§ 2. Нахождение оригинала по изображению

Теорема 2.1. (единственности)*. Если функция $F(p)$ является изображением оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы равны во всех точках t, где функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны.*

I. Линейная комбинация. Когда в таблице соответствий нужное изображение отсутствует, то это изображение стремятся выразить через линейную комбинацию или произведение изображений, имеющихся в таблице.

Пример $F(p)=\dfrac{4p-3}{p^2-4p+3}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{9}{2}\cdot\dfrac{1}{p-3}\risingdotseq-\dfrac{1}{2}e^t+\dfrac{9}{2}e^{3t}=f(t)$.

Пример

$$F(p)=\frac{4p-3}{p^2-4p+3}=\frac{4(p-2)+8-3}{(p-2)^2-1}=4\frac{(p-2)}{(p-2)^2-1}+5\frac{1}{(p-2)^2-1}\risingdotseq e^{2t}(4cht+5sht)$$

II. Представление изображение рядом.

Теорема 2.2. (Первая теорема разложения) *Если функция $F(p)$ аналитическая в бесконечно удалённой точке $(p=\infty)$, и разложение её в ряд Лорана в окрестности указанной точки имеет вид:*

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\frac{a_2}{p^3}+\ldots\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}},$$

то $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, определяемого степенным рядом

$$f(t)=a_0+\frac{a_1}{1!}t+\frac{a_2}{2!}t^2+\ldots+\frac{a_n}{n!}t^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n,$$

сходящимся для всех $t>0$.

Пример 5. Найти оригинал по изображению $F(p)=\ln\left(1+\dfrac{1}{p}\right)$.

Решение. Разложим $F(p)$ в ряд Лорана по степеням p в окрестностях точки $p=\infty$. Известно разложение $\ln(1+z)=z-\dfrac{z^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{z^n}{n}+\ldots$, сходящееся для $|z|<1$.

Положим $z=\dfrac{1}{p}$, тогда будем иметь

$$F(p)=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{np^n}+\ldots\quad\text{для } |p|>1.$$

Отсюда $f(t)=1-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t}{1!}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots=\dfrac{1}{t}\left[t-\dfrac{t^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n!}+\ldots\right]=$

$$=\frac{1}{t}\left\{1-\left[1-\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{n!}+\ldots\right]\right\}=\frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right)$$

Теорема 2.3. (Вторая теорема разложения)

Если $F(p)=\dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$ *– правильная несократимая рациональная дробь, и знаменатель имеет корни* $p_1,\ p_2,\ \cdots p_e$ *кратностей* $r_1, r_2, \ldots, r_e$ $(r_1+r_2+\ldots+r_e=n)$, *то оригиналом служит функция*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{e}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left[(p-p_k)^{r_k}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}e^{p_k t}\right]. \qquad (2.1)$$

Если среди корней знаменателя есть корень первой кратности (простой корень), например, $p_s(r_s=1)$, то ему соответствует слагаемое

$$\lim_{p\to p_s}(p-p_s)\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\cdot e^{pt},$$

которое с учётом того, что $F_2(p_s)=0$, можно записать так

$$\lim_{p\to p_s}\frac{F_1(p)}{\dfrac{F_2(p)-F_2(p_s)}{p-p_s}}e^{pt}=\frac{F_1(p_s)}{F_2'(p_s)}e^{p_s t}.$$

В случае, когда все корни знаменателя простые, формула (1) примет вид

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)}e^{p_k t} \qquad (2.1^*)$$

Пример 6. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p-3)(p-1)(p+2)}$.

Решение. Все корни знаменателя простые, обозначим $p_1=3,\ p_2=1,\ p_3=-2, F_1(p)=2p+1, F_2(p)=(p-3)(p-1)(p+2)$. Найдём $F'_2(p)=(p-1)(p+2)+(p-3)(p+2)+(p-3)(p-1)$,

$$\frac{F_1(3)}{F'_2(3)}=\frac{7}{10},\quad \frac{F_1(1)}{F'_2(1)}=-\frac{1}{2},\quad \frac{F_1(-2)}{F'_2(-2)}=-\frac{1}{5}.$$

Следовательно, $F(p)\risingdotseq f(t)=\dfrac{7}{10}e^{3t}-\dfrac{1}{2}e^{t}-\dfrac{1}{5}e^{-2t}$.

Пример 7. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)(p+3)^3}$.

Решение. Корень $p_1=-1$ кратности $r_1=1$, корень $p_2=-3$ кратности $r_2=3$. Воспользуемся формулой (3.1):

$$f(t)=\lim_{p\to -1}(p+1)\frac{1}{(p+1)(p+3)^3}e^{pt}+\frac{1}{2!}\lim_{p\to -3}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p+3)^3\frac{1}{(p+1)(p+3)^3}e^{pt}\right]$$ Найдём

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{p+1}\right)=\frac{t(p+1)-1}{(p+1)^2}e^{pt},\quad \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{p+1}\right)=\frac{t^2(p+1)^2-2t(p+1)+2}{(p+1)^3}e^{pt}.$$

Теперь

$$f(t)=\lim_{p\to -1}\frac{e^{pt}}{(p+3)^3}+\frac{1}{2}\lim_{p\to -3}\frac{t^2(p+1)^2-2t(p+1)+2}{(p+1)^3}e^{pt}=\frac{1}{8}e^{-t}-\frac{1}{8}(2t^2+2t+1)e^{-3t}$$

Пример 8. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{1}{p^3+2p^2+2p}$.

Решение. Корни знаменателя**:** $p_1=0,\ p_{2,3}=-1\pm i$. Для нахождения оригинала используем формулу (3.1*). Найдем

$$F_2'(p)=3p^2+4p+2.$$

Так как $F_1(p)=1=const$, то $\dfrac{F_1(0)}{F_2'(0)}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{F_1(-1+i)}{F_2'(-1+i)}=-\dfrac{1}{4}(1-i)$, $\dfrac{F_1(-1-i)}{F_2'(-1-i)}=-\dfrac{1}{4}(1+i)$.

Отсюда, с использованием формулы Эйлера

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-i)e^{(-1+i)t}-\frac{1}{4}(1+i)\cdot e^{(-1-i)t}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)\cdot e^{-t}$$

Теорема 3.4. **(**Теорема обращения**)** *Если функция $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0 и $F(p)$ – её изображение, то в любой точке непрерывности $f(t)$ имеет место формула*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c F(p)\cdot e^{pt}dp\ , \qquad (2.2)$$

где c – любая прямая, параллельная мнимой оси и отстоящая от неё на расстоянии $s>s_0$.

Замечание. Так как интеграл вычисляется по прямой, то формулу (3.3) записывают в виде

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{w\to\infty}\int_{s-iw}^{s+iw}F(p)\cdot e^{pt}dp$$

или

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)\cdot e^{pt}dp \qquad (2.3)$$

и называют формулой обращения преобразования Лапласа (Меллин Р.Х. (1854–1933)).

Так же, как не всякая функция $f(t)$ может быть оригиналом, так и не любая функция $F(p)$ может служить изображением, т.е. иметь оригинал.

Условия изображения

Функция $F(p)$ *будет изображением оригинала, если:*

1) $F(p)$ *– аналитическая функция в полуплоскости* $\operatorname{Re} p = s > s_0$, *где* s_0*– некоторое положительное число;*

2) $F(p) \to 0$ *при значениях* $\operatorname{Re} p = s > s_0$ *и* $|p| \to +\infty$*;*

3) сходится интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(s+i\omega)|\, d\omega$.

Для непосредственного вычисления оригинала формула (2.3) мало пригодна, но из неё следует ряд практических выводов.

В правой части формулы обращения стоит интеграл от аналитической функции $F(p)$, взятой в плоскости комплексного переменного p. В некоторых случаях удаётся путь интегрирования заменить другим, допускающим вычисление интеграла с помощью теоремы Коши о вычетах. Пусть изображение $F(p)$ есть аналитическая функция всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек: $p_1, p_2, \ldots, p_e$ и $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$, тогда при всех $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)\cdot e^{pt}dt = \sum_{k=1}^{l} res\left[F(p_k)\cdot e^{p_k t}\right], \qquad (2.4)$$

т.е. *оригинал находится как сумма вычетов функции* $F(p_k)\cdot e^{pt}$ *в изолированных особых точках*.

Пример 9. Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)}$.

Решение. Корни знаменателя: $p_1 = 1$ кратности $r_1 = 2$ и $p_2 = -2$ кратности $r_2 = 1$. Обозначим $\Phi(p) = F(p)\cdot e^{pt} = \dfrac{e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}$. Тогда $f(t) = res\Phi(1) + res\Phi(-2)$.

По формуле вычетов для полюса второго и первого порядка:

$$res\Phi(1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\left[(p-1)^2\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}\right] = \lim_{p\to1}\frac{(tp+2t-1)e^{pt}}{(p+2)^2} = \frac{1}{9}(3t-1)\cdot e^t$$

$res\Phi(-2) = \lim\limits_{p\to-2}\dfrac{(p+2)e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)} = \dfrac{1}{9}e^{-2t}$, следовательно, $f(t) = \dfrac{1}{3}te^t - \dfrac{1}{9}e^t + \dfrac{1}{9}e^{-2t}$.

Решение дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, систем ДУ, интегральных уравнений (уравнение Вольтерра)

Пример 1. $x^{IV} + 2x'' + x = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$

Операторное уравнение имеет вид $p^4 X + 2p^2 X + X = \dfrac{1}{p^2+1} \Rightarrow X = \dfrac{1}{(p^2+1)^3}$.

X – рациональная дробь, знаменатель имеет сопряженные корни $p_{1,2} = \pm i$ кратности 3. Для нахождения оригинала воспользуемся второй теоремой разложения (2.1)

$$f(t) = \lim_{p\to i}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-i)^3\frac{e^{pt}}{(p-i)^3(p+i)^3}\right] + \lim_{p\to i}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-i)^3\frac{e^{pt}}{(p-i)^3(p+i)^3}\right].$$

$$\lim_{p\to i}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p-i)^3\frac{e^{pt}}{(p-i)^3(p+i)^3}\right] = \frac{e^{pt}}{2}\left[\frac{t^2}{(p+i)^3} - \frac{6t}{(p+i)^4} + \frac{12}{(p+i)^5}\right]_{p=i} = \frac{e^{it}}{2}\left[\frac{t^2}{-8i} - \frac{3t}{8} + \frac{3}{8i}\right] =$$

$$\frac{1}{16}(\cos t + i\sin t)\left[-3t + i(t^2-3)\right] = \frac{1}{16}(-3t\cos t - (t^2-3)\sin t) + i\frac{1}{16}\left[-3t\sin t + (t^2-3)\cos t\right]. \ (*)$$

Вычисление второго слагаемого (с сопряженным комплексным корнем) дает результат, сопряженный полученному (*).

Таким образом, $f(t)$ равен удвоенной вещественной части (*)

$$f(t) = \frac{1}{8}(-3t\cos t + (3-t^2)\sin t).$$

Пример 2. Найти решение системы ДУ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = e^{-t}, & x(0) = -1 \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = e^{-2t}, & y(0) = -2 \end{cases}$.

Обозначим $X(p) \risingdotseq x(t)$, $Y(p) \risingdotseq y(t)$ и перейдём к изображениям

$$\begin{cases} pX + 1 + 3X + Y = \dfrac{1}{p+1} \\ pY + 2 - X + Y = \dfrac{1}{p+2} \end{cases} \text{или} + \begin{cases} (p+3)X + Y = -\dfrac{p}{p+1} \\ -X + (p+1)Y = -\dfrac{2p+3}{p+2} \end{cases}\Bigg|_{\times(p+3)}\Bigg|^{\times[-(p+1)]}$$

Применим метод исключения, сначала умножим второе уравнение на $(p+3)$ и сложим с первым, имеем

$$Y\left(p^2+4p+4\right)=-\frac{2p^3+12p^2+20p+9}{(p+2)(p+1)},\quad Y=-\frac{2p^3+12p^2+20p+9}{(p+2)^3(p+1)}$$

затем умножим первое уравнение на выражение $-(p+1)$ и, складывая со вторым,

получим $\quad -X\left(p^2+4p+4\right)=\frac{p^2-3}{p+2},\quad X=-\frac{p^2-3}{(p+2)^3}$

Разложение дробей на простейшие даёт

$$X(p)=-\frac{1}{p+2}+\frac{4}{(p+2)^2}-\frac{1}{(p+2)^3}$$

$$Y(p)=-\frac{3}{p+2}-\frac{3}{(p+2)^2}+\frac{1}{(p+2)^3}+\frac{1}{p+1}$$

После перехода к оригиналам имеем

$$x(t)=\left(-1+4t-\frac{1}{2}t^2\right)e^{-2t},$$

$$y(t)=\left(-3-3t+\frac{1}{2}t^2\right)e^{-2t}+e^{-t}.$$

Интегральное уравнение − уравнение Вольтера типа свертки

Найти решение уравнения Вольтерра (уравнения типа свертки).

Уравнении вида $\varphi(x)=f(x)+\int\limits_0^x K(x-t)\varphi(t)dt$ называется уравнением Вольтерра типа свертки. Предполагаем, что все функции достаточно гладкие и имеют изображения. Обозначим $F(p)\risingdotseq f(x), \Phi(p)\risingdotseq\varphi(x), L(p)\risingdotseq K(x)$ и перейдём к изображениям $\Phi(p)=F(p)+L(p)\Phi(p) \;\Rightarrow\; \Phi(p)=\frac{F(p)}{1-L(p)},\ L(p)\neq 1$. Оригинал для $\Phi(p)$ является решением уравнения.

Пример 3. $\varphi(x)=\cos x+\int\limits_0^x (x-t)\varphi(t)dt$

Запишем операторное уравнение: $\Phi(p)=\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{p^2}\Phi(p) \;\Rightarrow\; \Phi(p)=\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}$

$=\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1}+\frac{1}{2}\frac{p}{p^2-1} \;\Rightarrow\; \varphi(x)=\frac{1}{2}(\cos x+chx)$