ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ 2

Бехтерева Елена Сергеевна, профессор
bextereva@tpu.ru
lane@phys.tsu.ru

Томск-2013

§2. УСЛОВИЕ МАКРОСКОПИЧНОСТИ И ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Дж. К. Максвелл в 1864 году предложил фундаментальную систему уравнений, устанавливающих соотношения между характерисстиками электромагнитного поля.

Макроскопические объекты $N \sim 10^{23}$	$\Rightarrow$	Макроскопические уравнения

Физически бесконечно малый объем

ΔV - объем достаточно малый по сравнению с объемом V макроскопической системы, но содержащий достаточно много частиц.

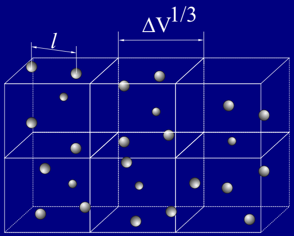
Соотношение $\frac{\Delta Q}{\Delta V}$ меняется мало при изменении ΔV.

$$\Delta Q = \sum_{i \in \Delta V} e_i,$$

где ΔQ- полный заряд внутри ΔV.

Характерный размер $\Delta V^{1/3}$ намного первосходит среднее расстояние между частицами l.
Если $L \equiv V^{1/3}$ - характерный размер макроскопичкского объекта, то

$$l^3 \ll \Delta V \ll L^3 \qquad (2.1)$$



В **макроскопической** теории оъем ΔV минимально возможный объем. Все рассматриваемые расстояннния превосходят его $\Delta x \gg \Delta V^{1/3}$.

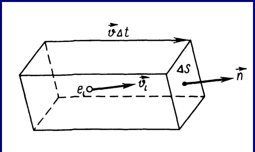
ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1
Макроскопической **плотностью заряда** называется величина

$$\rho(t, \vec{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i, \qquad (2.2)$$

где $\vec{r}$ - радиус - вектор центра области ΔV. В произвольной области V заряд равен

$$Q(t) = \int_V \rho(t, \vec{r}) dV. \qquad (2.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2



Рассмотрим площадку ΔS с нормалью $\vec{n}$.
Каков заряд, пересекший ΔS за тремя Δt?
Пусть заряды e_i обладающие скоростью
$v_i \in I_v = (\vec{v} - \Delta\vec{v}/2, \vec{v} - \Delta\vec{v}/2)$
$\vec{v} \equiv \vec{v}_i$ - средняя скорость.

В каждом элементарном объеме плотность заряда

$$\rho_v = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V; v_i \in I_v} e_i,$$

Тогда величина заряда частиц, облающих средней скоростью $\vec{v}$ и пересекащих площадку ΔS за время Δt:

$$\Delta Q_v = (\vec{n}, \vec{v}) \Delta t \Delta S \rho_v = \frac{\Delta t \Delta S}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V; v_i \in I_v} (\vec{n}, \vec{v}) e_i.$$

Суммирование по скоростям дает:

$$\Delta Q = \frac{\Delta t \Delta S}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} (\vec{n}, \vec{v}_i) e_i = (\vec{n}, \vec{j}) \Delta t \Delta S, \tag{2.4}$$

где введена **плотность электрического тока**

$$\vec{j} \equiv \frac{1}{\Delta V} \sum_{i \in \Delta V} e_i \vec{v}_i \tag{2.5}$$

Из (2.4) видно, что сила тока через поверхность ΔS

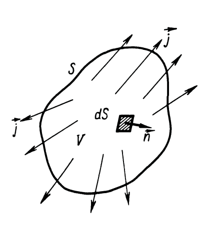
$$I = \int\limits_S (\vec{n}, \vec{j}) dS. \qquad (2.6)$$

Закон сохранения электрического заряда для некоторого объема V, окруженного замкнутой поверхностью S. Из (2.6) и теоремы Гаусса-Остроградского получаем

$$I = \oint\limits_S (\vec{n}, \vec{j}) dS = \int\limits_V \mathrm{div}\vec{j} dV.$$

Если поверхность S не изменяется со временем, то, принимая во внимание $Q = \int\limits_V \rho dV$, получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_V \rho \mathrm{d}V = \int\limits_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V = -\int\limits_V \mathrm{div}\vec{j} \mathrm{d}V.$$



Закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{j} = 0. \qquad (2.7)$$

I. ЗАРЯДЫ
СВЯЗАННЫЕ
(СОБСТВЕННЫЕ)
-заряды, принадлежащие веществу.
Удовлеворяют условию
электронейтральности среды

$$Q^{\text{соб.}} = \int\limits_V \rho^{\text{соб.}} dV = 0,$$

$$\rho^{\text{соб.}} \equiv \rho^{\text{связ.}}$$

для большинства сред при
нормальных условиях.
Если связанные заряды не
удовлетворяют условию
электронейтральности, как в плазме,
то

$$\rho^{\text{соб.}} \neq \rho^{\text{связ.}}$$

$$\int\limits_V \rho^{\text{связ.}} dV = 0.$$

Избыточный заряд – свободный.
!!! Электромагниитное поле в вакууме.

II. ЗАРЯДЫ
СВОБОДНЫЕ
(ВНЕСЕННЫЕ, СТОРОННИЕ)
-все заряды, которые могут находиться в веществе в несвязанном состоянии. Свободные ионы и элементарные заряженные частицы, создающие ненулевую плотность заряда ρ и плотность тока $\vec{j}$.
!!! Электромагниитное поле в среде.

III. Мы принимаем, что в большинстве случаев, закон сохранения работает как для свободных, так и для связанных зарядов и нет процессов перехода зарядов из связанного состояния в свободное и обратно. Поэтому принимют, что

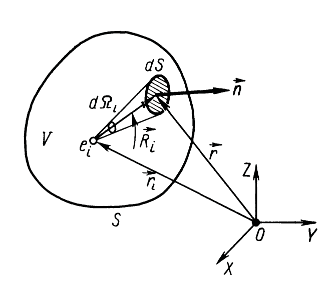
$$\frac{\partial \rho^{\text{полн.}}}{\partial t} + \mathrm{div} \vec{j}^{\text{полн.}} = 0,$$
$$\frac{\partial \rho^{\text{связ.}}}{\partial t} + \mathrm{div} \vec{j}^{\text{связ.}} = 0.$$

§3. ЗАКОН КУЛОНА И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Рассмотрим совокупность зарядов e_i с радиус-векторами $\vec{r}_i$.
По закону Кулона, поле в точке пространства $\vec{r}$, которое создает всякий из зарядов:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = e_i \frac{\vec{R}_i}{R_i^3}, \qquad (3.1)$$

где $\vec{R}_i \equiv \vec{r} - \vec{r}_i$.



В точке пространства $\vec{r}$ полная напряженность, создаваемая всеми зарядами, находящимися в объеме V - суперпозиция всех элементарных $\vec{E}_i$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum i \in V \vec{E}_i(\vec{r}) = \sum_i e_i \frac{\vec{R}_i}{R_i^3}. \qquad (3.2)$$

Разобъем весь объем V на физически бесконечномалые объемы $\Delta V'_k$ с центрами $\vec{r'}_k$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_k \sum_{i \in \Delta V'_k} e_i \frac{\vec{R}_i}{R_i^3}.$$

Согласно неравенству (2.1) мы можем в приближении перейти к суммированию по ячейкам $\Delta V'_k$:

$$\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i \approx \vec{r} - \vec{r}'_k \equiv \vec{R}'_k,$$

поэтому

$$\sum_{i \in \Delta V'_k} e_i \frac{\vec{R}_i}{R_i^3} \approx \frac{\vec{R}'_k}{{R'_k}^3} \sum_{i \in \Delta V'_k} e_i = \frac{\vec{R}'_k}{{R'_k}^3} \rho(\vec{r}'_k) \Delta V'_k .$$

где $\rho(\vec{r}'_k)$ - макроскопическая плотность заряда. Суммирование по ячейкам в (3.2) можем заменить объемным интегралом:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{R^3} \vec{R} \mathrm{d}V', \tag{3.3}$$

где $\vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}'$.

Уравнения (3.2) и (3.3) являются исходными для определения важной характеристики *электрическое поле* $\vec{E}(\vec{r})$. В то же время в основе этих уравнений лежит *закон Кулона*.

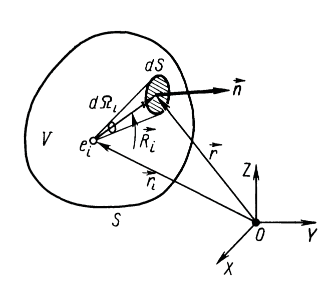
Согласно **полевой гипотезе** $\vec{E}(\vec{r})$ существует в пространстве вне зависимости от того помещен в точку $\vec{r}$ пробный заряд или нет.

Подсчитаем поток поля $\vec{E}_i$!! через замкнутую поверхность:

$$N_i = \oint_S (\vec{n}, \vec{E}_i) \mathrm{d}S.$$

Имея в виду (3.1) можно получить

$$N_i = e_i \oint_S \frac{(\vec{n}, \vec{R}_i)}{R_i^3} \mathrm{d}S.$$



Введем понятие телесного угла, под которым виден элемент поверхности dS из точки $\vec{r}$:

$$\mathrm{d}\Omega_i = \mathrm{d}S(\vec{n}, \vec{R}_i) R_i{}^{-3} = \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi,$$

тогда

$$N_i = e_i \oint \mathrm{d}\Omega_i = \begin{cases} 4\pi e_i, & \text{при } \vec{r}_i \in V, \\ 0, & \text{при } \vec{r}_i \bar{\in} V, \end{cases}$$

где V -объем, заключенный внутри поверхности S. Поток полного поля

$$N = \oint_S (\vec{n}, \vec{E}) \mathrm{d}S = \sum_i N_i = 4\pi. \sum_{i \in V} e_i \equiv 4\pi Q,$$

где Q - заключенный внутри поверхности S заряд.

$$N = \oint_S (\vec{n}, \vec{E}) \mathrm{d}S = \sum_i N_i = 4\pi \sum_{i \in V} e_i \equiv 4\pi Q,$$

где Q - заключенный внутри поверхности S заряд. Согласно макроскопическим представлениям $Q = \int_V \rho \mathrm{d}V$, следовательно

$$\oint_S (\vec{n}, \vec{E}) \mathrm{d}S = 4\pi \int_V \rho \mathrm{d}V \tag{3.4}$$

-*теорема Гаусса* в интегральной форме.

Применяя теорему Гаусса-Остроградского

$$\oint_S (\vec{n}, \vec{E}) \mathrm{d}S = 4\pi \int_V \mathrm{div} \vec{E} \mathrm{d}V = (3.4) = 4\pi \int_V \rho \mathrm{d}V.$$

Получаем

$$\mathrm{div} \vec{E} = 4\pi \rho. \tag{3.5}$$

-*теорема Гаусса* в дифференциальной форме.

Примечания.

1. Теорема Гаусса определяет поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность.
2. Полученное уравнение справедливо как для статистического электро маг нит ного поля, так и для переменного во времени.

Электрическое поле точечного заряда.

Пусть поверхность S - сфера. Заряд q помещен в центре.

Напряженность поля, создаваемая зарядом: $\vec{E} = q\frac{\vec{r}}{r^3}$. Поток вектора через поверхность dS

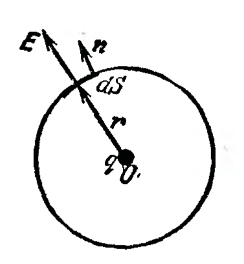
$$d\Phi \equiv dN = (\vec{E}, \vec{n})dS = q\frac{dS}{r^3},$$

поток вектора $\vec{E}$ через всю сферу

$$\Phi = q\frac{S}{r^2}.$$

Так как $S = 4\pi r^2$, то

$$\Phi = 4\pi q.$$



! Величина потока Φ не зависит от формы поверхности S.

Если взять произвольную поверхность и на ней произвольную площадку с положительным направлением нормали $\vec{n}$, то поток вектора через эту площадку будет:

$$d\Phi = (\vec{E}, \vec{n})dS = EdS\cos\alpha = EdS_r,$$

где dS_r - проекция площадки dS на плоскость, перпендикулярную к радиусу $\vec{r}$. Используя выражение для напряженности получаем:

$$d\Phi = q\frac{dS_r}{r^2}.$$

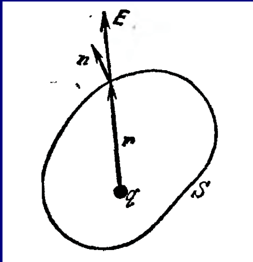
Величина

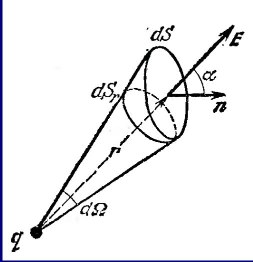
$$\frac{dS_r}{r^2} \equiv d\Omega$$

- телесный угол, под которым из точки нахождения заряда видна площадка dS_r, а также и dS.

$$d\Phi = qd\Omega$$

$$\Phi = \int d\Phi = q\int d\Omega = 4\pi q$$



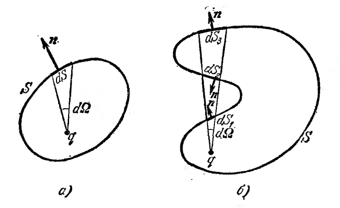


Положительно-восстановленная к поверхности нормаль -это нормаль ко внешней стороне поверхности.

Электрическое поле точечного заряда.

Случай 1.

Заряд находится внутри S.
Ω охватывает все пространство
$\Phi = q \cdot 4\pi$.



б)<u>Знаки Φ:</u> $d\Phi_1 = -d\Phi_2 = d\Phi_3 \equiv \Phi$

$$\vec{n}_1 \uparrow\uparrow \vec{n}_3 \Rightarrow \Phi_1 = \Phi_3$$

$$\vec{n}_1 \uparrow\downarrow \vec{n}_2 \Rightarrow \Phi_1 = -\Phi_2$$

<u>Абсолютные значения:</u>

$$d\Phi_1 = q\frac{dS_1}{r_1^2},\ d\Phi_2 = q\frac{dS_2}{r_2^2},\ d\Phi_3 = q\frac{dS_3}{r_3^2}.$$

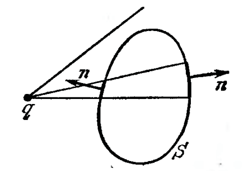
$$d\Phi_1 = d\Phi_2 = d\Phi_3,$$

т.к. $\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} = \frac{dS_3}{r_3^2}$.

Из суперпозици потоков:
$\Phi - \Phi + \Phi = \Phi = q4\pi$.

Случай 2.

Заряд q находится вне пространства, охватываемого поверхностью S.



Прямая (линия напряженности), исходящая из заряда либо не пересекает поверхность S либо пересекает ее четное число раз.

$$\text{Четное} \Rightarrow \ \Phi - \Phi = 0.$$

Выходящий поток равен нулю, если линии напряженности пересекают поверхность четное число раз.

Example of columns 1

Contents of the first column

Contents split into two lines

Example of columns 2

Contents of first column
split into two lines

Основная литература

1. Я. П. Терлецкий, Ю. П. Рыбаков, "Электродинамика"; Издание второе, переработанное; Изд-во "Высшая школа Москва, 1990 г.
2. Дж. Джексон, "Классическая электродинамика"; Перевод с английского Г. В. Воскресенского и Л. С. Соловьева; Изд-во "Мир Москва, 1965г.
3. Д. В. Сивухин, "Общий курс физики. Т.III. Электричество"; Изд-во "XXX Москва, 1950г.