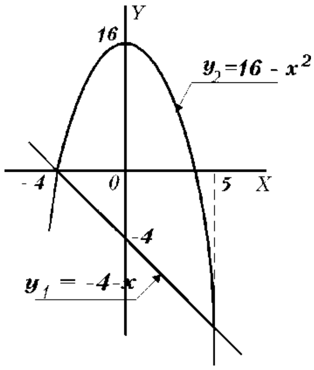
Вычисление площади фигуры

Задача 1.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: параболой $y=16-x^2$ и прямой $x+y+4=0$.



Решение

Строим фигуру.

Наилучшим образом в данном случае подходит формула $S=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]\,dx$.

Находим абсциссы точек пересечения линий

$$-4-x=16-x^2 \Rightarrow x^2-x-20=0 \Rightarrow x_1=-4,\ x_2=5.$$

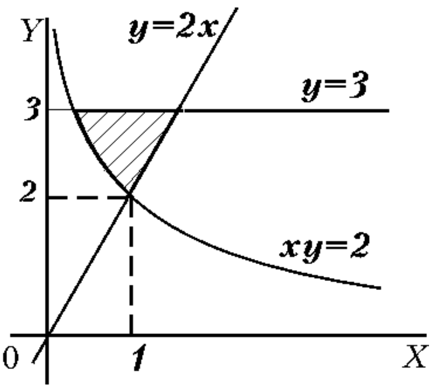
В пределах изменения аргумента $-4\le x\le 5$ верхней границей служит $y_2(x)=16-x^2$, а нижней $y_1(x)=-4-x$.

Площадь фигуры $S=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]\,dx=\int_{-4}^{5}\left[(16-x^2)-(-4-x)\right]dx=$

$$=\int_{-4}^{5}(20-x^2+x)\,dx=(20x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2})\Big|_{-4}^{5}=180-\frac{189}{3}+\frac{9}{2}=121,5.$$

Задача 2.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy=2,\quad y=2x,\quad y=3.$



Решение

Строим фигуру. Видим, что наиболее подходит для решения задачи формула

$$S=\int_c^d[x_2(y)-x_1(y)]\,dy.$$

В нашем случае $x_2(y)=2/y,\ x_1(y)=y/2, c=2,\ d=3.$

(Значение $c=2$ получили как точку пересечения графиков функций $xy=2,\quad y=2x$).

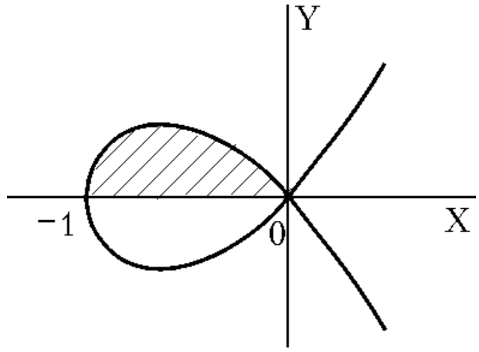
Итак, $S=\int_2^3\left(\frac{y}{2}-\frac{2}{y}\right)dy=\left(\frac{y^2}{4}-2\ln y\right)\Big|_2^3=\frac{5}{4}-2\ln\frac{3}{2}.$

Задача 3.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x = t^2 - 1, \quad y = t^3 - t.$

Решение

Строим кривую. Видим, что фигура симметрична относительно оси OX. Найдем площадь верхней половинки и результат умножим на 2. Это криволинейная трапеция. Изменению x от -1 до 0 соответствует изменение параметра t от 0 до -1.



Следовательно, площадь, ограниченная петлей, может быть найдена по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'_t \cdot dt = 2\int_0^{-1} (t^3 - t) \cdot (t^2 - 1)' \, dt = 2\int_0^{-1} (t^3 - t) \cdot 2t \, dt =$$

$$= -4\int_{-1}^{0} (t^4 - t^2) \, dt = -4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

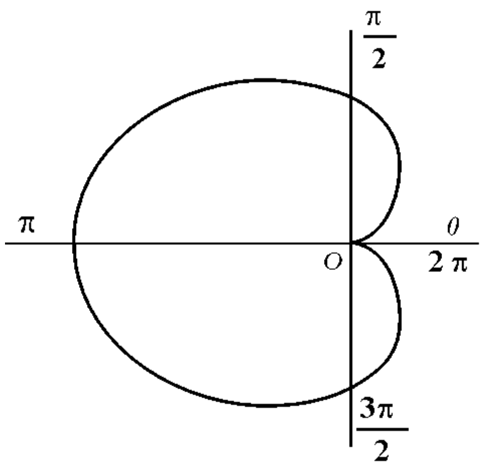
Задача 4.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $\rho = 1 - \cos\varphi.$

Решение

Строим линию в полярных координатах. Площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, будем вычислять по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \, d\varphi$$



Функция $\rho(\varphi) = 1 - \cos\varphi.$ При определении пределов интегрирования учтем симметрию фигуры. Можно взять интеграл по φ в пределах от 0 до $\pi,$ и результат удвоить. Тогда площадь фигуры

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi) \, d\varphi = \int_0^{\pi} (1 - \cos\varphi)^2 \, d\varphi = \int_0^{\pi} (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(1 - 2\cos\varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \int_0^{\pi} \left(3/2 - 2\cos\varphi + \frac{\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi =$$

$$= \left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi.$$