

Вариант 1

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = \frac{6 - 6i}{-i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[5]{-32}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$|z| + z = 2 + i.$$

4. а) Постройте на комплексной плоскости множество точек:

$$D = \{z : 0 < \arg(z - 1 - 3i) \leq \pi, |z - 1 - 3i| > 2\};$$

б) Запишите неравенствами область: полуполоса, расположенная между прямыми $x = 1$, $x = 2$ выше прямой $y = 1$.

5. Запишите в алгебраической форме:

$$а) \frac{1}{i^{30}}; \quad б) \operatorname{Ln}(-2i).$$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = z \operatorname{Re} z^2$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1 + i$ при отображении $w = \ln(z - 1)$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = 2(x^2 - y^2) - 3x, \quad f(1) = -i.$$

9. Вычислите $\int_l \operatorname{Im} z dz$, если l – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 2$, $z_2 = 2i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{dz}{z^3(z-2i)^2}$, если

$$а) C = \{z : |z| = 1\}; б) C = \{z : |z - 2i| = 1\}; в) C = \{z : |z| = 3\}.$$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \ln(1 + e^z)$ по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

$$а) f(z) = \frac{1 - e^{2zi}}{(z + \pi)^2}, \quad z_0 = -\pi; \quad б) f(z) = (z + 1)^2 \cos \frac{1}{z + 1}, \quad z_0 = -1; \quad в) f(z) = \frac{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}{z^5}, \quad z_0 = 0.$$

13. Найдите вычеты:

$$а) \operatorname{res}_{z=0} \left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \right); \quad б) \operatorname{res}_{z=\frac{i\pi}{2}} \frac{e^{2z}}{\left(z - \frac{i\pi}{2} \right)^3}; \quad в) \operatorname{res}_{z=\infty} \left((z+i) \exp \frac{1}{z} \right); г) \operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{3z} \right).$$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{5^n(1+in)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(z+1+i)^n}$$

15. Разложите функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

по степеням z . Укажите область сходимости полученного ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2},$$

приняв центр ряда в точке $z_0 = -2$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

$$а) \oint_{|z|=3} \frac{z dz}{(z+2)^2(z-1)^2}; \quad б) \oint_{|z|=\frac{1}{3}} (z+1) e^{\frac{1}{z}} dz.$$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

$$а) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}; б) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\sin x}; \quad в) \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{zt} dx}{(z^2+1)}, \quad t > 0.$$

Вариант 2

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = -6.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[4]{(-2 + 2i)^3}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin z = \frac{4}{3}i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

а) $D = \left\{ z : \frac{\pi}{2} < \arg(z-i) \leq \pi, |z-i| < 2 \right\};$

б) $D = \{z : \operatorname{Re}(z+1) > 0, 0 < \operatorname{Im}(z+1) < 3\}.$

5. Запишите в алгебраической форме:

а) $\operatorname{ch}(1+i);$ б) $\operatorname{Arcsin}(-2i).$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если

$$w = (z+i) \operatorname{ch} z.$$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 2i$ при отображении

$$w = e^{-x}(\cos y - i \sin y).$$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $u = x^2 - y^2, f(-i) = -1.$

9. Вычислите $\int_{\Gamma} e^{\bar{z}} dz$, где Γ – ломаная с вершинами в точках $0; 1; 1+i.$

10. Вычислите $\int_C \frac{z dz}{z^2 - 1}$, если а) $C = \left\{ z : |z-1| = \frac{1}{2} \right\};$ б) $C = \{z : |z+2| = 2\};$ в) $C = \{z : |z| = 2\}.$

11. Найдите по формулам Тейлора три первых члена разложения функции $f(z) = e^z \sin z$ по степеням z . Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

а) $f(z) = \frac{1 - e^{(z+i)}}{z+i}, z_0 = -i;$ б) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{\sin^2 z - z^2}, z_0 = 0;$

в) $f(z) = z \cos \frac{1}{z-2i}, z_0 = 2i.$

13. Найдите вычеты:

а) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{z - \sin z}{z^3};$ б) $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{e^z}{(z+1)^2};$

в) $\operatorname{res}_{z=\infty} (z+2) \cos \frac{1}{z};$ г) $\operatorname{res}_{z=i} \sin \frac{z}{z-i}.$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{i}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+4i}{z}\right)^n.$

15. Разложите функцию в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2}.$

Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана по степеням z функцию $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$ в кольце $1 < |z| < 2.$

17. Найдите возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$, приняв центр ряда в точке $z_0 = 2.$

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

а) $\oint_{|z-6|=5} \frac{z^2}{\sin z} dz;$ б) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} (z+2)e^{\frac{z}{2}} dz.$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2};$ б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5 \sin x + 3}};$ в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + 4x + 20}.$

Вариант 3

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \sqrt{3} + 3i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt[5]{-2+2i}.$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

а) $D = \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}, \quad z \cdot \bar{z} < 4 \right\};$

б) $D = \{z : \operatorname{Re}(z-2i) > 1, \quad 0 < \operatorname{Im}(z-2i) < \pi\}.$

5. Запишите в алгебраической форме:

а) $\sin \frac{2}{1-i};$

б) $\operatorname{Ln}(2i-2).$

6. Выделите $\operatorname{Im} w, \operatorname{Re} w$, если $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = i$ при отображении $w = z^2 + 2z.$

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy)$, $f(0) = 0.$

9. Вычислите $\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz$, где C – ломаная с вершинами в точках $0; 1; 1+2i.$

10. Вычислите $\int_C \frac{e^z dz}{z^2(z-2)}$, если а) $C = \left\{ z : |z| = \frac{1}{2} \right\};$ б) $C = \left\{ z : |z-2| = \frac{1}{2} \right\};$ в) $C = \{z : |z| = 3\}.$

11. Найдите первые три члена разложения функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ в ряд Тейлора по степеням z непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определить характер особых точек функций:

а) $f(z) = \frac{1 - e^{2(z+2)}}{(z+2)}, \quad z_0 = -2;$

б) $f(z) = \frac{\cos(z-1) - 1}{\sin^2(z-1) - (z-1)^2}, \quad z_0 = 1;$

в) $f(z) = z \cos \frac{1}{z+3}, \quad z_0 = -3.$

13. Найдите вычеты:

а) $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}} \left(z - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} z;$

б) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3};$

в) $\operatorname{res}_{z=\infty} (z+2) \cos \frac{2}{z};$

г) $\operatorname{res}_{z=1} z^2 \cdot e^{1-z}.$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n}.$$

15. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ в окрестности точки $z = \infty.$ Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z-1}$ по степеням $(z-1).$ Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}, \quad \text{приняв центр ряда в точке } z_0 = -i.$$

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

а) $\oint_{|z-3|=3} \frac{e^{2z}}{(z^2-1)(z^2-4)} dz;$

б) $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} z \cos^2 \frac{2}{z} dz.$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2};$

б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4\sqrt{5} \sin x + 9};$

в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}.$

Вариант 4

1. Представьте в тригонометрической и показательной форме число

$$z = 2i.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости

$$\sqrt[3]{\left(\sqrt{3} - \frac{1}{i}\right)^2}.$$

3. Решите уравнение

$$2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = i.$$

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

а) $D = \left\{ z : \frac{\pi}{4} < \arg z \leq \frac{3\pi}{4}, |z| < 3 \right\},$

б) $D = \{ z : \operatorname{Im}(z+i) \geq 2, 0 < \operatorname{Re}(z+i) < \pi \}.$

5. Запишите в алгебраической форме:

а) $\operatorname{sh}\left(1 + \frac{\pi}{4}i\right);$

б) $\operatorname{Arccos}(-i).$

6. Выделите $\operatorname{Re} w$ и $\operatorname{Im} w$, если $w = e^{iz}$

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = -i$ при отображении $w = -iz^2$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если

$$u = 2\sin x \operatorname{ch} y - x, \quad f(0) = 0.$$

9. Вычислите $\int_l e^{\bar{z}} dz$, где l – ломаная с вершинами в точках $0, i, 1 + i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\cos z dz}{z(z - \frac{\pi}{2})^3}$, если а) $C = \left\{ z : |z| = \frac{1}{2} \right\};$ б) $C = \{ z : |z-2|=1 \};$ в) $C = \{ z : |z|=2 \}.$

11. Найдите первые три члена разложения функции $f(z) = e^z$ в ряд Тейлора по степеням $\left(z - \frac{1}{2}\right)$ непосредственным вычислением коэффициентов ряда. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

а) $f(z) = \frac{1 - e^{z-1}}{z-1}, z_0 = 1;$ б) $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3(z+1)^2}, z_0 = 0;$

в) $f(z) = \sin \frac{z}{z-2}, z_0 = 2.$

13. Найдите вычеты:

а) $\operatorname{res}_{z=0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sin z} \right);$

б) $\operatorname{res}_{z=i} \frac{z}{(z^2+1)^2};$

в) $\operatorname{res}_{z=1} z \exp \frac{2}{z-1};$

г) $\operatorname{res}_{z=\infty} (z+2)^2 \sin \frac{1}{z}.$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{|n|} z^n.$

15. Разложите в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ функцию $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z}.$ Укажите область сходимости ряда.

16. Разложите в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z = i$ функцию

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}.$$

Укажите область сходимости ряда.

17. Найдите возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{1}{z^2 - z - 2},$ приняв центр ряда в точке $z_0 = 0.$

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах:

а) $\oint_{|z|=4} \operatorname{ctg} z dz;$

б) $\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} z^2 \cos \frac{1}{z-1} dz.$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)};$ б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{7} \sin x + 4};$ в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x dx}{x^2 + 1}.$

Вариант 5

1. Представьте в тригонометрической и показательной формах число

$$z = \frac{1}{i}.$$

2. Вычислите и постройте на комплексной плоскости числа

$$\sqrt{(1-i\sqrt{3})^3}.$$

3. Решите уравнение $\bar{z} = z^3$.

4. Постройте на комплексной плоскости множества точек:

а) $D = \left\{ z : \frac{\pi}{3} < \arg(z-i) \leq \frac{2}{3}\pi, \quad 1 \leq |z-i| < 2 \right\};$

б) $D = \{z : \operatorname{Re}(z+2i) > 0, \quad \operatorname{Im}(z+2i) < 0\}.$

5. Запишите в алгебраической форме:

а) $\ln\left(\frac{-1}{1+i}\right);$ б) $\operatorname{Arc} \cos(-2i+1).$

6. Выделите $\operatorname{Im} w$ и $\operatorname{Re} w$, если $w = \frac{1-z}{1+z}$.

7. Найдите угол поворота α и коэффициент растяжения k в точке $z_0 = 1+i$ при отображении $w = iz^2$.

8. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, если $v = 2xy - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, $f(1+i) = -1+2i$.

9. Вычислите $\int_{\Gamma} (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z) dz$, где Γ – отрезок, соединяющий точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1+2i$.

10. Вычислите $\int_C \frac{\sin^2 z dz}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)\left(z - \frac{\pi}{4}\right)}$, если а) $C = \{z : |z-2|=1\};$ б) $C = \{z : |z|=1\};$ в) $C = \{z : |z|=2\}.$

11. Найдите три первых члена разложения функции $f(z) = \cos z$ по степеням $\left(z + \frac{\pi}{4}\right)$. Укажите область сходимости ряда.

12. Определите характер особых точек функций:

а) $f(z) = \frac{1 - \cos(z+2i)}{(z+2i)^4}$, $z_0 = -2i$;

б) $f(z) = \sin \frac{z}{z-3}$, $z_0 = 3$;

в) $f(z) = \frac{e^{z+i} - 1}{z+i}$, $z_0 = -i$.

13. Найдите вычеты:

а) $\operatorname{res}_{z=1} \frac{z-1 - \sin(z-1)}{(z-1)^3};$ б) $\operatorname{res}_{z=-1} \frac{e^z}{z^2(z+1)^3};$

в) $\operatorname{res}_{z=\infty} (z-4)\cos \frac{3}{z};$ г) $\operatorname{res}_{z=0} \left(\cos \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \right).$

14. Найдите и постройте область сходимости ряда Лорана $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+1}{n+i} \right)^n.$

15. Разложите функцию $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ в окрестности точки $z = \infty$ в ряд Лорана. Укажите область сходимости полученного ряда.

16. Разложите в ряд Лорана функцию $f(z) = \frac{1}{z(z-3)}$ в проколотой окрестности точки $z_0 = 3$. Укажите область сходимости ряда.

17. Найти возможные разложения в ряд функции $f(z) = \frac{z}{z^2 - z - 2}$, приняв центр ряда в точке $z_0 = -1$.

18. Вычислите интегралы, применяя теорему о вычетах: а) $\oint_{|z|=1} \frac{z}{16z^4+1} dz;$ б) $\oint_{|z|=2} \frac{1}{\sin^2 z} dz.$

19. Вычислите интегралы с помощью вычетов:

а) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^3}$ б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3\sin x + 5};$ в) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x dx}{x^2 - 2x + 2}.$