VI. Интегрирование изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\dfrac{f(t)}{t}$ – оригинал, а интеграл $\int\limits_p^\infty F(z)dz$ сходится, то $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty F(z)\,dz$.

операции деления на аргумент в пространстве оригиналов соответствует операция интегрирования в пределах от ρ до ∞ в пространстве изображений.

Док-во: $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp = \int\limits_p^\infty dp \cdot \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$. $f(t)e^{-pt}$ ограничена $\Rightarrow$ интеграл сходится равномерно $\Rightarrow$ относительно p можно поменять порядок интегрирования $\Rightarrow$

$$= \int\limits_0^\infty f(t)dt \cdot \int\limits_p^\infty e^{-pt}\,dp = \int\limits_0^\infty f(t)dt \cdot \left.\frac{e^{-pt}}{-t}\right|_p^\infty = \int\limits_0^\infty f(t)\left[\frac{e^{-\infty} - e^{-pt}}{-t}\right]dt = \int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$$

Пример. Найти изображения $\int\limits_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau$

Известно: $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$. По свойству **VI** $\dfrac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty \dfrac{dz}{z^2+1} = \dfrac{\pi}{2} - arctg(p)$**.** По свойству **IV** $\int\limits_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}d\tau \risingdotseq \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{\pi}{2} - arctg(p)\right)$.

VII. Смещение в аргументе изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и α – комплексное число, то $e^{-\alpha t}f(t) \risingdotseq F(p+\alpha)$.

Док-во: Применим преобразование Лапласа к оригиналу $e^{-\alpha t}f(t)$:

$$e^{-\alpha t}f(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)\cdot e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f(t)\cdot e^{-(p+\alpha)t}dt = F(p+\alpha)$$

Показатель роста оригинала $f(t)$ есть s_0, а показателем роста оригинала $e^{-\alpha t}f(t)$ будет $(s_0 - \mathrm{Re}\,\alpha)$. В связи с этим утверждение **VII** справедливо, если $\mathrm{Re}\,p > (s_0 - \mathrm{Re}\,\alpha)$ или $\mathrm{Re}(p+\alpha) > s_0$.

Пример 7. Найти изображения функций $e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t)$.

Решение. Известно, что $\cos\beta t \fallingdotseq \dfrac{p}{p^2+\beta^2}$, тогда $e^{\alpha t}\cdot\cos(\beta t) \fallingdotseq \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$, аналогично из соответствия $\sin\beta t \fallingdotseq \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$ по свойству **VII** следует $e^{\alpha t}\cdot\sin(\beta t) \fallingdotseq \dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$.

VIII. Смещение в аргументе оригинала (запаздывание)

Если $f(t) \fallingdotseq F(p)$ и $f(t-a)=0$ при значениях $t<a$, то для всякого $a>0$ $f(t-a) \fallingdotseq e^{-pa}F(p)$. Иначе говоря, *если процесс в простр. оригинала опаздывает на время a по сравнению с первоначальным t, то изображение умножается на функцию $e^{-p\alpha}$*

Док-во: Найдем изображение по определению

$$f(t-a) \fallingdotseq \int_0^a f(t-a)e^{-pt}dt + \int_a^\infty f(t-a)\cdot e^{-pt}dt$$

Первый интеграл равен нулю, так как по условию $f(t-a)=0$ при значениях $t<a$ по условию теоремы. Ко второму интегралу применим замену переменной: $t-a=\tau$, $dt=d\tau$, при значении $t=a \Rightarrow \tau=0$, при значении $t=\infty \Rightarrow \tau=\infty$. Тогда

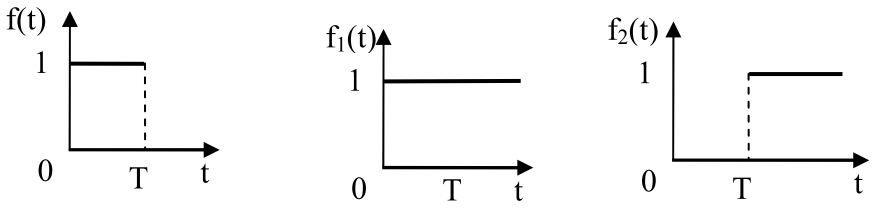
$$f(t-a) \fallingdotseq \int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-p(a-\tau)}d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-pa}\cdot e^{-p\tau}d\tau = e^{-pa}\int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-p\tau}d\tau = e^{-pa}F(p)$$

<u>Теорема запаздывания имеет особое значение в теории регулирования. Пользуясь ею, можно исследовать системы с запаздывающими звеньями и вообще кусочно-непрерывные функции.</u>

Пример некоторых ступенчатых функций

Ступенчатые функции – это кусочно-непрерывные функции, которые на каждом участке непрерывности имеют постоянные значения.

Пример.1. Рассмотрим f(t): Функция $f(t)$ может быть представлена как разность двух единичных функций



$f_1(t)-f_2(t)$, где $f_1(t)=\eta(t)\risingdotseq\frac{1}{p}$, а $f_2(t)=\eta(t-T)\risingdotseq e^{-pT}\frac{1}{p}$, следовательно,

$$f(t)\risingdotseq\frac{1-e^{-pT}}{p}.$$

Пример 2. Оригинал $f(t)$ задан графически найти его изображение.

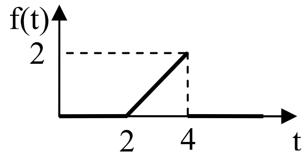


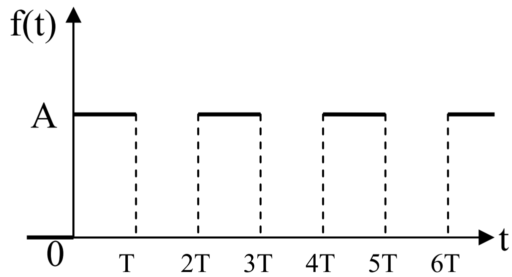
Рис. 2.2.

Решение. Очевидно, что $f(t)=\begin{cases}0, & t\le 2\\ t-2, & 2<t\le 4\\ 0, & t>4\end{cases}$.

Используя единичные функции $\eta(t-2)$ и $\eta(t-4)$, запишем

$$f(t)=(t-2)\eta(t-2)-(t-4)\eta(t-4)-2\eta(t-4)\risingdotseq\frac{e^{-2p}}{p^2}-e^{-4p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}\right).$$

Пример 3. Оригинал $f(t)$ задан графически, найти его изображение.

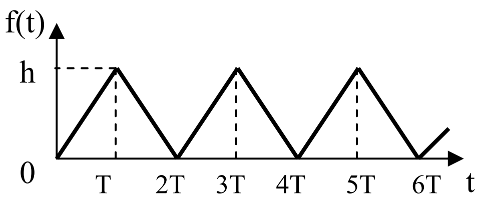


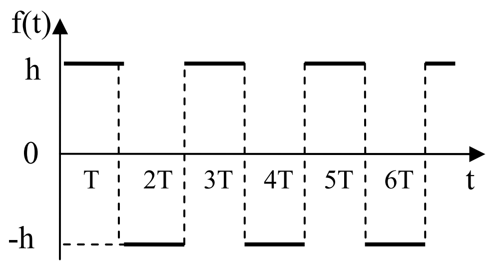
Для функции, $f(t)$ имеем:

$$f(t)=A\left[\eta(t)-\eta(t-T)+\eta(t-2T)-\eta(t-3T)+\eta(t-4T)-\eta(t-5T)+\ldots\right]\risingdotseq$$

$$\frac{1}{p}A[1-e^{-pT}+e^{-2pT}-e^{-3pT}e^{-4pT}-e^{-5pT}+\ldots)=\frac{A}{1+e^{-pT}}\frac{1}{p}$$

Пример 4. Рассмотрим функцию f(t), определим ее изображение. Для этого перейдем к графику производной функции f(t), т.е. найдем изображение производной, а затем изображение интеграла от оригинала (**свойство 4**). График производной имеет вид.





Тогда

$$f'(t)\risingdotseq\frac{h}{T}\Big[1-2e^{-pT}+2e^{-2pT}-2e^{-3pT}+2e^{-4pT}-\ldots\Big]=\frac{h}{T}\cdot\frac{1-e^{-pT}}{1+e^{-pT}}$$

$$\frac{1}{p}.$$

Так как $\frac{1-e^{-pT}}{1+e^{-pT}}=\frac{e^{p\frac{T}{2}}-e^{-p\frac{T}{2}}}{e^{p\frac{T}{2}}+e^{-p\frac{T}{2}}}=th\frac{pT}{2}$; $f'(t)\risingdotseq\frac{h}{T}th\frac{pT}{2}$, то $f(t)\risingdotseq\frac{h}{pT}th\frac{pT}{2}$.

IX. Изображение периодического оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $f(t)$ – периодическая функция с периодом $T>0$, то

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt.$$

Док-во. По определению преобразования Лапласа

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt=\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt+\int_T^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt.$$

Применим ко второму интегралу замену переменной $t=\tau+T, dt=d\tau$, при значении $t=\tau \Rightarrow T=0$, при значении $t=\infty \Rightarrow \tau=\infty$;

$$F(p)=\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt+\int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-p\tau}\cdot e^{-pT}d\tau=\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt+e^{-pT}F(p)$$

Отсюда
$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T f(t)\cdot e^{-pt}dt.$$

X. Свёртка функций. Теорема умножения

Пусть две функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны для значений $t>0$. *Свёрткой этих функций называется интеграл* $f*\varphi=\int_0^t f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau$. Вычисление этого интеграла называется «свёртыванием функций».

Покажем, что введённая операция обладает свойством симметрии: $f*\varphi=\varphi*f$.

Действительно $\varphi*f=\int_0^t \varphi(\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau=\left|\begin{array}{l} t-\tau=u \\ -d\tau=du \end{array}\right.$

$$=-\int_t^0 \varphi(t-u)\cdot f(u)du=\int_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)du=f*\varphi$$

Рассмотрим часто встречающийся случай, когда изображение неизвестного оригинала разлагается на множители $F(p)\cdot\Phi(p)$, причём известны оригиналы, соответствующие множителям $F(p)\risingdotseq f(t),\ \Phi(p)\risingdotseq\varphi(t)$. Можно ли найти неизвестный оригинал?

Теорема 1.2. *Если* $f(t)\risingdotseq F(p)$, $\varphi(t)\risingdotseq\Phi(p)$, *то произведение изображений* $F(p)\cdot\Phi(p)$ *является изображением свёртки оригиналов*: $F(p)\cdot\Phi(p)\risingdotseq f(t)*\varphi(t)$.

Иначе говоря, *умножение изображений равносильно свёртыванию оригиналов этих изображений.*

Док-во. По определению изображения

$$f(t)*\varphi(t)\risingdotseq\int_0^\infty f*\varphi\cdot e^{-pt}dt=\int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f(t-\tau)\cdot\varphi(\tau)\,d\tau$$

Как известно, интеграл Лапласа абсолютно сходится при значениях $\mathrm{Re}\,p>s_0$, поэтому можно изменить порядок интегрирования:

$$f*\varphi \risingdotseq \int_0^\infty \varphi(\tau)\,d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt}\cdot f(t-\tau)\,dt.$$

Совершим замену переменной во внутреннем интеграле: $t-\tau=u, dt=du$. Тогда

$$f*\varphi \risingdotseq \int_0^\infty \varphi(\tau)\cdot d\tau\cdot e^{-p\tau}\int_0^\infty f(u)\cdot e^{-pu}du=\int_0^\infty \varphi(\tau)e^{-p\tau}d\tau\cdot\int_0^\infty f(u)e^{-pu}du=\Phi(p)\cdot F(p)$$

Пример 10. Найти оригинал, соответствующий изображению $\dfrac{p^2}{p^4+13p^2+36}$

Решение. Очевидно

$$\frac{p^2}{p^4+13p^2+36}=\frac{p}{p^2+4}\cdot\frac{p}{p^2+9};\quad \frac{p}{p^2+4}\risingdotseq\cos 2t,\ \frac{p}{p^2+9}\risingdotseq\cos 3t.$$

Следовательно,

$$\frac{p^2}{p^4+13p^2+36}=\frac{p}{p^2+4}\cdot\frac{p^2}{p^2+9}\risingdotseq\cos 3t*\cos 2t=\int_0^t\cos 3\tau\cdot\cos 2\left(t-\tau\right)d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos\left(2t+\tau\right)+\cos\left(5\tau-2t\right)\right]d\tau=\frac{1}{5}\left(3\sin 3t-2\sin 2t\right)$$

XI. Интеграл Дюамеля

(Жан Мари Констан Дюамель 1797-1872 гг.)

Эта формула является следствием теоремы умножения и имеет важные приложения при расчёте переходных процессов в электрических цепях.

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, $\varphi(t)\risingdotseq\Phi(p)$,

то $\quad p\cdot F\cdot\Phi\risingdotseq f(0)\varphi(t)+\int_0^t\varphi(\tau)f'(t-\tau)d\tau.$

Док-во. Рассмотрим случай, когда надо найти оригинал произведения

$$pF(p)\Phi(p)=\left[pF(p)-f(0)+f(0)\right]\Phi(p)\ =$$

По правилу дифференцирования оригинала (свойство III) $f'(t)=pF(p)-f(0)\ \Rightarrow$

$$=\ pF(p)\Phi(p)=f(0)\Phi(p)+\left[pF(p)-f(0)\right]\Phi(p)=$$

Из теоремы Бореля $G(p)\cdot\Phi(p)\risingdotseq g*\varphi.\ \Rightarrow$

$$=f(0)\Phi(p)+\left[pF(p)-f(0)\right]\Phi(p)\risingdotseq f(0)\varphi(t)+\ f'(t)*\varphi(t)=f(0)\varphi(t)+\int_0^t\varphi(\tau)f'(t-\tau)d\tau$$

Аналогично доказывается $\ p\cdot F\cdot\Phi\risingdotseq f(t)\varphi(0)+\int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau$

Замечание. В силу симметричности операции свертки $f*\varphi=\varphi*f$

$$f(0)\varphi(t)+\int_0^t\varphi(\tau)f'(t-\tau)d\tau=f(0)\varphi(t)+\int_0^t\varphi(t-\tau)f'(\tau)d\tau$$

Использование интеграла Дюамеля

При нулевых начальных условиях и особенно в том случае, когда для правой части ДУ *f(t)* трудно подобрать изображение, удобно применять интеграл Дюамеля

Пусть дано неоднородное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t)$$

и требуется найти частное решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям: $x(0)=0, x^1(0)=0, \ldots, x^{(n-1)}(0)=0$. Решение соответствующего уравнения в пространстве изображений имеет вид, аналогичный (**):

$$X(p) = \frac{F(p)}{D_n(p)},$$

где $F(p) \risingdotseq f(t)$, $D_n(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$.

Рассмотрим уравнения с такой же левой частью, что и исходное уравнение, но с правой частью, равной оригинальной функции $\eta(t)$ и нулевыми начальными условиями

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = \eta(t).$$

Вспомогательному уравнению соответствует решение в пространстве изображений: $Y(p) = \dfrac{1}{p \cdot D_n(p)} \Rightarrow pY(p) = \dfrac{1}{D_n(p)} \Rightarrow X = pF \cdot Y$, или, используя формулу Дюамеля, имеем

$x(t) = f(t) \cdot y(0) + \int\limits_0^t f(t) \cdot y'(t-\tau)\,d\tau$, где $y(t) \risingdotseq Y(p)$ – решение вспомогательного уравнения. С учётом нулевых начальных условий

$$x(t) = \int\limits_0^t f(\tau) \cdot y'(t-\tau)\,d\tau.$$

Пример 11. Найти частное решение дифференциального уравнения $x'' = arctgt$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$.

Решение. $f(t) = arctg\,t$ Вспомогательное уравнение $y''=1$, $y(t)$ – решение вспомогательного уравнения. Операторное уравнение

$$p^2 Y = \frac{1}{p}, \quad Y = \frac{1}{p^3} \risingdotseq \frac{t^2}{2} = y(t), \ y(0) = 0.$$

Тогда искомое решение $X = pF \cdot Y$

$$x(t)=\int_0^t arctg\tau\cdot(t-\tau)\,d\tau+arctgt\cdot 0=\left(t\tau-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^t-\int_0^t\left(t\tau-\frac{\tau^2}{2}\right)\frac{d\tau}{1+\tau^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)arctgt-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{t}{2}.$$

Если начальные условия исходного уравнения не нулевые, то заменой искомой функции задачу можно свести к задаче с нулевыми начальными условиями, при этом лишь несколько изменится правая часть уравнения, функция $f(t)$.