнений (4.44) к операторной форме записи (4.47) в осях d, q , можно представить структурную схему асинхронного двигателя во вращающейся системе координат, ориентированной по результирующему вектору потокосцепления ротора

$$\begin{aligned} u_{sd} &= R_\sigma \cdot (T_\sigma p + 1) \cdot i_{sd} - \frac{R_r L_m}{L_r^2} \Psi_{rd} - \omega_k \sigma L_s i_{sq}; \\ u_{sq} &= R_\sigma \cdot (T_\sigma p + 1) \cdot i_{sq} + \omega_k \sigma L_s i_{sd} + \frac{L_m}{L_r} z_p \omega \Psi_{rd}; \\ 0 &= (T_2 p + 1) \Psi_{rd} - L_m i_{sd}; \\ \omega_k &= p_n \omega + \frac{L_m R_r}{L_r} \frac{i_{sq}}{\Psi_{rd}}; \\ M &= \frac{3}{2} \frac{L_m}{L_r} p_n \Psi_{rd} i_{sq}; \\ \omega &= \frac{1}{J p_n} (M - M_c), \end{aligned} \quad (4.47)$$

где $R_\sigma = R_s + R_r \frac{L_m^2}{L_r^2}$, $T_\sigma = \frac{\sigma L_s}{R_\sigma}$, $T_2 = \frac{L_r}{R_r}$.

Уравнениям (4.47) соответствует структурная схема асинхронного двигателя, рис. 4.13 [28].

Структурная схема содержит перекрестные внутренние обратные связи, природа которых вытекает из схемы замещения АД и уравнений равновесия напряжений системы (4.47):

$$\begin{aligned} u_{sd} &= R_\sigma \cdot (T_\sigma p + 1) \cdot i_{sd} - e_d; \\ u_{sq} &= R_\sigma \cdot (T_\sigma p + 1) \cdot i_{sq} + e_q, \end{aligned} \quad (4.48)$$

где

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Листинг пользовательской программы для исследования процессов в фильтре RLC

В качестве исходных данных в программе приведены активное сопротивление катушки $R := 1$ Ом, индуктивность катушки $L := 10 \cdot 10^{-3}$ Гн, емкость $C := 100 \cdot 10^{-6}$ [Ф]. Напряжение питания для анализа режима холостого хода ФНЧ принято в виде синусоидальной функции $U_{bx}(t) := \sin(t)$. Программа представлена в виде двух частей.

Первая часть позволяет провести анализ процессов в низкочастотном RLC-фильтре в режиме холостого хода (рис. 3.5).

Исходные данные:

```
Ubx(t) := sin(t)  R := 1  L := 10·10-3  C := 100·10-6  dt := 2·R·C  j := 0..1000
```

Начальные условия

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ i_0 \\ u_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Итерационные уравнения

$$\begin{pmatrix} t_{j+1} \\ i_{j+1} \\ u_{j+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} t_j + dt \\ i_j + dt \cdot \left(\frac{1}{L} \cdot U_{bx}(t_j) - R \cdot i_j - u_j \right) \\ u_j + dt \cdot \frac{1}{C} \cdot i_j \end{bmatrix}$$

Переходные характеристики

Вторая часть программы позволяет проанализировать показатели качества фильтра по частотным и переходным характеристикам нагруженного фильтра.

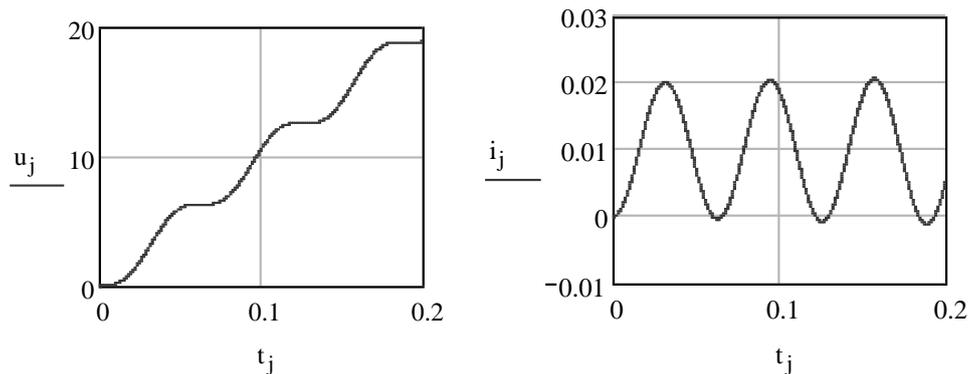


Рис. П1. Временные зависимости тока в катушке и напряжения на конденсаторе

Исходные данные:

$$U_{bx} := 1 \quad L := 10 \cdot 10^{-3} \quad C := 100 \cdot 10^{-6} \quad R := 1 \quad R1n := 1000 \quad R2n := 100 \quad R3n := 10$$

Использование оператора *simplify*

$$\frac{U_{bx}}{s} \cdot \frac{1}{(L \cdot s + R) \cdot \left(C \cdot s + \frac{1}{R1n} \right) + 1} \text{ simplify} \rightarrow \frac{1000000}{s \cdot (s^2 + 110 \cdot s + 1001000)}$$

Обратное преобразование Лапласа с использованием функции *invlaplace*

$$\frac{1000000}{s \cdot (s^2 + 110 \cdot s + 1001000)} \text{ invlaplace, s} \rightarrow$$

позволяет получить переходные характеристики в виде следующих выражений:

при $R1n = 1000$ Ом

$$h1(t) := \frac{1000}{1001} - \frac{1000}{1001} \cdot e^{(-55) \cdot t} \cdot \cos\left(5 \cdot 39919^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) - \frac{1000}{3632629} \cdot e^{(-55) \cdot t} \cdot 39919^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(5 \cdot 39919^{\frac{1}{2}} \cdot t\right)$$

при $R2n = 100$ Ом

$$h2(t) := \frac{100}{101} - \frac{100}{101} \cdot e^{(-100) \cdot t} \cdot \cos(1000 \cdot t) - \frac{10}{101} \cdot e^{(-100) \cdot t} \cdot \sin(1000 \cdot t)$$

при $R3n = 10$ Ом

$$h3(t) := \frac{10}{11} - \frac{10}{11} \cdot e^{(-550) \cdot t} \cdot \cos\left(50 \cdot 319^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) - \frac{10}{319} \cdot e^{(-550) \cdot t} \cdot 319^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\left(50 \cdot 319^{\frac{1}{2}} \cdot t\right)$$

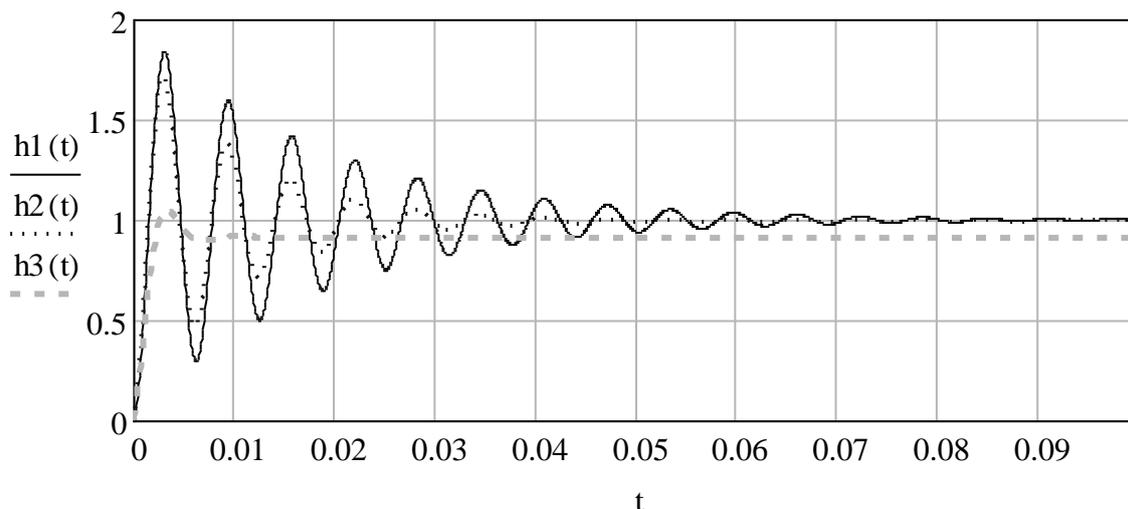


Рис. П2. Переходные характеристики ФНЧ

Переходные характеристики в виде графиков приведены на рис. П2.

Амплитудные и фазовые частотные характеристики ФНЧ

При анализе и расчете амплитудных и фазовых частотных характеристик ФНЧ в качестве исходных данных определяют резонансную частоту

$$\omega_c := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

Так как программа должна оперировать с комплексными числами, необходимо задать значение мнимого числа в виде $j := \sqrt{-1}$.

Частотные передаточные функции для разных значений сопротивлений нагрузки имеют следующий вид:

$$W1(\omega) := \frac{1}{|L \cdot j \cdot \omega + R| \cdot \left(C \cdot j \cdot \omega + \frac{1}{R1n} \right) + 1};$$

$$W2(\omega) := \frac{1}{|L \cdot j \cdot \omega + R| \cdot \left(C \cdot j \cdot \omega + \frac{1}{R2n} \right) + 1};$$

$$W3(\omega) := \frac{1}{|L \cdot j \cdot \omega + R| \cdot \left(C \cdot j \cdot \omega + \frac{1}{R3n} \right) + 1}.$$

Амплитудные частотные характеристики определяют в виде

$$A1(\omega) := |W1(\omega)|; \quad A2(\omega) := |W2(\omega)|; \quad A3(\omega) := |W3(\omega)|.$$

а фазовые частотные характеристики представляют в виде аргумента комплексного числа, и для однозвенного фильтра они имеют следующий вид, а именно:

$$\phi_1(\omega) := \arg |W_1(\omega)|; \quad \phi_2(\omega) := \arg |W_2(\omega)|; \quad \phi_3(\omega) := \arg |W_3(\omega)|.$$

Задав пределы изменения частоты внешнего источника

$$\omega := 0, 1 \dots 2000,$$

представляют эти характеристик и в виде графиков (рис. П3 и П4).

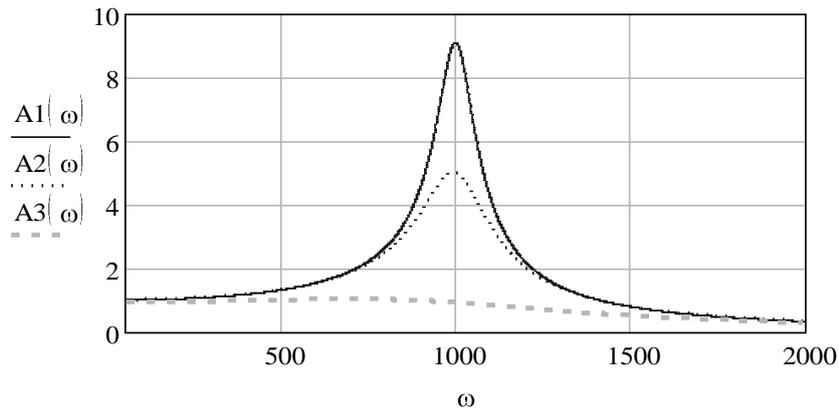


Рис. П3. Амплитудные частотные характеристики ФНЧ

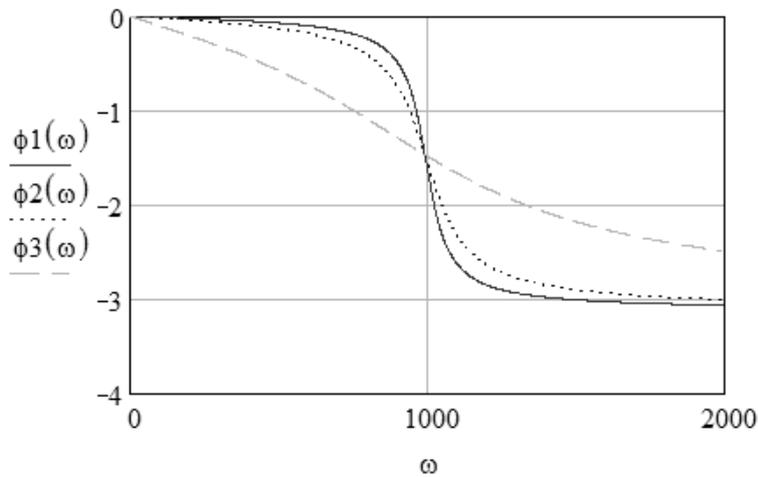


Рис. П4. Фазовые частотные характеристики

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Листинги пользовательских программ для исследования процессов в АД

Модель № 1 асинхронного двигателя представлена в неподвижной системе координат α, β и позволяет исследовать влияние параметров двигателя на электромеханические процессы при прямом подключении к сети.

Исходные данные представлены в относительных единицах:

$$\begin{aligned} R_s &:= 0.08 & R_r &:= 0.08 & L_s &:= 1.03 & L_r &:= 1.04 & L_m &:= 1 & U &:= 1 \\ \omega_s &:= 1 & p &:= 1 & M_c &:= 0 & J &:= 200 \end{aligned}$$

Расчет коэффициентов электродвигателя:

$$\sigma := 1 - \frac{L_m^2}{L_s \cdot L_r} \quad \alpha_s := \frac{R_s}{L_s \cdot \sigma} \quad \alpha_r := \frac{R_r}{L_r \cdot \sigma} \quad K_1 := \frac{L_m}{L_s} \quad K_2 := \frac{L_m}{L_r}$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ \psi_{sx0} \\ \psi_{sy0} \\ \psi_{rx0} \\ \psi_{ry0} \\ \omega_0 \\ M_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Шаг и число итераций:

$$dt := 0.01 \quad j := 0..10000$$

Система итерационных уравнений:

$$\begin{pmatrix} t_{j+1} \\ \psi_{sxj+1} \\ \psi_{syj+1} \\ \psi_{rxj+1} \\ \psi_{ryj+1} \\ \omega_{j+1} \\ M_{j+1} \end{pmatrix} := \begin{bmatrix} t_j + dt \\ \psi_{sxj} + dt \cdot (U \cdot \cos(t_j) - \alpha s \cdot \psi_{sxj} + K2 \cdot \alpha s \cdot \psi_{rxj}) \\ \psi_{syj} + dt \cdot (U \cdot \sin(t_j) - \alpha s \cdot \psi_{syj} + K2 \cdot \alpha s \cdot \psi_{ryj}) \\ \psi_{rxj} + dt \cdot (-\alpha r \cdot \psi_{rxj} + K1 \cdot \alpha r \cdot \psi_{sxj} - \omega_j \cdot \psi_{ryj}) \\ \psi_{ryj} + dt \cdot (-\alpha r \cdot \psi_{ryj} + K1 \cdot \alpha r \cdot \psi_{syj} + \omega_j \cdot \psi_{rxj}) \\ \omega_j + dt \cdot \left[\frac{p}{J} \cdot \left[1.5 \cdot p \cdot \frac{K2}{\sigma \cdot Ls} \cdot (\psi_{rxj} \cdot \psi_{syj} - \psi_{sxj} \cdot \psi_{ryj}) - Mc \right] \right] \\ 1.5 \cdot p \cdot \frac{K2}{\sigma \cdot Ls} \cdot (\psi_{rxj} \cdot \psi_{syj} - \psi_{sxj} \cdot \psi_{ryj}) \end{bmatrix}$$

Временные (переходные характеристики) зависимости электромагнитного момента $M = f(t)$ и частоты вращения вала двигателя $\omega = f(t)$ приведены на рис. П5.

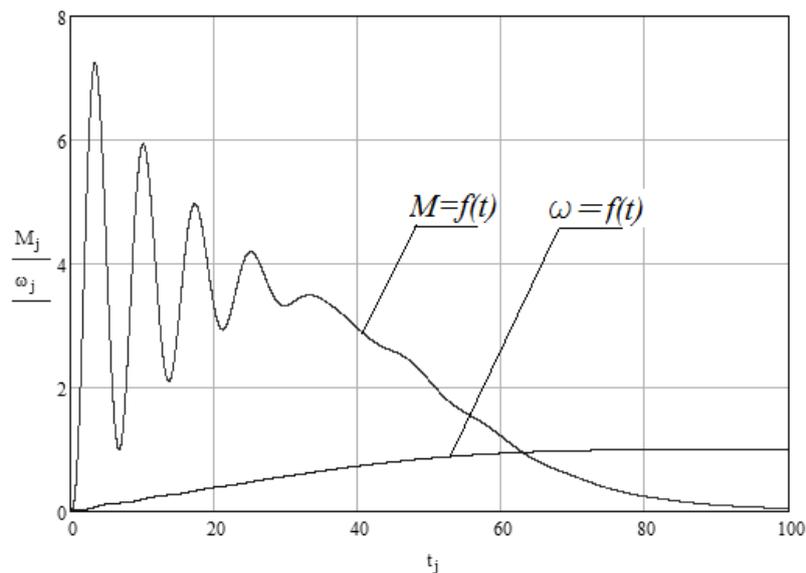


Рис. П5. Переходные характеристики АД при прямом пуске от сети

Модель № 2 асинхронного двигателя для исследования процессов в системе «регулируемый источник напряжения – двигатель». Регулируемый источник напряжения обеспечивает изменение напряжения по аperiodическому закону $u(t) = U(1 - e^{-\frac{t}{T}})$. Изменение значения постоянной времени T позволяет обеспечить оптимальный пуск АД при ограничении ударных значений электромагнитного момента. Модель двигателя представлена во вращающейся системе координат x, y .

Исходные данные представлены в относительных единицах:

$$R1 := 0.042 \quad R2 := 0.074 \quad L1 := 1.03 \quad L2 := 1.04 \quad Lm := 1 \quad U1(t) := 1 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad U2 := 0$$

Расчет коэффициентов электродвигателя:

$$\sigma := 1 - \frac{Lm^2}{L1 \cdot L2} \quad \alpha1 := \frac{R1}{L1 \cdot \sigma} \quad \alpha2 := \frac{R2}{L2 \cdot \sigma} \quad K1 := \frac{Lm}{L1} \quad K2 := \frac{Lm}{L2}$$

$$\omega_c := 1 \quad p := 1 \quad Mc := 0 \quad J := 200$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} \psi1x_0 \\ \psi1y_0 \\ \psi2x_0 \\ \psi2y_0 \\ \omega_0 \\ M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Шаг и число итераций:

$$dt := 0.01 \quad j := 0..10000$$

Система итерационных уравнений:

$$\begin{pmatrix} t_{j+1} \\ \psi1x_{j+1} \\ \psi1y_{j+1} \\ \psi2x_{j+1} \\ \psi2y_{j+1} \\ \omega_{j+1} \\ M_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_j + dt \\ \psi1x_j + dt \cdot (U1(t_j) - \alpha1 \cdot \psi1x_j + K2 \cdot \alpha1 \cdot \psi2x_j + \omega_c \cdot \psi1y_j) \\ \psi1y_j + dt \cdot (-\alpha1 \cdot \psi1y_j + K2 \cdot \alpha1 \cdot \psi2y_j - \omega_c \cdot \psi1x_j) \\ \psi2x_j + dt \cdot [U2 - \alpha2 \cdot \psi2x_j + K1 \cdot \alpha2 \cdot \psi1x_j + (\omega_c - \omega_j) \cdot \psi2y_j] \\ \psi2y_j + dt \cdot [-\alpha2 \cdot \psi2y_j + K1 \cdot \alpha2 \cdot \psi1y_j - (\omega_c - \omega_j) \cdot \psi2x_j] \\ \omega_j + dt \cdot \left[\frac{p}{J} \cdot \left[1.5 \cdot p \cdot \frac{K2}{\sigma \cdot L1} \cdot (\psi2x_j \cdot \psi1y_j - \psi1x_j \cdot \psi2y_j) - Mc \right] \right] \\ 1.5 \cdot p \cdot \frac{K2}{\sigma \cdot L1} \cdot (\psi2x_j \cdot \psi1y_j - \psi1x_j \cdot \psi2y_j) \end{pmatrix}$$

Результаты исследований представлены в виде временных (переходных характеристик) зависимостей $M = f(t)$, $\omega = f(t)$, $U = f(t)$ при трех значениях постоянной времени источника питания, рис. Пб.

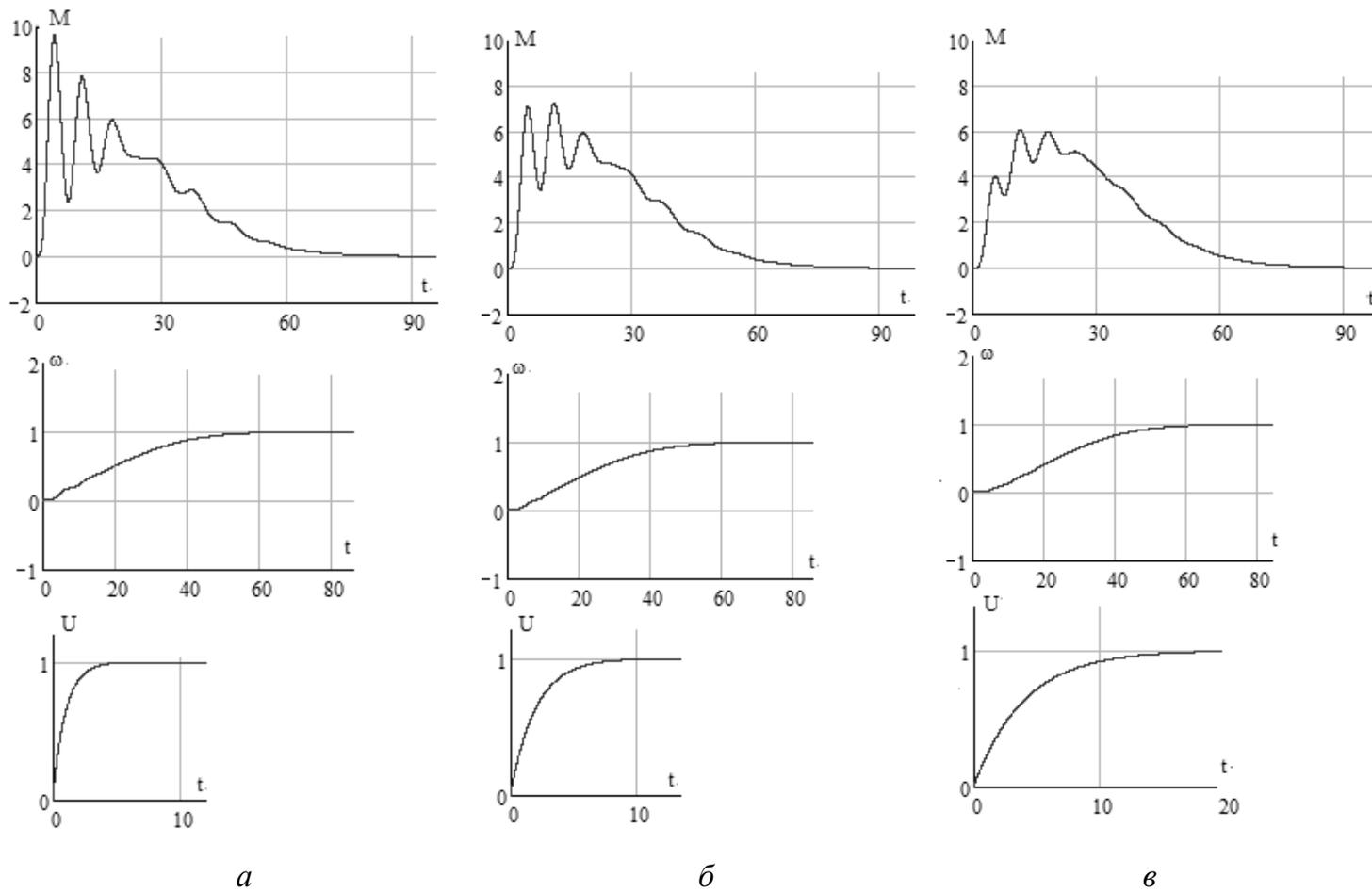


Рис. П6. Временные зависимости $M = f(t)$, $\omega = f(t)$, $U = f(t)$ при значениях:
 а – постоянная времени источника $T = 1$; б – постоянная времени источника $T = 2$;
 в – постоянная времени источника $T = 4$

Модель № 3 позволяет исследовать переходные процессы АД при частотном управлении. Модель представлена в виде выходного напряжения преобразователя частоты, асинхронного двигателя и передаточного механизма.

Исходными данными в относительных единицах являются параметры АД серии 4А112L4 мощностью 3,5 кВт:

$$R'_1 := 0.078 \quad R'_2 := 0.053 \quad X'_1 := 2.279 \quad X'_2 := 2.33 \quad X'_m := 2.2 \quad p := 2 \quad J_c := 100$$

Расчет коэффициентов электродвигателя:

$$\sigma := 1 - \frac{X'_m{}^2}{X'_1 \cdot X'_2} \quad \alpha_1 := \frac{R'_1}{X'_1 \cdot \sigma} \quad \alpha_2 := \frac{R'_2}{X'_2 \cdot \sigma} \quad K_1 := \frac{X'_m}{X'_1} \quad K_2 := \frac{X'_m}{X'_2}$$

Напряжение и частота управляющего сигнала:

$$f_n := 1 \quad U_n := 1$$

Частота и напряжение генератора опорного сигнала:

$$f := 100 \quad y(t) := 4.1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\sin(f \cdot t) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3 \cdot f \cdot t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5 \cdot f \cdot t) - \frac{1}{49} \cdot \sin(7 \cdot f \cdot t) \right) + 0.5$$

Начальные условия:

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ w_0 \\ U\alpha_0 \\ U\beta_0 \\ \psi_1\alpha_0 \\ \psi_1\beta_0 \\ \psi_2\alpha_0 \\ \psi_2\beta_0 \\ \omega_0 \\ M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Шаг и число итераций:

$$dt := 0.001 \quad n := 90000 \quad j := 0..n$$

Система итерационных уравнений:

$$\begin{pmatrix} t_{j+1} \\ w_{j+1} \\ U\alpha_{j+1} \\ U\beta_{j+1} \\ \psi1\alpha_{j+1} \\ \psi1\beta_{j+1} \\ \psi2\alpha_{j+1} \\ \psi2\beta_{j+1} \\ \omega_{j+1} \\ M_{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_j + dt \\ \begin{cases} fu & \text{if } w_j \geq fu \\ fu - fu \cdot e^{-\frac{t_j}{T}} & \text{otherwise} \end{cases} \\ \begin{cases} \text{sign}(w_j \cdot \sin(w_j \cdot t_j)) & \text{if } 5.1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin(f \cdot t_j) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3 \cdot f \cdot t_j) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5 \cdot f \cdot t_j) - \frac{1}{49} \cdot \sin(7 \cdot f \cdot t_j) \right) + 0.5 \leq |w_j \cdot \sin(w_j \cdot t_j)| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \begin{cases} \text{sign}\left(w_j \cdot \sin\left(w_j \cdot t_j + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)\right) & \text{if } 5.1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin(f \cdot t_j) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3 \cdot f \cdot t_j) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5 \cdot f \cdot t_j) - \frac{1}{49} \cdot \sin(7 \cdot f \cdot t_j) \right) + 0.5 \leq \left| w_j \cdot \sin\left(w_j \cdot t_j + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) \right| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ \psi1\alpha_j + dt \cdot (U\alpha_j - \alpha1 \cdot \psi1\alpha_j + K2 \cdot \alpha1 \cdot \psi2\alpha_j) \\ \psi1\beta_j + dt \cdot (U\beta_j - \alpha1 \cdot \psi1\beta_j + K2 \cdot \alpha1 \cdot \psi2\beta_j) \\ \psi2\alpha_j + dt \cdot (-\alpha2 \cdot \psi2\alpha_j + K1 \cdot \alpha2 \cdot \psi1\alpha_j - \omega_j \cdot \psi2\beta_j) \\ \psi2\beta_j + dt \cdot (-\alpha2 \cdot \psi2\beta_j + K1 \cdot \alpha2 \cdot \psi1\beta_j + \omega_j \cdot \psi2\alpha_j) \\ \omega_j + dt \cdot \left[\frac{p}{J} \cdot \left[1.5 \cdot p \cdot \frac{K2}{\sigma \cdot X_{11}} \cdot (\psi2\alpha_j \cdot \psi1\beta_j - \psi1\alpha_j \cdot \psi2\beta_j) - \frac{Mn}{ir} \right] \right. \\ \left. 1.5 \cdot p \cdot \frac{K2}{\sigma \cdot X_{11}} \cdot (\psi2\alpha_j \cdot \psi1\beta_j - \psi1\alpha_j \cdot \psi2\beta_j) \right] \end{pmatrix},$$

где подпрограмма

$$\begin{cases} fu & \text{if } w_j \geq fu \\ fu - fu \cdot e^{-\frac{t_j}{T}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

формирует зависимость развертки частоты источника питания во времени.

Подпрограмма 1

$$\begin{cases} \text{sign}(w_j \cdot \sin(w_j \cdot t_j)) & \text{if } 5.1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin(f \cdot t_j) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3 \cdot f \cdot t_j) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5 \cdot f \cdot t_j) - \frac{1}{49} \cdot \sin(7 \cdot f \cdot t_j) \right) + 0.5 \leq |w_j \cdot \sin(w_j \cdot t_j)| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

формирует выходное напряжение автономного инвертора с ШИМ по оси α .

Подпрограмма 2

$$\begin{cases} \text{sign}\left(w_j \cdot \sin\left(w_j \cdot t_j + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right)\right) & \text{if } 5.1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(\sin(f \cdot t_j) - \frac{1}{9} \cdot \sin(3 \cdot f \cdot t_j) + \frac{1}{25} \cdot \sin(5 \cdot f \cdot t_j) - \frac{1}{49} \cdot \sin(7 \cdot f \cdot t_j) \right) + 0.5 \leq \left| w_j \cdot \sin\left(w_j \cdot t_j + \frac{3 \cdot \pi}{2}\right) \right| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

формирует выходное напряжение автономного инвертора с ШИМ по оси β .

Временные диаграммы напряжений по осям α и β приведены на рис. П7.

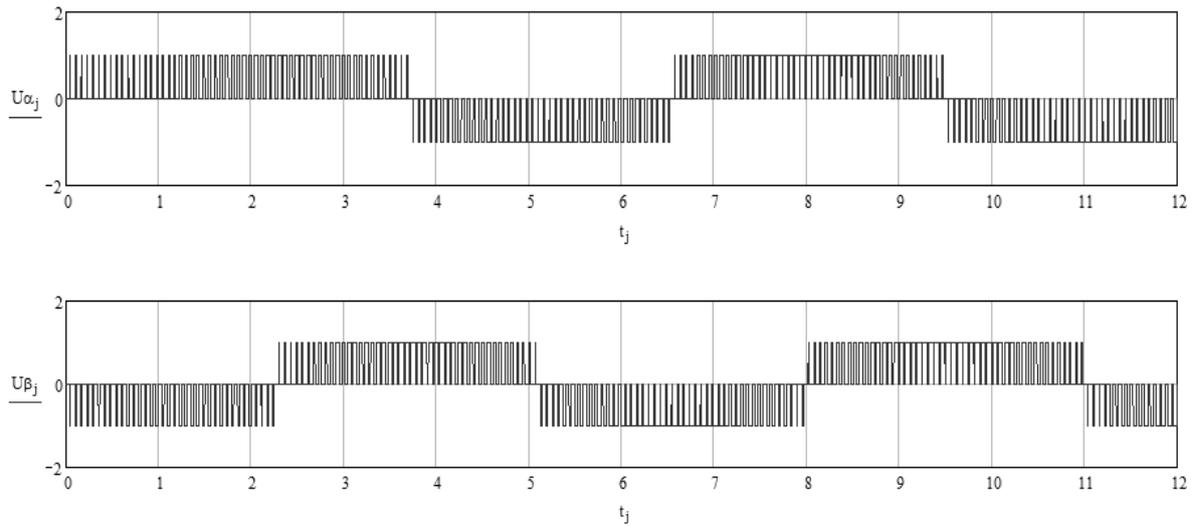


Рис. П7. Временные диаграммы напряжений по неподвижным осям α и β

Процессы в асинхронном двигателе при частотном управлении при питании от инвертора с ШИМ приведены на рис. П8.

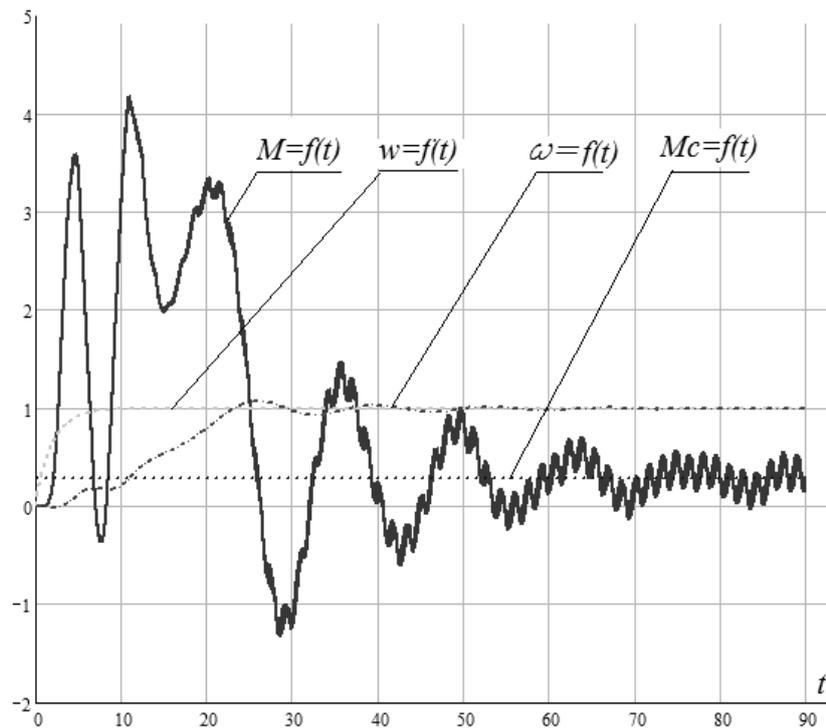


Рис. П8. Переходные процессы при пуске двигателя от автономного инвертора с ШИМ

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аристов А.В., Бурулько Л.К., Паюк Л.А. Математическое моделирование в электромеханике: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. – 145 с.
2. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: учеб. для студентов электротехнических, энергетических и приборостроительных специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 1978. – 528 с.
3. Бурулько Л.К. Динамика электромеханических систем: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПИ им С.М. Кирова, 1991. – 89 с.
4. Бурулько Л.К. Расчет и проектирование следящего привода. Ч. 1: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 74 с.
5. Бурулько Л.К. Расчет и проектирование следящего привода. Ч. 2: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – 120 с.
6. Бурулько Л.К., Боровиков Ю.С. Специальные электроприводы переменного тока: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 145 с.
7. Бурулько Л.К., Глазачев А.В. Динамика электроприводов летательных аппаратов: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2003. – 127 с.
8. Бурулько Л.К., Глазачев А.В. Электропривод летательных аппаратов: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – 120 с.
9. Вольдек А.И. Электрические машины. – М.: Энергия, 1974. – 782 с.
10. Воронина Н.А., Петрович В.П. Силовые преобразователи электрической энергии: учеб. пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2004. – 263 с.
11. Герман-Галкин С.Г. Силовая электроника: лабораторные работы на ПК. – СПб.: Корона принт, 2002. – 304 с.
12. Герман-Галкин С.Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MathLab 6.0: учеб. пособие. – СПб.: Корона принт, 2001. – 320 с.
13. Герман-Галкин С.Г. Цифровые электроприводы с транзисторными преобразователями. – Л.: Энергоатомиздат, 1986. – 248 с.
14. Глазенко Т.А., Прянишников В.А. Электротехника и основы электроники: учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 1996. – 210 с.
15. Загорский А.Е. Электродвигатели переменной частоты. – М.: Энергия, 1975. – 152 с.
16. Зиновьев Г.С. Основы силовой электроники: учеб. пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 664 с. – (Серия «Учебники НГТУ»).

17. Ефимов А.А., Шрейнер Р.Т. Активные преобразователи в регулируемых электроприводах переменного тока. – Новоуральск: Изд-во НГТИ, 2001. – 250 с.
18. Иванов-Смоленский А.В. Электрические машины. – М.: Энергия, 1980. – 928 с.
19. Ключев В.И. Теория электропривода. – М.: Энергоатомиздат, 1998. – 704 с.
20. Кононенко Е.В. Синхронные реактивные машины. – М.: Энергия, 1970. – 208 с.
21. Краснов И.Ю. Математическое моделирование в электротехнике. Ч. 1. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 284 с.
22. Кривицкий С.О., Эпштейн И.И. Динамика частотно-регулируемых электроприводов с автономными инверторами. – М.: Энергоатомиздат, 1970. – 152 с.
23. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. Для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
24. Мальцева О.П., Удут Л.С., Кояин Н.В. Системы управления асинхронных частотно-регулируемых электроприводов. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 476 с.
25. Современная прикладная теория управления: Новые классы регуляторов технических систем / под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. Ч. III. – 656 с.
26. Соколовский Г.Г. Электроприводы переменного тока с частотным управлением: учеб. для студентов высших учебных заведений. – М.: Изд. центр «Академия», 2006. – 272 с.
27. Соустин Б.П., Иванчура В.И., Чернышев А.И., Исляев Ш.Н. Системы электропитания космических аппаратов. – Новосибирск: Сибирская изд. фирма «Наука», 1994. – 318 с.
28. Усольцев А.А. Векторное управление асинхронными двигателями: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-петерб. гос. ин-та точной механики и оптики, 2002. – 55 с.
29. Удут Л.С., Мальцева О.П., Кояин Н.В. Проектирование и исследование автоматизированных электроприводов. – Ч. 8. Асинхронный частотно-регулируемый электропривод: учеб. пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 448 с.
30. Шрейнер Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. – Екатеринбург: УРО РАН, 2001. – 654 с.
31. Электротехнический справочник: в 4 т. – Т. 4. Использование электрической энергии. – М.: Изд-во МЭИ, 2002. – 695 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ И ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭМС	5
1.1. Основные понятия и определения	5
1.2. Цели и задачи математического моделирования электромеханических систем	7
1.3. Моделирование как метод исследования и метод научного познания	11
1.4. Общие вопросы математического моделирования	12
1.5. Классификация математических моделей	18
1.6. Классификация электромеханических систем	20
ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ЭНЕРГИИ	24
2.1. Электромеханический преобразователь энергии	24
2.2. Обобщенный электромеханический преобразователь	31
2.3. Системы координатных осей	38
ГЛАВА 3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТРАНСФОРМАТОРОВ И ФИЛЬТРОВ ЭМС	42
3.1. Описание электромагнитных процессов в трансформаторах	43
3.2. Математическая модель трансформатора	44
3.4. Передаточные функции трансформатора	47
3.5. Математические модели фильтров	49
3.6. Передаточные функции фильтров	53
3.7. Частотные характеристики фильтров	55
ГЛАВА 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ	59
4.1. Математическое описание процессов в двухфазной модели асинхронного двигателя	59
4.2. Моделирование прямого пуска асинхронного двигателя	62
4.3. Схемы замещения асинхронного двигателя при частотном управлении	67
4.4. Основные соотношения для асинхронного двигателя при частотном управлении	71

4.5. Статические и динамические характеристики асинхронного двигателя при частотном управлении	76
4.5.1. Расчет статических характеристик АД при частотном управлении	77
4.5.2. Модель частотно-регулируемого асинхронного двигателя	79
4.6. Структурные схемы частотно-регулируемых электроприводов	84
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ЛИСТИНГ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В ФИЛЬТРЕ RLC	91
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ЛИСТИНГИ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИХ ПРОГРАММ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В АД	95
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	102

Учебное издание

БУРУЛЬКО Лев Кириллович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ЧАСТЬ 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

Учебное пособие

Научный редактор

доктор технических наук, профессор А.В. Аристов

Корректурa *Е.А. Тетерина*

Компьютерная верстка *К.С. Чечельницкая*

Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Подписано к печати 03.04.2014. Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл. печ. л. 6,05. Уч.-изд. л. 5,47.

Заказ 000-14. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Система менеджмента качества

Издательства Томского политехнического университета

сертифицирована в соответствии с требованиями ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30

Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru