Модуль 3. Математическое моделирование процессов в плазме (часть 1)

1. Классификация теоретических моделей плазмы.
2. Кинетические модели плазмы.
3. Модель бесстолкновительной плазмы.

3.1. О теоретических моделях плазмы

Основные особенности плазменных процессов:

- силы взаимодействия между частицами – кулоновские;
- плазма погружена в электромагнитное поле;
- коллективные явления (взаимодействие с колебаниями и колебаний) играют важную роль.

Принцип классификации моделей плазмы основывается на выборе пространственных и временных масштабов, в которых наиболее целесообразно рассматривать те или иные плазменные явления

3.2. Кинетические модели плазмы

- Описание плазмы с помощью кинетических уравнений хорошо обосновано для плазм достаточно разреженных, слабо отклоняющихся от идеальности.

Идеальная плазма: энергия кулоновского взаимодействия во много раз меньше энергии кинетического (теплового) движения частиц:

$$T >> \frac{e^2}{< r >} \sim e^2 n^{1/3}$$

3.2. Кинетические модели плазмы

Пусть $f_{e,i}(\vec{r},\vec{v},t)$ - функции распределения электронов (e) и ионов (i), определяющие плотность частиц (количество частиц в единице объема фазового пространства) вблизи точки $\vec{r}$ с геометрическими $\vec{v}$ координатами и скоростями

3.2. Кинетические модели плазмы

● Кинетическое приближение для описания полностью ионизованной плазмы (в гауссовой системе единиц):

$$\frac{\partial f_{e,i}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_{e,i}}{\partial \vec{r}} \mp e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\left[\vec{v}\vec{H}\right]\right)\frac{\partial f_{e,i}}{\partial \vec{v}} = S_{e,i} \qquad (1)$$

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad (3)$$

3.2. Кинетические модели плазмы

- Кинетическое приближение для описания полностью ионизованной плазмы (продолжение):

$$div\vec{E} = 4\pi\rho_e \qquad (4)$$

$$div\vec{H} = 0 \qquad (5)$$

$$\rho_e = e\int(f_i - f_e)d\vec{v} \qquad (6)$$

$$\vec{j} = e\int\vec{v}(f_i - f_e)d\vec{v} \qquad (7)$$

3.2. Кинетические модели плазмы

- Определение макроскопических характеристик плазмы через функции распределения электронов и ионов:

- число электронов или ионов в единице объема в окрестности точки $\vec{r}$:

$$n_{e,i}(\vec{r},t)=\int f_{e,i}(\vec{r},\vec{v},t)d\vec{v} \tag{8}$$

- макроскопическая (упорядоченная) скорость электронной либо ионной компоненты плазмы:

$$\vec{u}_{e,i}(\vec{r},t)=\frac{1}{n_a}\int f_{e,i}(\vec{r},\vec{v},t)\vec{v}d\vec{v} \tag{9}$$

3.2. Кинетические модели плазмы

● Определение макроскопических характеристик плазмы через функции распределения электронов и ионов (продолжение):

- температура электронной либо ионной компоненты плазмы:

$$T_{e,i}(\vec{r},t)=\frac{m_{e,i}}{3n_{e,i}}\int f_{e,i}(\vec{r},\vec{v},t)(\vec{v}-\vec{u}_{e,i})^2 d\vec{v} \qquad (10)$$

В (8)-(10) интегрирование производится по всем скоростям

3.2. Кинетические модели плазмы

На заряженные частицы плазмы действуют поля двух типов:

– регулярные поля, создаваемые внешними источниками или избыточными объемными зарядами;
– случайные микрополя отдельных заряженных частиц, вызывающие процессы рассеяния или столкновения.

В приближении кинетического уравнения случайные поля отдельных частиц усредняются.

В итоге рассматриваются средние значения напряженностей электрического и магнитного полей.

3.2. Кинетические модели плазмы

Согласно кинетическим уравнениям, функции распределения изменяются под действием электрического и магнитного полей, которые, в свою очередь, определяются из уравнений Максвелла, содержащих моменты функций распределения (плотность пространственного заряда и плотность тока).

Поэтому электромагнитное поле в этой модели плазмы называют самосогласованным.

3.2. Кинетические модели плазмы

● Рассеяние «ионы-ионы», «электроны-электроны», «ионы-электроны» описывается интегралами столкновений:

$$S_i = S_{i,i}(f_i, f_e) + S_{i,e}(f_i, f_e) \qquad (11)$$

$$S_e = S_{e,i}(f_i, f_e) + S_{e,e}(f_i, f_e) \qquad (12)$$

где $S_{j,k}$ дает изменение в единицу времени функции распределения частиц сорта j в результате столкновений с частицами сорта k.

Вид столкновительных интегралов зависит от характера взаимодействия частиц.

3.3. Кинетическая модель бесстолкновительной плазмы; уравнения Власова

● Разреженная плазма, изучаемая в лабораторных и космических условиях, во многих случаях может рассматриваться как бесстолкновительная.

Пренебречь столкновениями допустимо, когда:

1) эффективная частота соударений ν мала по сравнению с характерной частотой ω изменения электромагнитного поля;

2) длина свободного пробега $l \sim < v > / \nu$ велика по сравнению с характерной длиной волны поля λ.

3.3. Кинетическая модель бесстолкновительной плазмы

- Система уравнений Власова –Максвелла для полностью ионизованной бесстолкновительной плазмы:

$$\frac{\partial f_a}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}+\frac{q_a}{m_a}\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\vec{v}\vec{H}\right]\right)\frac{\partial f_a}{\partial \vec{v}}=0 \qquad (13)$$

$$rot\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}+\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\sum_a q_a\int f_a\vec{v}d\vec{v}+\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (14)$$

3.3. Кинетическая модель бесстолкновительной плазмы

● Система уравнений Власова – Максвелла для полностью ионизованной бесстолкновительной плазмы (продолжение):

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} \qquad (15)$$

$$div\vec{E} = 4\pi\rho_e = 4\pi\sum_a q_a \int f_a d\vec{v} \qquad (16)$$

$$div\vec{H} = 0 \qquad (17)$$

Здесь под индексом a подразумевается сорт частиц: ионы либо электроны.

3.3. Кинетическая модель бесстолкновительной плазмы

- Уравнения Власова широко используются для описания процессов в разреженной плазме, когда характерные временной t и пространственный L масштабы плазмы много меньше времени $\tau_{рел}$ и расстояния $L_{рел}$ релаксации, которые определяются плотностью частиц и их столкновениями.

Диссипативные процессы, обусловленные столкновениями, не рассматриваются