ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Операционное исчисление относится к символическим исчислениям, в основе которых лежат построение математического анализа как системы формальных операций над искусственно введенным символом. Эта искусственность возникла из потребностей прикладных физических задач. В 20-ом веке в наибольшей степени развитию этих методов способствовал английский инженер-электрик О.Хевисайд, который использовал символическое исчисление в электротехнических расчетах.

Идея этого метода заключается в следующем:

для решения интегрального или дифференциального уравнения относительно оригинальной функции $x(t)$ *(ее так и называют «оригиналом»)*, вводится некий символ (оператор) p – комплексная переменная *(ее называют «изображением»)* для того, чтобы было легче найти искомую функцию $x(t)$ из уравнения, содержащего $x(t)$ под интегралом или производными. Операционный метод решения задачи сводится к следующим этапам:

1) от искомой функции $x(t)$ переходят к функции $X(p)$ – изображению $x(t)$ - пишут

$$x(t) \risingdotseq X(p)$$

2) над $X(p)$ производят операции, соответствующие операциям $x(t)$, получают операторное уравнение относительно $X(p)$. При этом операции над изображением оказываются значительно проще: операции дифференцирования соответствует операция произведения на p, интегрированию – деление на p и т.д.

3) операторное уравнение разрешают относительно $X(p)$. (алгебраические действия)

4) от найденного изображения $X(p)$ переходят к оригиналу $x(t)$, который является искомой функцией.

Таким образом, нужно ввести (определить) над какими функциями $x(t)$, можно производить такие действия и ввести для нее изображение (определить преобразование).

Данное направление возникло как прикладное, поэтому для решения определенных задач были придуманы свои преобразования, которые наиболее эффективно позволяли решить поставленную задачу. Все они называются «интегральными преобразованиями»: <u>Лапласа, Фурье</u>, Абеля, Хенкеля, Бесселя, Бушмана, Гильберта, <u>Радона</u>, Стильтьеса и др.

Мы подробно изучим теорию преобразований Лапласа, которая называется операционным исчислением, и немного преобразования Фурье.

§1. Оригинал и изображение.

Определения оригинала и изображения

Опр.1.1. Функцией-оригиналом будем называть любую функцию действительного аргумента t: $f(t) = u(t) + iv(t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

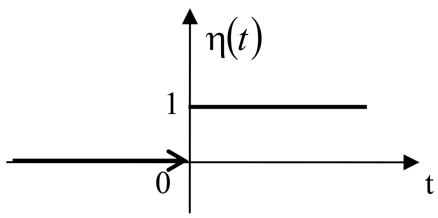
1) $f(t)$ и $f'(t)$ или всюду непрерывны, или имеют на любом конечном промежутке лишь конечное число точек разрыва первого рода;

2) $f(t)=0$ для всех точек $t < 0$;

3) $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие числа $M > 0$ и $s_0 \geq 0$, что для всех t $\left|f(t)\right| \leq Me^{s_0 t}$, s_0 – показатель роста функции $f(t)$.

С точки зрения физических приложений условия 1 и 3 выполняются для большинства функций *f(t)*, описывающих физические процессы (*t* – время). Условие 2 соответствует условию начала эксперимента, т.е. вся информация о ходе процесса до момента начала наблюдения содержится в начальных условиях.

Математически эта проблема решается с использованием единичной функции Хевисайда $\eta(t)$, которая определяется следующим образом $\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$



Тогда функцию $\varphi(t)$, которая удовлетворяет условиям 1) и 3), но не удовлетворяет условию 2) можно сделать оригиналом, умножив эту функцию на $\eta(t)$. («гасим» $\varphi(t)$ для значений $t < 0$ и не изменяем её для значений $t \geq 0$.)

$$\eta(t) \cdot \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \varphi(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

Пользуясь единичной функцией, можно сделать оригиналами такие известные функции, как $\sin t, \cos t, cht, sht, e^{\lambda t}$.

Пример. Является ли функция $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{(5-4i)t}, & t > 0 \end{cases}$ оригиналом?

f(t) непрерывна всюду, кроме значения $t = 0$ (как и её производная), при $t < 0$ $f(t) = 0$, $\left|f(t)\right| = e^{5t}$, следовательно, для этой функции $M = 1, s_0 = 5$. Поэтому данная функция – оригинал.

Пример. Является ли функция $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2t^3, & t \geq 0 \end{cases}$.

f(t) непрерывна всюду, при $t<0$ обращается в нуль, для $t \ge 0$ может быть представлена в виде: $2t^3 = 2e^{3\ln t} < 2e^{3t}$, т.е. для неё $M=2, s_0=3$.

Пример. $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \dfrac{1}{t-3}, & t \ge 0 \end{cases}$ – не оригинал, так как в точке $t=3$ функция терпит разрыв второго рода.

Опр.2. Изображением функции *f(t)* (по Лапласу) называют функцию комплексной переменной $F(p)$ ($p = s + i\tau$), определяемую соотношением

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt \quad (F(p) \text{ или } L[f(t)]) \qquad (1.1)$$

(путем интегрирования является вещественная положительная полуось).

Выражение «функция » *f(t)* имеет своим изображением $F(p)$ будем записывать $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Интеграл в формуле (1.1) называют *интегралом Лапласа* для функции $f(t)$, переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ – *преобразованием Лапласа.*

Теорема 1.1. Условия существования изображения.

Если оригинал $f(t)$ имеет порядок роста s_0 (выполняется условие 3), то изображение этого оригинала $F(p)$ существует для всех p, для которых $\operatorname{Re} p = s > s_0$, и является при этом условии аналитической функцией (т.е. интеграл 1.1 сходится абс.).

Покажем. Оценим 1.1.

$F(p)=\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt = \int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\cos\sigma t\,dt - i\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\sin\sigma t\,dt$. Оценим каждое слагаемое в отдельности: $\left|\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-st}\cos\sigma t\,dt\right| \le \int_0^\infty \left|f(t)\cdot e^{-st}\cos\sigma t\right|dt < M\int_0^\infty e^{-st}e^{-s_0 t}\,dt = M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}\,dt = \dfrac{M}{s-s_0}$.

Аналогично для второго слагаемого. Т.к. интеграл сходится, то $F(p)$ существует.

Замечание. 1.1. В дальнейшем будем полагать $\operatorname{Re} p > s_0$, т.е. рассматривать изображение $F(p)$ лишь для тех p, для которых обеспечено существование этого изображения.

1.2. Если $s \to \infty$, $s = \operatorname{Re} p$, то $\frac{M}{s - s_0}$=0, т.е., $\lim\limits_{p \to \infty} F\,(p) = 0$ иначе говоря, если изображение $F(p)$ аналитично в бесконечно удаленной точке, то оно обязательно имеет там нуль.

Изображения некоторых функций.

1. Функция Хевисайда $f(t) = \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$.

$$L[\eta(t)] = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\,dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^\infty = \frac{1}{p}$$

2. Пусть $f(t) = \eta(t) \cdot e^{qt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{qt}, & t \geq 0 \end{cases}$, q – комплексное число. Порядок роста оригинала $f(t)$ равен $s_0 = \operatorname{Re} q$. $\quad L\left[\eta(t)e^{qt}\right] = \int_0^\infty e^{qt} \cdot e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty e^{-(p-q)t}\,dt = \left.\frac{e^{-(p-q)t}}{-(p-q)}\right|_0^\infty = \frac{1}{p-q}$,

в предположении, что $\operatorname{Re}(p-q) > 0$, т.е. $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q = s_0$

3. $L[\cos t] = \int_0^\infty e^{-pt} \cos t\,dt = \left.\frac{e^{-pt}(\sin t - p\cos t)}{p^2+1}\right|_0^\infty = \frac{p}{p^2+1}$. Здесь $\eta(t)\cos t$ обозначено $\cos t$.

Условимся в дальнейшем множитель $\eta(t)$ опускать, произведение $\eta(t) \cdot f(t)$ обозначать $f(t)$.

Основные свойства преобразования Лапласа.

I. Свойство линейности.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$ и a, b – любые постоянные, то $af(t) + b\varphi(t) \risingdotseq aF(p) + b\Phi(p)$.

Док-во: по определению $af(t) + b\varphi(t) \risingdotseq \int_0^\infty [af(t) + b\varphi(t)] \cdot e^{-pt}dt = a\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt}dt + b\int_0^\infty \varphi(t) \cdot e^{-pt}dt =$

$= a \cdot F(p) + b \cdot \Phi(p)$.

Пример 1. $f(t) = \sin \alpha t = \frac{1}{2i}\left(e^{\alpha t i} - e^{-\alpha t i}\right)$. Изображение e^{qt} известно. Тогда согласно I

$$\sin \alpha t \risingdotseq \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p - \alpha i} - \frac{1}{p + \alpha i}\right] = \frac{2i\alpha}{2i\left(p^2 + \alpha^2\right)} = \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2} .$$

II. Свойство подобия

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\omega > 0$ $\quad f(\omega t) \risingdotseq \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right)$.

Док-во: $f(\omega t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(\omega t)\cdot e^{-pt}dt = \left|\, \omega t = \tau \,\right| = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-\frac{p}{\omega}\tau}d\tau = \frac{1}{\omega}F\left(\frac{p}{\omega}\right)$.

III. Дифференцирование оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, и $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ – оригиналы, то

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0),\ \ldots, \tag{1.2}$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Док-во: Найдём изображение для производной $f'(t)$:

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f'(t)\cdot e^{-pt}dt = |\text{по частям}| = f(t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^\infty + p\int\limits_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt = .$$

/ Так как $\operatorname{Re} p = s > s_0$, то $\left|e^{-pt}\cdot f(t)\right| \le M\cdot e^{-(s-s_0)t} \to 0$ при $t\to\infty$ /

$= 0 - f(0) + pF(p)$. $\Rightarrow$ $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$.

$$f''(t) = \left[f'(t)\right]' \risingdotseq p\left[pF(p) - f(0)\right] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

для $f'''(t) \risingdotseq p\left[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)\right] - f''(0) = p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$ и т.д.

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

Пример. Найти изображение $f(t) = x''' - 4x'' - x' - 5$, если $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = -1$ и $x(t) = X(p)$.

$$x''' \risingdotseq p^3X(p) - p^2x(0) - px'(0) - x''(0) = p^3X - p^2 + 1,$$
$$x'' \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X - p,$$
$$x' \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX - 1,\quad 5 = 5\cdot\frac{1}{p} = \frac{5}{p}.$$

Тогда $f(t) \risingdotseq x''' - 4x'' - x' - 5 = X\left(p^3 - 4p^2 - p\right) - p^2 + 4p + 2 - \frac{5}{p}$.

IV. Интегрирование оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$ (1.3)

Операции интегрирования в пространстве оригиналов соответствует операция деления в пространстве изображений.

Док-во: пусть $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau=\varphi(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяет усл 1, 2, 3 и $\varphi(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau \risingdotseq \Phi(p)$

Очевидно $\varphi(0)=\int\limits_0^0 f(\tau)\,d\tau=0$. По свойству **III** $\varphi'(t)\risingdotseq p\cdot\Phi(p)$. Но $\varphi'(t)=f(t)$,

поэтому $f(t)\risingdotseq p\cdot\Phi(p)=F(p),\ \Phi(p)=\dfrac{F(p)}{p}\risingdotseq\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$.

Пример. Найти изображение $\int\limits_0^t d\tau$

$f(t)=1, F(p)=\dfrac{1}{p}\Rightarrow\int\limits_0^t d\tau\risingdotseq\dfrac{F(p)}{p}=\dfrac{1}{p^2}$. Так как $\int\limits_0^t d\tau=t$, то $t\risingdotseq\dfrac{1}{p^2}$.

Продолжая, получим: $\int\limits_0^t \tau\,d\tau\risingdotseq\dfrac{1}{p^3}$ или $\dfrac{t^2}{2}\risingdotseq\dfrac{1}{p^3}$,

$$\int\limits_0^t \frac{\tau^2}{2}d\tau\risingdotseq\frac{1}{p^4} \text{ или } \frac{t^3}{2\cdot 3}\risingdotseq\frac{1}{p^4},\ldots,\ \frac{t^n}{n!}\risingdotseq\frac{1}{p^{n+1}}.$$

V. Дифференцирование изображения

Если $F(p)\risingdotseq f(t)$, то $F'(p)\risingdotseq(-t)f(t)$, $F''(p)\risingdotseq(-t)^2 f(t)$, …, $F^{(n)}(p)\risingdotseq(-t)^n f(t)$

Дифференцированию в пространстве изображений соответствует операция умножения оригинала на аргумент с отрицательным знаком в пространстве оригиналов.

Док-во: т.к. $F(p)$ − аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re}p=s>s_0$, то ее можно дифференцировать по p: $F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\cdot f(t)dt\Rightarrow F'(p)=-\int\limits_0^\infty t\cdot e^{-pt}\cdot f(t)dt\risingdotseq(-t)f(t)$

$$F''(p)=\int\limits_0^\infty t^2\cdot e^{-pt}\cdot f(t)dt\risingdotseq t^2 f(t),\ \ldots\ F^{(n)}(p)=(-1)^n\int\limits_0^\infty t^n\cdot e^{-pt}\cdot f(t)dt\risingdotseq(-t)^n f(t).$$

Пример. Найти изображения функции $t^n e^t$.

Известно $e^t\risingdotseq\dfrac{1}{p-1}$.

По свойству **V:** $-te^t\risingdotseq-\dfrac{1}{(p-1)^2}$, $t^2e^t\risingdotseq\dfrac{2}{(p-1)^3}$, …, $t^ne^t\risingdotseq\dfrac{n!}{(p-1)^{n+1}}$.

Пример. Аналогично: $t \cdot \sin(\alpha t) \risingdotseq \dfrac{2p\alpha}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$, $\quad t \cdot \cos(\alpha t) \risingdotseq \dfrac{p^2-\alpha^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}$.