Модуль 2. Численное решение задач с уравнениями параболического типа

1. Постановка задачи в общем виде.
2. Разностные схемы для одномерного линейного параболического уравнения.
3. Схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами.
4. Постановка задачи в криволинейных координатах.

1. Постановка задачи в общем виде

Пример. Смешаная краевая задача распространения тепла путем теплопроводности в сплошной среде:

$$c(\vec{r})\rho(\vec{r})\frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t}=div\lambda\left(\vec{r}\right)gradT(\vec{r},t)+f(\vec{r},t) \quad , \qquad (1)$$

где λ, c, ρ - коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность вещества; $0<t\le t_{кон.}; \quad \vec{r}\in G;$

$T(\vec{r},0)=\mu_1(\vec{r}), \quad (\vec{r}\in G)$ - начальные условия;

$T(G,t) = \mu_2(t)$ – граничные условия первого рода (G – граница области, в которой производится расчет).

1. Постановка задачи в общем виде

В одномерном по пространственным координатам варианте и в однородной среде задача линейной теплопроводности имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (2а)$$

a=const >0 – коэффициент температуропроводности ($a = \lambda/(c\rho)$);

T(x,0) = μ_1(x), $0 \le x \le b$ – граничные условия (первого рода); (2б)

T(0,t) = μ_2(t), $0 < t \le t_{кон.}$ – начальные условия,

f(x,t) – функция энерговыделения от внешних источников («поставщик» тепловой энергии извне).

2. Разностные схемы для одномерного параболического уравнения

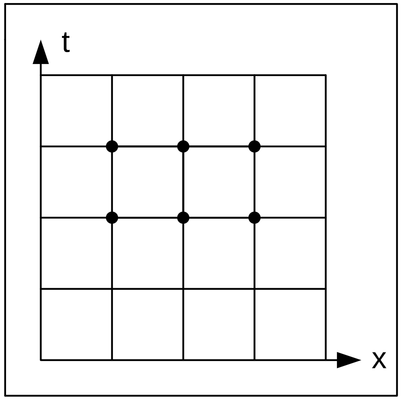


Рис.1

- Возьмем в области

$G \in [0 \le x \le b] \times [0 \le t \le t_{кон.}]$ прямоугольную равномерную сетку с шагом h по пространственной координате и τ - по времени.

Составим на шаблоне с рис. 1 следующую двуслойную схему:

$1 \le n \le N-1$; σ=const.

$$\frac{1}{\tau}(\hat{y}_n - y_n) = \frac{a\sigma}{h^2}(\hat{y}_{n-1} - 2\hat{y}_n + \hat{y}_{n+1}) + \\ + \frac{a(1-\sigma)}{h^2}\cdot(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + \varphi_n \qquad (3)$$

$\hat{y}$ - значения искомой функции в узлах сетки на шаге по времени m+1 (верхний слой), а y – значения искомой функции в узлах сетки на шаге m (нижний слой).

2. Разностные схемы для одномерного параболического уравнения

- Уравнение (3) «работает» для внутренних точек расчетной области по пространственной координате.

Для граничных точек используются граничные условия:

$$\hat{y}_0 = \mu_1(t_{m+1}), \quad \hat{y}_N = \mu_2(t_{m+1}) \tag{3б}$$

(Здесь для примера задали граничное условие первого рода).

В качестве φ_n часто выбирают значение $\varphi_n = f(x_n, t_{m+\frac{1}{2}})$.

2. Разностные схемы для одномерного параболического уравнения

- Схема (3) содержит параметр σ - весовой множитель с верхнего слоя.

  Меняя вес σ, можно добиться улучшения тех или иных свойств схемы.

- При $\sigma=1$ схема (3) использует только четыре точки шаблона (три точки на новом шаге по времени (верхнем слое) и одну точку – на старом). Она называется чисто <u>неявной.</u>
- При $\sigma=1/2$ схему называют схемой с полусуммой или <u>симметричной по времени</u>.
- При $\sigma=0$ схема также использует только 4 точки шаблона. Но только одна из них на новом шаге (верхнем слое) по времени, а три берутся со старого шага по времени. Эта схема является чисто <u>явной</u>.

2. Разностные схемы для одномерного параболического уравнения

- Схема (3) устойчива по правой части, если выполнено условие равномерной устойчивости по начальным данным:

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4a\tau} \qquad (4)$$

2. Разностные схемы для одномерного параболического уравнения

- Чисто неявная и симметричная схемы – безусловно устойчивы, так как условие (4) выполняется при любом соотношении между h и τ.

- Явная схема является условно устойчивой. Так как условие (4) выполняется только при

$$\tau \le \frac{h^2}{2a} \qquad (5)$$

3. Схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

Обобщим схему (3) на уравнение теплопроводности с переменными коэффициентами:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)\frac{\partial T}{dx}] + f(x,t) \quad , \qquad (6)$$

где a(x,t) и f(x,t) - кусочно-непрерывные функции.

В точках разрыва коэффициентов решение T(x,t) будет иметь особенности, т.е. оно будет обобщенным и не единственным.

3. Схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

Заменим уравнение (6) системой:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} + f \quad , \qquad Q = -a\frac{\partial T}{\partial x} \quad . \tag{7}$$

Выберем шаблон и связанную с ним ячейку в виде на рис. 2.

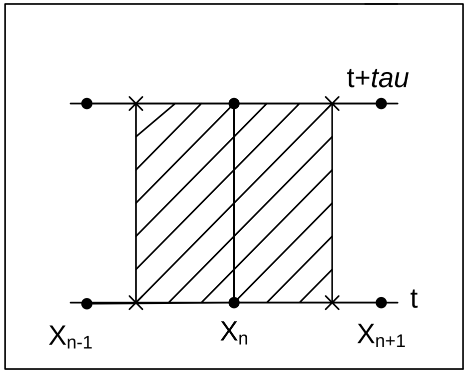


Рис. 2

Предполагается, что разрывы в коэффициенте температуропроводности *a* находятся в междоузлии [x_n, x_{n+1}].

3. Схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

Запишем первое уравнение в (7) в виде закона сохранения энергии для этой ячейки (интегрируем по t и по x):

$$\int_{X_{n-\frac{1}{2}}}^{X_{n+\frac{1}{2}}} (\hat{T} - T)dx = \int_{t}^{t+\tau} (Q_{n-\frac{1}{2}} - Q_{n+\frac{1}{2}})dt + \int_{t}^{t+\tau} \int_{X_{n-\frac{1}{2}}}^{X_{n+\frac{1}{2}}} f(x,t)dxdt \quad . \qquad (8)$$

Второе уравнение (7) интегрируем по интервалу сетки:

$$T_{n+1} - T_n = -\int_{X_n}^{X_{n+1}} \frac{Q}{a(x,t)} dx \quad . \qquad (9)$$

3. Схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

После численного интегрирования (8) и (9) по простым квадратурным формулам и некоторых несложных преобразований получим консервативную разностную схему, называемую наилучшей:

$$\frac{1}{\tau}(\hat{T}_n - T_n) = \frac{\sigma}{\hbar_n}(\hat{Q}_{n-\frac{1}{2}} - \hat{Q}_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1-\sigma}{\hbar_n}(Q_{n-\frac{1}{2}} - Q_{n+\frac{1}{2}}) + \varphi_n, \qquad (10)$$

$$Q_{n+\frac{1}{2}} = \overline{\chi}_{n+\frac{1}{2}} \frac{T_n - T_{n+1}}{h_n}; \qquad \hat{Q}_{n+\frac{1}{2}} = \overline{\chi}_{n+\frac{1}{2}} \frac{\hat{T}_n - \hat{T}_{n+1}}{h_n}.$$

3. Схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

В формулах (10) введены следующие величины:

$$h_n = x_{n+1} - x_n; \quad \hbar_n = \frac{1}{2}(h_{n-1} + h_n) = x_{n+\frac{1}{2}} - x_{n-\frac{1}{2}};$$

$$\bar{\chi}_{n+\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{h_n} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dx}{a(x,t)} \right]^{-1}, \quad \bar{t} = t + \tau/2 \tag{11}$$

$$\varphi_n = \frac{1}{\tau \hbar_n} \int_t^{t+\tau} dt \int_{x_{n-\frac{1}{2}}}^{x_{n+\frac{1}{2}}} dx f(x,t)$$

3. Схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

Если a(x,t) и f(x,t) непрерывны всюду, за исключением междоузлий и узлов соответственно, то можно воспользоваться одной из следующих формул:

$$\bar{\chi}_{n+\frac{1}{2}} \approx \bar{a}_{n+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{2}(\bar{a}_n + \bar{a}_{n+1}) \approx \frac{2\bar{a}_n \bar{a}_{n+1}}{\bar{a}_n + \bar{a}_{n+1}} \approx \sqrt{\bar{a}_n \bar{a}_{n+1}} \quad , \qquad (12)$$

$$\varphi_n \approx \frac{x_n - x_{n-\frac{1}{2}}}{\hbar_n} \bar{f}_{n-\frac{1}{2}} + \frac{x_{n+\frac{1}{2}} - x_n}{\hbar_n} \bar{f}_{n+\frac{1}{2}} \quad ,$$

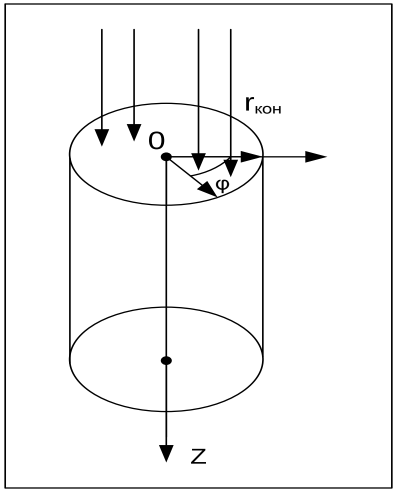
где черта означает, что величина отнесена к моменту времени $\bar{t}$.

3. Схема для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами

Условием устойчивости схемы (10) является следующее соотношение:

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4\tau}\min\left(\frac{h^2}{\chi}\right) \quad . \tag{13}$$

4. Постановка задачи в криволинейных координатах



В цилиндрических координатах при наличии симметрии по полярному углу φ параболическое уравнение с постоянными коэффициентами будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial t} = a \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial r} + a \cdot \left(\frac{\partial^2 T(r,z,t)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 T(r,z,t)}{\partial z^2} \right) + f(r,z,t) \quad (14)$$