

1. Численные методы решения уравнений

1. Системы линейных уравнений.

1.1. Прямые методы.

1.2. Итерационные методы.

2. Нелинейные уравнения.

2.1. Уравнения с одним неизвестным.

2.2. Системы уравнений.

1. Системы линейных уравнений.

Методы решения систем линейных уравнений делятся на две группы:

- прямые,
- итерационные.

1. Системы линейных уравнений.

Прямые методы используют конечные соотношения (формулы) для вычисления неизвестных.

Они дают решение после выполнения заранее известного числа операций.

Они сравнительно просты и наиболее универсальны (т.е. пригодны для решения широкого класса линейных систем).

1. Системы линейных уравнений.

Недостатки прямых методов:

- необходимость хранения в оперативной памяти компьютера сразу всей матрицы (при большой размерности матрицы требуется большого места в памяти);
- накапливание погрешностей в процессе решения; это особенно опасно для больших систем, а также для плохо обусловленных систем, весьма чувствительных к погрешностям (в связи с этим прямые методы используют обычно для не слишком больших ($n \leq 1000$) систем с плотно заполненной матрицей и не близким к нулю определителем).

1. Системы линейных уравнений.

Итерационные методы – это методы последовательных приближений.

В них необходимо задать некоторое приближённое решение – начальное приближение. После этого с помощью некоторого алгоритма проводится один цикл вычислений, называемый итерацией.

В результате итерации находят новое приближение.

Итерации проводятся до получения решения с требуемой точностью.

1. Системы линейных уравнений.

Преимущества итерационных методов:

- требуют хранения в памяти машины не всей матрицы системы, а лишь нескольких векторов с n компонентами;
- Погрешности окончательных результатов при использовании итерационных методов не накапливаются, поскольку точность вычислений в каждой итерации определяется результатами предыдущей итерации и практически не зависит от ранее выполненных вычислений.

1.1. Прямые методы: метод Гаусса

Основан на приведении матрицы системы к треугольному виду.

Это достигается последовательным исключением неизвестных из уравнения системы.

1.1. Прямые методы: метод Гаусса.

Прямой ход:

- с помощью первого уравнения исключается x_1 из всех последующих уравнений системы;
- с помощью второго уравнения исключается x_2 из третьего и всех последующих уравнений, преобразованных на предыдущем шаге.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока в левой части последнего (n -го) уравнения не останется лишь один член с неизвестным x_n , т.е. матрица системы будет приведена к треугольному виду.

1.1. Прямые методы: метод Гаусса.

Обратный ход - последовательное вычисление искомым неизвестных:

- решая последнее уравнение, находим единственное в этом уравнении неизвестное x_n ;
- используя это значение, из предыдущего уравнения вычисляем x_{n-1} и т.д. ;
- последним найдём x_1 из первого уравнения.

1.1. Прямые методы: метод Гаусса.

Пример.

Пусть дана система из трёх линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \tag{1}$$

1.1. Прямые методы: метод Гаусса.

Для исключения x_1 из второго уравнения прибавим к нему первое, умноженное на $(-a_{21}/a_{11})$.

Затем, умножив первое уравнение на $(-a_{31}/a_{11})$ и прибавив результат к третьему уравнению, также исключим из него x_1 .

Получим равносильную систему уравнений вида

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= b'_3; \end{aligned} \tag{2}$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}} a_{1j}, \quad i, j = 2, 3$$

$$b'_i = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} b_1, \quad i = 2, 3.$$

1.1. Прямые методы: метод Гаусса.

Из третьего уравнения в (2) следует исключить x_2 .

Для этого умножим второе уравнение на $(-a'_{32} / a'_{22})$ и прибавим результат к третьему. Получим:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2, \\ a''_{33}x_3 &= b''_3; \end{aligned} \tag{4}$$
$$a''_{33} = a'_{33} - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} a'_{23},$$
$$b''_{33} = b'_3 - \frac{a'_{32}}{a'_{22}} b'_3.$$

Матрица системы (4) имеет треугольный вид.

1.1. Прямые методы: метод Гаусса.

В процессе исключения неизвестных приходится выполнять операции деления на коэффициенты a_{11} , и т.д.

Поэтому они должны быть отличны от нуля.

В противном случае необходимо соответственным образом переставить уравнения системы.

Перестановка уравнений должна быть предусмотрена в вычислительном алгоритме при его реализации на компьютере.

1.1. Прямые методы: метод Гаусса.

Обратный ход начинается с решения третьего уравнения системы (4):

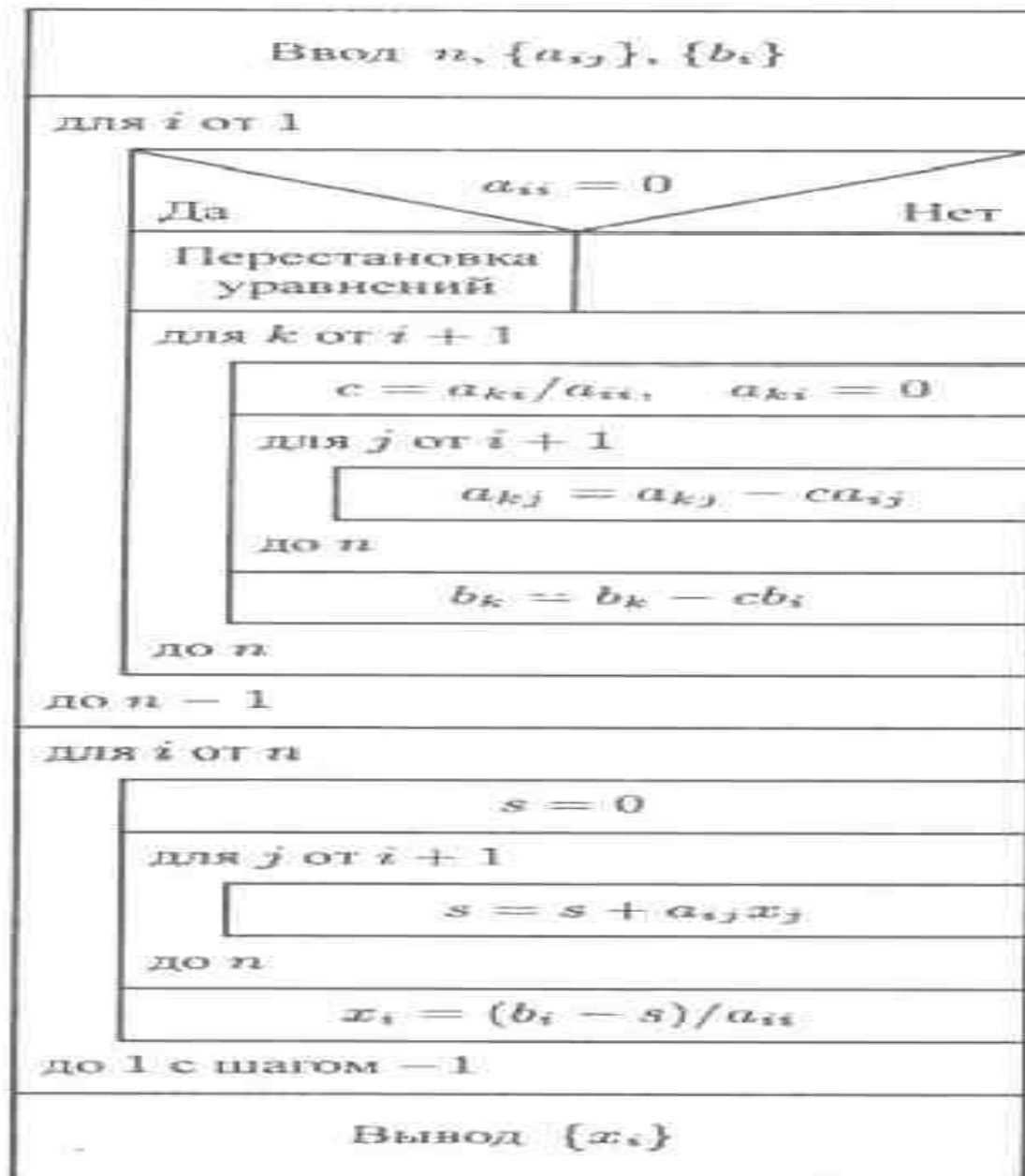
$$x_3 = b''_{33} / a''_{33}$$

Используя это значение, можно найти x_2 из второго уравнения, а затем x_1 из первого:

$$x_2 = \frac{1}{a'_{22}} (b'_2 - a'_{23}x_3),$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

1.1. Прямые методы: метод Гаусса.



1.1. Прямые методы: метод Гаусса.

Одной из модификаций метода Гаусса является схема с выбором главного элемента.

Она состоит в том, что требование неравенства нулю диагональных элементов a_{ii} , на которые происходит деление в процессе исключений, заменяется более жёстким: из всех оставшихся в i -ом столбце элементов нужно выбрать наибольший по модулю и переставить уравнения так, чтобы этот элемент оказался на месте элемента a_{ii} .

Об оценке погрешности решения

Существуют две величины, характеризующие степень отклонения полученного решения от точного:

- погрешность Δx , равная разности этих значений:

$$\Delta x = x - x^* ;$$

- невязка r , равная разности между левой и правой частями уравнений при подстановке в них полученного решения:

$$r = Ax^* - b .$$

1.2. Прямые методы: метод прогонки.

Этот метод является модификацией метода Гаусса для частного случая разрежённых систем – системы уравнений с трёхдиагональной матрицей:

$$\begin{aligned} b_1 x_1 + c_1 x_2 &= d_1, \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= d_2, \\ a_3 x_2 + b_3 x_3 + c_3 x_4 &= d_3, \end{aligned} \quad (7)$$

.....

$$\begin{aligned} a_{n-1} x_{n-2} + b_{n-1} x_{n-1} + c_{n-1} x_n &= d_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n &= d_n. \end{aligned}$$

1.2. Прямые методы: метод прогонки.

- Метод прогонки состоит из двух этапов – прямой прогонки (аналога прямого хода метода Гаусса) и обратной прогонки (аналога обратного хода метода Гаусса).
- Прямая прогонка состоит в вычислении прогоночных коэффициентов A_i и B_i , с помощью которых каждое неизвестное x_i выражается через x_{i+1} :

$$x_i = A_i x_{i+1} + B_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

1.2. Прямые методы: метод прогонки.

Из первого уравнения системы (7) имеем:

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1}.$$

С другой стороны, по формуле (8): $x_1 = A_1 x_2 + B_1$.

Приравнивая коэффициенты в обоих выражениях для x_1 , получаем:

$$A_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad B_1 = \frac{d_1}{b_1}.$$

1.2. Прямые методы: метод прогонки.

Подставим во второе уравнение системы (7) вместо x_1 его выражение через x_2 по формуле (8):

$$a_2(A_1x_2 + B_1) + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$$

Выразим отсюда x_2 через x_3 : $x_2 = \frac{-c_2x_3 + d_2 - a_2B_1}{a_2A_1 + b_2}$.

Или $x_2 = A_2x_3 + B_2$,

$$A_2 = -\frac{c_2}{e_2}, \quad B_2 = \frac{d_2 - a_2B_1}{e_2}, \quad e_2 = a_2A_1 + b_2$$

Аналогично вычисляются прогоночные коэффициенты для любого номера i :

$$A_i = -\frac{c_i}{e_i}, \quad B_i = \frac{d_i - a_iB_{i-1}}{e_i}, \quad e_i = a_iA_{i-1} + b_i, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \quad (12)$$

1.2. Прямые методы: метод прогонки.

Обратная прогонка состоит в последовательном вычислении неизвестных x_i .

Сначала нужно найти x_n .

Для этого воспользуемся выражением (8) при $i=n-1$ и последним уравнением системы (7).

Запишем их:

$$\begin{aligned}x_{n-1} &= A_{n-1}x_n + B_{n-1}, \\ a_n x_{n-1} + b_n x_n &= d_n.\end{aligned}$$

Отсюда, исключая x_{n-1} , находим:

$$x_n = \frac{d_n - a_n B_{n-1}}{b_n + a_n A_{n-1}}.$$

Далее, используя формулы (8) и ранее вычисленные прогоночные коэффициенты, последовательно вычисляем все неизвестные $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$.

1.2. Итерационные методы

Суть итерационных методов

1. Вводятся исходные данные:

- коэффициенты уравнений,
- допустимое значение погрешности ε ,
- начальные приближения значений неизвестных (вектор – столбец $X^{(0)}$).

2. Организуется циклический вычислительный процесс, каждый цикл которого представляет собой одну итерацию – переход от предыдущего приближения $X^{(k-1)}$ к последующему $X^{(k)}$.

1.2. Итерационные методы

3. Если оказывается, что с увеличением числа итераций приближённое решение стремится к точному:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = X,$$

то итерационный метод называется сходящимся.

1.2. Итерационные методы

На практике наличие сходимости и достижение требуемой точности обычно определяют приближённо:

при малом (с заданной допустимой погрешностью) изменении X на двух последовательных итерациях, т.е. при малом отличии $X^{(k)}$ от $X^{(k-1)}$, процесс прекращается, и происходит вывод значений неизвестных, полученных на последней итерации.

1.2. Итерационные методы

Примеры критериев окончания итерационного процесса:

$$\left| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)})^2} < \varepsilon$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}}{x_i^{(k)}} \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \left| x_i \right| \gg 1$$

1.2. Итерационные методы

Если система не является плохо обусловленной, то в качестве критерия окончания итерационного процесса можно использовать условие малости невязки:

$$\left| r^{(k)} \right| < \varepsilon$$

Метод простых итераций

Запишем исходную систему уравнений в векторно-матричном виде и выполним ряд тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} Ax &= b; & 0 &= b - Ax; & x &= b - Ax + x; \\ x &= (b - Ax)\tau + x; & x &= (E - \tau A)x + \tau b; & & \\ & & x &= Bx + \tau b, & & \end{aligned} \quad (18)$$

где $\tau \neq 0$ - некоторое число, E – единичная матрица,
 $B = E - \tau A$.

Полученная система (18) эквивалентна исходной системе и служит основой для построения метода простой итерации.

Метод простых итераций

Выберем некоторое начальное приближение $x^{(0)}$ и поставим его в правую часть системы (18):

$$x^{(1)} = Bx^{(0)} + \tau b$$

Поскольку $x^{(0)}$ не является решением системы, в левой части (18) получится некоторый столбец $x^{(1)}$, в общем случае отличный от $x^{(0)}$.

Полученный столбец $x^{(1)}$ будем рассматривать в качестве следующего (первого) приближения к решению.

Метод простых итераций

По известному k -му приближению можно найти $(k+1)$ -е приближение:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + \tau b \quad (19)$$

Формула (19) выражает собой метод простой итерации. Для её применения нужно задать неопределённый параметр τ .

От значения τ зависит, будет ли сходиться метод, а если будет, то какова скорость сходимости, т.е. как много итераций нужно совершить для достижения требуемой точности.

Метод простых итераций

Теорема. Пусть $\det A \neq 0$.

Метод простой итерации (19) сходится тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы $B=A-\tau E$ по модулю меньше единицы.

Для некоторых типов матрицы A можно указать правило выбора τ , обеспечивающее сходимость метода и оптимальную скорость сходимости.

В простейшем случае τ можно положить равным некоторому постоянному числу, например, 1, 0,1 и т.д.

Метод Гаусса – Зейделя

Проиллюстрируем этот метод на примере решения системы:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \tag{20}$$

Предположим, что диагональные элементы отличны от нуля (в противном случае можно переставить уравнения).

Метод Гаусса – Зейделя

Выразим неизвестные x_1 , x_2 , x_3 соответственно из первого, второго и третьего уравнений системы (20):

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3), \\x_2 &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3), \\x_3 &= \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{32}x_2 - a_{31}x_1).\end{aligned}\tag{21}$$

Метод Гаусса – Зейделя

Зададим некоторые начальные (нулевые) приближения значений неизвестных:

$$x_1 = x_1^{(0)}, \quad x_2 = x_2^{(0)}, \quad x_3 = x_3^{(0)}.$$

Подставляя эти значения в правую часть первого уравнения системы (21), получаем новое (первое) приближение для x_1 :

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)})$$

Метод Гаусса – Зейделя

Используя это значение для x_1 и приближение для x_3 , находим из второго уравнения системы (21) первое приближение для x_2 :

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(1)} - a_{23}x_3^{(0)})$$

И наконец, используя вычисленные значения $x_1 = x_1^{(1)}$, $x_2 = x_2^{(2)}$, находим с помощью третьего уравнения системы (21) первое приближение для x_3 :

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{31}x_1^{(1)} - a_{32}x_2^{(1)})$$

Метод Гаусса – Зейделя

Используя значения $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, можно таким же способом провести вторую итерацию, в результате которой будут найдены вторые приближения к решению:

$$x_1 = x_1^{(2)}, \quad x_2 = x_2^{(2)}, \quad x_3 = x_3^{(3)}.$$

и т.д.

Метод Гаусса – Зейделя

Приближение с номером k можно вычислить, зная приближение с номером $k-1$, как:

$$x_1^k = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{k-1} - a_{13}x_3^{k-1}),$$

$$x_2^k = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^k - a_{23}x_3^{k-1}),$$

$$x_3^k = \frac{1}{a_{33}} (b_3 - a_{32}x_2^k - a_{31}x_1^k).$$

Метод Гаусса – Зейделя

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}$$

не станут близкими с заданной погрешностью к значениям

$$x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)} \quad .$$

В качестве первого приближения обычно принимают нулевые значения, т.е.

$$x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0$$

Метод Гаусса – Зейделя

Рассмотрим теперь общий случай для системы из n уравнений.

Запишем её в виде:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{i,n}x_n = b_i \quad ,$$

$$i=1,2,\dots,n.$$

Здесь также будем предполагать, что все диагональные элементы отличны от нуля.

Метод Гаусса – Зейделя

Тогда в соответствии с методом Гаусса-Зейделя k -е приближение к решению можно представить в виде:

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}} (b_{ii} - a_{i1}x_1^k - \dots - a_{i,i-1}x_{i-1}^k - a_{i,i+1}x_{i+1}^{k-1} - \dots - a_{i,n}x_n^{k-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока все значения $x_i^{(k)}$ не станут близкими к $x_i^{(k-1)}$.

Метод Гаусса – Зейделя

Для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы были не меньше сумм модулей всех остальных коэффициентов (преобладание диагональных элементов):

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

При этом хотя бы для одного уравнения неравенство (25) должно выполняться строго.

Нелинейные уравнения

Методы решения:

- прямые,
- итерационные.

Прямые методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы).

Нелинейные уравнения

Итерационные методы - методы последовательных приближений.

Этап 1: отыскивается приближённый корень (начальное приближение в виде значения или отрезка).

Этап 2: приближённое значение корня уточняется до некоторой заданной степени точности).

Нелинейные уравнения

Способы нахождения начальных приближений для итерационных методов:

- из физических соображений;
- из решения аналогичной задачи при других исходных данных;
- с помощью графических методов;
- находят две близко расположенные точки a и b , в которых непрерывная функция $F(x)$ принимает значения разных знаков, т.е. $F(a)F(b) < 0$. В этом случае между точками a и b есть по крайней мере одна точка, в которой $F(x) = 0$.

Метод деления отрезка пополам (метод бисекции, метод дихотомии).

Пусть дано нелинейное уравнение $F(x)=0$,
где $F(x)$ – непрерывная функция на некотором отрезке.

Начальное приближение. Находят отрезок $[a,b]$, на котором расположено искомое значение корня $x=c$.

В качестве начального приближения корня c_0 принимаем середину отрезка $[a,b]$:

$$c_0 = (a + b) / 2$$

Метод деления отрезка пополам (метод бисекции, метод дихотомии).

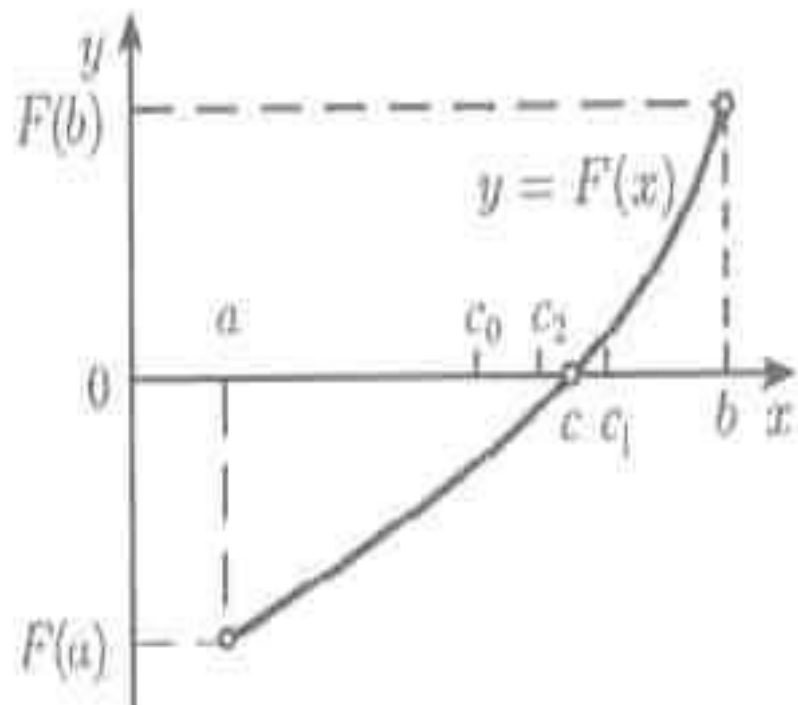
Итерационный цикл.

Исследуют значения функции $F(x)$ на концах отрезков $[a, c_0]$ и $[c_0, b]$.

Тот из отрезков, на концах которого $F(x)$ принимает значения разных знаков, содержит искомый корень; поэтому его принимаем в качестве нового отрезка $[a_1, b_1]$.

Вторую половину отрезка $[a, b]$, на которой знак $F(x)$ не меняется, отбрасывают.

Метод деления отрезка пополам (метод бисекции, метод дихотомии).



В качестве первого приближения корня принимаем середину нового отрезка и т.д. Таким образом, k -е приближение вычисляется как:

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2} \quad (26)$$

После каждой итерации отрезок, на котором расположен корень, уменьшается вдвое, а после k итераций он сокращается в 2^k раз.

Метод деления отрезка пополам (метод бисекции, метод дихотомии).

Критерий 1 окончания итераций.

Пусть приближённое значение x^* требуется найти с точностью до некоторого заданного малого числа $\varepsilon > 0$:

$$|x - x^*| < \varepsilon \quad (28)$$

Взяв в качестве приближённого решения k -е приближение корня: $x^* = c_k$, запишем (28) с учётом обозначения $x = c$ в виде:

$$|c - c_k| < \varepsilon \quad (29)$$

Метод деления отрезка пополам (метод бисекции, метод дихотомии).

Из (26) следует, что неравенство (29) выполняется, если

$$|b_k - a_k| < 2\varepsilon \quad (30)$$

Таким образом, итерационный процесс нужно продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие (30).

**Метод деления отрезка пополам (метод бисекции,
метод дихотомии).**

Критерий 2 окончания итераций:

условие малости невязки,

т.е. итерационный процесс можно завершить и тогда, когда значение функции $F(x)$ после k -той итерации станет по модулю меньшим ε :

$$|F(c_k)| < \varepsilon$$

Метод деления отрезка пополам (метод бисекции, метод дихотомии).

Здесь мы предполагаем, что $x=c$ — единственный корень на отрезке $[a,b]$.

Если корней на $[a,b]$ несколько, то в результате применения метода деления отрезка пополам будет найдено приближённое значение одного корня.

Метод деления отрезка пополам всегда сходится, причём можно гарантировать, что полученное решение будет иметь любую наперёд заданную точность.

Метод Ньютона (метод касательных)

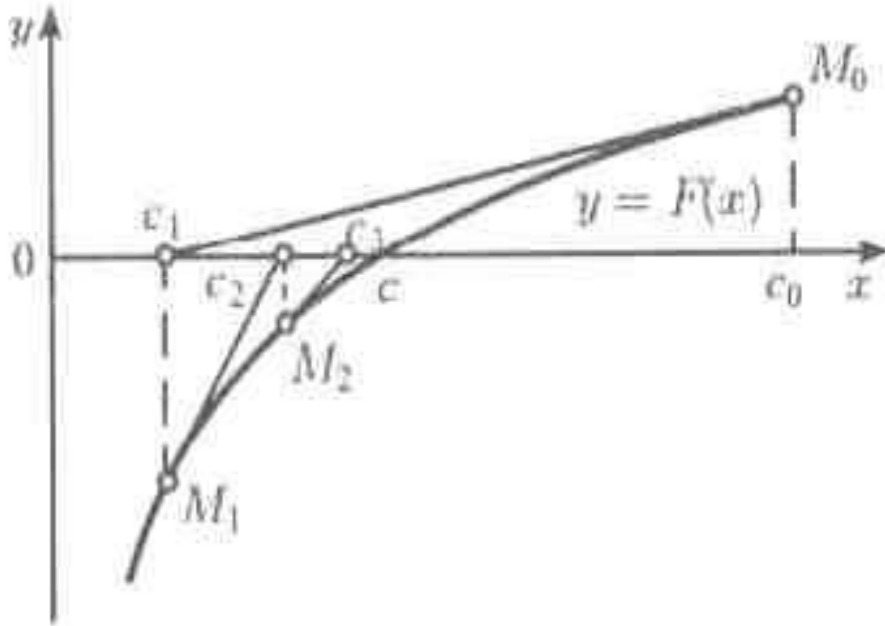
Пусть требуется найти корень уравнения

$$F(x)=0.$$

Пусть c — неизвестный корень этого уравнения.

При этом известно, что первая производная в точке $x=c$ не равна нулю, а непрерывна.

Метод Ньютона (метод касательных)



При этом не обязательно задавать отрезок $[a, b]$, содержащий корень уравнения $F(x)=0$, а достаточно лишь найти некоторое начальное приближение корня $x=c_0$.

Пусть мы получили приближённое значение корня c_{k-1} на $(k-1)$ – ой итерации.

На k -ой итерации проводится касательная к кривой $y=F(x)$ в точке $x=c_{k-1}$ и ищется точка пересечения касательной с осью абсцисс

Метод Ньютона (метод касательных)

Уравнение касательной, проведённой к кривой $y=F(x)$ в точке M_0 с координатами c_0 и $F(c_0)$, имеет вид:

$$y - F(c_0) = F'(c_0)(x - c_0)$$

Отсюда найдём следующее приближение корня c_1 как абсциссу точки пересечения касательной с осью x ($y=0$):

$$c_1 = c_0 - F(c_0) / F'(c_0)$$

Метод Ньютона (метод касательных)

Аналогично могут быть найдены и следующие приближения как точки пересечения с осью абсцисс касательных, проведённых в точках M_1, M_2 и т.д.

Формула для k -го приближения имеет вид:

$$c_k = c_{k-1} - F(c_{k-1}) / F'(c_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом необходимо, чтобы не равнялась нулю.

Метод Ньютона (метод касательных)

Для окончания итерационного процесса могут быть использованы условия:

$$|c_k - c_{k-1}| < \varepsilon \quad \text{или} \quad |F(c_k)| < \varepsilon \cdot$$

Трудность в применении метода Ньютона состоит в выборе начального приближения (при неудачном выборе начального приближения итерации могут расходиться).

Однако скорость сходимости здесь значительно выше, чем в других методах.

Метод Ньютона (метод касательных)

Для предотвращения расходимости иногда целесообразно использовать смешанный алгоритм.

Он состоит в том, что сначала применяется всегда сходящийся метод (например, метод деления отрезка пополам), а после некоторого числа итераций – быстро сходящийся метод Ньютона.

Метод простой итерации

Исходное нелинейное уравнение записывается в виде:

$$x = f(x). \quad (34)$$

Пусть известно начальное приближение корня $x=c_0$.

Подставляя это значение в правую часть уравнения (34), получаем новое приближение

$$c_1 = f(c_0)$$

Метод простой итерации

Подставляя каждый раз новое значение корня в (34), получаем последовательность значений

$$c_k = f(c_{k-1}) \cdot$$

Итерационный процесс прекращается, если результаты двух последовательных итераций близки, т.е. если выполнено неравенство:

$$|c_k - c_{k-1}| < \varepsilon$$

Условие малости невязки на k -ой итерации оказывается эквивалентным условию близости k -го и $k+1$ -го приближений, т.е.

$$r_k = c_k - f(c_k) = c_k - c_{k+1}$$

Метод простой итерации

Достаточное условие сходимости метода простой итерации даётся следующей теоремой:

«Пусть $x=c$ – корень уравнения $x = f(x)$, т.е.

$c = f(c)$, а $|f'(c)| < 1$ и $f'(x)$ непрерывна.

Тогда существует окрестность D корня c такая, что если начальное приближение c_0 принадлежит этой окрестности, то для метода простой итерации последовательность значений $\{c_k\}$ сходится к c при $k \rightarrow \infty$ ».

Метод простой итерации

К виду $x = f(x)$ можно привести и более общее уравнение $F(x) = 0$:

$$F(x) = 0, \quad \tau F(x) = 0, \\ x = x - \tau F(x).$$

Здесь $\tau \neq 0$ - некоторое число.

За счёт выбора параметра τ можно добиваться сходимости метода простой итерации и повышения скорости сходимости.

Метод простой итерации

Например, если на некотором отрезке, содержащем корень уравнения, производная

$F'(x)$ ограничена константами m и M :

$$0 < m < F'(x) < M$$

то для производной $f'(x)$ будет справедливо неравенство

$$1 - \tau M < f'(x) < 1 - \tau m$$

Выбирая $\tau = 2 / (M + m)$, получаем

$$-\frac{M - m}{M + m} < f'(x) < \frac{M - m}{M + m}$$

т.е. $|f'(x)| < 1$, что обеспечивает сходимость метода простой итерации.

2.2. Решение систем нелинейных уравнений

Пусть для вычисления неизвестных x_1, x_2, \dots, x_n требуется решить систему n нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

2.2. Решение систем нелинейных уравнений

В векторной форме эту систему можно записать как:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x})=0,$$

где $\mathbf{F}=\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$, $\mathbf{x}=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Для решения систем нелинейных уравнений обычно используются итерационные методы, например,

- метод простой итерации,
- метод Зейделя,
- метод Ньютона.

2.2. Системы нелинейных уравнений

- **Метод простых итераций.**

Значения неизвестных на k -ой итерации будут найдены с использованием их значений на предыдущей итерации $x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}$ как:

$$x_i^{(k)} = f_i(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

2.2. Системы нелинейных уравнений

- **Метод Зейделя.**

Значение $x_i^{(k)}$ находится из i -го уравнения системы (36) с использованием уже вычисленных на текущей итерации значений неизвестных:

$$x_i^{(k)} = f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}, x_i^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}),$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$