Метод конечных элементов

1. Область применения МКЭ.

2. Основная концепция МКЭ.

3. Преимущества МКЭ.

4. Разбиение расчётной области на конечные элементы.

5. Способ аппроксимации искомой функции в конечном элементе.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ.

1. Область применения МКЭ.

В настоящее время МКЭ получил глубокие теоретические обоснования и применяется для решения весьма широкого круга задач, например:

- стационарные задачи распространения тепла , диффузии, распределения электрического поля, другие задачи теории поля;
- задачи гидромеханики, в частности, течение жидкости в пористой среде;
- задачи механики и прочности, в т.ч. проектирование самолётов, ракет и различных пространственных оболочек;
- и др.

2. Основная концепция МКЭ

Основная идея МКЭ состоит в том, что:

1) любую непрерывную величину (например, температуру, давление, перемещение) можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определённых на конечном числе подобластей (элементов);

2) кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области.

2. Основная концепция МКЭ

При построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом.

1. **В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми (или просто узлами).**

2. Значение непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена.

2. Основная концепция МКЭ

3. Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами (или конечными элементами).

Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.

2. Основная концепция МКЭ

4. Непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе полиномом (или какой-либо другой функцией), который определяется с помощью узловых значений этой величины.

Для каждого элемента определяется свой полином, но полиномы подбираются таким образом, чтобы сохранилась непрерывность величины вдоль границ элемента.

Этот полином называют ещё функцией элемента.

2. Основная концепция МКЭ

Рассмотрим построение дискретной модели на примере одномерной задачи о распределении температуры в стержне.

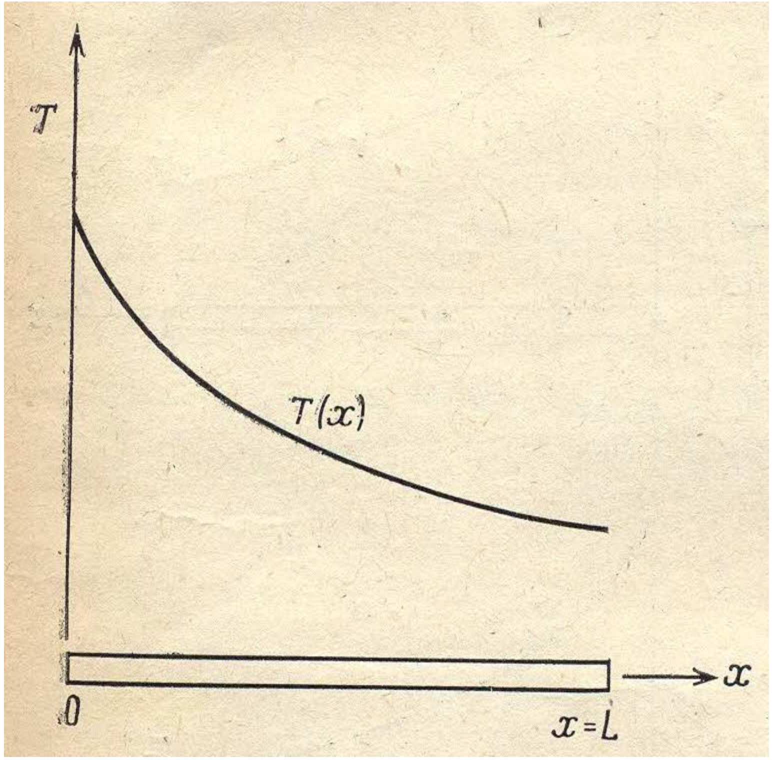
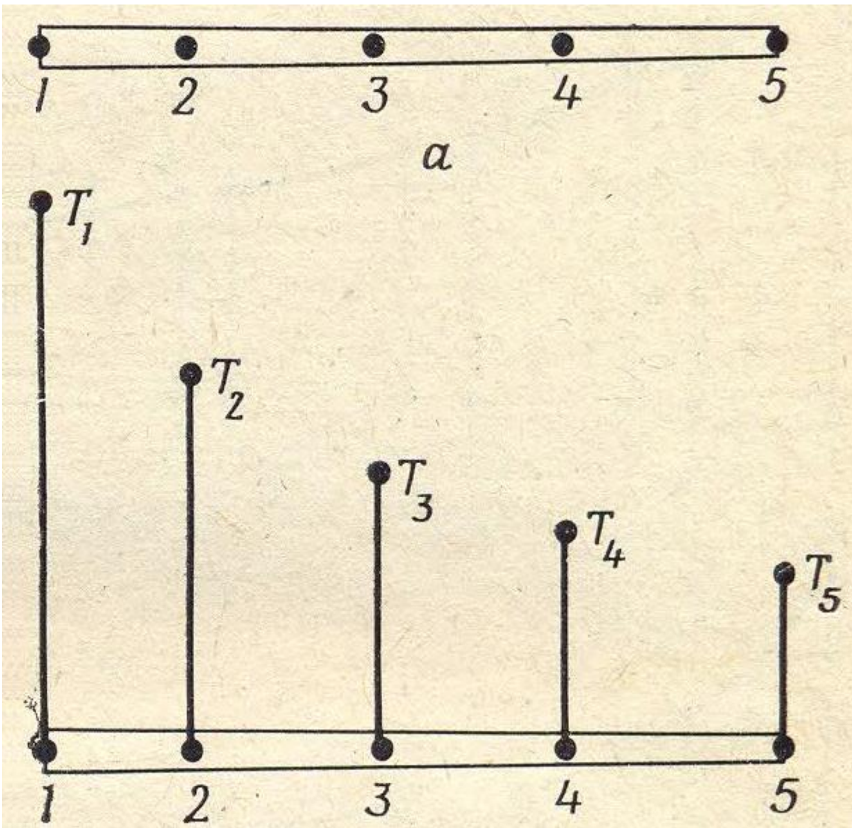


Рис. 1.

Необходимо выполнить разбиение области в виде отрезка фиксированной длины для получения распределения температуры в нём T(x).

2. Основная концепция МКЭ



На оси OX фиксируются и нумеруются пять точек (рис. 2).

Это - узловые точки.

Совсем не обязательно располагать их на равном расстоянии друг от друга.

Рис. 2.

2. Основная концепция МКЭ

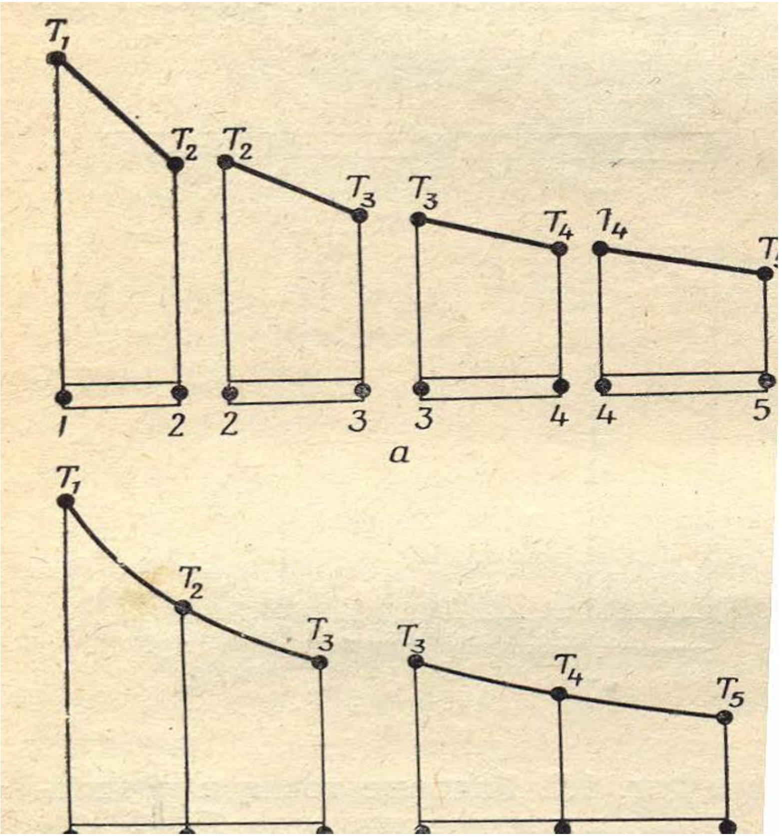


Рис. 3.

Разбиение области **на элементы** может быть произведено двумя различными способами:

1) ограничение каждого элемента двумя соседними узловыми точками с образованием четырёх элементов (рис. 3а);
2) разбиение области на два элемента, каждый из которых содержит три узла (рис. 3б).

Соответствующий элементу полином определяется по значениям T(x) в узловых точках элемента.

2. Основная концепция МКЭ

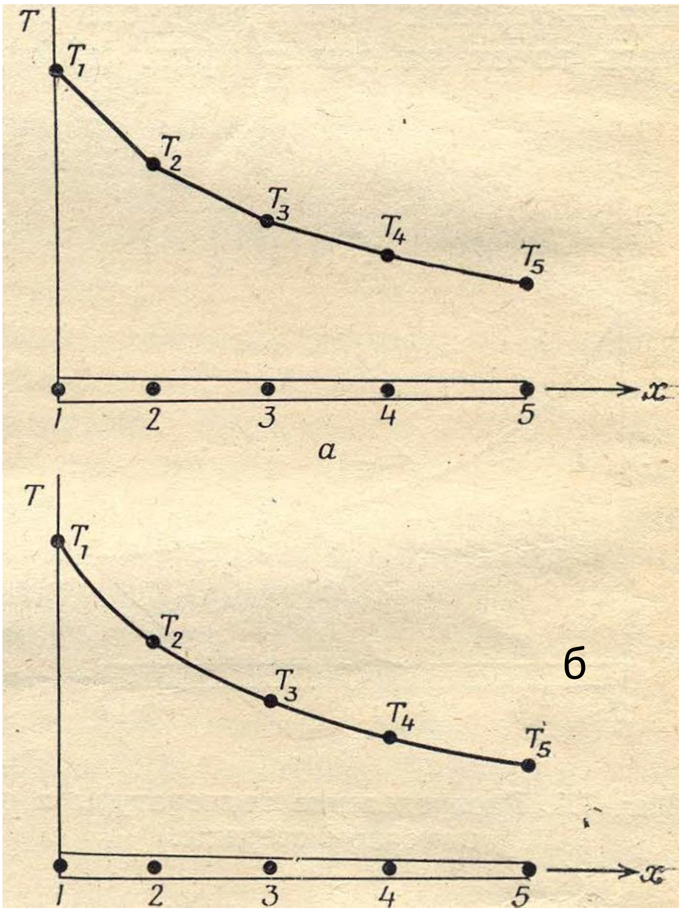


Рис. 4.

В случае разбиения области на четыре элемента на каждый элемент приходится по два узла, функция элемента будет линейна по x.

Окончательная аппроксимация T(x) будет состоять из четырёх кусочно-линейных функций, каждая из которых определена на отдельном элементе (рис. 4 а).

2. Основная концепция МКЭ

Другой способ разбиения области на два элемента с тремя узловыми точками приводит к представлению функции элемента в виде полинома второй степени.

В этом случае окончательной аппроксимацией T(x) будет совокупность двух кусочно-непрерывных квадратичных функций (рис. 4 б.).

Отметим, что это приближение будет кусочно-непрерывным, так как углы наклона графиков обеих этих функций могут иметь разные значения в третьем узле

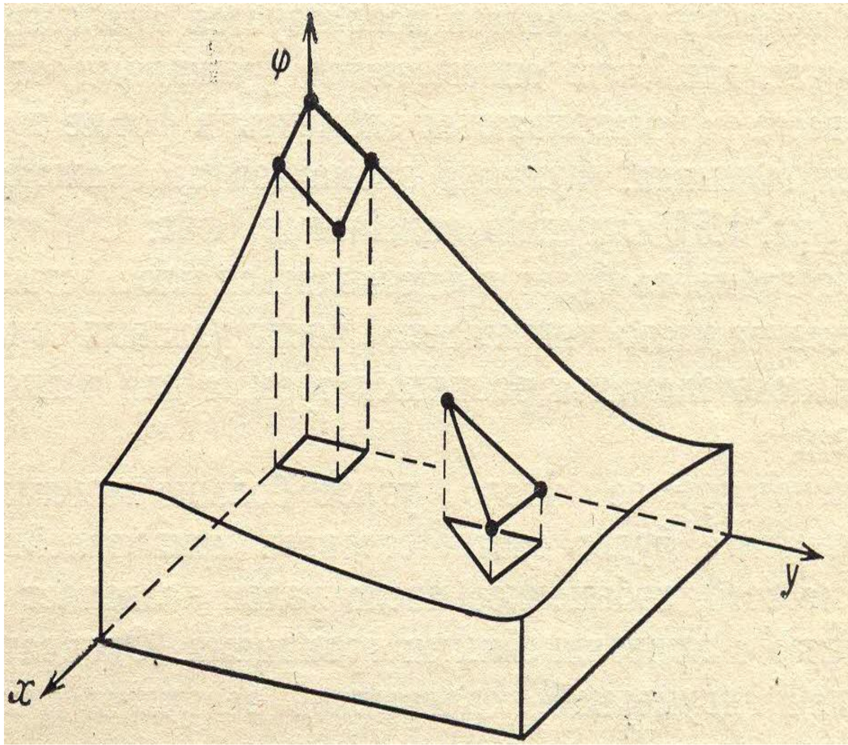
2. Основная концепция МКЭ

При построении дискретной модели непрерывной величины, определённой в двух- или трёхмерной области, основная концепция МКЭ используется аналогично.

В двумерном случае элементы описываются функциями от x, y. При этом чаще всего рассматриваются элементы в форме треугольника или четырёхугольника.

Функции элементов изображаются теперь плоскими (рис. 5) или криволинейными (рис. 6) поверхностями.

2. Основная концепция МКЭ



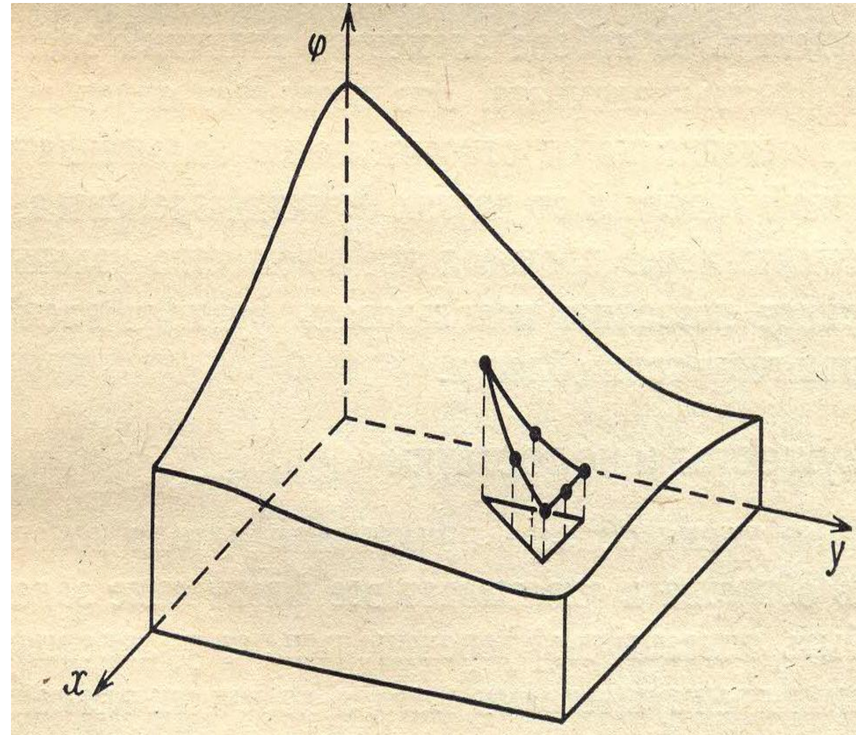


Рис. 5

Рис. 6.

2. Основная концепция МКЭ

- **Функция элемента будет представляться плоскостью, если для данного элемента взято минимальное количество узловых точек, которое для треугольного элемента равняется трём, а для четырёхугольного – четырём.**
- **Если используемое число узлов больше минимального, то функции элемента будет соответствовать криволинейная поверхность.**

Кроме того, избыточное число узлов позволяет рассматривать элементы с криволинейными границами.

2. Основная концепция МКЭ

Окончательной аппроксимацией двумерной непрерывной величины T(x,y) будет служить совокупность кусочно-непрерывных поверхностей, каждая из которых определяется на отдельном элементе с помощью значений T(x,y) в соответствующих узловых точках.

2. Основная концепция МКЭ

Ключевая задача – определение искомой функции (величины) в узловых точках.

Она решается с использованием принципов вариационного исчисления (минимизация специально построенного функционала).

Поэтому МКЭ относят к вариационным методам.

2. Основная концепция МКЭ

Искомые узловые значения Т(х) должны быть «отрегулированы» таким образом, чтобы обеспечивалось **«наилучшее» приближение** к истинному распределению температуры.

Это «регулирование» осуществляется путём **минимизации некоторой величины**, связанной с физической сущностью задачи.

Если рассматривается задача распространения тепла, то **минимизируется функционал,** связанный с уравнением теплопроводности.

2. Основная концепция МКЭ

Процесс минимизации в конечном итоге сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений T(x).

3. Преимущества МКЭ

1. Свойства материалов смежных элементов не должны быть обязательно одинаковыми.

Это позволяет применять метод к телам, составленным из **нескольких материалов**.

2. Криволинейная область может быть аппроксимирована с помощью прямолинейных элементов или описана точно с помощью криволинейных элементов.

Таким образом, методом можно пользоваться **не только для областей с «хорошей» формой границы**.

3. Преимущества МКЭ

3. Размеры элементов могут быть переменными.

Это позволяет **укрупнить или измельчить сеть** разбиения области на элементы, если в этом есть необходимость.

4. С помощью МКЭ не представляет труда рассмотрение граничных условий **с разрывной поверхностной нагрузкой**, а также смешанных граничных условий.

4. Разбиение расчётной области на конечные элементы

Это – первый шаг в решении задачи.

Он не имеет теоретического обоснования.

Дискретизация области состоит из задания:

- **числа КЭ,**
- **размеров КЭ,**
- **формы подобластей (КЭ).**

(КЭ – конечные элементы, которые используются для построения дискретной модели реального тела).

4. Разбиение расчётной области на конечные элементы

Здесь следует принимать во внимание **два альтернативных фактора:**

- с одной стороны, **элементы должны быть выбраны достаточно малыми,** чтобы получались приемлемые результаты;

- с другой стороны**, применение достаточно крупных элементов сокращает вычислительную работу.**

5. Аппроксимация искомой функции в конечном элементе

В качестве функции элемента чаще всего применяется **полином**.

Порядок полинома зависит от числа используемых в каждом узле элемента данных о непрерывной функции.

Классификация конечных элементов может быть проведена в соответствии с порядком полиномиальных функций этих элементов.

При этом рассматриваются три следующие группы элементов:

- симплекс-элементы,
- комплекс-элементы,
- мультиплекс-элементы.

5. Аппроксимация искомой функции в конечном элементе

Симплекс–элементам соответствуют полиномы, содержащие константу и линейные члены.

Число коэффициентов в таком полиноме на единицу больше **размерности** координатного пространства.

Например, симплексная функция для двумерного треугольного элемента:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \qquad (1)$$

5. Аппроксимация искомой функции в конечном элементе

Комплекс-элементам соответствуют полиномиальные функции, содержащие константу, линейные члены, а также члены второго, третьего и более высокого порядка, если это необходимо.

Форма комплекс-элементов может быть такой же, как и у симплекс-элементов, но комплекс-элементы имеют дополнительные граничные узлы и, кроме того, могут иметь также и внутренние узлы.

5. Аппроксимация искомой функции в конечном элементе

Для **мультиплекс-элементов** также используются полиномы, содержащие члены высокого порядка, но **границы элементов** при этом должны быть **параллельны координатным осям**, что необходимо для достижения непрерывности при переходе от одного элемента к другому.

Границы симплекс- и комплекс-элементов не подвергаются такому ограничению.

5.1. Одномерный симплекс-элемент

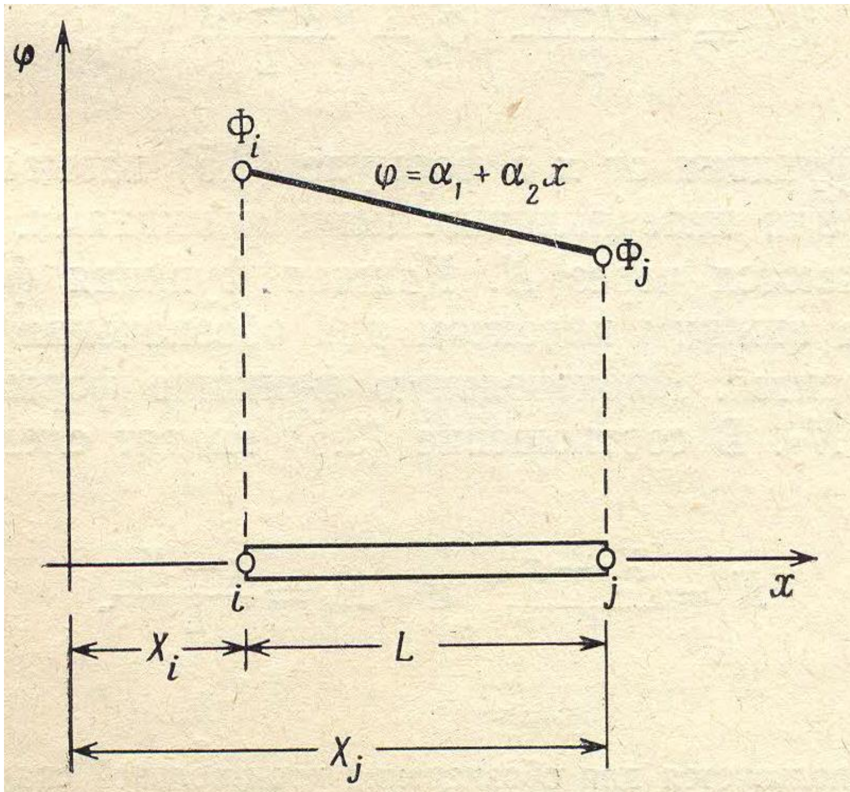


Рис. 7.

Одномерный симплекс-элемент представляет собой прямолинейный отрезок длины *L* с двумя узлами, по одному на каждом конце отрезка (рис. 7).

Узлы обозначаются индексами i и j, узловые значения – Φ_i и Φ_j соответственно.

Полиномиальная функция *φ* имеет вид:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x \qquad (2)$$

5.1. Одномерный симплекс-элемент

Коэффициенты α_i и α_j могут быть определены с помощью условий в узловых точках:

$$\varphi = \Phi_i \quad при \quad x = X_i \quad \text{и} \quad \varphi = \Phi_j \quad при \quad x = X_j .$$

Эти узловые условия приводят к системе двух уравнений:

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i ,$$
$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j . \qquad (3)$$

Её решение даёт:

$$\alpha_1 = \frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L}, \qquad (4)$$
$$\alpha_1 = \frac{\Phi_j - \Phi_i}{L}.$$

5.1. Одномерный симплекс-элемент

Подставив найденные значения (4) в формулу (2), получаем для φ выражение:

$$\varphi = \left(\frac{\Phi_i X_j - \Phi_j X_i}{L} \right) + \left(\frac{\Phi_j - \Phi_i}{L} \right) x$$

которое может быть переписано в виде:

$$\varphi = \left(\frac{X_j - x}{L} \right) \Phi_i + \left(\frac{x - X_i}{L} \right) \Phi_j \qquad (5)$$

5.1. Одномерный симплекс-элемент

Линейные функции от x в формуле (5) называются **функциями формы** или интерполяционными функциями.

Эти функции часто обозначаются через N. Каждая функция формы должна быть снабжена нижним индексом для обозначения узла, к которому она относится.

Соотношение (5) может быть записано в матричном виде:

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j \qquad (6)$$

Здесь $[N]=[N_i N_j]$ – матричная строка,

{Ф} – вектор-столбец.

5.1. Одномерный симплекс-элемент

Из (5) видно:

- функция $N_i=(X_j-x)/L$ равна единице в узле с номером i и равна нулю в узле j;
- функция N_j равна нулю в i-ом узле и равна единице в узле с номером j.

Т.е. значения функции формы равны единице в одном определённом узле и обращаются в нуль во всех других узлах.

5.2. Интерполяционные полиномы для всей дискретизированной области

Мы хотим включить каждый элемент в рассматриваемую область и выразить через глобальные координаты и глобальные узловые значения интерполяционные уравнения для каждого используемого элемента.

Рассмотрим эту задачу на примере скалярных величин.

5.2. Интерполяционные полиномы для всей дискретизированной области

Интерполяционный полином для элемента *e* в общей форме имеет вид:

$$\varphi^{(e)} = [N]\{\Phi\} = [\mathrm{N}_i^{(e)}, \mathrm{N}_j^{(e)}, \mathrm{N}_k^{(e)} \ldots \mathrm{N}_r^{(e)}]\begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_i \\ \Phi_k \\ . \\ . \\ \Phi_r \end{Bmatrix} \qquad (7)$$

где r – число узлов элемента; верхний индекс (*e*) означает произвольный элемент.

5.2. Интерполяционные полиномы для всей дискретизированной области

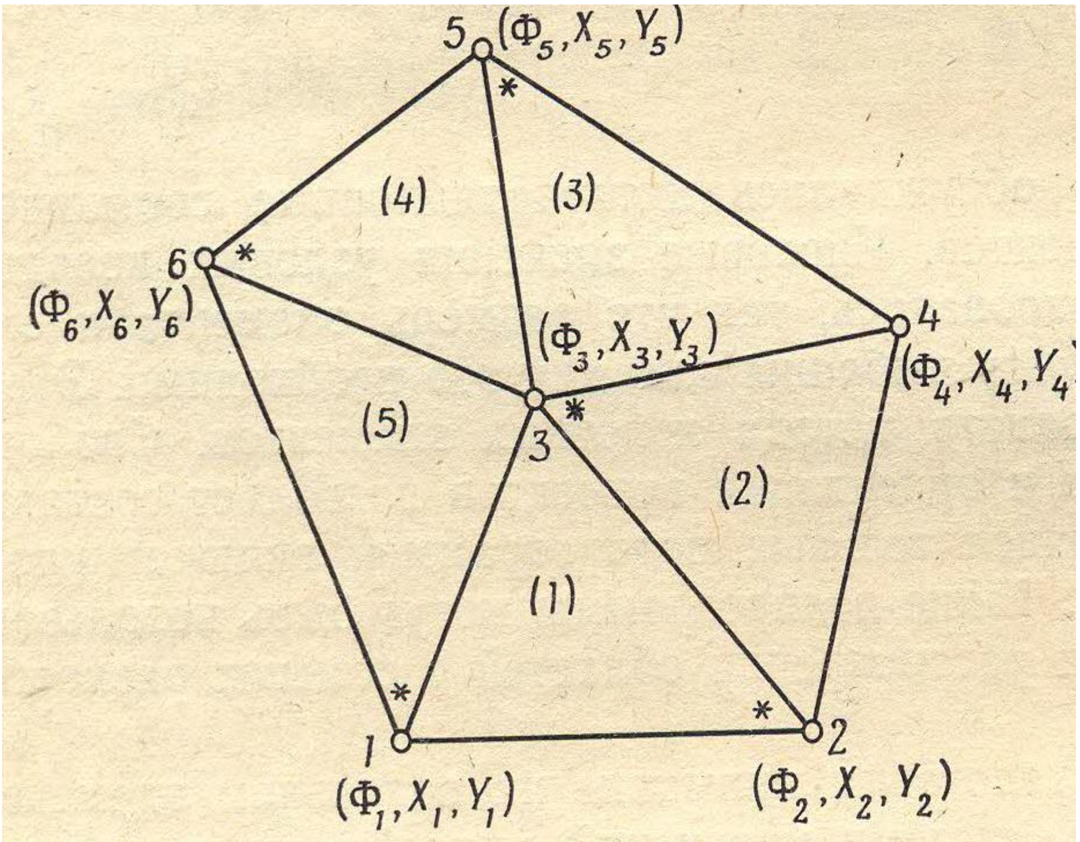


Рис. 8. Для примера техники включения элемента в область.

i-узел в каждом элементе (т.е. первый узел в элементе) выделен (*).

Узлы j и k следуют за *i*-узлом в направлении против часовой стрелки.

Для первого элемента : i=2, j=3, k=1.
Для второго: i=3, j=2, k=4.
И т.д. для остальных элементов.

5.2. Интерполяционные полиномы для всей дискретизированной области

Значения индексов i, j, k (рис. 8) могут быть подставлены в формулу (7), что приводит к следующей совокупности уравнений для элементов:

$$
\begin{aligned}
\varphi^{(1)} &= N_2^{(1)}\Phi_2 + N_3^{(1)}\Phi_3 + N_1^{(1)}\Phi_1 \\
\varphi^{(2)} &= N_3^{(2)}\Phi_3 + N_2^{(2)}\Phi_2 + N_4^{(2)}\Phi_1 \\
\varphi^{(3)} &= N_5^{(3)}\Phi_5 + N_3^{(3)}\Phi_3 + N_4^{(3)}\Phi_4 \\
\varphi^{(4)} &= N_6^{(4)}\Phi_6 + N_3^{(4)}\Phi_3 + N_5^{(4)}\Phi_5 \\
\varphi^{(5)} &= N_1^{(5)}\Phi_1 + N_3^{(5)}\Phi_3 + N_6^{(5)}\Phi_6
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

Функции формы – множители при узловых значениях в формулах (8) – определяются подстановкой числовых значений i, j, k в уравнения для функции формы.

5.2. Интерполяционные полиномы для всей дискретизированной области

Т.о, конечные элементы объединяются в ансамбль (в системе (8)), а интерполяционные функции выражаются через глобальные узловые значения и глобальные координаты, которые вводятся вместо произвольных i, j, k.

Каждое из уравнений в (8) содержит глобальные узловые значения, но относится к конкретному элементу.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Мы рассмотрели:

а) аппроксимацию непрерывной функции на отдельном элементе;

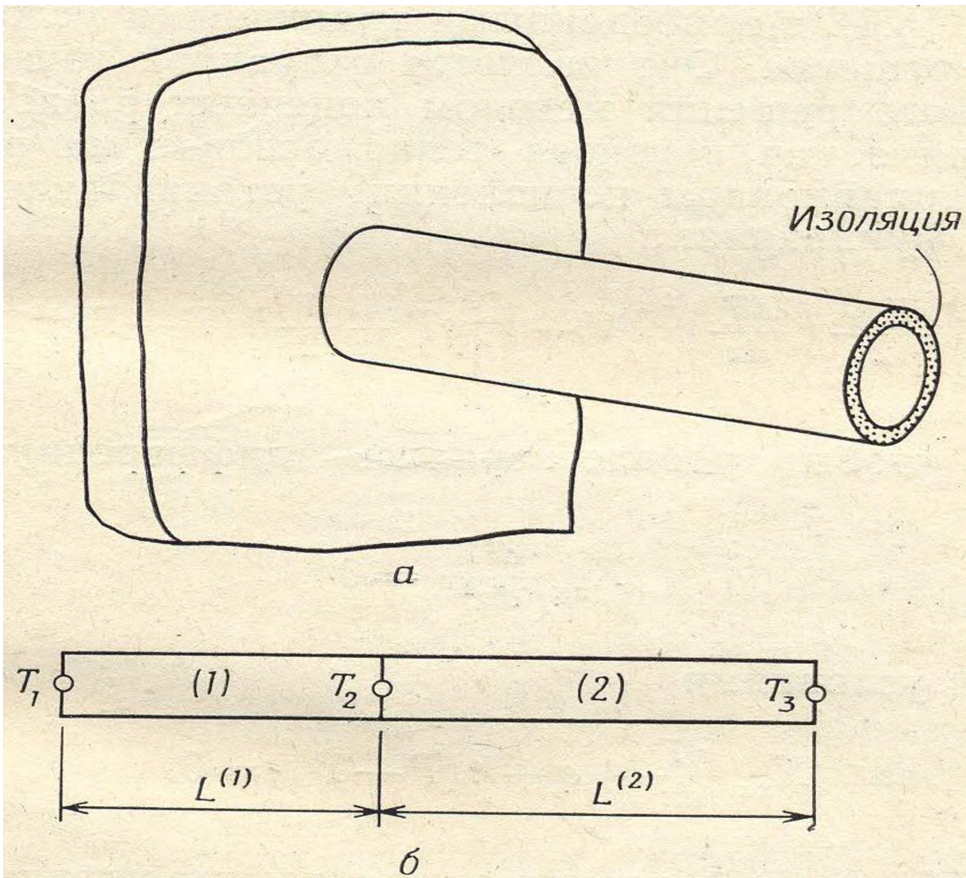
б) формирование множества кусочно-непрерывных функций, необходимого для аппроксимации данной непрерывной функции на всей области.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Наша конечная цель – получить для узловых величин такие числовые значения, при которых соотношения для элементов очень точно аппроксимируют некоторый важный физический параметр (искомую функцию).

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Рассмотрим одномерный поток тепла в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью



К закреплённому в стене концу стержня подводится тепловой поток заданной интенсивности q.

На свободном конце стержня происходит конвективный теплообмен тепла.

Коэффициент теплообмена h. Температура окружающей среды $T_{среды}$.

Стержень теплоизолирован, так что потерь тепла через боковую поверхность не происходит.

Рис. 9.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Математическая постановка задачи имеет следующий вид:

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} = 0$$ - уравнение теплопроводности (9)

с граничными условиями:

$$\lambda \frac{dT}{dx} + q = 0 \;\; при \;\; x = 0$$ и $$\lambda \frac{dT}{dx} + h(T - T_{среды}) = 0 \; при \;\; x = L$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала стержня.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Если использовать **вариационный подход**, то для данной задачи нужно построить функционал следующего вида:

$$\chi = \int_V \frac{\lambda}{2}\left(\frac{dT}{dx}\right)^2 dV + \int_S \left[qT + \frac{1}{2} h(T - T_{среды})^2 \right] dS \qquad (10)$$

Затем следует произвести его минимизацию по T.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Для минимизации функционала *χ* (10) необходимо, чтобы функция *T* была такой, что будет удовлетворяться следующее дифференциальное уравнение:

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \qquad \textbf{(11)}$$

с граничными условиями:

$$\lambda \frac{dT}{dx} + q + h(T - T_{среды}) = 0 \qquad \textbf{(12)}$$

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Уравнения (11) и (12) идентичны исходным уравнениям (9).

Поэтому любое распределение температуры, при котором функционал χ, определяемый формулой (10), становится минимальным, также удовлетворяет дифференциальным уравнениям (9) и является решением исходной задачи.

Уравнение (10) служит отправной точкой для определения температуры в каждом узле.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Мы будем минимизировать функционал (10), используя множество функций-элементов, каждая из которых определена на отдельном элементе и выражена через узловые значения.

Узловые значения *T* – неизвестные величины.

Так как они определяют значение функционала χ, то минимизация этого функционала должна быть проведена по этим величинам.

В результате мы получим систему линейных уравнений относительно неизвестных значений искомой функции Т в узловых точках.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Реализация МКЭ начинается с определения подобластей (элементов) и их узловых точек.

Стержень может быть разбит на два линейных элемента (рис. 8) с узловыми значениями T_1, T_2, T_3.

При этом площадь поперечного сечения стержня, соответствующая первому узлу, равна A_1, площадь поперечного сечения, соответствующая узлу 3 – A_3.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Температура внутри элементов:

$$T^{(1)} = N_1^{(1)} T_1 + N_2^{(1)} T_2, \qquad (13)$$
$$T^{(2)} = N_2^{(2)} T_2 + N_3^{(2)} T_3$$

Соответствующие функции формы определяются соотношениями:

$$N_i^{()} = \frac{X_j - x}{L^{()}}, \quad N_j^{()} = \frac{x - X_j}{L^{()}}. \qquad (14)$$

Нам нужно получить систему линейных уравнений, выполнив процедуру минимизации функционала (10).

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Интегральная величина χ в (10) разбивается на соответствующие отдельным элементам слагаемые, которые минимизируются по узловым значениям.

В результате получается совокупность интегралов, которые могут быть вычислены и просуммированы по элементам.

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} = \int\limits_{V^{(1)}} \frac{\lambda}{2}\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)^2 dV + \int\limits_{V^{(2)}} \frac{\lambda}{2}\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)^2 + \\ + \int\limits_{S_1} qT(x)dS + \int\limits_{S_2}\left(\frac{1}{2}h(T - T_{среды})^2\right)dS \qquad \textbf{(15)}$$

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Значение функционала χ получается подстановкой T(x) и вычислением интеграла.

Для T и производных от T по x воспользуемся соотношениями (13) и (14).

В итоге имеем следующее.

$$\frac{dT^{(1)}}{dx} = \frac{1}{L^{(1)}}(-T_1 + T_2) \qquad (16)$$

$$\frac{dT^{(2)}}{dx} = \frac{1}{L^{(2)}}(-T_2 + T_3) \qquad (17)$$

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Объёмные интегралы:

$$\int_{V^{(1)}} \frac{\lambda}{2}\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)^2 dV + \int_{V^{(2)}} \frac{\lambda}{2}\left(\frac{dT(x)}{dx}\right)^2 = \frac{\lambda^{(1)}A^{(1)}}{2L^{(1)}}(-T_1+T_2)^2 + \frac{\lambda^{(2)}A^{(2)}}{2L^{(2)}}(-T_2+T_3)^2 \quad (18)$$

При вычислении интегралов предполагалось, что площадь поперечного сечения каждого элемента постоянна, так что $dV=A^{(e)}dx$.

Представление объёмного интеграла в области в виде суммы интегралов, каждый из которых вычисляется по отдельному элементу, позволяет рассматривать различные свойства материала для различных элементов. **Это является важной особенностью МКЭ**.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Поверхностные интегралы легко вычисляются, так как подынтегральным выражениям соответствуют узловые значения:

$$\int_{S_1} qT(x)dS = qT_1 \int_{S_1} dS = qT_1 A_1 \qquad (19)$$

$$\int_{S_2} \left(\frac{1}{2} h(T - T_{среды})^2 \right) dS = \frac{h}{2} (T_3 - T_{среды})^2 \int_{S_2} dS \qquad (20)$$

$$= \frac{hA_3}{2} (T_3^2 - 2T_3 T_{среды} + T_{среды}^2)$$

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Значение функционала χ получается сложением выражений (18), (19) и (20).

В результате получается выражение для этого функционала через узловые значения температуры:

$$\chi = \frac{C^{(1)}}{2}(T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + \frac{C^{(2)}}{2}(T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + \\ + \mathrm{qA}_1\, T_1 + \frac{hA_3}{2}((T_3^2 - 2T_3T_{среды} + T_{среды}^2) \qquad (21)$$

где $C^{(1)} = A^{(1)}\lambda^{(1)} / L^{(1)} \quad и \quad C^{(2)} = A^{(2)}\lambda^{(2)} / L^{(2)}$

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Правильными значениями T_1, T_2 и T_3 являются те, при которых величина функционала χ минимальна, поэтому

$$\begin{aligned}
&\frac{d\chi}{dT_1} = C^{(1)}T_1 - C^{(1)}T_2 + qA_1 = 0,\\
&\frac{d\chi}{dT_2} = -C^{(1)}T_1 + (C^{(1)} + C^{(2)})T_2 - C^{(2)}T_3 = 0,\\
&\frac{d\chi}{dT_3} = -C^{(2)}T_2 + (C^{(3)} + hA_3)T_3 - hA_3T_{среды} = 0
\end{aligned} \qquad (22)$$

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Уравнения (22) могут быть преобразованы к виду:

$$\begin{bmatrix} C^{(1)} & -C^{(1)} & 0 \\ -C^{(1)} & [C^{(1)}+C^{(2)}] & -\mathrm{C}^{(2)} \\ 0 & -C^{(2)} & [C^{(2)}+hA_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -qA_1 \\ 0 \\ hA_3T_{среды} \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(23)}$$

Или в более общей матричной форме: **[K]{T}={F}.** **(24)**

Матрица [K] - глобальной матрицей жёсткости.

Вектор {F} - глобальный вектор нагрузки.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

В процедуре минимизации функционала важно то, что интегральная величина χ разбивается на соответствующие отдельным элементам слагаемые.

В результате получается совокупность интегралов, которые могут быть легко вычислены.

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

В рассмотренном случае мы получили

$$\chi = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} \qquad ,$$

где $\chi^{(1)}$ - сумма интегралов для первого элемента,

$\chi^{(2)}$ - для второго элемента.

Для минимизации функционала χ по узловым значениям необходимо, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{T\}} = \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial \{T\}} + \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial \{T\}} = 0 \qquad (25)$$

6. Решение задачи переноса тепла в стержне помощью МКЭ

Если каждое из слагаемых в (25) будет равно нулю, то и сумма будет равна нулю.

Поэтому можно:

1) **отдельно рассчитать слагаемые в (25),**
2) **построить для каждого из них систему линейных уравнений,**
3) **а затем сложить матрицы и столбцы свободных членов (векторов нагрузки)**
4) **и решить полученную систему относительно неизвестных значений функции в узловых точках.**