Модуль 4. Метод Монте-Карло и его применение к решению задач радиационной физики (часть 1)

1. **Сущность метода Монте-Карло.**
2. **Обзор некоторых понятий из теории вероятностей.**

4.1. Сущность метода Монте-Карло

- Многие явления в природе являются случайными. Случайность означает многовариантность и непредсказуемость результата при повторных испытаниях в одних и тех же условиях.
- Анализ различных случайных явлений показал, что среди них есть такие, для которых наблюдается статистическая устойчивость, т.е. через хаос случайностей просвечивается нечто повторяющееся, закономерное, **существует статистически устойчивая часть явления.**
- Определение статистически устойчивой части случайной последовательности результатов является целью исследований случайных явлений.

4.1. Сущность метода Монте-Карло

- Последовательности случайных чисел, статистически эквивалентные тем, что получаются экспериментально, можно генерировать на компьютере.

- Соединяя генерацию случайных чисел и известные статистически устойчивые части случайного явления (**распределения плотности вероятности** и т.п.), производят статистическое моделирование явления. Такой способ моделирования явлений получил название метода Монте-Карло

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

1). **Дискретные случайные величины**

- Случайная величина ξ называется дискретной, если она может принимать дискретное множество значений $x_1, x_2,..x_n$.
- Дискретная случайная величина ξ определяется таблицей (распределением случайной величины):

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_n \\ p_1 & p_2 & .... & p_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

где $x_1, x_2,..x_n$ - возможные значения величины ξ , а p_1, p_2, .. p_n – соответствующие им вероятности

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

- Числа x_i могут быть любыми. Однако вероятности p_i должны удовлетворять двум условиям:

1) все $p_i > 0$; (2)

2) $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

- Математическим ожиданием случайной величины ξ называется число:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (3)$$

- Mξ – это среднее значение величины ξ, причем более вероятные значения x_i входят в сумму с бóльшими весами.
- Дисперсией случайной величины ξ называется число

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 \qquad (4)$$

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

2). Непрерывные случайные величины

- Случайная величина ξ является непрерывной, если она может принимать любое значение из некоторого интервала (a, b).

- Непрерывная случайная величина ξ определяется заданием интервала (a, b), содержащего возможные значения этой величины, и функции p(x), которая называется плотностью вероятностей случайной величины ξ (или плотностью распределения ξ).

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

Физический смысл p(x) следующий.

Пусть (a',b') - произвольный интервал, содержащийся в (a,b). Тогда вероятность того, что ξ окажется в интервале (a',b'), равна:

$$P\{a' < \xi < b') = \int_{a'}^{b'} p(x)dx \tag{5}$$

или:

$$p(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \in \Delta x)}{\Delta x} \tag{6}$$

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

Множество значений ξ может быть любым интервалом. При этом функция плотности вероятности p(x), также как и для дискретных случайных величин, должна удовлетворять следующим условиям:

1) $p(x)>0;$ (7)

2) $$\int_a^b p(x)dx=1$$

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

- Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется число

$$M\xi = \int_a^b xp(x)dx \qquad (8)$$

- Определение дисперсии также аналогично случаю дискретных величин.

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

- Пусть случайная величина ξ имеет плотность вероятностей p(x). Выберем произвольную непрерывную функцию f(x) и рассмотрим случайную величину y=f(ξ). Можно доказать, что

$$Mf(\xi)=\int_a^b f(x)p(x)dx \tag{9}$$

- Для любой непрерывной случайной величины ξ при каждом x имеем: $P(\xi = x) = 0$.

<u>Т.е., физический смысл имеет не вероятность попадания ξ в заданную точку x, а вероятность попадания в сколь угодно малый интервал около x.</u>

4.2. **Обзор некоторых понятий из теории вероятностей**

3). Равномерно распределенные случайные величины

- Случайная величина γ, определенная в интервале (0,1) и имеющая плотность вероятностей p(x)=1, называется <u>равномерно распределенной</u> в (0,1).

Т.е. какой бы интервал (a',b') внутри (0,1) мы ни взяли, вероятность того, что γ попадет в (a',b'), равна

$$\int_{a'}^{b'} p(x)dx = b' - a' \quad , \qquad (10)$$

т.е. длине этого интервала.

4.2. **Обзор некоторых понятий из теории вероятностей**

4). Нормальные случайные величины

● Нормальной (или гауссовской) случайной величиной называется случайная величина ξ, определенная на всей оси (-∞, ∞) и имеющая плотность вероятностей:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right) \qquad (11)$$

где a и σ>0 – числовые параметры.

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

- Параметр *a* не влияет на форму кривой p(x): изменение его приводит лишь к сдвигу кривой вдоль оси x. Однако при изменении σ форма кривой меняется.

- Можно доказать, что $M\xi = a$ и $D\xi = \sigma^2$.

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

- Любые вероятности вида $P(x' < \xi < x'')$ легко вычисляются с помощью таблицы, в которой приведены значения интеграла вероятностей:

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) dx \qquad (12)$$

Тогда $$P(x' < \xi < x'') = 0{,}5\left[F(t_2) - F(t_1)\right], \qquad (13)$$

где сделана замена $x - a = \sigma t$

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

● **Правило «трех сигм».**

Пусть $x' = a - 3\sigma$, $x'' = a + 3\sigma$,

Тогда t_1=-3, t_2=3. Следовательно,

$$P(a - 3\sigma < \xi < a + 3\sigma) = F(3) = 0{,}997 \qquad (14)$$

Т.е. при одном испытании практически невозможно получить значение ξ, отличающееся от M ξ больше, чем на 3σ

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

5). Центральная предельная теорема теории вероятностей

Рассмотрим N одинаковых независимых случайных величин ξ_1, ξ_2,.. ξ_N, так что распределения вероятностей этих величин совпадают.

Следовательно, их математические ожидания и дисперсии также совпадают (предполагается, что они конечны). Величины эти могут быть как непрерывными, так и дискретными.

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

Обозначим

$$M\xi_1 = M\xi_2 = ... = M\xi_N = m, \qquad D\xi_1 = D\xi_2 = ... = D\xi_N = b^2$$

Сумму этих величин обозначим через

$$\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_N \tag{17}$$

Из свойств математического ожидания и дисперсии следует, что

$$M\rho_N = M(\xi_1 + \xi_2 + .. + \xi_N) = Nm \tag{18}$$

$$D\rho_N = D(\xi_1 + \xi_2 + .. + \xi_N) = Nb^2$$

4.2. Обзор некоторых понятий из теории вероятностей

Рассмотрим теперь нормальную случайную величину ζ_N с такими же параметрами:

$$a=Nm, \qquad \sigma = b\sqrt{N} \quad .$$

В центральной предельной теореме утверждается, что для любого интервала при больших N:

$$P(a' < \rho_N < b') \approx \int p_{\zeta_N}(x)dx \qquad (19)$$

Сумма большого числа одинаковых случайных величин приближенно нормальна.