Теория вероятностей и математическая статистика

Тема: ***Числовые характеристики случайных величин***

Лектор: **Бер Людмила Михайловна**
доцент ОМИ, ШБИП ТПУ

§8. Числовые характеристики случайных величин

Числовые параметры, которые описывают СВ суммарно и в сжатой форме выражают наиболее существенные особенности распределения, называются числовыми характеристиками СВ.

Основные числовые характеристики СВ:

- Математическое ожидание,
- дисперсия,
- Среднее квадратическое отклонение.

1. Математическое ожидание (х-ка положения СВ)

а) Математическое ожидание (среднее значение) ДСВ

Пусть ДСВ X может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

ОПРЕДЛЕНИЕ. ***Математическим ожиданием*** ДСВ X *называется сумма ряда* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, *при условии, что этот ряд сходится абсолютно.*

Обозначают: M[X], m_x, $M(X)$.

Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ не является абсолютно сходящимся, то говорят, что СВ ***не имеет математического ожидания***.

$\Rightarrow$ если СВ может принимать только конечное множество значений $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то она всегда имеет математическое ожидание и оно равно

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

ПРИМЕР. Найти М[X], если ДСВ X имеет следующий ряд распределения:

x_i	3	5	7
p_i	0,5	0,4	0,1

Получили: М[X] = 4,2

Таким образом, *математическое ожидание может и не содержаться среди возможных значений* ДСВ.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ СМЫСЛ МО

Пусть производится серия из n опытов, в результате которых СВ Х приняла значения

$x_1 - m_1$ раз,

$x_2 - m_2$ раз,

……………,

$x_k - m_k$ раз

$(m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n)$

Тогда среднее арифметическое наблюдаемых значений ДСВ:

$$\mathrm{M}^*[X] = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k} =$$

$$= x_1 \frac{m_1}{n} + x_2 \frac{m_2}{n} + \ldots + x_k \frac{m_k}{n} =$$

$$= x_1 p_1^* + x_2 p_2^* + \ldots + x_k p_k^*,$$

где $p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$ – частота события «$X = x_i$».

Но $p_i^* \to p_i$ при $n \to \infty$.

$\Rightarrow$ при увеличении n среднее арифметическое наблюдаемых значений ДСВ стремится к $\mathrm{M}[X]$.

Таким образом, $\mathrm{M}[X]$ – характеристика положения ДСВ на Ox: она указывает некоторое среднее значение ДСВ, около которого группируются все возможные значения ДСВ. – вероятностный смысл МО.

б) Математическое ожидание НСВ

Пусть X – НСВ с плотностью вероятности $f(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Математическим ожиданием*** НСВ X *называется несобственный интеграл* $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$, *при условии, что этот интеграл сходится абсолютно.*

Обозначают: M[X], m_x .

Если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$ не является абсолютно сходящимся, то говорят, что СВ ***не имеет математического ожидания***.

$\Rightarrow$ если возможные значения НСВ X принадлежат отрезку $[a; b]$, то она всегда имеет математическое ожидание и оно равно

$$\int_a^b x \cdot f(x)dx$$

Пример 1. *Найти математическое ожидание* $M(\xi)$ *дискретной случайной величины* ξ, *заданной законом распределения:*

ξ	***-5***	***2***	***3***	***4***
P	***0,4***	***0,3***	***0,1***	***0,2***

Решение. $M(\xi) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0.3$.

Пример 2. *Найти математическое ожидание* $M(\xi)$ *случайной величины* ξ, *заданной плотностью распределения:* $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Решение.

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_{0}^{\pi/2} x \cos x dx = x \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$$

в) Функции от случайных величин

Пусть ДСВ X может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$
с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$

$y = \varphi(x)$ – некоторая функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функцией* $y = \varphi(X)$ *от* ДСВ X *называется* СВ Y, *которая принимает значения*

$$y_1 = \varphi(x_1),\quad y_2 = \varphi(x_2),\quad \ldots,\quad y_n = \varphi(x_n),\ \ldots$$

с вероятностями $p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \ldots$

Замечание. Если все значения $y_k = \varphi(x_k)$ различны, то ряд распределения СВ $Y = \varphi(X)$ будет иметь вид

y_i	y_1	y_2	y_3	…	y_n	….
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_n	…

Если среди значений $y_k = \varphi(x_k)$ есть равные, то соответствующие столбцы следует объединить в один, сложив соответствующие вероятности.

Аналогично вводится понятие функции от НСВ.

Пусть X – НСВ с плотностью вероятностей $f(x)$.

$y = \varphi(x)$ – монотонная дифференцируемая функция

$y = g(x)$ – обратная к функции $\varphi(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функцией* $y = \varphi(X)$ *от НСВ X называется* СВ Y, *принимающая значения* $\varphi(x)$ *и распределенная по закону с плотностью вероятностей* $f(g(x)) \cdot |g'(x)|$.

Замечание. Функцию $\varphi(X)$ можно определить и в случае, когда $g(x)$ – непрерывная функция. Но общей формулы для плотности вероятностей в этом случае нет.

МО функции от СВ находится по формуле

для ДСВ: $$M[\varphi(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(x_i) p_i$$

для НСВ: $$M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot f(x) dx$$

г) Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной равно самой постоянной:

$$M(C) = C$$

2. Для произвольной функции $\varphi(\xi)$, случайного аргумента ξ:

$$M(\varphi(\xi)) = \begin{cases} \sum_k \varphi(x_k) P(\xi = x_k) & \text{для ДСВ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, f_\xi(x) dx & \text{для НСВ} \end{cases}$$

Аналогичные формулы имеют место и для функции нескольких случайных величин. Например, математическое ожидание функции двух величин, имеющих непрерывное распределение:

$$M(\varphi(\xi, \eta)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y)\, f_{\xi,\eta}(x, y) dxdy$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(C\xi) = CM(\xi)$$

4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий:

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta)$$

5. Математическое ожидание произведения *независимых* случайных величин равно произведению математических ожиданий:

$$M(\xi\eta) = M(\xi)M(\eta)$$

6. Неравенство Йенсена. Если функция φ(x) выпукла вниз (вверх), то:

$$M(\varphi(\xi)) \geq \varphi(M(\xi)) \qquad (M(\varphi(\xi)) \leq \varphi(M(\xi)))$$

2. Дисперсия случайной величины. Среднее квадратическое отклонение

Рассмотри СВ X и Y:

x_i	$-0,1$	$0,1$
p_i	$0,5$	$0,5$

y_i	-4	6
p_i	$0,6$	$0,4$

Имеем: $\mathrm{M}[X] = \mathrm{M}[Y] = 0$

$\Rightarrow$ зная только одно математическое ожидание нельзя судить ни о том, какие значения принимает СВ, но о том, как они рассеяны вокруг МО.

Необходимо ввести такую числовую характеристику, которая позволила бы оценить, как рассеяны возможные значения СВ относительно МО.

Пусть X – СВ, имеющая математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Отклонением*** СВ X ***от ее математического ожидания*** *называется разность* $X - \mathrm{M}[X]$.

Найдем $\mathrm{M}[X - \mathrm{M}[X]]$.

Получим $\mathrm{M}[X - \mathrm{M}[X]] = 0$

$\Rightarrow$ отклонение СВ X от ее математического ожидания не может служить хорошей характеристикой рассеивания СВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Дисперсией*** СВ X *называется математическое ожидание квадрата отклонения* СВ X *от ее математического ожидания.*

Обозначают: $\mathrm{D}[X]$.

Таким образом, $\mathrm{D}[X] = \mathrm{M}[(X - \mathrm{M}[X])^2]$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{D}[X] = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i - \mathrm{M}[X])^2 p_i, & X - \text{ДСВ}; \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathrm{M}[X])^2 \cdot f(x)dx, & X - \text{НСВ}. \end{cases}$$

На практике, для вычисления дисперсии удобнее пользоваться следующей формулой: $D[X] = M[X^2] - M[X]^2$

Дисперсия имеет размерность, равную квадрату размерности отклонения СВ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Средним квадратическим отклонением* СВ X *от ее математического ожидания* $M[X]$ *называется величина*

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}$$

ПРИМЕР. Найти $D[X]$ ДСВ X, заданной рядом распределения

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

ПРИМЕР. Найти $D[X]$ НСВ X, заданной плотностью вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x, & 0 \le x \le 3; \\ 0, & x \notin [0;\ 3]. \end{cases}$$

ПРИМЕР. Найти D[*X*] ДСВ *X*, заданной рядом распределения

x_i	1	3	5	7	9
p_i	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Решение в Excel:

2									
3									
4	x	1	3	5	7	9			
5	x^2	1	9	25	49	81			
6	p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1			
7	M(x)	0,1	0,6	1,5	2,1	0,9	5,2	27,04	$M^2(x)$
8	$M(x^2)$	0,1	1,8	7,5	14,7	8,1		32,2	$M(x^2)$
9	D(x)							5,16	D(x)
10	σ(x)							2,271563	σ(x)
11									

ПРИМЕР. Найти D[X] НСВ X, заданной плотностью вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{9}x, & 0\le x\le 3;\\ 0, & x\notin[0;\,3].\end{cases}$$

Решение:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\frac{2}{9}\int_0^3 x^2dx=\frac{2}{9}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^3=2$$

$$M(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)dx=\frac{2}{9}\int_0^3 x^3dx=\frac{2}{9}\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}$$

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=4{,}5-4=0{,}5$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}5}\approx 0{,}71$$

Свойства дисперсии

1. Для дисперсии справедлива формула:

$$D(\xi) = M\left(\xi^2\right) - M^2(\xi)$$

2. Дисперсия постоянной равна нулю:

$$D(C) = 0$$

3. Дисперсия произведения постоянной величины на случайную величину равна произведению квадрата постоянной на дисперсию случайной величины:

$$D(C\xi) = C^2 D(\xi)$$

4. Дисперсия суммы (разности) независимых величин равна сумме дисперсий:

$$D(\xi \pm \eta) = D(\xi) + D(\eta)$$

в частности:

$$D(\xi \pm C) = D(\xi)$$

3. Мода и медиана (х-ка положения СВ)

Недостатки МО и дисперсии – они могут не существовать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Модой ДСВ *называется то ее значение, которое она принимает с наибольшей вероятностью.*

Модой НСВ *называется значение х, в котором функция плотности вероятностей достигает максимума.*

Из определения $\Rightarrow$ мода может быть не единственной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Медианой*** НСВ X *называется действительное число, являющееся корнем уравнения* $F(x) = 0{,}5$.

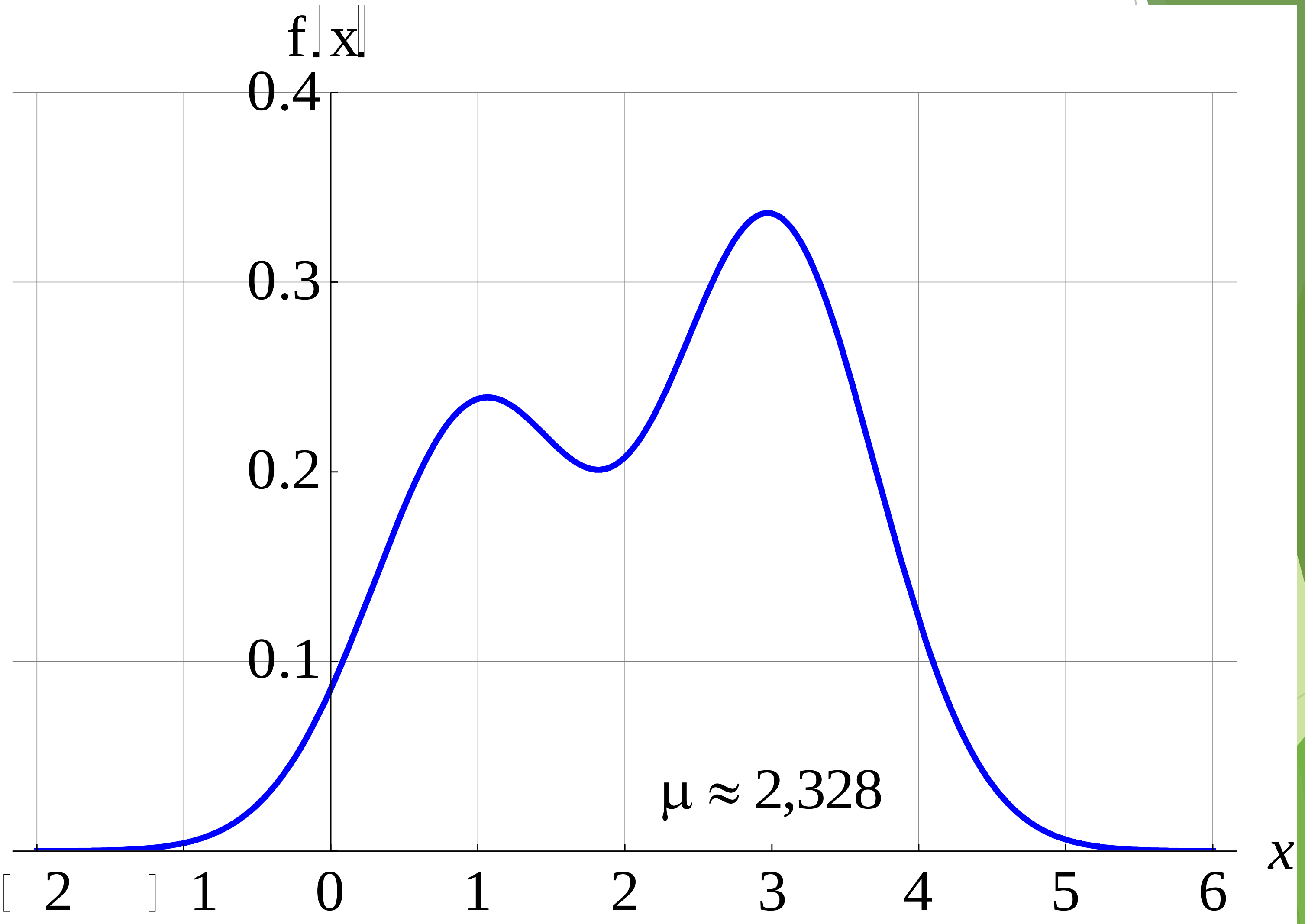
Обозначают: Me(X).

Из определения медианы следует, что

$$\text{Если } \mathrm{Me}(X) = x_0 \text{, то } P(X > x_0) = P(X < x_0) = 0{,}5$$

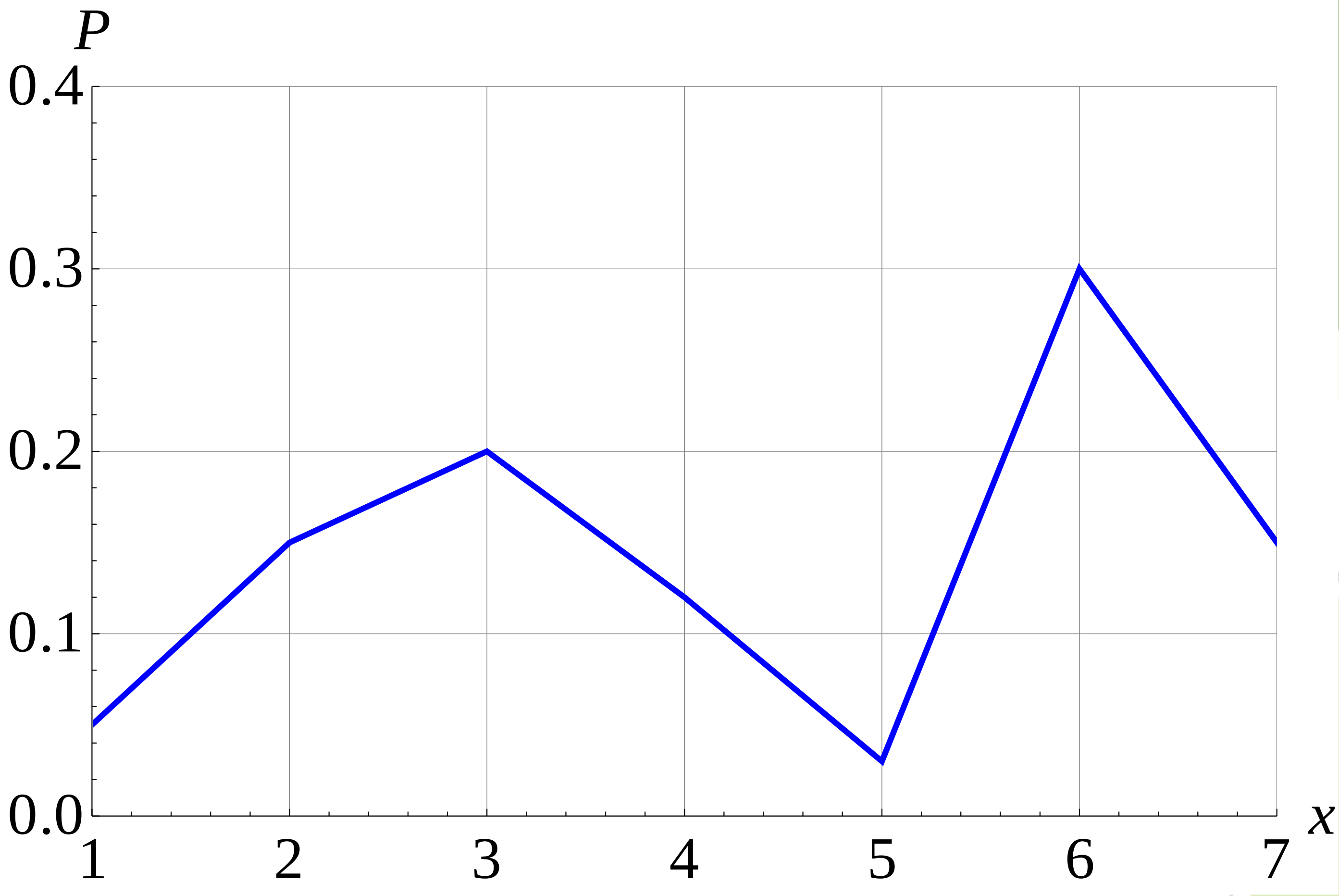
$\Rightarrow$ медиана – точка на оси Ox, такая, что прямая, проведенная через нее параллельно оси Oy, делит пополам площадь, ограниченную кривой плотности вероятностей и осью Ox.

Мода и медиана случайной величины



.

Мода и медиана случайной величины



X	1	2	3	4	5	6	7
P	**0,05**	**0,15**	**0,2**	**0,12**	**0,03**	**0,3**	**0,15**

4. Начальные и центральные моменты. Асимметрия и эксцесс СВ

Начальным моментом k-го порядка СВ X называется МО СВ X^k

Для ДСВ $$m_k = M(X^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$$

Для НСВ $$m_k = M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx$$

Центральным моментом k-го порядка СВ X называется МО СВ $(X - M(X))^k$.

Для ДСВ $$\mu_k = M(X - M(X))^k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^k p_i$$

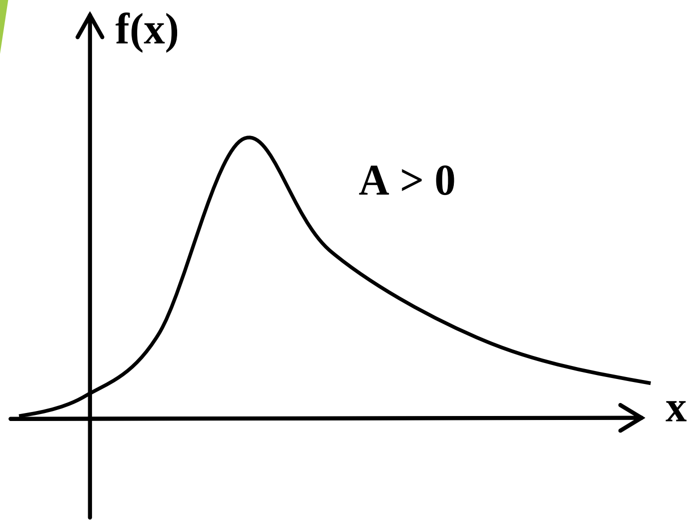
Для НСВ $$\mu_k = M(X - M(X))^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x)dx$$

Очевидно, что: m_1 = M(X) и μ_1=0, μ_2 =D(X).

Если распределение СВ симметрично относительно ее математического ожидания, то все центральные моменты нечетного порядка окажутся равными нулю ($\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \ldots = 0$).

Если распределение несимметрично, то центральные моменты нечетного порядка (за исключением μ_1, который всегда равен нулю) будут отличны от нуля, и чем больше величины этих моментов, тем больше степень асимметрии распределения.

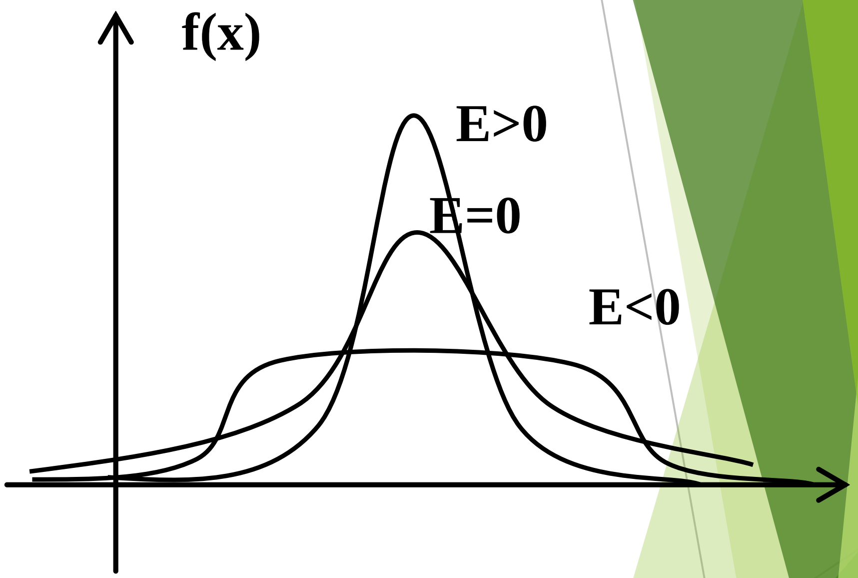
Величина $A = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3(X)}$ называется коэффициентом **асимметрии** или коэффициентом скошенности.



Величина $E = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4(X)} - 3$ называется **эксцессом** распределения или коэффициентом островершинности.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \Re$$

$$E(\xi) = 0$$



Для самого распространенного в природе нормального закона распределения коэффициент асимметрии $A = 0$, а эксцесс $E = 3$.


СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ