Глава 1. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В настоящей главе рассматриваются вопросы интегрирования функций нескольких независимых переменных по плоским и пространственным областям и приложение таких интегралов к решению геометрических и физических задач.

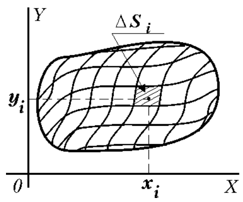
1.1. Двойной интеграл

1.1.1. Понятие и свойства

Двойной интеграл является логическим продолжением понятия определенного интеграла на случай функции двух независимых переменных по плоской области.

Пусть в замкнутой области (D) плоскости XOY определена функция $z = f(x, y)$. Повторим схему, аналогичную схеме построения определенного интеграла.

Разобьем область (D) произвольной сеткой линий на элементарные части $\Delta s_i \quad (i = 1, 2, \dots n)$, вычислим значения функции в произвольной точке каждой элементарной области и составим интегральную сумму.



Определение. Интегральной суммой для функции $z = f(x, y)$ по области (D) называется сумма произведений значений функции в выбранных точках на площади соответствующих частичных (элементарных) областей: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta\ s_i$.

Определение. Двойным интегралом от функции $z = f(x, y)$ по области (D) называется предел полученной интегральной суммы при неограниченном увеличении числа разбиений области на части и стремлении площадей всех элементарных участков к нулю.

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,\ y_i)\,\Delta\ s_i$$

Область (D) называется областью интегрирования для подынтегральной функции $z = f(x, y)$.

Теорема существования двойного интеграла.
Если подынтегральная функция $f(x,y)$ является непрерывной или кусочно–непрерывной в области (D), то двойной интеграл всегда существует и равен определенному числу.

Геометрический смысл двойного интеграла. Если функция $f(x,y)$ неотрицательна в (D), то двойной интеграл есть объем цилиндрического тела с основанием (D), образующей, параллельной оси Z, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$. $V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)\,ds.$

Если подынтегральная функция в области (D) плоскости XOY тождественно равна единице $f(x,y) \equiv 1$, то двойной интеграл от ds есть площадь области интегрирования (D): $S = \iint\limits_{(D)} ds.$

Физический смысл двойного интеграла. Если плоская пластинка, занимающая область (D) в плоскости XOY, имеет переменную поверхностную плотность $\delta(x,\ y)$, то двойной интеграл есть масса этой пластинки. $M = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\,ds.$

Свойства двойного интеграла во многом повторяют свойства определенного интеграла. Отметим кратко эти свойства.

1. Почленное интегрирование. Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме итегралов от слагаемых.

$$\iint\limits_{(D)} [\,f(x,\ y) \pm g(x,\ y)\,]\ ds = \iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\ ds \pm \iint\limits_{(D)} g(x,\ y)\ ds.$$

2. Вынесение постоянного множителя. Постоянный множитель можно вынести за знак двойного интеграла

$$\iint\limits_{(D)} k \cdot f(x,\ y)\ ds = k \cdot \iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\ ds.$$

3. Разбиение области интегрирования на части. Если область интегрирования разбить на части, то двойной интеграл можно представить в виде суммы интегралов по отдельным частям области

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\ ds = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\ ds + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)\ ds + \cdots + \iint\limits_{(D_n)} f(x,y)\ ds.$$

4. Оценка двойного интеграла. Если M и m – наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y)$ в области (D), то

$$m \cdot S \le \iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\, ds \le M \cdot S, \qquad \text{где } S \text{ – площадь области } (D).$$

5. Теорема о среднем для двойного интеграла. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области (D), то справедливо

$\iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\, ds = f(C) \cdot S$, где S– площадь области интегрирования,

а C – некоторая точка этой области. Значение функции $f(C)$ называется *средним значением функции в области.* Среднее значение, таким образом, вычисляется по формуле $f(C) = \dfrac{1}{S} \iint\limits_{(D)} f(x,\ y)\, ds$.

В геометрическом смысле теорема о среднем означает, что объем цилиндрического тела равен объему равновеликого цилиндра с тем же основанием и высотой, равной значению подынтегральной функции в некоторой точке области интегрирования.

1.1.2. Двойной интеграл в прямоугольных координатах

Для вычисления двойного интеграла от данной функции по данной области рекомендуется действовать по следующей схеме.

1) Строится в системе координат XOY область интегрирования.

2) Элементом площади ds является прямоугольник с размерами dx и dy, поэтому $ds = dx\, dy$.

3) Для заданной области (D) выбирается порядок интегрирования в соответствии со схемами 1 или 2, определяются пределы изменения переменных x и y и строится соответствующий повторный (или *двукратный*) интеграл (см. рис. 1 и 2).

Интеграл, стоящий в повторном на первом месте, называется *внешним*, а интеграл, стоящий после внешнего – *внутренним.*

4) Сначала вычисляется внутренний интеграл. При этом одна из переменных x или y, в зависимости от выбранного порядка интегрирования, считается постоянной величиной (в первой из приведенных выше формул такой переменной будет y, во второй – x.)

5) После выполнения внутреннего интегрирования по формуле Ньютона-Лейбница внешний интеграл вычисляется как обычный определенный интеграл.

Схема 1.

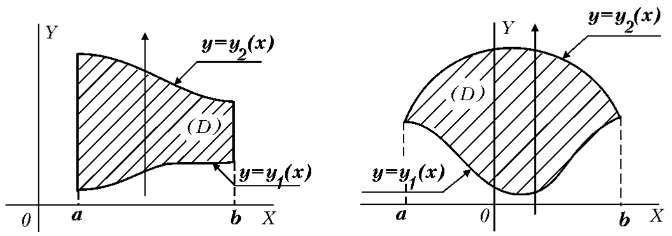


Рис. 1.

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\;ds = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

Схема 2.

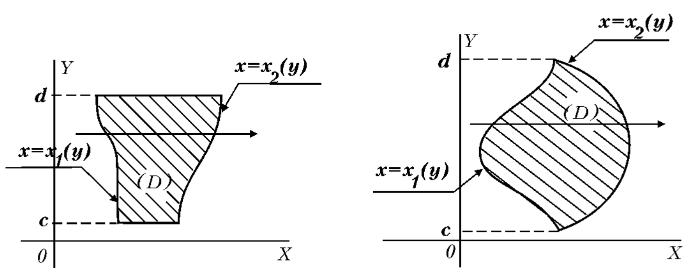


Рис. 2.

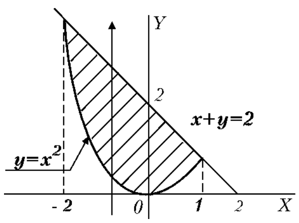
$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\;ds = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$$

З а м е ч а н и е. Пределы интегрирования во внешнем интеграле всегда постоянны. Ими служат координаты концов отрезка – проекции области (D) на соответствующую координатную ось. Пределы внутреннего интеграла, как правило, переменные. Они представляют собой функции, задающие границы области (D). Лишь в том случае, когда область (D) представляет собой прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, пределы внутреннего интегрирования также становятся постоянными.

Удобно при расстановке пределов интегрирования использовать "стрелки", пересекающие область снизу вверх параллельно оси OY (для 1-ой схемы расстановки пределов) или слева направо параллельно оси OX (для 2-ой схемы). Те кривые, на которой "стрелки" входят в область, называют линиями *входа*, а те кривые, на которой "стрелки" выходят из области, называют линиями *выхода*.

Задача 1. Записать двойной интеграл по указанной области (D) в виде повторного и расставить пределы интегрирования.

• **1.** Область (D) ограничена линиями $y = x^2$ и $x + y = 2$.
Строим область (D). Из рисунка видно, что область ограничена сверху одной линией – прямой $x + y = 2$, а снизу – другой линией – параболой $y = x^2$, т.е. для данной области удобно расставлять пределы интегрирования в соответствие с 1-ой схемой.



Поэтому спроектируем область на ось OX. Получим отрезок, концами которого являются проекции на ось OX точек пересечения параболы и прямой.
Для нахождения абсцисс крайней левой и крайней правой границ области решаем систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ x + y = 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x, \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x^2 = 2 - x, \\ x^2 + x - 2 = 0, \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1, \\ x_2 = -2. \end{matrix}$$

Итак, проекцией области на ось OX будет отрезок $[-2;\ 1]$.
Пределы изменения внешней переменной x определены.
Как меняется при этом внутренняя переменная y мы узнаем, выразив ее как функцию x из уравнений, задающих линию входа и линию выхода (при решении системы мы это уже сделали).
Таким образом, для расстановки пределов интегрирования в повторном интеграле мы имеем:
при изменении переменной x в интервале $[-2;\ 1]$ значения переменной y будут находиться в пределах от $y_1(x) = x^2$ (линия входа в область) до $y_2(x) = 2 - x$ (линия выхода). Запишем повторный интеграл

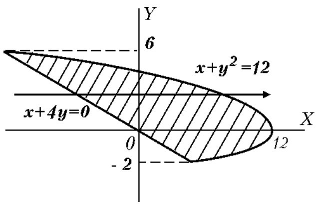
$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

• **2.** Область (D) ограничена линиями: $x + y^2 = 12$ и $x + 4y = 0$.

Построим область (D). Она ограничена параболой

$$x + y^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -(x - 12)$$

с вершиной в точке $O'(12;\ 0)$ и ветвями, направленными влево, и прямой $x + 4y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -4y$.



Из рисунка видно, что область ограничена слева одной линией –(прямой $x + 4y = 0$), а справа – другой линией (параболой $x + y^2 = 12$), т.е. для данной области удобно расставлять пределы интегрирования согласно 2-ой схеме.

Поэтому спроектируем область на ось OY. Получим отрезок, концами которого являются проекции на ось OY точек пересечения параболы и прямой. Для нахождения ординат крайней нижней и крайней верхней точек области решаем систему

$$\begin{cases} x + y^2 = 12, \\ x + 4y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 - y^2, \\ x = -4y, \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 12 - y^2 = -4y, \\ y^2 - 4y - 12 = 0, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = -2, \\ y_2 = 6. \end{array}$$

Итак, проекцией области на ось OY будет отрезок $[-2;\ 6]$. Пределы изменения внешней переменной y определены.

Как меняется при этом внутренняя переменная x мы узнаем, выразив ее как функцию y из уравнений, задающих линию входа и линию выхода (при решении системы мы это уже сделали).

Таким образом, для расстановки пределов интегрирования в повторном интеграле мы имеем: при изменении переменной y в интервале $[-2;\ 6]$ значения переменной x будут находиться в пределах от $x_1(y) = -4y$ (линия входа в область) до $x_2(y) = 12 - y^2$ (линия выхода). Запишем повторный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx = \int\limits_{-2}^{6} dy \int\limits_{-4y}^{12-y^2} f(x, y)\, dx.$$

• **3**. Область (D) задана неравенствами: $x^2 + y^2 \le 4;\quad x^2 \le 1 - 2y\}$. Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке.

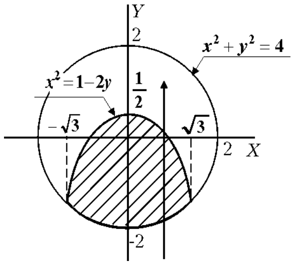
Построим область (D). Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ – уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 2. Уравнение $x^2 = 1 - 2y$– уравнение параболы $x^2 = -2(y - 1/2)$ с вершиной в точке $O'(0;\ 1/2)$ и ветвями, направленными вниз.

1-ой способ

Расставляем пределы интегрирования согласно 1-ой схеме.

Спроектируем область на ось OX.

Из рисунка видно, что область ограничена снизу одной линией –(дугой окружности $x^2+y^2 = 4$), а сверху – другой линией (дугой параболы $x^2 = 1 - 2y$). Проекцией области на ось OX будет являться отрезок, концами которого являются проекции на ось OX точек пересечения параболы и окружности.



Для нахождения абсцисс этих точек решаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x^2 = 1 - 2y, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y^2 - 2y - 3 = 0, \\ x = \pm\sqrt{1 - 2y}, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1 = -1, \quad y_2 = 3, \\ x_1 = -\sqrt{3},\ x_2 = +\sqrt{3}. \end{array}$$

Заметим, что корень $y = 3$ является посторонним.

Итак, проекцией области на ось OX будет отрезок $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$. Пределы изменения переменной x определены.

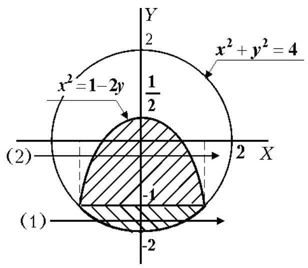
Для расстановки пределов интегрирования по внутренней переменной y необходимо выразить ее как функцию x из уравнений, задающих линию входа (окружность) и линию выхода (параболу). Из уравнения окружности имеем уравнение нижней границы области интегрирования $y_1(x) = -\sqrt{4 - x^2}$, а из уравнения параболы находим уравнение верхней границы $x^2 = 1 - 2y \ \Rightarrow\ y_2(x) = \frac{1}{2} \cdot (1 - x^2)$.

Таким образом, при изменении переменной x в интервале $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}]$ значения переменной y будут находиться в пределах от $y_1(x) = -\sqrt{4 - x^2}$ – (линия входа) до $y_2(x) = \frac{1}{2}\,(1-x^2)$– (линия выхода).

Запишем повторный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}(1-x^2)} f(x,y)\,dy.$$

2-ой способ. Выберем другой порядок интегрирования и рассмотрим расстановку пределов интегрирования по этой же области по 2-ой схеме. Для этого проектируем область (D) на ось OY. Проекцией, как видно из построения, будет являться отрезок $[-2;\ 1/2]$ на оси OY.



Кроме того, видно, что как левая, так и правая границы фигуры не описываются одним уравнением. (Стрелка (1) пересекает область на левой и правой половинках окружности, а стрелка (2) пересекает область на левой и правой ветвях параболы). Поэтому область интегрирования придется разбить на две части линией $y=-1$.

В первой области переменная y будет изменяться в интервале $[-2;\ -1]$. Пределы изменения переменной x получим, выразив ее из уравнения окружности $x^2+y^2=4$. При этом линией входа будет левая полуокружность $x_1(y)=-\sqrt{4-y^2}$, а линией выхода – правая полуокружность $x_2(y)=+\sqrt{4-y^2}$. Итак, интеграл по 1-ой области

$$\iint\limits_{(D_1)} f(x,y)\ dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\ dx=\int\limits_{-2}^{-1} dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx.$$

Во второй области переменная y будет изменяться в интервале $[-1;1/2]$, при этом линией входа будет левая ветвь параболы $x_1(y)=-\sqrt{1-2y}$, а линией выхода – правая ветвь параболы $x_2(y)=+\sqrt{1-2y}$.

Эти уравнения получены выражением переменной x из уравнения параболы $x^2=1-2y \quad\Rightarrow\quad x(y)=\pm\sqrt{1-2y}$. Таким образом

$$\iint\limits_{(D_2)} f(x,y)\ dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\ dx=\int\limits_{-1}^{1/2} dy\int\limits_{-\sqrt{1-2y}}^{+\sqrt{1-2y}} f(x,y)\,dx.$$

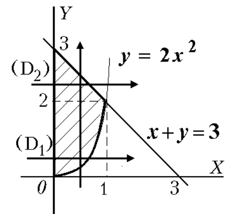
Интеграл по всей области (D) запишется согласно свойству аддитивности в виде суммы двух интегралов

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)\ dx\,dy=\int\limits_{-2}^{-1} dy\int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx+\int\limits_{-1}^{1/2} dy\int\limits_{-\sqrt{1-2y}}^{+\sqrt{1-2y}} f(x,y)\,dx.$$

Сравнивая два способа, видим, что первый способ для данной области более выгоден, так как в первом случае двойной интеграл записался одним, а не двуми повторными, как во втором.

Задача 2. Изменить порядок интегрирования в интегралах.

- **1.** $J = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{y/2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dx.$



В данном интеграле внешнее интегрирование проводится по y, а внутреннее по x. Поставлена задача сменить порядок интегрирования, т.е провести интегрирование по схеме 1.

С помощью указанных в интеграле пределов восстановим область интегрирования.

Указанные пределы интегрирования в повторных интегралах можно прочесть следующим образом: когда переменная y принимает значения от $y = 0$ до $y = 2$, переменная x изменяется от $x_1(y) = 0-$ (ось OY) до $x_2(y) = \sqrt{y/2}-$ парабола. Когда y принимает значения от $y = 2$ до $y = 3$, то переменная x изменяется от $x_1(y) = 0-$ (ось OY) до $x_2(y) = (3-y)$ – это прямая линия.

Таким образом, область интегрирования есть криволинейный треугольник (рис. 3.8.)

Проводим через область стрелочку параллельно оси OY и убеждаемся, в том, что область ограничена снизу одной линией (параболой) и одной линией сверху (прямой). Поэтому повторный интеграл в этой ситуации запишется одним, а не двумя повторными, как было в условии задачи.

Внешний интеграл теперь вычисляется по переменной x, которая изменяется от 0 до 1, что легко определяется при подстановке в уравнение прямой $x = 3 - y$ (или параболы $x = \sqrt{y/2}$) значения ординаты точки пересечения этих линий $y = 2$.

Внутренний интеграл теперь вычисляется по переменной y, и его пределы будут функциями вида $y = y(x)$, задающими нижнюю и верхнюю границы области (D).

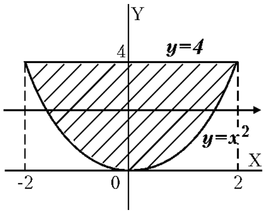
Выражая из уравнения параболы $x = \sqrt{y/2}$ переменную y через x, находим $y = 2x^2$ – линия входа.

Выражая из уравнения прямой $x = 3 - y$ переменную y через x, находим $y = 3 - x$ – линия выхода.

Записываем повторный интеграл $J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)\,dy.$

• **2.** $J = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{4} f(x,y)\,dy.$

С помощью указанных в интеграле пределов восстановим область интегрирования. Она ограничена линиями $x = 2,\ x = -2$ и $y = x^2,\ \ y = 4$. Запишем двойной интеграл по данной области в виде повторного, используя другой порядок интегрирования.



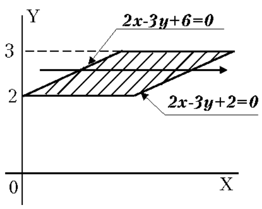
Внешний интеграл вычисляется по переменой y, которая, как видно из рисунка, изменяется от 0 до 4. Внутренний интеграл теперь вычисляется по переменной x, и его пределы будут функциями вида $x = x(y)$, задающими левую и правую границы области (D) (в данном случае – левую и правую ветви параболы).

Выражая из уравнения параболы $y = x^2$ переменную x через y, находим $x = -\sqrt{y}$ – левая граница, $x = \sqrt{y}$ – правая граница.

Записываем повторный интеграл $J = \int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx.$

Задача 3. Вычислить интеграл от функции $z = f(x,y)$ по области (D), ограниченной указанными линиями.

• **1.** $f(x,y) = x + y,\ \ (D): \ 2x - 3y + 6 = 0,\ 2x - 3y + 2 = 0,\ y = 2,\ y = 3.$



1) Строим область (D).
2) При построении повторного интеграла внутреннее интегрирование целесообразно проводить по переменной x, а внешнее – по y.

3) Для расстановки пределов заметим, что переменная y изменяется от $y = 2$ (ордината крайней нижней границы) до $y = 3$ (ордината крайней верхней границы). Внутренняя переменная x при этом меняется от $x_1(y) = \frac{3}{2}y - 3$ (на входе)– левой границе области до $x_2(y) = \frac{3}{2}y - 1$ (на выходе) – правой границе. Эти пределы мы получили, выражая переменную x из уравнений прямых.

4) Записываем интеграл в виде повторного и вычисляем его

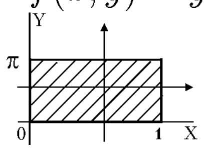
$$\iint\limits_{(D)}(x+y)\ dx\,dy=\int\limits_2^3 dy\int\limits_{\frac{3}{2}y-3}^{\frac{3}{2}y-1}(x+y)\ dx\int\limits_2^3 dy\ \left[\frac{(x+y)^2}{2}\bigg|_{\frac{3}{2}y-3}^{\frac{3}{2}y-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_2^3\left[\left(\frac{3}{2}y-1+y\right)^2-\left(\frac{3}{2}y-3+y\right)^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_2^3\left(\frac{25}{4}y^2-5y+1-\frac{25}{4}y^2+15y-9\right)\ dy=\frac{1}{2}\int\limits_2^3(10y-8)\ dy=$$

$$=\int\limits_2^3(5y-4)\ dy=\left(\frac{5}{2}y^2-4y\right)\bigg|_2^3=\frac{5}{2}(9-4)-4\ (3-2)=\frac{17}{2}=8,5.$$

• **2** $f(x,y)=y\sin(xy),\quad (D):\ y=0,\ y=\pi,\ x=0,\ x=1.$



Область прямоугольная и можно выбрать любой порядок интегрирования. Интегрируя сначала по x, затем по y, получаем:

$$\iint\limits_{(D)}y\ \sin(xy)\,dx\,dy=\int\limits_0^\pi y\ dy\int\limits_0^1\sin(xy)dx=-\int\limits_0^\pi y\ \left[\frac{1}{y}\cos(xy)\ \Big|_0^1\right]\ dy=$$

$$=-\int\limits_0^\pi(\cos y-1)\ dy=(y-\sin y)\ \Big|_0^\pi=\pi.$$

Как уже отмечалось, область интегрирования в данной задаче такова, что выбор порядка интегрирования не имеет никакого принципиального значения. Однако, и именно в данном примере, это не так. Выбрав другой порядок интегрирования, будем иметь:

$$\iint\limits_{(D)}y\sin(xy)\ dx\ dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^\pi y\sin(xy)\ dy=\left|\begin{array}{ll} U=y & dV=\sin(xy)dy\\ dU=dy & V=-\frac{1}{x}\cos(xy)\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_0^1\left[-\frac{y}{x}\cos(xy)\ \Big|_0^\pi+\frac{1}{x}\int\limits_0^\pi\cos(xy)dy\right]\ dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[-\frac{\pi\cos(\pi x)}{x}+\frac{1}{x^2}\sin(xy)\bigg|_0^\pi\right]\ dx=-\pi\int\limits_0^1\frac{\cos(\pi x)}{x}dx+\int\limits_0^1\frac{\sin(\pi x)}{x^2}dx.$$

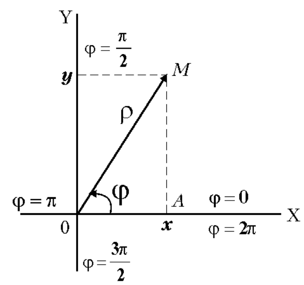
Эти интегралы являются неберущимися, и их значения не могут быть найдены по формуле Ньютона-Лейбница. Данный пример показывает, что рациональность выбора порядка интегрирования определяется не только видом области (D), но и видом подынтегральной функции.

1.1.3. Двойной интеграл в полярных координатах

Напомним, что полярная система координат включает в себя полюс (точка O) и полярную ось (выходящий из точки O горизонтальный луч OA). Положение любой точки M на плоскости в полярной системе координат задается двумя числами:

$\rho = |OM|$ – полярный радиус, равный расстоянию от полюса до точки M

$\varphi = \angle AOM$ – полярный угол, измеряемый в радианах в направлении против движения часовой стрелки.



Полярные и декартовы координаты одной и той же точки M на плоскости при совмещении соответствующих систем, как показано на рисунке, связаны равенствами:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

При вычислении двойного интеграла в полярной системе координат следует придерживаться следующей схемы.

1) Построить область интегрирования.

2) В подынтегральной функции $f(x, y)$ заменить согласно формулам замены переменных при переходе к полярным координатам

$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$ Тогда $f(x;\ y) = f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi).$

3) Записать элемент площади $ds = dx\,dy = |\ J\ |\ d\rho\,d\varphi$, в полярной системе координат.

Найдем J–якобиан перехода от декартовой системы координат к полярной

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} =$$
$$= \rho\cos^2\varphi - (-\rho\sin^2\varphi) = \rho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \rho.$$

Таким образом, элемент площади $ds = dx\,dy$ в полярной системе координат примет вид

$$\boxed{ds = \rho\,d\rho\,d\varphi}.$$

4) Уравнения линий, ограничивающих область D^*, записываются в полярных координатах (перевод декартовых уравнений в полярные рассматривается ниже).

Таким образом, получим двойной интеграл, записанный в полярной системе координат

$$\boxed{\iint\limits_{(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(D^*)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi}.$$

Этот интеграл необходимо свести к повторному. Для этого

5) Определяются пределы изменения переменных ρ и φ и строится соответствующий повторный интеграл.
При этом следует иметь ввиду, что уравнения линий в полярных координатах, как правило, имеют вид $\rho = \rho(\varphi)$ (а не $\varphi = \varphi(\rho)$), поэтому внутренний интеграл практически всегда вычисляется по переменной ρ, а внешний – по φ.

Как и в декартовой системе координат при расстановке пределов интегрирования удобно использовать стрелку, пересекающую область. В полярной системе координат стрелка – это луч, выходящий из полюса и пересекающий границы области на линии входа и выхода.

Подавляющее большинство областей интерирования в полярной системе координат можно соотнести с одной из 4-х приведенных на следующей странице схем, где для каждого случая записаны соответствующие повторные интегралы.

6) Полученный повторный интеграл вычисляется по уже известной схеме: сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной ρ, а затем внешний интеграл по переменной φ.

Использование полярной системы координат при вычислении двойных интегралов оказывается удобным в тех случаях, когда граница области интегрирования (D) образована линиями, уравнения которых в полярных координатах имеют более простой аналитический вид, чем в декартовой системе координат, например, различные окружности, либо их части, лемниската Бернулли и др.
В приложении 2 приведены примеры расстановки пределов интегрирования по различным областям в полярной системе координат.

Полюс внутри или на границе области интегрирования

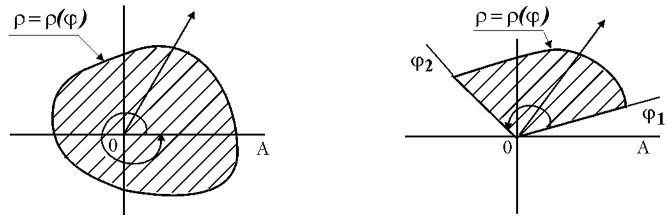


Рис. 3.

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \qquad \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$

Полюс вне области интегрирования

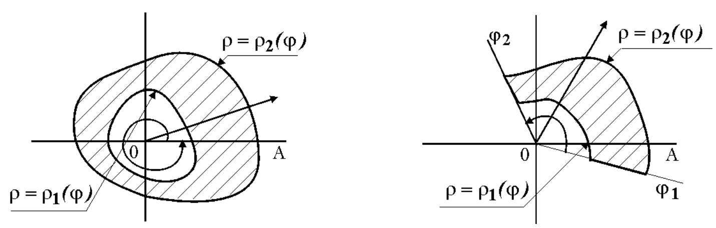


Рис. 4.

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho \qquad \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho$$

Примеры преобразования уравнений кривых от декартовых координат к полярным. (Рисунки см. в приложении 2)

1. Окружность радиуса R с центром в начале координат

$$x^2+y^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=R^2\\ \rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=R^2\\ \rho^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad \rho=R\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \rho=R.$$

З а м е т и м, что в полярной системе координат сумма квадратов

$$x^2+y^2=\rho^2,$$

и будем использовать этот результат в других примерах.

2. Окружность радиуса R с центром, смещенным по оси OX в точку $O'(R;0)$

$$\begin{array}{l}x^2+y^2=2Rx\\ (x-R)^2+y^2=R^2\end{array} \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}\rho^2=2R\rho\cos\varphi\\ \rho=2R\cos\varphi\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \rho=2R\cos\varphi.$$

3. Уравнение прямой, проходящей через начало координат

$$y=k\,x \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}\rho\sin\varphi=k\,\rho\cos\varphi\\ \mathrm{tg}\ \varphi=k\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \varphi=\mathrm{arctg}k \text{ и } \varphi=\mathrm{arctg}k+\pi.$$

Итак, прямая $y=k\,x$ имеет два полярных уравнения, которым соответствуют два луча, выходящих из полюса по углами $\varphi=\mathrm{arctg}k$ и $\varphi=\mathrm{arctg}k+\pi$.

4. $$y=x \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}\rho\sin\varphi=\rho\cos\varphi\\ \mathrm{tg}\ \varphi=1\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \varphi=\pi/4 \text{ и } \varphi=5\pi/4.$$

5. $$y=-x \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}\rho\sin\varphi=-\rho\cos\varphi\\ \mathrm{tg}\ \varphi=-1\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \varphi=-\pi/4 \text{ и } \varphi=3\pi/4.$$

6. $$y=\sqrt{3}x \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}\rho\sin\varphi=\sqrt{3}\rho\cos\varphi\\ \mathrm{tg}\ \varphi=\sqrt{3}\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \varphi=\pi/3 \text{ и } \varphi=4\pi/3.$$

7. Уравнение прямой

$$x+y=1 \;\Rightarrow\; \left|\,\rho(\sin\varphi+\cos\varphi)=1\,\right| \;\Rightarrow\; \rho=\frac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}.$$

8. Уравнение прямой

$$y=2 \;\Rightarrow\; \left|\,\rho\sin\varphi=2\,\right| \;\Rightarrow\; \rho=\frac{2}{\sin\varphi}.$$

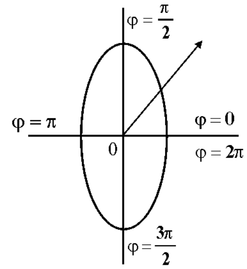
Рассмотрим примеры более сложных кривых, построение которых проще проводить не по декартовым, а по полярным уравнениям.

9. $(x^2+y^2)^2 = 3x^2+5y^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho^4 = 3\rho^2\cos^2\varphi + 5\rho^2\sin^2\varphi \\ \rho^2 = 3\cos^2\varphi + 5\sin^2\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow$

$\rho = \sqrt{3\cos^2\varphi + 5\sin^2\varphi}.$

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
ρ	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{3}$

При построении учтем, что подкоренное выражение положительно для всех значений φ и кривая расположена во всех четвертях декартовой системы координат. Далее определяем несколько значений ρ.

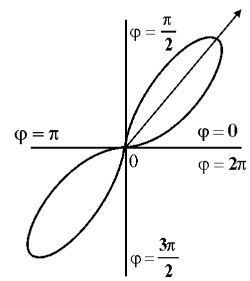


10. $(x^2+y^2)^{3/2} = xy \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho^3 = \rho^2\cos\varphi\sin\varphi \\ \rho = \cos\varphi\ \sin\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow$

$\rho = \cos\varphi\ \sin\varphi.$

φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$
ρ	0	$1/2$	0	0	$1/2$	0

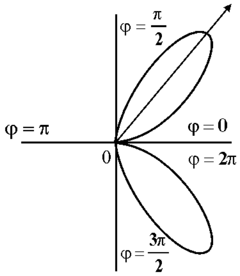
При построении учтем, что величина $\rho \geq 0$, поэтому кривая существует только для тех значений угла φ, для которых произведение $\cos\varphi\ \sin\varphi \geq 0$, а это соответствует I-ой и III-ей четвертям декартовой системы координат. Далее определяем несколько значений ρ.



11. $(x^2+y^2)^3 = xy^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \rho^6 = \rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi \\ \rho^3 = \cos\varphi\sin^2\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow$

$\rho = \sqrt[3]{\cos\varphi\ \sin^2\varphi}.$

При построении учтем, что величина $\rho \geq 0$, поэтому кривая существует только для тех значений угла φ, для которых произведение $\cos\varphi\ \sin^2\varphi \geq 0$, так как $\sin^2\varphi \geq 0$ для любых значений φ, то должно выполняться условие $\cos\varphi \geq 0$, а это соответствует I-ой и IV-ой четвертям декартовой системы координат.

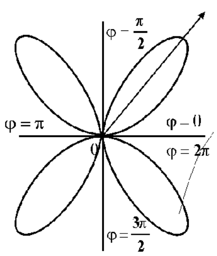


Очевидно, что $\rho = 0$ при $\varphi = 0,\ \pi/2,\ 3\pi/2$ и 2π. Кривая будет состоять из двух замкнутых петель. Максимальные значения ρ будет принимать при некоторых значениях угла φ, но для решения задач по данной теме знать их не требуется.

12. $(x^2 + y^2)^5 = x^4\, y^2 \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \rho^{10} = \rho^6 \cos^4\varphi \sin^2\varphi \\ \rho^4 = \cos^4\varphi \sin^2\varphi \\ \rho = \sqrt[4]{\cos^4\varphi\ \sin^2\varphi} \end{array}\right| \quad \Rightarrow$

$$\rho = |\cos\varphi|\ \sqrt{|\sin\varphi|}.$$

Так как в выражение $\rho^4 = \cos^4\varphi \sin^2\varphi$ функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ входят в четных степенях, то правая часть равенства всегда положительна и кривая существут для всех значений полярного угла φ.

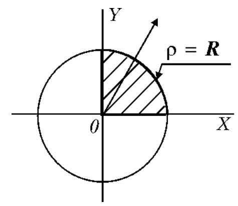


Поэтому она будет иметь 4 замкнутых петли, а не две, как в примерах 10 и 11. (Значения $\rho = 0$ получаются при $\varphi = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$).

Отметим еще раз, что для решения задач на вычисление двойного интеграла в полярной системе координат нам будет нужно иметь лишь схематичный рисунок кривой, чтобы правильно определить пределы изменения полярного угла.

Перейдем к рассмотрению примеров на расстановку пределов интегрирования и вычисление двойного интеграла в полярной системе координат.

• **1.** Вычислить интеграл $\iint\limits_{(D)} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy$ по области $(D): \{x^2+y^2 \le R^2, \quad x \ge 0, \;\; y \ge 0\}$.



1) Строим область (D). Она представляет собой часть круга радиуса R с центром в начале координат и расположенную в 1-ой четверти. Подынтегральная функция содержит сумму квадратов x^2+y^2, поэтому имеет смысл перейти в исходном интеграле к полярным координатам.

2) Элемент площади $ds = dx\, dy = \rho\, d\rho\, d\varphi$.

3) Подынтегральная функция

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, e^{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{\rho\,\sin\varphi}{\rho\,\cos\varphi}\, e^{\rho^2} = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\varphi)\, e^{\rho^2} = \varphi\, e^{\rho^2}.$$

4) Уравнение границы области также записываем в полярной системе координат $\quad x^2+y^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad \rho^2=R^2 \quad\Rightarrow\quad \rho=R.$
Переменная φ изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$. Переменная ρ внутреннего интеграла изменяется в пределах от $\rho_1 = 0$ (полюс внутри области интегрирования) до $\rho_2 = R$ (линия выхода луча из области).

5) Строим повторный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\, e^{x^2+y^2}\, dx\, dy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R \varphi\, e^{\rho^2}\,\rho\, d\rho = \int\limits_0^{\pi/2} \varphi\, d\varphi \int\limits_0^R e^{\rho^2}\,\rho\, d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\, d\varphi \int\limits_0^R e^{\rho^2}\, d(\rho^2) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\, \left[e^{\rho^2}\Big|_0^R \right] d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \left(e^{R^2}-1\right)\,\varphi\, d\varphi =$$

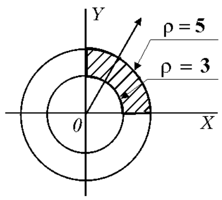
$$= \frac{\left(e^{R^2}-1\right)}{2}\cdot\frac{\varphi^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{e^{R^2}-1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{16}\,\left(e^{R^2}-1\right).$$

З а м е ч а н и е. В данном примере ни подынтегральная функция ни пределы интегрирования во внутреннем интеграле не содержат переменной φ. Поэтому повторный интеграл можно вычислить как произведение двух определенных интегралов (внутреннего и внешнего) независимо один от другого и получим тот же результат

$$\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R \varphi\, e^{\rho^2}\,\rho\, d\rho = \left(\int\limits_0^{\pi/2} \varphi\, d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_0^R e^{\rho^2}\,\rho\, d\rho\right) = \left(\frac{\varphi^2}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\, e^{\rho^2}\Big|_0^R\right).$$

• **2**. Вычислить интеграл $\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy$

по области $(D):\{x^2+y^2\ge 9,\quad x^2+y^2\le 25,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0\}$.



1) Строим область (D). Она представляет собой кольцо, образованое двумя окружностями с центром в начале координато и радиусами 3 и 5. Условия $x\ge 0,\quad y\ge 0$ означают, что из кольца остается только часть, лежащая в I-ой четверти.

Подынтегральная функция содержит сумму квадратов x^2+y^2, поэтому имеет смысл перейти в исходном интеграле к полярным координатам.

2) Элемент площади $ds = dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$.

3) Подынтегральная функция $\sqrt{x^2+y^2-9}=\sqrt{\rho^2-9}$.

4) Уравнение границы области также записываем в полярной системе координат

$x^2+y^2=9 \;\Rightarrow\; \rho^2=9 \;\Rightarrow\; \rho=3.$

$x^2+y^2=25 \;\; z\Rightarrow\; \rho^2=25 \;\Rightarrow\; \rho=5.$

Переменная φ изменяется в пределах от 0 до $\pi/2$.

Так как в данном примере полюс полярной системы координат- вне области интегрирования, то переменная ρ внутреннего интеграла изменяется в пределах от $\rho_1=3$ (линия входа луча в область) до $\rho_2=5$ (линия выхода луча из области).

5) Строим повторный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} \sqrt{x^2+y^2-9}\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_3^5 \sqrt{\rho^2-9}\,\rho\,d\rho =$$

(Здесь так же, как и в предыдущем примере можно вычислить внешний и внутренний интегралы независимо друг от друга и результаты перемножить)

$$= \left(\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\right)\cdot\left(\int\limits_3^5 \sqrt{\rho^2-9}\,\rho\,d\rho\right) = \left(\varphi\,\Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\int\limits_3^5 \sqrt{\rho^2-9}\,d(\rho^2-9)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot(\rho^2-9)^{3/2}\Big|_3^5 = \frac{\pi}{6}\cdot[\,(25-9)^{3/2}-(9-9)^{3/2}\,] = \frac{\pi}{6}\cdot 16^{3/2} = \frac{32\pi}{3}.$$

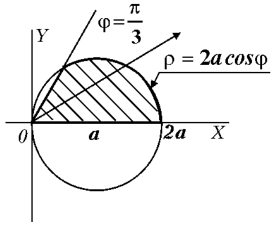
• **3**. Вычислить интеграл $\iint\limits_{(D)} y\,dx\,dy$

по области $(D): \{y \le \sqrt{3}\,x,\ y \le \sqrt{2ax - x^2},\ y \ge 0\}$.

1) Строим область (D). Уравнение $y = \sqrt{3}\,x-$ есть уравнение прямой, а уравнение $y = \sqrt{2ax - x^2}$ преобразуем следующим образом

$$y = \sqrt{2ax - x^2} \;\Rightarrow\; y^2 = 2ax - x^2 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = 2ax \;\Rightarrow\; (x-a)^2 + y^2 = a^2.$$

Мы имеем уравнение окружности с центром в точке $O'(a;\ 0)$ и радиусом, равным a. Так как значения переменной y по условию задачи должны быть положительными, то остается только верхняя часть круга.



Итак, область интегрирования ограничена прямой и окружностью и находится в первой четверти. Перейдем к полярным координатам.

2) Элемент площади $ds = dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$.

3) Подынтегральная функция $y = \rho\,\sin\varphi$.

4) Уравнение границы области также записываем в полярной системе координат: $x^2 + y^2 = 2ax \;\Rightarrow\; \rho^2 = 2a\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; \rho = 2a\cos\varphi$.

$$y = \sqrt{3}\,x \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \varphi = \pi/3.$$

Итак, переменная φ внешнего интеграла изменяется в пределах от 0 до $\pi/3$. Так как в данном примере полюс полярной системы координат - на границе области интегрирования, то переменная ρ внутреннего интеграла изменяется в пределах от $\rho_1 = 0$ (вход луча в область) до $\rho_2 = 2a\cos\varphi$ (линия выхода луча из области – окружность).

5) Строим повторный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} y\,dx\,dy = \int\limits_0^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho\sin\varphi\,\rho\,d\rho = \int\limits_0^{\pi/3} \sin\varphi\,d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} \rho^2\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/3} \sin\varphi\,d\varphi\left[\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{2a\cos\varphi}\right] = \int\limits_0^{\pi/3} \sin\varphi\,\frac{8a^3\cos^3\varphi}{3}\,d\varphi = \frac{8a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/3} \sin\varphi\,\cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\frac{8a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/3} \cos^3\varphi\,d(\cos\varphi) = -\frac{8a^3}{3}\frac{\cos^4\varphi}{4}\Big|_0^{\pi/3} = -\frac{2a^3}{3}\left(1 - (1/2)^4\right) = \frac{5a^3}{8}.$$

В данном случае мы не имели права вычислять внешний и внутренний интегралы независимо друг от друга, так как предел интегрирования внутреннего интеграла есть функция переменной внешнего интегрирования.

1.1.4. Приложения двойного интеграла

Прикладные задачи, при решении которых используется двойной интеграл, определены его геометрическим и физическим смыслом. К ним можно отнести задачи на вычисление площади плоской фигуры, объема цилиндрического тела, массы, центра тяжести, момента инерции и т.п. плоской пластины и ряд других задач. Приведем основные формулы.

1. Объем цилиндрического тела $V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)\, ds.$

Подынтегральная функция $f(x,y) \geq 0$ в области (D).

2. Площадь плоской области (D) $S = \iint\limits_{(D)} ds.$

(Подынтегральная функция $f(x,y) \equiv 1$ в области (D).)
При этом в декартовой и полярной системах координат будем иметь соответственно

$$S = \iint\limits_{(D)} dx\, dy, \qquad S = \iint\limits_{(D)} \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

3. Масса плоской пластинки $M = \iint\limits_{(D)} \delta(x,y)\; ds.$

Подынтегральная функция $\delta(x,y)$ есть поверхностная плотность пластинки.

4. Статические моменты плоской пластинки

$$M_x = \iint\limits_{(D)} y \cdot \delta(x,y)\; ds, \qquad M_y = \iint\limits_{(D)} x \cdot \delta(x,y)\; ds.$$

5. Моменты инерции пластинки относительно осей координат

$$I_x = \iint\limits_{(D)} y^2 \cdot \delta(x,y)\; ds, \qquad I_y = \iint\limits_{(D)} x^2 \cdot \delta(x,y)\; ds.$$

6. Момент инерции пластинки относительно начала координат

$$I_0 = \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2) \cdot \delta(x,y)\; ds = I_x + I_y.$$

7. Координаты центра тяжести плоской пластинки

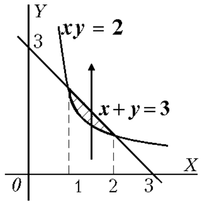
$$x_0=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_{(D)} x\cdot\delta(x,y)\ ds}{\iint\limits_{(D)}\delta(x,y)\ ds},\qquad y_0=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_{(D)} y\cdot\delta(x,y)\ dS}{\iint\limits_{(D)}\delta(x,y)\ ds}.$$

Если пластинка однородная, т.е. плотность во всех точках области (D) постоянна, т.е. $\delta(x;y)=const$, то формулы упрощаются

$$x_0=\frac{\iint\limits_{(D)} x\ ds}{\iint\limits_{(D)}\ ds}=\frac{\iint\limits_{(D)} x\ ds}{S},\qquad y_0=\frac{\iint\limits_{(D)} y\ ds}{\iint\limits_{(D)}\ ds}=\frac{\iint\limits_{(D)} y\ ds}{S}.$$

• **1**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $xy=2$, $x+y=3$.

1) Строим область (D), занимаемую указанной фигурой. Площадь фигуры вычисляем в декартовой системе координат по формуле



$$S=\iint\limits_{(D)} ds=\iint\limits_{(D)} dx\,dy.$$

2) При построении повторного интеграла в данном случае порядок интегрирования значения не имеет. Выберем 1-ую схему

$$S=\iint\limits_{(D)} dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

3) Для расстановки пределов заметим, что переменная x изменяется $x=1$ (абсцисса крайней левой точки области) до $x=2$ (абсцисса крайней правой точки области). Эти значения получаются из совместного решения уравнений

$$xy=2 \text{ и } x+y=3,\qquad y=2/x,\qquad x+2/x=3,\qquad x^2-3x+2=0.$$

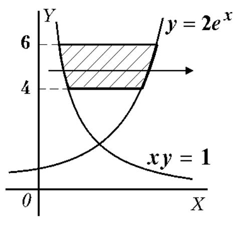
Внутренняя переменная y при этом меняется от $y_1(x)=2/x$ (линия входа в область) до $y_2(x)=3-x$ (линия выхода). Тогда

$$S=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2/x}^{3-x} dy=\int\limits_1^2 dx\ \left(y\ \Big|_{2/x}^{3-x}\right)=\int\limits_1^2\left(3-x-\frac{2}{x}\right)\ dx=$$

$$=\left(3x-\frac{x^2}{2}-2\ln x\right)\Big|_1^2=3\ (2-1)-\left(\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right)-2\ (\ln 2-\ln 1)=\frac{3}{2}-2\ln 2\approx 0,1.$$

• **2**. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями

$$xy = 1, \quad y = 2e^x, \quad y = 4, \quad y = 6.$$



1) Строим область (D).

2) Площадь фигуры вычисляем в декартовой системе координат. При составлении повторного интеграла используем 2-ую схему т.к. она в данном случае более удобна.

$$S = \iint\limits_{(D)} ds = \iint\limits_{(D)} dx\, dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.$$

3) Во внешнем интеграле переменная y изменяется $y = 4$ до $y = 6$. Эти значения мы имеем непосредственно из условия задачи.
Пределы интегрирования внутреннего интеграла мы получаем, выразив переменную x как функцию y из уравнений
$xy = 1 \quad \Rightarrow x_1(y) = 1/y,$ – (на входе) – левая граница области,
$y = 2e^x \quad \Rightarrow \quad e^x = y/2 \quad \Rightarrow \quad x_2(y) = \ln(y/2)$ – (на выходе) – правая граница. Получим

$$S = \int\limits_4^6 dy \int\limits_{1/y}^{\ln(y/2)} dx = \int\limits_4^6 dy \left(x \Big|_{1/y}^{\ln(y/2)} \right) = \int\limits_4^6 \left(\ln\frac{y}{2} - \frac{1}{y} \right) dy =$$

$$= \int\limits_4^6 \ln\frac{y}{2}\, dy - \int\limits_4^6 \frac{dy}{y} = \int\limits_4^6 \ln\frac{y}{2}\, dy - \ln y \Big|_4^6 =$$

К первому интегралу применим метод интегрирования по частям в определенном интеграле

$$= \left| \begin{array}{ll} u = \ln(y/2) & du = \dfrac{1}{y/2} \cdot (1/2)\, dy = \dfrac{dy}{y} \\ dv = dy & v = y \end{array} \right| =$$

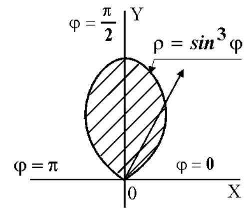
$$= \left(y \cdot \ln(y/2) \Big|_4^6 - \int\limits_4^6 y \cdot \frac{dy}{y} \right) - \ln y \Big|_4^6 = y \cdot \ln(y/2) \Big|_4^6 - y \Big|_4^6 - \ln y \Big|_4^6 =$$

$$= 6 \cdot \ln 3 - 4 \cdot \ln 2 - (6 - 4) - (\ln 6 - \ln 4) \approx 1,4.$$

• **3**. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2=y^3$.

1) Строим область (D).
Для этого перейдем к полярным координатам.

$$(x^2+y^2)^2=y^3 \quad \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} (\rho^2)^2=\rho^3\,\sin^3\varphi \\ \rho^4=\rho^3\,\sin^3\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \rho=\sin^3\varphi$$

Кривая определена для тех тех значений φ, для которых $\sin^3\varphi\geq 0$, или $0\leq\varphi\leq\pi$. То есть кривая находится в верхней полуплоскости и ρ принимает нулевые значения при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$.

2) Элемент площади $ds=dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi$.

3) Пределы изменения переменной φ определились уже при построении кривой. Пределы изменения ρ также очевидны : на входе в область $\rho=0$, на выходе $\rho=\sin^3\varphi$. Формула для вычисления площади примет вид

$$S=\iint\limits_{(D)} ds=\iint\limits_{(D)} dx\,dy=\iint\limits_{(D^*)}\rho\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sin^3\varphi}\rho\,d\rho.$$

Используя симметрию области, можем записать

$$S=2\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\sin^3\varphi}\rho\,d\rho=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\left(\rho^2\Big|_0^{\sin^3\varphi}\right)=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^6\varphi\,d\varphi.$$

Преобразуем подынтегральную функцию

$$\sin^6\varphi=(\sin^2\varphi)^3=\frac{1}{8}(1-\cos 2\varphi)^3=\frac{1}{8}(1-3\cos 2\varphi+3\cos^2\varphi-\cos^3\varphi)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-3\cos 2\varphi+\frac{3}{2}(1+\cos 4\varphi)-\cos^2\varphi\cos\varphi\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-3\cos 2\varphi+\frac{3}{2}(1+\cos 4\varphi)-(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\right)=$$

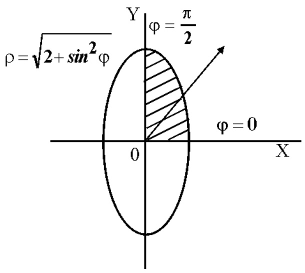
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}-3\cos 2\varphi+\frac{3}{2}\cos 4\varphi-\cos\varphi+\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\right).$$ Тогда

$$S=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^6\varphi\,d\varphi=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2}\left(\frac{5}{2}-3\cos 2\varphi+\frac{3}{2}\cos 4\varphi-\cos\varphi+\sin^2\varphi\cdot\cos\varphi\right)\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}\varphi-\frac{3}{2}\sin 2\varphi+\frac{3}{8}\sin 4\varphi-\sin\varphi+\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{5\pi}{32}-\frac{1}{12}\approx 0,4.$$

• **4.** Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$(x^2+y^2)^2 = 2x^2+3y^2.$$



1) Строим область (D).
Для этого перейдем к полярным координатам.
$(x^2+y^2)^2 = 2x^2+3y^2 \quad\Rightarrow$
$\Rightarrow \quad (\rho^2)^2 = \rho^2\,(2\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi).$

$$\rho = \sqrt{2\cos^2\varphi + 3\sin^2\varphi} = \sqrt{2+\sin^2\varphi}.$$

Кривая определена для всех значений φ.
То есть кривая находится во всех четвертях и ρ принимает наименьшие значения $\rho = 2$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ и наибольшие значения $\rho = 3$ при $\varphi = \pi/2$ и $\varphi = 3\pi/2$.

2) Элемент площади $ds = dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi$.

3) Пределы изменения переменной φ определились уже при построении кривой. Пределы изменения ρ также очевидны: на входе в область $\rho = 0$, на выходе $\rho = \sqrt{2+\sin^2\varphi}$. И формула для вычисления площади

$$S = \iint\limits_{(D^*)} \rho\,d\rho\,d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2+\sin^2\varphi}} \rho\,d\rho.$$

Используя симметрию области, можем записать

$$S = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2+\sin^2\varphi}} \rho\,d\rho = 4\int_0^{\pi/2} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}\,\Bigg|_0^{\sqrt{2+\sin^2\varphi}} \right) = 2\int_0^{\pi/2} (2+\sin^2\varphi)\,d\varphi.$$

Преобразуем подынтегральную функцию

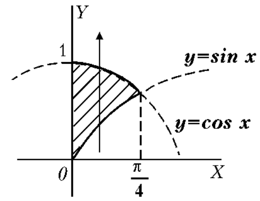
$$2+\sin^2\varphi = 2+\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi) = \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi = \frac{1}{2}(5-\cos 2\varphi).$$

Подставляем в интеграл

$$S = 2\int_0^{\pi/2} (2+\sin^2\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} (5-\cos 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \left(5\,\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{5\pi}{2} \approx 7,85.$$

• **5**. Вычислить массу плоской пластинки, занимающей область, ограниченную линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x \le \pi/4$,
и имеющую переменную плотность $\delta(x, y) = x \cdot y$.



1) Строим область (D), занимаемую пластинкой.
2) Массу пластинки вычисляем по формуле в декартовой системе координат
$M = \iint\limits_{(D)} \delta(x, y)\ ds = \iint\limits_{(D)} \delta(x, y)\, dx\, dy.$
2) При построении повторного интеграла возьмем 1-ую схему

$$M = \iint\limits_{(D)} x \cdot y\, dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} x \cdot y\, dy.$$

3) Внешняя переменная x изменяется от $x = 0$ (абсцисса крайней левой точки области) до $x = \pi/4$ (абсцисса крайней правой точки области). Эти значения получаются из условия задачи и совместного решения уравнений $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

$$\sin x = \cos x, \qquad \operatorname{tg} x = 1, \qquad x = \pi/4.$$

Внутренняя переменная y при этом меняется от $y_1(x) = \sin x$ (на входе) – нижняя граница области, до $y_2(x) = \cos x$ (на выходе) – верхняя граница.

$$M = \int\limits_0^{\pi/4} dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} x \cdot y\, dy = \int\limits_0^{\pi/4} x\, dx \int\limits_{\sin x}^{\cos x} y\, dy =$$

4) Вычисляем сначала внутренний, а затем внешний интегралы

$$= \int\limits_0^{\pi/4} x\, dx\ \left(\frac{y^2}{2} \Bigg|_{\sin x}^{\cos x} \right) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} x \cdot \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\ dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} x \cdot \cos 2x\, dx =$$

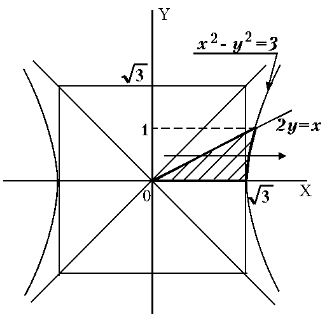
Получили определенный интеграл от функции одной переменной, который берем по частям $= \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos 2x\, dx & v = \dfrac{1}{2} \sin 2x \end{matrix} \right| =$

$$= \frac{1}{2} \left(x \cdot \frac{1}{2}\ \sin 2x \Bigg|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/4} \sin 2x\, dx \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos 2x \Bigg|_0^{\pi/4} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cdot \cos 0 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{16} (\pi - 2).$$

• **6**. Вычислить массу плоской пластинки, занимающей область

$$(D):\{x^2-y^2\le 3,\quad 2y\le x,\quad y=0,\quad (x>0,\quad y>0)\},$$

и имеющую переменную плотность $\delta(x,y)=y$.



1) Строим область (D), занимаемую пластинкой.
2) Область ограничена гиперболой $x^2-y^2=3$ или $x^2/3-y^2/3=1$, прямой $2y=x$ и осью OX $(y=0)$.
3) Массу пластинки вычисляем в декартовой системе координат и при построении повторного интеграла используем 2-ую схему

$$M=\iint\limits_{(D)}\delta(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{(D)}y\,dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)}y\,dx.$$

3) Внешняя переменная y изменяется от $y=0$ до $y=1$. Эти значения получаются из условия задачи и совместного решения уравнений
$x^2-y^2=3$ и $2y=x$.
$(2y)^2-y^2=3\quad 4y^2-y^2=3,\quad 3y^2=3\quad y^2=1,\quad y=1.$
Отметим, что $y=-1$ – посторонний корень для нашей области. Внутренняя переменная x при этом меняется от $x_1(y)=2y$ (на входе) – левая граница области, до $x_2(y)=\sqrt{3+y^2}$ (на выходе) – правая граница. (Положительное значение корня соответствует правой половине гиперболы)

$$M=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{2y}^{\sqrt{3+y^2}}y\,dx=\int\limits_0^1 y\,dy\int\limits_{2y}^{\sqrt{3+y^2}}dx=\int\limits_0^1 y\,dy\left(x\,\Big|_{2y}^{\sqrt{3+y^2}}\right)=$$

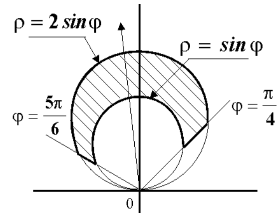
$$=\int\limits_0^1 y\left(\sqrt{3+y^2}-2y\right)\,dy=\int\limits_0^1 y\cdot\sqrt{3+y^2}\,dy-\int\limits_0^1 2y^2\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1(3+y^2)^{1/2}\,d(3+y^2)-2\int\limits_0^1 y^2\,dy=\frac{1}{2}\,\frac{(3+y^2)^{3/2}}{3/2}\,\Big|_0^1-2\,\frac{y^3}{3}\,\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}\,\left[(3+y^2)^{3/2}-2y^3\right]\,\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(4^{3/2}-3^{3/2}-2\right)=\frac{1}{3}\left(8-3\sqrt{3}-2\right)=$$

$$=2-\sqrt{3}\approx 0,3.$$

• **7**. Найти массу плоской пластины, занимающей область D: $\{x^2+y^2 \geq y;\ \ x^2+y^2 \leq 2y;\ \ y \geq -x/\sqrt{3},\ y \geq x\ \}$ и имеющей плотность $\delta(x,y) = (2-y)$.



1) Область, которую занимает пластина, ограничена двумя окружностями
$x^2+y^2=y\ \Rightarrow\ x^2+(y-1/2)^2=1/4,$
$x^2+y^2=2y\ \Rightarrow\ \ x^2+(y-1)^2=1$
и двумя прямыми, вырезающими из полученной области сектор. Имеет смысл перейти к полярным координатам.

2) Элемент площади $\quad ds = dx\,dy\ \Rightarrow\ \rho\,d\rho\,d\varphi.$
Подынтегральная функция $\quad f(x;y) = 2-y\ \ \Rightarrow\ 2-\rho\sin\varphi.$

3) Записываем границы области в полярной системе координат

$x^2+y^2=y\ \Rightarrow\ \rho^2=\rho\sin\varphi\ \Rightarrow\ \rho=\sin\varphi,$
$x^2+y^2=2y\ \Rightarrow\ \rho^2=2\rho\sin\varphi\ \Rightarrow\ \rho=2\sin\varphi,$
$y=x\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi=1\ \Rightarrow\ \varphi=\pi/4,$
$y=-x/\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi=-1/\sqrt{3}\ \Rightarrow\ \varphi=5\pi/6.$

4) Строим повторный интеграл

$$M=\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6}d\varphi\int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi}(2-\rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho=\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6}d\varphi\int\limits_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi}(2\rho-\rho^2\sin\varphi)\,d\rho=$$

$$=\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6}d\varphi\left(\rho^2-\sin\varphi\,\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_{\sin\varphi}^{2\sin\varphi}=\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6}\left(3\sin^2\varphi-\frac{7}{3}\,\sin^4\varphi\right)\,d\varphi=$$

Преобразуем подынтегральную функцию

$$3\sin^2\varphi-\frac{7}{3}\,\sin^4\varphi=\frac{3}{2}\,(1-\cos 2\varphi)-\frac{7}{12}\,(1-\cos 2\varphi)^2=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\,\cos 2\varphi-\frac{7}{12}\,(1-2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi)=$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\,\cos 2\varphi-\frac{7}{12}+\frac{7}{6}\cos 2\varphi-\frac{7}{24}(1+\cos 4\varphi)=\frac{43}{24}-\frac{2}{6}\,\cos 2\varphi-\frac{7}{24}\cos 4\varphi.$$

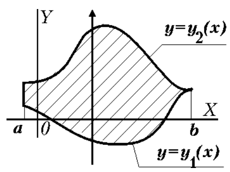
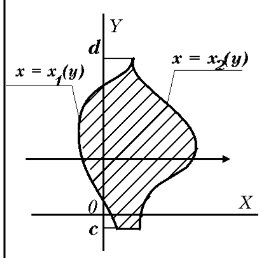
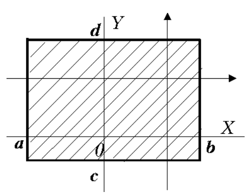
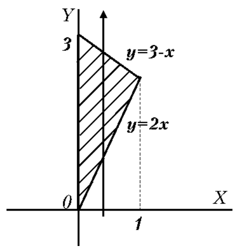
Подставляем в интеграл

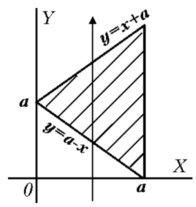
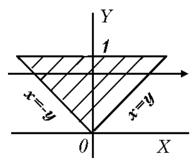
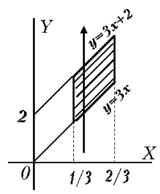
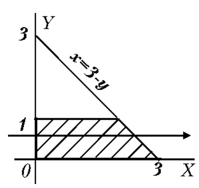
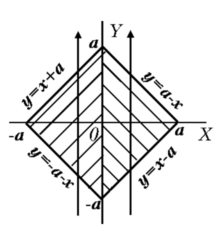
$$=\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/6}\left(\frac{43}{24}-\frac{2}{6}\,\cos 2\varphi-\frac{7}{24}\cos 4\varphi\right)\,d\varphi=\left(\frac{43}{24}\,\varphi-\frac{1}{6}\,\sin 2\varphi-\frac{7}{96}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{\pi/4}^{5\pi/6}=$$

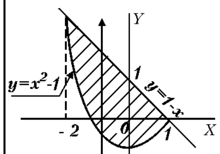
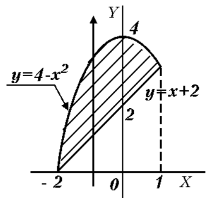
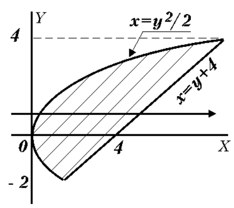
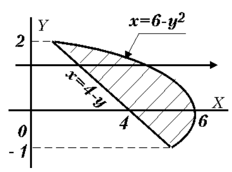
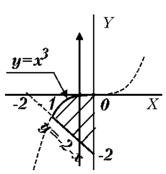
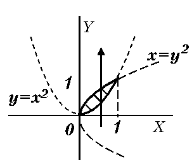
$$=\frac{43}{24}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{6}\left(\sin\frac{5\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\right)-\frac{7}{96}\left(\sin\frac{10\pi}{3}-\sin\pi\right)\approx 6,6.$$

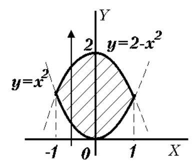
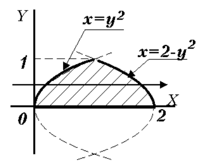
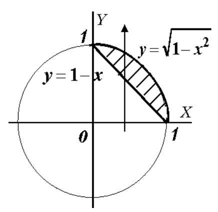
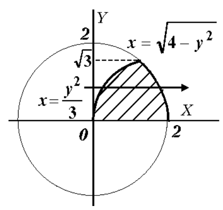
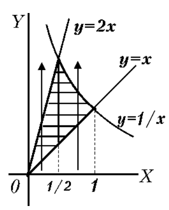
Приложение 1.

Двойной интеграл в прямоугольных координатах

	Уравнения границ	Рисунок	Повторный интеграл
1.	$\begin{cases} x=a, \\ x=b, \\ y=y_1(x), \\ y=y_2(x) \end{cases}$		$\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$
2.	$\begin{cases} y=c, \\ y=d, \\ x=x_1(y), \\ x=x_2(y) \end{cases}$		$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$
3.	$\begin{cases} x=a, \\ x=b, \\ y=c, \\ y=d \end{cases}$		$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$
4.	$\begin{cases} x+y=3, \\ 2x-y=0, \\ x\geq 0 \end{cases}$		$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3-x} f(x,y)\,dy$

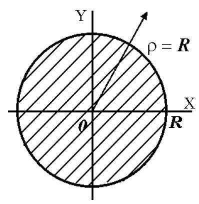
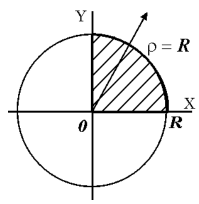
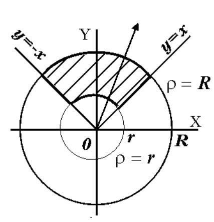
5.	$\begin{cases} x+y=a, \\ y-x=a, \\ x=a, \\ (a>0) \end{cases}$		$\int\limits_0^a dx \int\limits_{a-x}^{a+x} f(x,y)\,dy$
6.	$\begin{cases} y=-x, \\ y=x, \\ y=1, \\ (y>0) \end{cases}$		$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^{y} f(x,y)\,dy$
7.	$\begin{cases} y=3x, \\ y=3x+2, \\ x=1/3, \\ x=2/3 \end{cases}$		$\int\limits_{1/3}^{2/3} dx \int\limits_{3x}^{3x+2} f(x,y)\,dy$
8.	$\begin{cases} x+y=3, \\ y=1 \\ x=0, \\ y=0 \end{cases}$		$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dx$
9.	$\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=a, \\ x+y=-a, \\ x-y=-a \end{cases}$		$\int\limits_{-a}^{0} dx \int\limits_{-a-x}^{x+a} f(x,y)\,dy +$ $+\int\limits_0^a dx \int\limits_{x-a}^{a-x} f(x,y)\,dy$

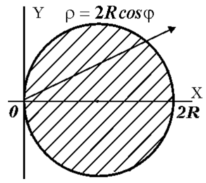
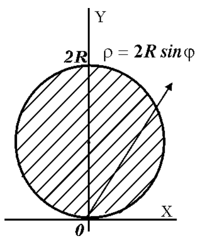
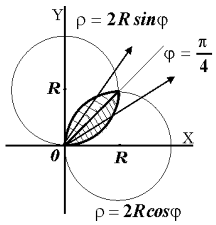
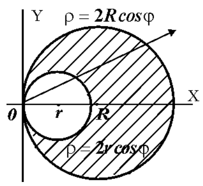
10.	$\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ x + y = 1 \end{cases}$		$\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)\,dy$
11.	$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$		$\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{x+2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy$
12.	$\begin{cases} y^2 = 2x, \\ x - y = 4 \end{cases}$		$\int\limits_{-2}^{4} dy \int\limits_{y^2/2}^{y+4} f(x,y)\,dx$
13.	$\begin{cases} x = 6 - y^2, \\ x = 4 - y \end{cases}$		$\int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{4-y}^{6-y^2} f(x,y)\,dx$
14.	$\begin{cases} y = x^3, \\ y + x + 2 = 0, \\ x = 0, \\ (x < 0) \end{cases}$		$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-2-x}^{x^3} f(x,y)\,dy$
15.	$\begin{cases} x = y^2, \\ y = x^2 \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$

16.	$\begin{cases} y = 2 - x^2, \\ y = x^2 \end{cases}$		$\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\,dy$
17.	$\begin{cases} x = y^2, \\ x - 2 = y^2, \\ y = 0, \\ (y \geq 0) \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)\,dx$
18.	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + x = 1, \\ (y > 0) \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$
19.	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y^2 = 3x, \\ y \geq 0, \\ (x > 0), \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} dy \int\limits_{y^2/3}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dy$
20.	$\begin{cases} xy = 1, \\ y = x, \\ y = 2x, \\ (x > 0), \\ (y > 0) \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{1/2} dx \int\limits_{x}^{2x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{1/2}^{1} dx \int\limits_{x}^{1/x} f(x,y)\,dy$

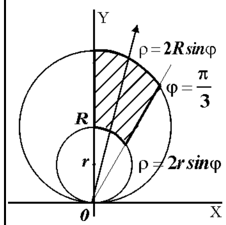
Приложение 2.

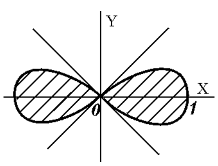
Двойной интеграл в полярных координатах

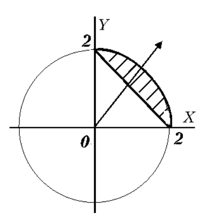
	Уравнения границ	Рисунок	Повторный интеграл
1.	$x^2 + y^2 = R^2$ $\rho = R$		$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
2.	$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = R, \\ \varphi = 0, \quad \varphi = \pi/2 \end{cases}$		$\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
3.	$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = r^2, \\ y = x, \quad y = -x, \\ y > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \rho = R, \quad \rho = r, \\ \varphi = \pi/4, \\ \varphi = 3\pi/4 \end{cases}$		$\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_r^{R} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$

4.	$x^2+y^2=2Rx$ $\rho=2R\cos\varphi$		$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2R\cos\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
5.	$x^2+y^2=2Ry$ $\rho=2R\sin\varphi$		$\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{2R\sin\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
6.	$\begin{cases} x^2+y^2=2Rx, \\ x^2+y^2=2Ry \end{cases}$ $\begin{cases} \rho=2R\cos\varphi, \\ \rho=2R\sin\varphi \end{cases}$		$\int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{2R\sin\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho+$ $+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2R\cos\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$
7.	$\begin{cases} x^2+y^2=2rx, \\ x^2+y^2=2Rx \end{cases}$ $\begin{cases} \rho=2r\cos\varphi, \\ \rho=2R\cos\varphi \end{cases}$		$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2r\cos\varphi}^{2R\cos\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$

<table>
<tr><td>8.</td><td>$\begin{cases} x^2+y^2=2ry, \\ x^2+y^2=2Ry, \\ x=0,\ y=x\sqrt{3} \end{cases}$

$\begin{cases} \rho=2r\sin\varphi, \\ \rho=2R\sin\varphi, \\ \varphi=\dfrac{\pi}{3},\ \varphi=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$</td><td>
</td><td>$\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{2r\sin\varphi}^{2R\sin\varphi} f(\rho,\varphi)\ \rho d\rho$</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$

$\rho=\sqrt{\lvert\cos 2\varphi\rvert}$</td><td>
</td><td>$\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{\lvert\cos 2\varphi\rvert}} f(\rho,\varphi)\rho\ d\rho +$
$+\int\limits_{3\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\sqrt{\lvert\cos 2\varphi\rvert}} f(\rho,\varphi)\rho\ d\rho$</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>$\begin{cases} x+y=2, \\ x^2+y^2=4, \\ x>0,\quad y>0 \end{cases}$

$\begin{cases} \rho_1(\varphi)= \\ =\dfrac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi}, \\ \rho_2(\varphi)=2 \end{cases}$</td><td>
</td><td>$\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{2} f(\rho,\varphi)\rho\ d\rho$</td></tr>
</table>

1.2. Тройной интеграл

1.2.1. Понятие и свойства

Тройной интеграл является логическим продолжением понятия интеграла на случай функции трех независимых переменных по пространственной области.

Пусть в замкнутой области (V) трехмерного пространства с выбранной прямоугольной системой координат $OXYZ$ определена функция $u = f(x, y, z)$. Повторим схему, аналогичную схеме построения двойного интеграла.

Разобьем область (V) произвольной сеткой поверхностей на элементарные части (элементарные объемы) $\Delta v_i \quad (i = 1, 2, \ldots n)$, вычислим значения функции в произвольной точке каждой элементарной области и составим интегральную сумму.

О п р е д е л е н и е. **Интегральной суммой для функции** $u = f(x, y, z)$ **по области** (V) **называется сумма произведений значений функции в выбранных точках на объемы соответствующих частичных (элементарных) областей** Δv_i : $\quad \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta\, v_i.$

О п р е д е л е н и е. **Тройным интегралом от функции** $u = f(x, y, z)$ **по области** (V) **называется предел полученной интегральной суммы при неограниченном увеличении числа разбиений области на части и стремлении объемов всех элементарных областей к нулю**

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dv = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta\, v_i.$$

Область (V) называется областью интегрирования для подынтегральной функции $u = f(x, y, z)$.

Теорема существования тройного интеграла.
Если подынтегральная функция $f(x, y, z)$ является непрерывной, или кусочно–непрерывной в области (V), то тройной интеграл всегда существует и равен определенному числу.

Геометрический смысл тройного интеграла. Если функция $f(x, y, z) \equiv 1$ во всех точках области (V), то тройной интеграл есть объем тела, занимающего область интегрирования. $\iint\limits_{(D)} dv = V.$

Если подынтегральная функция отлична от единицы в области интегрирования, то интеграл геометрического смысла не имеет.

Физический смысл тройного интеграла. Если тело, занимающее область (V), имеет переменную объемную плотность $\delta(x,y,z)$, то тройной интеграл от плотности есть масса тела: $\iiint\limits_{(V)} \delta(x,y,z)\,dv = M$.

Свойства тройного интеграла практически повторяют свойства двойного. Отметим кратко эти свойства.

1. Почленное интегрирование. Тройной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме итегралов от слагаемых.

2. Вынос постоянного множителя . Постоянный множитель можно вынести за знак тройного интеграла.

3. Разбиение области интегрирования на части. Если область интегрирования разбить на части, то тройной интеграл можно представить в виде суммы интегралов по отдельным частям области.

4. Оценка тройного интеграла. Если M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,y,z)$ в области (V), то величина тройного интеграла не меньше $m \cdot V$ и не больше $M \cdot V$, где V – объем области (V).

5. Теорема о среднем для тройного интеграла. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в области (V), то справедливо равенство

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dv = f(C) \cdot V,$$

где V– объем области интегрирования, а $f(C)$ – значение подынтегральной функции в некоторой точке C этой области. В физическом смысле теорема о среднем для тройного интеграла означает, что масса тела, имеющего переменную объемную плотность, равна произведению объема тела на величину плотности в некоторой точке C этой области (значение $\delta(C) = \delta_{\text{ср.}}$– средняя плотность тела.)

Определение. Средним значением функции $f(x,y,z)$ в области V называется величина $f(C) = \dfrac{1}{V} \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dv$.

1.2.2. Тройной интеграл в прямоугольных координатах

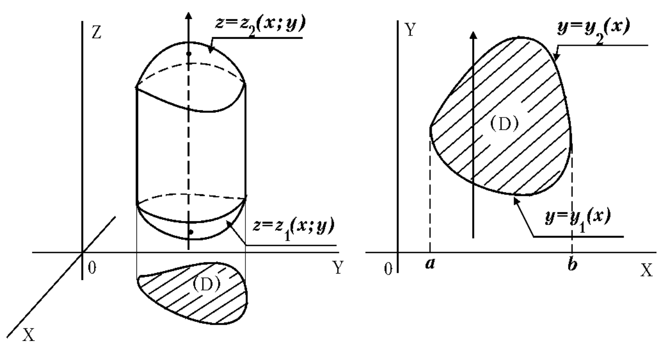
Для вычисления тройного интеграла от данной функции $u = f(x, y, z)$ по указанной области (V) рекомендуется действовать по следующей схеме.

1) Строим в системе координат $OXYZ$ область интегрирования.

2) Элемент объема dv заменяем произведением $dv = dx\,dy\,dz$. (Элементарный объем выбирается в виде "кирпичика" с размерами dx, dy, dz).

3) Выбираем порядок интегрирования, который, в основном, диктуется видом самой области интегрирования. Область (V) проецируется на одну из трех координатных плоскостей. В результате мы определяем проекцию области (V)– плоскую область (D), и уравнения поверхностей, которые ограничивают область (V).

4) Выносим, для удобства, проекцию – область (D) на отдельный рисунок и дальнейшую расстановку пределов осуществляем как в двойном интеграле.



5) В результате такой подготовительной работы мы определяем пределы изменения для каждой из трех переменных x, y, z. Если последовательность интегрирования выбрана в таком порядке: внутреннее по z, $z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)$, промежуточное по y, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, а внешнее по x, $a \le x \le b$, то тройной интеграл в виде повторного запишется

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dv = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz.$$

Сначала вычисляется внутренний интеграл. При этом учитывается, что все переменные, кроме той, по которой проводится внутреннее интегрирование, считаются постоянными (в данном случае это переменные x и y).

После выполнения внутреннего интегрирования по формуле Ньютона-Лейбница мы приходим к двойному интегралу, от функции двух переменных x и y, который вычисляем далее по уже известной схеме.

Как и при вычислении двойного интеграла, удобно при расстановке пределов интегрирования использовать"стрелки", пересекающие тело, чтобы определить *линии и поверхности входа и выхода* из области.

З а м е ч а н и е. Мы привели один из вариантов сведения тройного интеграла к трехкратному. Внутренний интеграл в тройном интеграле не обязательно должен быть всегда по переменной z, он может быть также по переменным x или y. Аналогично, при расстановке пределов по области (D) можно внешнее интегрирование проводить по переменной y, а внутреннее - по x. Поэтому способов сведения тройного интеграла к трехкратному можно записать несколько (в общем случае таких способов шесть). Надо иметь в виду, что рациональность выбора порядка интегрирования в тройном интеграле, также как и в двойном, определяется тем, чтобы при вычислении обойтись по возможности меньшим количеством повторных интегралов.
В приложении 3 приведены примеры на расстановку пределов интегрирования в тройном интеграле в декартовой системе координат.

Задача 4. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dv$ по указанным областям.

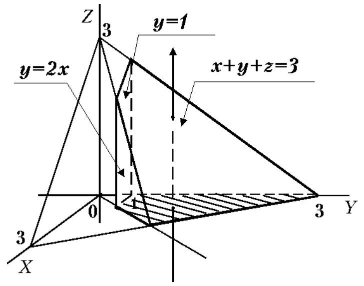
• **1**. $(V):\{x=0,\quad y=1,\quad y=2x,\quad x+y+z=3,\quad x\geq 0,\quad z\geq 0\}$.

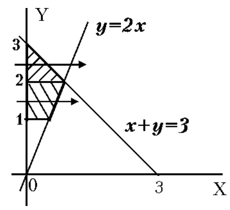
Следуем рекомендованной схеме.

1) Строим область интегрирования. Она ограничена плоскостями координат YOZ и XOY, плоскостью $y=1$, параллельной координатной плоскости XOZ, плоскостью $y=2x$, проходящей через ось OZ,

и плоскостью $x+y+z=3$, отсекающей на осях координат отрезки, равные 3.

2) Спроектируем эту область на плоскость XOY. Проекция показана на рисунке. Область (D) ограничена прямыми
$x=0,\ y=1,\ y=2x,\ x+y=3$ Последнее уравнение получено как линия пересечения плоскостей $x+y+z=3$ и $z=0$.





3) Пересечем тело стрелкой, параллельной оси OZ. Тогда при любых значениях переменных (x, y) из области (D) стрелка входит в область на поверхности входа $z_{\text{вх}}=0$ (плоскость XOY) и выходит на поверхности выхода $x+y+z=3$. Таким образом, переменная z меняется от своего значения на нижней границе $z_1=0$ до $z_2(x;y)=(3-x-y)$ –значения на верхней границе области (V). Следовательно, отделяя внутренний интеграл по z, будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(D)} dx\,dy\int\limits_{0}^{3-x-y} f(x,y,z)\,dz.$$

4) Расставляем пределы интегрирования в двойном интеграле по области (D), проектируя ее на ось OY. При этом область необходимо разбить на две часть прямой $y=2$. Значение $y=2$ получено из решения системы уравнений $\{x+y=3,\quad y=2x\}$ Для двойного интеграла будем иметь

$$\iint\limits_{(D)} dx\,dy=\int\limits_{1}^{2} dy\int\limits_{0}^{y/2} dx+\int\limits_{2}^{3} dy\int\limits_{0}^{3-y} dx.$$

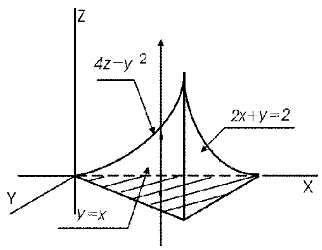
Тройной интеграл также будет являться суммой двух тройных интегралов

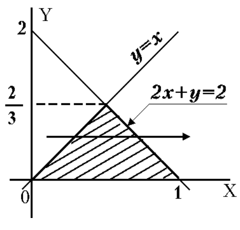
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dv=\int\limits_{1}^{2} dy\int\limits_{0}^{y/2} dx\int\limits_{0}^{3-x-y} f(x,y,z)\,dz+\int\limits_{2}^{3} dy\int\limits_{0}^{3-y} dx\int\limits_{0}^{3-x-y} f(x,y,z)\,dz.$$

• **2**. $(V): \quad \{4z = y^2, \quad 2x + y = 2, \quad y = x, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0\}.$

1) Строим область интегрирования. Она ограничена плоскостями координат XOZ и XOY, плоскостями: $y = x$, (проходящей через ось OZ) и $2x + y = 2$, (параллельной оси OZ), и параболическим цилиндром $4z = y^2$ с образующей, параллельной оси OX.

2) Проецируем эту область на плоскость XOY. Область (D) ограничена прямыми $y = x, \quad 2x + y = 2, \quad y = 0$.





3) Пересечем тело стрелкой, параллельной оси OZ. Тогда при любых значениях переменных (x, y) из области (D) стрелка входит в область на поверхности входа $z_{\text{вх}} = 0$ и выходит на поверхности выхода $z_{\text{вых}} = y^2/4$. Итак, переменная z меняется от $z_1(x, y) = 0$ до $z_2(x, y) = y^2/4$. Следовательно, отделяя внутренний интеграл по z, будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(D)} dx\, dy \int\limits_0^{y^2/4} f(x, y, z)\, dz.$$

4) Расставляем пределы интегрирования в двойном интеграле по области (D), проектируя ее на ось OY. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ y = x, \end{cases} \qquad y = 2/3,$$

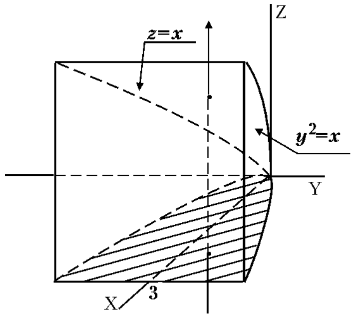
найдем ординату точки пересечения прямых и получим пределы изменения переменной y. Таким образом, расставив пределы интегрирования в двойном интеграле

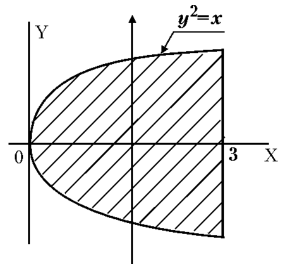
$$\iint\limits_{(D)} dx\, dy = \int\limits_0^{2/3} dy \int\limits_y^{(2-y)/2} dx, \qquad \text{получим окончательно}$$

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \int\limits_0^{2/3} dy \int\limits_y^{(2-y)/2} dx \int\limits_0^{y^2/4} f(x, y, z)\, dz.$$

• **3**. $(V): \quad \{z = x, \quad y^2 = x, \quad x = 3, \quad z \geq 0\}.$

Область интегрирования ограничена снизу координатной плоскостью XOY, сверху плоскостью $z = x$, проходящей через ось OY, и с боков параболическим цилиндром $y^2 = x$ с образующей, параллельной оси OZ, и плоскостью $x = 3$, параллельной координатной плоскости YOZ. Строим эту областьи ее проекцию (D) на плоскость XOY. Область (D) ограничена параболой $y^2 = x$ и прямой $x = 3$.





Пересечем тело стрелкой, параллельной оси OZ. Тогда при любых значениях переменных (x, y) из области (D) стрелка входит в область на поверхности входа
$z_{\text{вх}} = 0$ и выходит на поверхности выхода $z_{\text{вых}} = x$.
Таким образом, переменная z меняется от $z_1 = 0$ до $z_2 = x$.
Отделяя внутренний интеграл по z, будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{(D)} dx\, dy \int\limits_0^x f(x, y, z)\, dz.$$

Расставляем пределы интегрирования в двойном интеграле по области (D), проектируя ее на ось OX. Переменная x изменяется в пределах от 0 до 3, пределы изменения переменной y получим, выразив ее из уравнения параболы $y^2 = x \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{x}$.
Таким образом, расставив пределы интегрирования в двойном интеграле

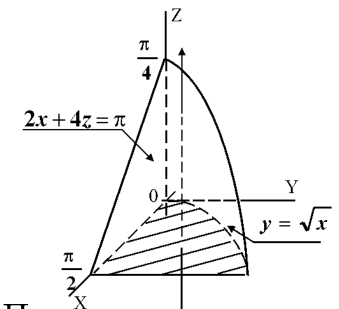
$$\iint\limits_{(D)} dx\, dy = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{+\sqrt{x}} dy,$$

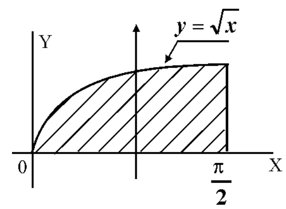
получим окончательно

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \int\limits_0^3 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy \int\limits_0^x f(x, y, z)\, dz.$$

• **4.** Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_{(V)} y\cos(x+2z)dx\,dy\,dz$ по области V, ограниченной поверхностями $y\le\sqrt{x},\;\; 2x+4z\le\pi,\;\; z\ge 0.$

Проецируем область интегрирования на плоскость XOY, строим область (D)





Пересечем тело стрелкой, параллельной оси OZ. Тогда при любых значениях переменных (x,y) из области (D) стрелка входит в область на поверхности входа $z_{\text{вх}}=0$ (плоскость XOY) и выходит на поверхности выхода $2x+4z_{\text{вых}}=\pi$. Таким образом, переменная z меняется от $z_1=0$ до $z_2(x,y)=(\pi-2x)/4$.
Следовательно, отделяя внутренний интеграл по z, будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} y\cos(x+2z)\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{(D)} dx\,dy\int\limits_0^{(\pi-2x)/4} y\;\cos(x+2z)\,dz.$$

Расставляя пределы изменения переменных x и y по области (D), получаем трехкратный интеграл

$$\iint\limits_{(D)} dx\,dy\int\limits_0^{(\pi-2x)/4} y\;\cos(x+2z)\,dz=\int\limits_0^{\pi/2} dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} y\,dy\int\limits_0^{(\pi-2x)/4}\cos(x+2z)\,dz.$$

При вычислении внутреннего интеграла по z переменные x и y считаем постоянными. Имеем

$$\int\limits_0^{\pi/2} dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} ydy\int\limits_0^{(\pi-2x)/4}\cos(x+2z)dz=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} y\left(\sin(x+2z)\Big|_0^{(\pi-2x)/4}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} y\;\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin x\right)\;dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin x)dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} y\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin x)\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}}\right)\;dx=$$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin x)\,x\,dx = \frac{1}{4}\left(\int\limits_0^{\pi/2}x\,dx - \int\limits_0^{\pi/2}x\sin x\,dx\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{8}-1\right).$$

Второй интеграл найден методом интегрирования по частям.

1.2.3. Замена переменных в тройном интеграле

В тех случаях, когда вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат оказывается затруднительным (неудобная для расстановки пределов область, сложная подынтегральная функция), имеет смысл перейти к новым координатам, позволяющим упростить работу с данным интегралом. Замена переменных в тройном интеграле осуществляется точно так же, как и в двойном.

Пусть новые переменные u, v, w связаны с декартовыми координатами x, y, z соотношениями

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases}$$

где функции $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ и $z(u,v,w)$ имеют непрерывные частные производные в области (V^*) изменения переменных u, v, w.

Формула замены переменных в тройном интеграле имеет вид

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V^*)} F(u,v,w)\ |\,J\,|\ du\,dv\,dw,$$

где J– якобиан перехода $\quad J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}.$

Согласно этой формуле при преобразовании тройного интеграла от декартовых координат к новым криволинейным u, v, w необходимо

1) В подынтегральной функции $f(x,y,z)$ перейти к переменным u, v, w по формулам перехода.

2) Вычислить якобиан перехода J.

3) Границы области интегрирования записать в новых переменных u, v, w.

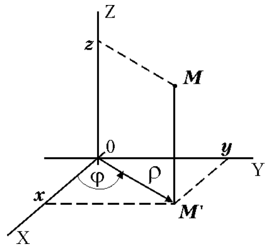
4) Установить границы изменения новых переменных.

5) Записать исходный интеграл в новых координатах, перейти к повторному и вычислить далее по уже известной схеме.

1.2.4. Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Наиболее часто при вычислении тройных интегралов используется переход от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим.

Цилиндрическая система координат представляет собой обобщение полярной системы координат на пространственный случай.



Здесь (ρ, φ) – полярные координаты проекции точки M на плоскость XOY,
z – аппликата точки M.
Формулы перехода от декартовых координат точки M к цилиндрическим и обратно имеют вид:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \mathrm{tg}\ \varphi = y/x, \\ z = z. \end{cases}$$

При переходе к цилиндрическим координатам для вычислении тройного интеграла необходимо следовать пунктам изложенной выше схемы перехода к новым координатам.

1) В подынтегральной функции перейти к цилиндрическим координатам по указанным формулам $f(x,y,z) = f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)$.

2) Элемент объема $dv = \mid J \mid\ d\rho\, d\varphi\, dz$.

Якобиан перехода J от декартовой системы координат к цилиндрической равен

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi & x'_z \\ y'_\rho & y'_\varphi & y'_z \\ z'_\rho & z'_\varphi & z'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Таким образом, элемент объема $dV = dx\, dy\, dz$ в цилиндрической системе координат примет вид

$$\boxed{dV = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz}.$$

3) Уравнения поверхностей, ограничивающих область (V) снизу и сверху, переводим в цилиндрические координаты $z = z(\rho\cos\varphi; \rho\sin\varphi)$.

4) Строится ортогональная проекция области (V) на плоскость XOY – область (D) и дальнейшие действия аналогичны тем, которые проводятся при переходе в двойном интеграле от декартовых координат к полярным. Уравнения линий, ограничивающих область (D), записываются в полярных координатах в виде $\rho = \rho(\varphi)$. Далее:

5) Определяются пределы изменения переменных ρ и φ, после чего исходный интеграл записывается в виде повторного:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho\,d\rho \int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz.$$

6) По известной схеме осуществляется вычисление повторного интеграла.

В некоторых случаях, когда область (V) удобнее проектировать на на другие плоскости – XOZ или YOZ, следует использовать другие варианты совмещения цилиндрической и декартовой систем координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = y, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x, \\ y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Отметим, что использование цилиндрических координат эффективно в тех случаях, когда область (V) ограничена параболоидами, цилиндрами, конусами и их сочетаниями с другими поверхностями.

Примеры преобразований уравнений поверхностей при переходе от декартовых координат к цилиндрическим.

1. Параболоид $z = x^2 + y^2$

$$z = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z = \rho^2.$$

2. Параболоид $2z = 3 - x^2 - y^2$

$$2z = 3 - (x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{2}\,(3 - \rho^2).$$

3. Параболоид $x^2 + y^2 = 5 - z \quad \Rightarrow$

$$x^2 + y^2 = 5 - z \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 5 - z \quad \Rightarrow \quad z = 5 - \rho^2.$$

4. Параболоид $z = 1 - 2x^2 - 2y^2$

$$z = 1 - 2(x^2 + y^2) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z = 1 - 2\rho^2.$$

5. Параболоид $y = x^2 + z^2$

$$y = x^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = y \\ z = \rho\sin\varphi \\ x^2 + z^2 = \rho^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad y = \rho^2.$$

6. Параболоид $x^2 + z^2 = 3 - y$

$$x^2 + z^2 = 3 - y \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = y \\ z = \rho\sin\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 3 - y \quad \Rightarrow \quad y = 3 - \rho^2.$$

7. Параболоид $x = y^2 + z^2$

$$x = y^2 + z^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = x \\ y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \\ y^2 + z^2 = \rho^2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad x = \rho^2.$$

8. Параболоид $y^2 + z^2 = 2 - x$

$$y^2 + z^2 = 2 - x \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = x \\ y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 2 - x \quad \Rightarrow \quad x = 2 - \rho^2.$$

9. Конус $x^2 + y^2 = z^2$

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = z^2 \quad \Rightarrow \quad z = \pm\rho.$$

10. Конус $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}$ (верхняя часть)

$$z = 4\sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z = 4\sqrt{\rho^2} \quad \Rightarrow \quad z = 4\rho.$$

11. Конус $x^2 + z^2 = y^2$

$$x^2 + z^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = y \\ z = \rho\sin\varphi \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\rho.$$

12. Конус $y^2+z^2=x^2$

$$y^2+z^2=x^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=x \\ y=\rho\cos\varphi \\ z=\rho\sin\varphi \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2=x^2 \;\Rightarrow\; x=\pm\rho.$$

13. Сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; z=\pm\sqrt{R^2-\rho^2}.$$

14. Цилиндр $x^2+y^2=R^2$

$$x^2+y^2=R^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2=R^2 \;\Rightarrow\; \rho=R.$$

15. Цилиндр $x^2+z^2=R^2$

$$x^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=y \\ z=\rho\sin\varphi \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2=R^2 \;\Rightarrow\; \rho=R.$$

16. Цилиндр $y^2+z^2=R^2$

$$y^2+z^2=R^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=x \\ y=\rho\cos\varphi \\ z=\rho\sin\varphi \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2=R^2 \;\Rightarrow\; \rho=R.$$

17. Цилиндр $x^2+y^2=2Rx$

$$x^2+y^2=2Rx \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2=2R\rho\cos\varphi \;\Rightarrow\; \rho=2R\cos\varphi.$$

18. Плоскость $y=x$

$$y=x \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right| \Rightarrow \rho\sin\varphi=\cos\varphi \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\varphi=1 \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} \varphi=\pi/4, \\ \varphi=5\pi/4 \end{array}.$$

19. Плоскость $y+z=2$

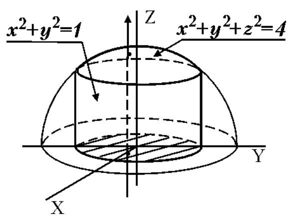
$$y+z=2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho\sin\varphi+z=2 \;\Rightarrow\; z=2-\rho\sin\varphi.$$

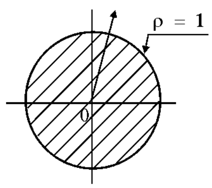
Задача 5. Перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ к цилиндрическим координатам и расставить пределы интегрирования по заданным областям (V).

• **1.** $(V):\{x^2+y^2+z^2=4,\ \ x^2+y^2=1,\ \ z\ge 0\}$ (внутри цилиндра).

1) Строим область интегрирования. Она ограничена снизу плоскостью $z=0$, сверху – сферической поверхностью $x^2+y^2+z^2=4$, с боков – цилиндрической поверхностью $x^2+y^2=1$.

Проведем стрелку, параллельную оси OZ и пересекающую данное тело. Тогда $z=0$ – поверхность входа, $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ – поверхность выхода.





Перейдем к цилиндрическим координатам

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z. \end{cases}$$

2) Проецируем эту область на плоскость XOY. Получим круг радиуса 1.

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$z_{\text{вх}}=0, \qquad x^2+y^2+z^2=4 \ \Rightarrow\ z_{\text{вых}}=+\sqrt{4-\rho^2}.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах) $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 1$.

4) Элемент объема $dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

5) Записываем интеграл

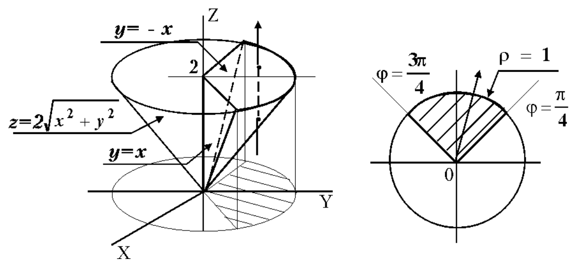
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho\,d\rho\int\limits_{z_1(\rho,\varphi)}^{z_2(\rho,\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho\,d\rho\int\limits_0^{\sqrt{4-\rho^2}} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,dz.$$

• **2**. $(V): \quad \{z = 2\sqrt{x^2+y^2}, \quad z = 2, \quad y \geq x, \quad y \geq -x\}$.

1) Область интегрирования ограничена снизу конической поверхностью $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ – поверхность входа, сверху – плоскостью $z = 2$ – поверхность выхода, с боков – плоскостями $y = x, \quad y = -x$.

Перейдем к цилиндрическим координатам
$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$



2) Проецируем эту область на плоскость XOY.
Получим круг, уравнение границы которого определим ниже из условия пересечения конуса и плоскости.

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$z_{\text{вх}} = 2\sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; z_{\text{вх}} = 2\rho, \quad z_{\text{вых}} = 2.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах). Радиус круга получим из решения системы

$\{z = 2\rho, \quad z = 2\} \;\Rightarrow\; \rho = 1.$

$y = x \;\Rightarrow\; \varphi = \pi/4, \quad y = -x \;\Rightarrow\; \varphi = 3\pi/4$

$\pi/4 \leq \varphi \leq 3\pi/4, \qquad 0 \leq \rho \leq 1.$

4) Элемент объема $\; dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

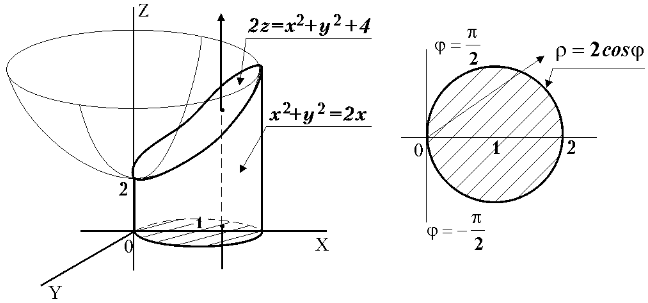
5) Записываем интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\,d\rho \int\limits_{2\rho}^{2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz.$$

• **3**. $(V): \quad \{2z = x^2+y^2+4, \quad x^2+y^2 = 2x, \; z \geq 0\}$.

1) Область интегрирования ограничена снизу плоскостью $z = 0$ –поверхность входа, сверху – параболоидом $2z = x^2+y^2+4$ – поверх-

ность выхода, с боков – цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 2x$.



Перейдем к цилиндрическим координатам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

2) Проецируем эту область на плоскость XOY. Получим круг

$$(x-1)^2 + y^2 \le 1.$$

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$z_{\text{вх}} = 0, \quad 2z = x^2 + y^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad z_{\text{вых}} = (\rho^2/2) + 2.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах).

$$x^2 + y^2 = 2x \ \Rightarrow \ \rho = 2\cos\varphi.$$

$$-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2, \qquad 0 \le \rho \le 2\cos\varphi.$$

4) Элемент объема $dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

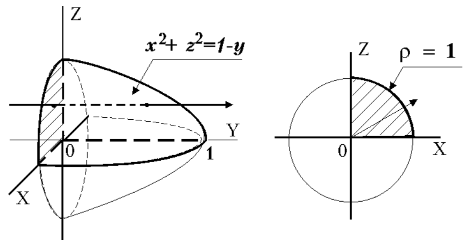
5) Записываем интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \rho\,d\rho \int\limits_{0}^{(\rho^2/2)+2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz.$$

• **4.** $(V): \quad \{x^2 + z^2 = 1 - y, \ \ y = 0, \ \ z \ge 0, \ \ z \ge 0\}.$

1) Строим область интегрирования. Она ограничена справа параболоидом $x^2 + z^2 = 1 - y$, слева плоскостью $y = 0$, а также плоскостями $x = 0$, $z = 0$. Проведем стрелку, параллельную оси OY и персекающую данное тело. Тогда $y = 0$ – поверхность входа, $y = 1 - x^2 - y^2$ – поверхность выхода. Перейдем к цилиндрическим координатам.

В данном случае удобнее использовать такую ориентацию цилиндрической системы координат:



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = y, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

2) Проецируем эту область на плоскость XOZ. Получим четверть круга: при $y = 0:$ $\quad x^2 + z^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad z \ge 0$.

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$y_{\text{вх}} = 0, \qquad x^2 + z^2 = 1 - y \quad \Rightarrow \quad y_{\text{вых}} = \ 1 - \rho^2.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах).

$$x^2 + z^2 = 1 \ \Rightarrow \ \rho = 1, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2, \qquad 0 \le \rho \le 1.$$

4) Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dy$.

5) Записываем интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\,d\rho \int\limits_0^{1-\rho^2} f(\rho\cos\varphi, y, \rho\sin\varphi)\,dy.$$

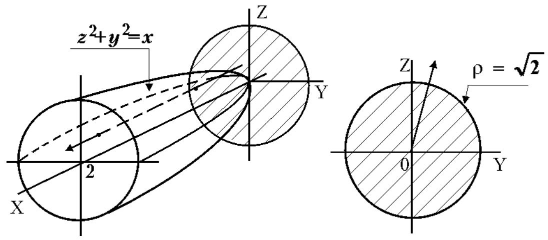
• **5**. $\quad (V): \quad \{y^2 + z^2 = x, \ \ x = 2\}$.

1) Область интегрирования ограничена параболоидом $y^2 + z^2 = x$ и плоскостью $x = 2$.

Проведем стрелку, параллельную оси OX и персекающую данное тело. Тогда $x = y^2 + z^2$– поверхность входа, $x = 2$ – поверхность выхода. В данном случае удобнее использовать такую ориентацию цилиндрической системы координат:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \rho\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

2) Проецируем эту область на плоскость YOZ.



Получим круг:
при $x = 2$: $\quad y^2 + z^2 \le 2.$

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$y^2 + z^2 = x, \;\Rightarrow\; x_{\text{вх}} = \rho^2, \qquad x_{\text{вых}} = 2.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах).

$$y^2 + z^2 = 2 \;\Rightarrow\; \rho = \sqrt{2}, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \rho \le \sqrt{2}.$$

4) Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dx.$

5) Записываем интеграл

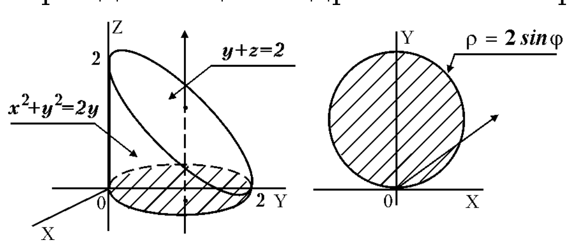
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho\,d\rho \int\limits_{\rho^2}^{2} f(x, \rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,dx.$$

• **6**. Вычислить интеграл $\displaystyle\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$

по области $\quad (V):\;\; \{x^2 + y^2 = 2y, \;\; y + z = 2, \;\; z \ge 0\}.$

1) Строим область интегрирования. Она ограничена снизу плоскостью $z = 0$ – поверхность входа, сверху – плоскостью $y + z = 2-$ поверхность выхода $z = 2 - y$, с боков – цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = 2y$.

Перейдем к цилиндрическим координатам



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

2) Проецируем эту область на плоскость XOY.
Получим круг $x^2 + (y-1)^2 \le 1.$

3) Запишем уравнения границ в цилиндрической системе координат

$$z_{\text{вх}} = 0, \qquad y + z = 2 \;\Rightarrow\; z_{\text{вых}} = 2 - y \quad \Rightarrow\; z_{\text{вых}} = 2 - \rho \sin\varphi.$$

Пределы изменения переменных ρ и φ определяем по проекции (в полярных координатах)

$$0 \le \varphi \le \pi, \qquad x^2 + y^2 \le 2y \;\Rightarrow\; 0 \le \rho \le 2\sin\varphi.$$

4) Элемент объема $\;dx\,dy\,dz = \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

Подынтегральная функция $\quad \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\rho}$.

5) Записываем интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \rho\,d\rho \int\limits_0^{2-\rho\sin\varphi} \frac{dz}{\rho} =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} d\rho \int\limits_0^{2-\rho\sin\varphi} dz = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} d\rho \left(z \,\Big|_0^{2-\rho\sin\varphi} \right) =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \left(2 - \rho\sin\varphi\right)\,d\rho = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \,\left(2\rho - \frac{\rho^2}{2}\sin\varphi\right)\,\Big|_0^{2\sin\varphi} =$$

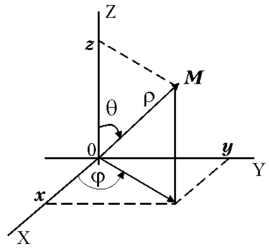
$$= \int\limits_0^{\pi} \left(4\sin\varphi - 2\sin^3\varphi\right)\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \left(4 - 2\sin^2\varphi\right)\,\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi} \left(4 - 2(1-\cos^2\varphi)\right)\,d(\cos\varphi) = -\int\limits_0^{\pi} \left(2 + 2\cos^2\varphi\right)\,d(\cos\varphi) =$$

$$= -\left(2\cos\varphi + \frac{2}{3}\cos^3\varphi\right)\,\Big|_0^{\pi} = -\left(-2 - 2 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}.$$

1.2.5. Тройной интеграл в сферических координатах

Положение точки M в сферической системе координат определяется тремя числами $M(\rho, \varphi, \theta)$
$\rho = |OM|$ – сферический радиус,
θ, φ – сферические углы, изменяющиеся в пределах: $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.
При соответствующем совмещении прямоугольной и сферической систем координат формулы перехода имеют вид



$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$

Переход и вычисление тройного интеграла в сферических координатах рекомендуется проводить по следующей схеме.

1) Элемент объема записывается в сферических координатах

$$dV = |J| \; d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$

Можно показать, что якобиан перехода J от декартовой системы координат к сферической равен

$$J = \rho^2 \sin\theta.$$

Таким образом, элемент объема $dV = dx\,dy\,dz$ в сферической системе координат примет вид

$$\boxed{dV = \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi}\,.$$

2) Осуществляется переход к сферическим координатам в подынтегральной функции

$$f(x, y, z) = f(\rho \sin\theta \cos\varphi, \; \rho \sin\theta \sin\varphi, \; \rho\cos\theta) = F(\rho, \; \theta, \; \varphi).$$

3) Уравнения границ области интегрирования записываются в сферических координатах

$$\rho = \rho_1(\theta, \varphi), \quad \rho = \rho_2(\theta, \varphi).$$

4) Определяются пределы изменения переменных ρ, θ и φ. (При этом удобно использовать стрелку, выходящую из начала координат и пересекающую область в пространстве).

5) Тройной интеграл записывается в виде повторного, причем в качестве внешних переменных интегрирования, как правило, выступают сферические углы

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\, d\theta \int\limits_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)} F(\rho;\ \theta;\ \varphi)\, \rho^2\, d\rho.$$

6) Составленный интеграл вычисляется стандартным образом.

Примеры преобразований уравнений поверхностей при переходе от декартовых координат к сферическим.

Использование сферических координат эффективно в тех случаях, когда область интегрирования ограничена сферическими и коническими поверхностями.

Отметим, что в сферической системе координат сумма квадратов всех трех переменных дает ρ^2 :

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\theta =$$
$$= \rho^2\sin^2\theta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \rho^2\cos^2\theta = \rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2\theta =$$
$$= \rho^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) = \rho^2.$$

1. Сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$. $\quad\Rightarrow\quad \rho^2=R^2 \;\Rightarrow\; \rho=R$.

2. Конус $x^2+y^2=z^2$.

$$x^2+y^2=z^2 \;\Rightarrow\; \left|\begin{array}{l} x=\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z=\rho\cos\theta \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \rho^2\sin^2\theta=\rho^2\cos^2\theta \Rightarrow\; \mathrm{tg}\theta=\pm1.$$

Уравнение конуса в сферической системе координат:
$\theta=\pi/4$ – верхняя половина конуса, $\quad\theta=3\pi/4$ – нижняя половина конуса.

3. Уравнения плоскостей вида $y=kx$ имеют такой же вид, как и в цилиндрической системе координат $\varphi=const$.

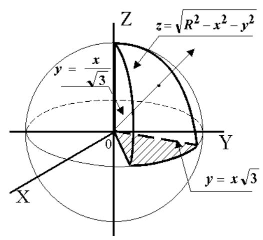
Задача 6. Перейти в тройном интеграле $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dx\,dy\,dz$ к сферическим координатам и расставить пределы интегрирования по областям.

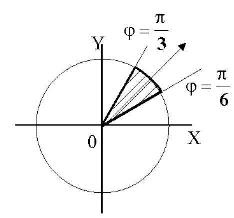
• **1.** $(V):\{z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},\ x/\sqrt{3}\le y\le x\sqrt{3},\ x>0,\ y>0,\ z\ge 0\}$.

1) Строим область интегрирования. Она ограничена снизу плоскостью $z=0$, сверху – сферической поверхностью $x^2+y^2+z^2=R^2$, $(z>0)$, с боков – вертикальными плоскостями $y=\ x/\sqrt{3}$, $\ y=x\sqrt{3}$.

Перейдем к сферическим координатам

$$\begin{cases} x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\\ z=\rho\cos\theta. \end{cases}$$





Пересечем тело лучом, выходящим из полюса (начала координат). Вход луча в область – в полюсе, выход – на поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, уравнение которой в сферической системе координат $\ x^2+y^2+z^2=R^2\ \Rightarrow\ \rho=R$ и, следовательно, $0\le\rho\le R$.

Границы изменения угла θ получим, исходя из того, что он отсчитывается от положительного направления оси OZ и все тело расположено в верхней полуплоскости $\ 0\le\theta\le\pi/2$.

2) Спроецируем эту область на плоскость XOY. Получим круг радиуса R, из которого прямые $y=\ x/\sqrt{3}$, $y=x\sqrt{3}$ вырезают сектор. Эти прямые имеют уравнения

$$\operatorname{tg}\,\varphi=1/\sqrt{3},\quad \varphi=\pi/6,\qquad \operatorname{tg}\,\varphi=\sqrt{3},\quad \varphi=\pi/3.$$

Таким образом, угол φ изменяется в пределах $\quad \pi/6\le\varphi\le\pi/3$.

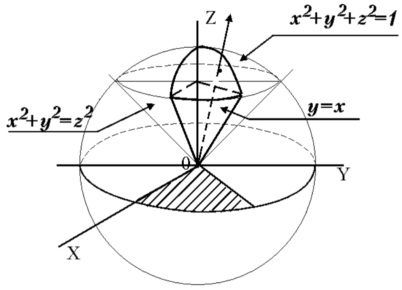
3) Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz=\rho^2\ \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$.

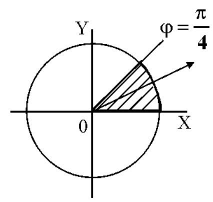
4) Записываем интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\,d\theta\int\limits_{\rho_1(\theta,\varphi)}^{\rho_2(\theta,\varphi)}F(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2\,d\rho=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}d\varphi\int\limits_{0}^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int\limits_{0}^{R}F(\rho,\theta,\varphi)\,\rho^2\,d\rho.$$

• **2** $(V): \quad \{x^2+y^2+z^2 \le 1, \ \ x^2+y^2 \le z^2, \ \ 0 \le y \le x, \ \ z > 0\}.$





Область интегрирования ограничена снизу конической поверхностью

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad (z > 0),$$

что при переходе к сферическим координатам даст

$$\theta = \pi/4, \quad 0 \le \theta \le \pi/4,$$

сверху – сферической поверхностью $\quad x^2+y^2+z^2 = 1, \qquad (\rho = 1),$

с боков вертикальными плоскостями

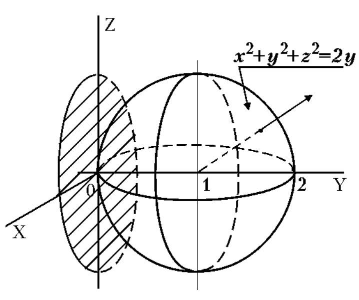
$$y = 0 \Rightarrow \varphi = 0, \quad y = x \Rightarrow \varphi = \pi/4.$$

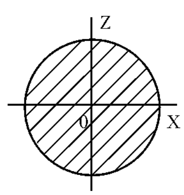
Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz = \rho^2 \, \sin\theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^1 F(\rho,\theta,\varphi)\, \rho^2 \, d\rho.$$

• **3**. $(V): \{x^2+y^2+z^2 \le 2y\}.$

Область интегрирования ограничена сферой, центр которой смещен по оси OY на 1 и радиусом также $R = 1$. Перейдем к сферическим координатам (полюс системы поместим не в начало координат, а в центр сферы $O(0,1,0)$).





$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi + 1, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$

Пределы изменения сферических координат будут стандартными ((V) – полная сфера).

$$0 \le \rho \le 1,$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi,$$
$$0 \le \theta \le \pi.$$

Окончательно, $\quad \displaystyle\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^1 F(\rho,\theta,\varphi)\, \rho^2 \, d\rho.$

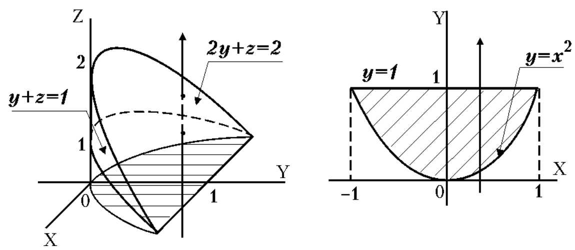
1.2.6. Приложения тройного интеграла

Задача 7. Вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

Объем тела, занимающего данную область (V), можно вычислить с помощью тройного интеграла $\quad V = \iiint\limits_{(V)} dv$.

• **1**. $(V): \quad \{2y + z = 2, \quad y + z = 1, \quad x^2 = y\}$.

Тело ограничено снизу и сверху плоскостями $y + z = 1, \quad 2y + z = 2$, а с боков – параболическим цилиндром $y = x^2$. Проекцией тела на плоскость XOY служит параболический сегмент.



Решаем задачу в декартовой системе координат.
По рисунку легко записать пределы изменения переменных. Для всех значений $-1 \le x \le 1$ переменная y изменяется в пределах от параболы $y = x^2$ до прямой $y = 1$, а переменная z при этом изменяется от нижней плоскости $z = 1 - y$ и до верхней $z = 2 - 2y$.

Элемент объема в декартовой системе координат $\quad dv = dx\,dy\,dz$. Итак, объем данного тела

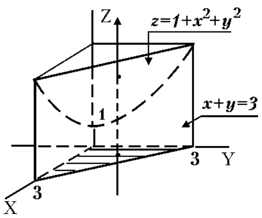
$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \int\limits_{1-y}^{2-2y} dz =$$

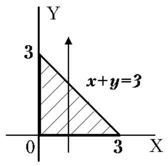
$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \left(z \Big|_{1-y}^{2-2y} \right) = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} \left((2 - 2y) - (1 - y) \right) dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} (1 - y)\,dy = -\frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} dx (1 - y)^2 \Big|_{x^2}^{1} = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \left(1 - 2x^2 + x^4\right) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^{1} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \text{(куб.ед.)}$$

• **2**. $(V): \quad \{x^2+y^2+1=z, \quad x+y=3, \quad x\ge 0, \quad y\ge 0, \quad z\ge 0\}.$





Данное тело представляет собой вертикальную треугольную призму, которая ограничена снизу плоскостью $z=0$, а сверху поверхностью параболоида $z=1+x^2+y^2$.

Отметим пределы изменения переменных

$$0\le x\le 3, \qquad 0\le y\le 3-x, \qquad 0\le z\le 1+x^2+y^2.$$

Объем тела запишется

$$V=\iiint\limits_{(V)} dv=\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3-x} dy\int\limits_0^{1+x^2+y^2} dz.$$

Вычисляем интеграл

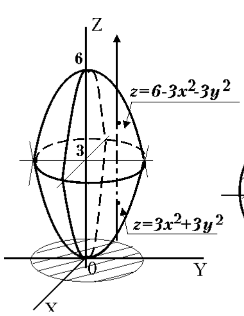
$$V=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3-x} dy\left(z\Big|_0^{1+x^2+y^2}\right)=\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3-x}\left(x^2+y^2+1\right)\,dy=$$

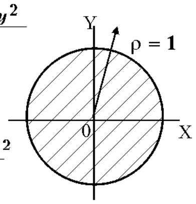
$$=\int\limits_0^3 dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right)\Big|_0^{3-x}=\int\limits_0^3\left(x^2(3-x)+\frac{(3-x)^3}{3}+(3-x)\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^3\left(12-\frac{4}{3}x^3+6x^2-10x\right)dx=\left(12x-\frac{1}{4}x^4+2x^3-5x^2\right)\Big|_0^3=$$

$$=36-27+54-45=18 \text{ (куб.ед.)}$$

• **3**. $(V): \quad \{z=3x^2+3y^2, \quad z=6-3x^2-3y^2\}.$





Тело занимает пространство между двумя встречными параболоидами и проецируется на плоскость XOY в виде круга радиусом $R=1$. Вычисление обьема удобнее вести в цилиндрических координатах.

Формулы перехода от декартовых координат к цилиндрическим

$$\{x=\rho\cos\varphi, \qquad y=\rho\sin\varphi, \qquad z=z\}.$$

И уравнения поверхностей

$$z=3x^2+3y^2\Rightarrow z=3\rho^2, \qquad z=6-(3x^2+3y^2) \quad\Rightarrow\quad z=6-3\rho^2.$$

Пределы изменения цилиндрических переменных

$$0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 3\rho^2 \le z \le 6 - 3\rho^2.$$

Элемент объема в цилиндрических координатах $dv = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

Объем тела в цилиндрических координатах $V = \iiint\limits_{(V)} dv = \iiint\limits_{(V)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz$.

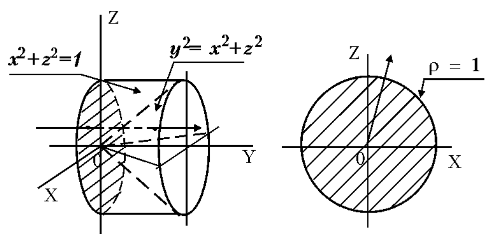
$$V = \iiint\limits_{(V)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \int\limits_{3\rho^2}^{6-3\rho^2} dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \left(z \Big|_{3\rho^2}^{6-3\rho^2} \right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho(6-3\rho^2-3\rho^2) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (6\rho - 6\rho^3)\, d\rho = \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \left(3\rho^2 - \frac{3}{2}\,\rho^4 \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 2\pi \cdot \left(3 - \frac{3}{2} \right) = 3\pi \quad (\text{куб.ед.})$$

• **4.** $(V): \quad \{y^2 = x^2 + z^2, \quad x^2 + z^2 = 1, \quad y \ge 0\}.$

Данное тело представляет собой цилиндр с выточенным в нем коническим углублением. Осью цилиндра и конуса служит ось OY.



Решаем задачу в цилиндрических координатах, связанных с прямоугольными формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = y, \\ z = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Уравнения ограничивающих поверхностей

$$y^2 = x^2 + z^2 \ \Rightarrow\ y^2 = \rho^2, \ \Rightarrow\ y = \rho, \qquad x^2 + z^2 = 1 \ \Rightarrow\ \rho = 1, \ \ y \ge 0.$$

Ясно, что пределы изменения переменных

$$0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le y \le \rho.$$

Запишем выражение для объема тела и вычислим его

$$V = \iiint\limits_{(V)} dv = \iiint\limits_{(V)} \rho\, d\rho\, d\varphi\, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \int\limits_0^{\rho} dy =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\, d\rho \left(y \Big|_0^{\rho} \right) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\,(\rho)\, d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\, d\rho =$$

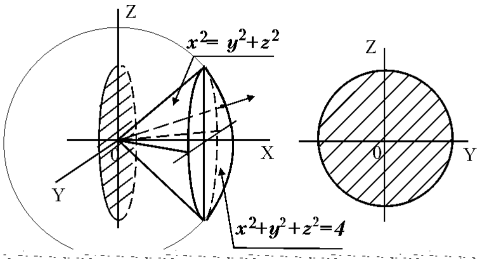
$$= \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \left(\frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2\pi \cdot \tfrac{1}{3} = 2\pi/3 \quad (\text{куб.ед.})$$

• **5.** $(V) : \{x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 = y^2 + z^2, \quad x \geq 0\}.$

Тело, объем которого требуется вычислить, занимает область, которая ограничена конусом

$$x^2 = y^2 + z^2, \quad (x > 0) \quad \text{и сферой} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Осью конуса служит ось OX. Вычисления удобно проводить в



сферических координата, отсчитывая сферический угол θ от положительного направления оси OX. Тело проецируем на плоскость YOZ. Формулы перехода будут

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ z = \rho\sin\theta\sin\varphi. \end{cases}$$

Определимся с пределами изменения переменных.

Сферический угол φ, судя по проекции тела, следует менять в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Угол θ – от направления оси OX : $\theta = 0$, и до поверхности конуса:

$$\theta = \pi/4 \quad (\text{так как} \quad x^2 = y^2 + z^2 \;\Rightarrow\; \rho^2\cos^2\theta = \rho^2\sin^2\theta, \quad \mathrm{tg}\theta = 1).$$

Сферический радиус изменяется от $\rho = 0$ до поверхности сферы

$$\rho = 2 \quad (\text{так как} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad \rho^2 = 4.)$$

Элемент объема $dV = \rho^2 \sin\theta d\varphi\, d\rho\, d\theta$.

Объем тела в сферической системе координат

$$V = \iiint\limits_{(V)} dv = \iiint\limits_{(V)} \rho^2 \sin\theta d\varphi\, d\rho\, d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int\limits_0^2 \rho^2\, d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^2 \right) = \frac{8}{3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(-\cos\theta \Big|_0^{\pi/4} \right) = \frac{16\pi}{3} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Задача 8. Вычислить массу тела, занимающего данную область (V), если объемная плотность $\delta = \delta(x,y,z)$.

Напомним, что масса тела при заданной функции объемной плотности вычисляется по формуле

$$M = \iiint\limits_{(V)} \delta(x,y,z)\,dv.$$

В зависимости от выбранной системы координат масса тела вычисляется по формулам:

в прямоугольной $M = \iiint\limits_{(V)} \delta(x,y,z)\;dx\;dy\;dz$,

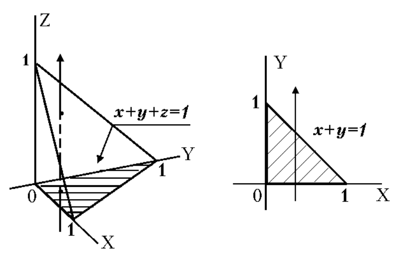
в цилиндрической $M = \iiint\limits_{(V)} \delta(\rho,\varphi,z)\;\rho\;d\rho\;d\varphi\;dz$,

в сферической $M = \iiint\limits_{(V)} \delta(\rho,\varphi,\theta)\;\rho^2\sin\theta\;d\rho\;d\varphi\;d\theta$.

• **1**. $(V):\ \{x+y+z=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\},\ \delta = \dfrac{1}{(x+y+z+1)^3}$.

Тело занимает часть трехгранного координатного угла и проецируется на плоскость XOY в треугольник. Пределы изменения прямоугольных координат

$0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1-x,$
$0\le z\le 1-x-y.$



Масса тела $M = \iiint\limits_{(V)} \delta(x,y,z)\;dx\;dy\;dz = \iiint\limits_{(V)} \dfrac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3} =$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \left(\frac{-1/2}{(x+y+z+1)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} \right) =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1/2}{(x+y+1)^2} \right)\;dy = \int\limits_0^1 dx\;\left(-\frac{1}{8}\cdot y - \frac{1/2}{x+y+1} \right)\;\Bigg|_0^{1-x} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{8}\;(x-1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\;\frac{1}{x+1} \right)\;dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{8}\;x - \frac{3}{8} + \frac{1}{2(x+1)} \right)\;dx =$$

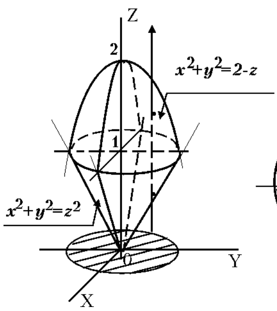
$$= \left(\frac{1}{16}\;x^2 - \frac{3}{8}\;x + \frac{1}{2}\;\ln|x+1| \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\;\ln 2 =$$

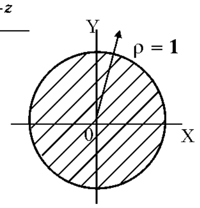
$$= -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\;\ln 2 \approx -0,313 + \frac{1}{2}\;0,692 \approx 0,033\ \text{(ед.массы)}.$$

- **2**. $(V): \ \{x^2+y^2=2-z, \ x^2+y^2=z^2, \quad z>0\}, \ \delta=\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

Данное тело занимает внутренность вертикального конуса и сверху ограничено параболоидом. Пересечение поверхностей дает окружность радиуса 1.

$$\begin{cases} x^2+y^2=2-z, \\ x^2+y^2=z^2, \end{cases} \Rightarrow z^2+z-2=0 \quad \Rightarrow \quad z=1 \Rightarrow \quad x^2+y^2=1$$





Используем цилиндрические координаты

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \\ z=z. \end{cases}$$

Уравнения границ в цилиндрической системе координат:

конус $\quad x^2+y^2=z^2 \Rightarrow z=\rho=z_{\text{вх}}$,

параболоид $\quad x^2+y^2=2-z \Rightarrow z-2-\rho^2=z_{\text{вых}}$

Выражение для плотности $\delta=\sqrt{(x^2+y^2)^3} \quad \Rightarrow \quad \delta=\rho^3$.

Пределы изменения переменных ρ и φ

$$0\le\varphi\le 2\pi, \quad 0\le\rho\le 1.$$

Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.

Масса тела $\quad M=\iiint\limits_{(V)}\rho^3\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^4\,d\rho\int\limits_{\rho}^{2-\rho^2}dz=$

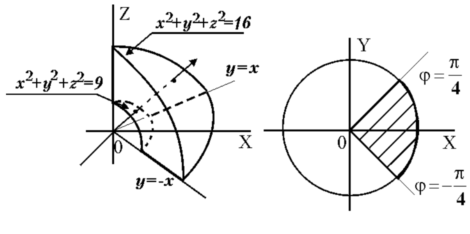
$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^4\,d\rho\left(z\,\Big|_{\rho}^{2-\rho^2}\right)=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho^4\left(2-\rho^2-\rho\right)d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(2\rho^4-\rho^6-\rho^5)\,d\rho=\left(\varphi\Big|_0^{2\pi}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\rho^5-\frac{\rho^7}{7}-\frac{\rho^6}{6}\right)\Big|_0^1=$$

$$=2\pi\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{7}-\frac{2}{6}\right)=\frac{19}{105}\pi. \text{ (ед.массы)}$$

• **3**. $(V): \ \{9 \le x^2+y^2+z^2 \le 16, \ -x \le y \le x, \ z \ge 0, \ x \ge 0$ — часть сферического слоя$\}$, $\delta(x;y;z) = x\ z$.

Используем сферические координаты



$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$

Запишем уравнения границ в сферических координатах:

$$x^2+y^2+z^2=9 \ \Rightarrow \ \rho=3, \ \text{ и } \ x^2+y^2+z^2=16 \ \Rightarrow \ \rho=4.$$

Так как все тело расположено в верхней полуплоскости

$$z \ge 0, \quad \text{то} \quad 0 \le \theta \le \pi/2.$$

Уравнения боковых стенок

$$y = x \ \Rightarrow \ \varphi = \pi/4 \ \text{ и } \ y=-x \ \Rightarrow \ \varphi = -\pi/4.$$

Таким образом, угол φ изменяется в пределах $-\pi/4 \le \varphi \le \pi/4$.

Элемент объема $\quad dx\,dy\,dz = \rho^2\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$.

Функция плотности

$$\delta = x\ z = \rho\sin\theta\cos\varphi\cdot\rho\cos\theta = \rho^2\ \sin\theta\ \cos\theta\ \cos\varphi.$$

Окончательно, масса тела

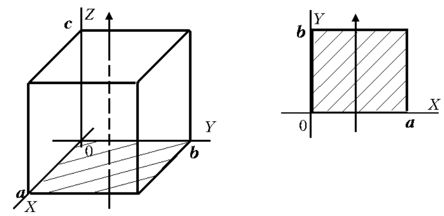
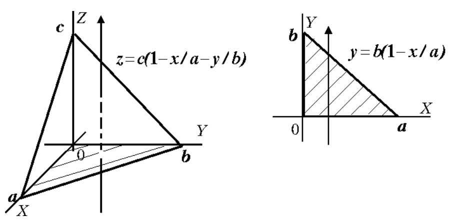
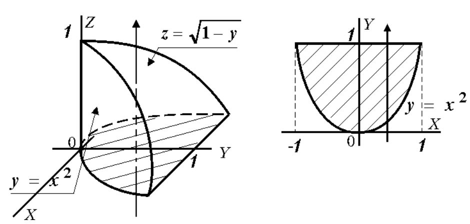
$$M = \iiint\limits_{(V)} \delta(\rho,\theta,\varphi)\,dv = \iiint\limits_{(V)} \rho^2\ \sin\theta\ \cos\theta\ \cos\varphi\ \rho^2\ \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

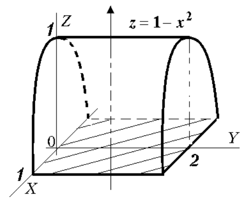
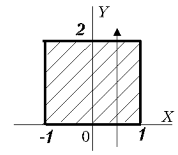
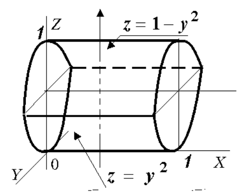
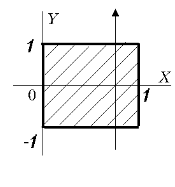
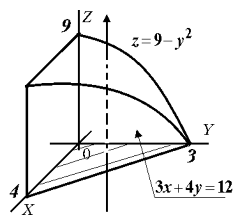
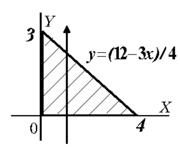
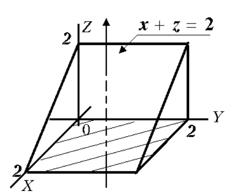
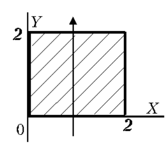
$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\theta\ \cos\theta\,d\theta\int\limits_3^4\rho^4\,d\rho =$$

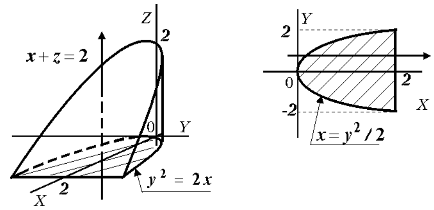
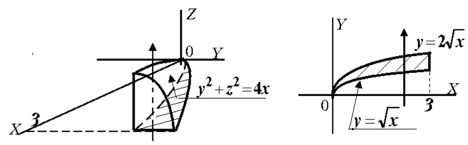
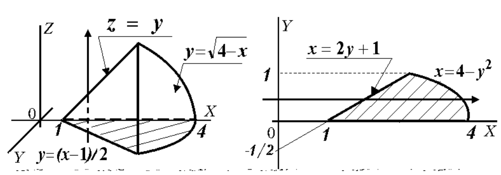
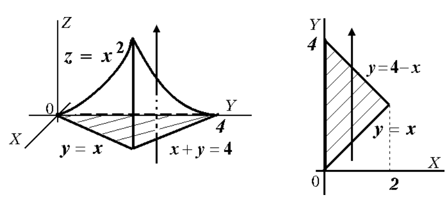
$$= \left(\sin\varphi\ \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4}\right)\cdot\left(\frac{\sin^3\theta}{3}\ \Big|_0^{\pi/2}\right)\cdot\left(\frac{\rho^5}{5}\ \Big|_3^4\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{4^5}{5}-\frac{3^5}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}\cdot 781}{15} \approx 73 \text{ (ед.массы)}.$$

Приложение 3.
Тройной интеграл в прямоугольных координатах

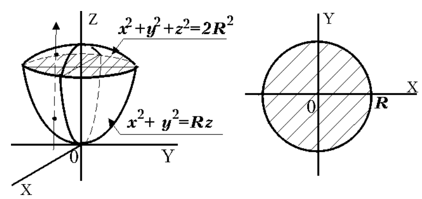
	Область интегрирования	Рисунок Повторный интеграл
1.	$\begin{cases} x=0, & x=a, \\ y=0, & y=b, \\ z=0, & z=c \end{cases}$	 $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^b dy \int\limits_0^c f(x,y,z)\,dz$
2.	$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1, \\ x=0, \\ y=0, \\ z=0 \end{cases}$	 $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{b(1-x/a)} dy \int\limits_0^{c(1-x/a-y/b)} f(x,y,z)\,dz$
3.	$\begin{cases} z=\sqrt{1-y}, \\ y=x^2, \\ z\geq 0 \end{cases}$	 $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{1} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y,z)\,dz$

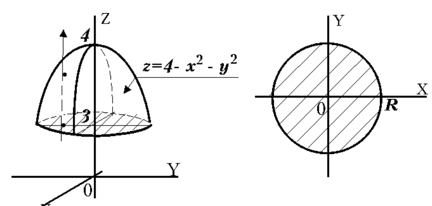
4.	$\begin{cases} z = 1 - x^2, \\ y = 0,\ y = 2, \\ z \geq 0 \end{cases}$	 $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{1-x^2} f(x,y,z)\ dz$
5.	$\begin{cases} z = 1 - y^2, \\ z = y^2, \\ x = 0, \quad x = 1 \end{cases}$	 $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1-y^2} f(x,y,z)\ dz$
6.	$\begin{cases} z = 9 - y^2, \\ 3x + 4y = 12, \\ x \geq 0,\ y \geq 0, \\ z \geq 0 \end{cases}$	 $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{0}^{3-3/4x} dy \int\limits_{0}^{9-y^2} f(x,y,z)\ dz$
7.	$\begin{cases} x + z = 2, \\ y = 0, \quad y = 2, \\ x \geq 0, \quad z \geq 0 \end{cases}$	 $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y,z)\ dz$

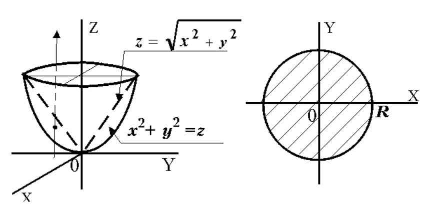
8.	$\begin{cases} x+z=2, \\ y^2=2x, \\ z\ge 0 \end{cases}$	 $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{y^2/2}^{2} dx \int\limits_{0}^{2-x} f(x,y,z)\,dz$
9.	$\begin{cases} y^2+z^2=4x, \\ y^2=x, \quad y^2=4x, \\ x=3, \\ z\ge 0, \quad y\ge 0 \end{cases}$	 $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4x-y^2}} f(x,y,z)\,dz$
10.	$\begin{cases} z=y, \qquad z\ge 0, \\ y=\sqrt{4-x}, \\ x-2y=1 \end{cases}$	 $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y+1}^{4-y^2} dx \int\limits_{0}^{y} f(x,y,z)\,dz$
11.	$\begin{cases} z=x^2, \\ x+y=4, \\ y=x, \qquad z\ge 0 \end{cases}$	 $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{4-x} dy \int\limits_{0}^{x^2} f(x,y,z)\,dz$

Приложение 4.

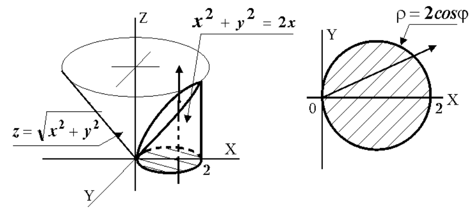
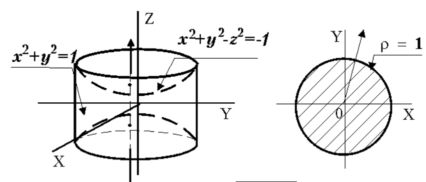
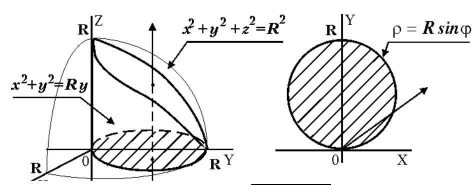
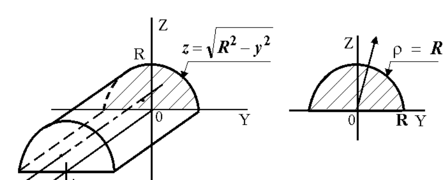
Тройной интеграл
в цилиндрических и сферических координатах

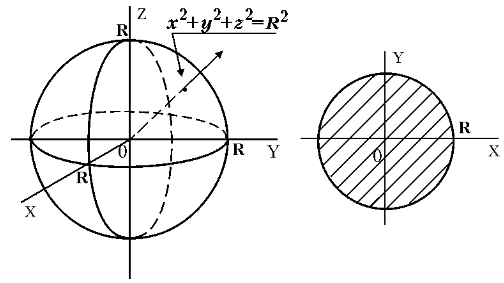
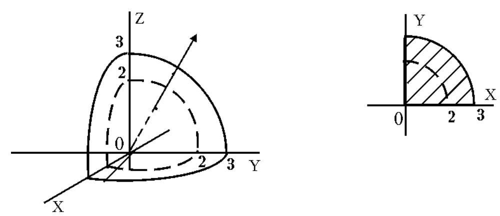
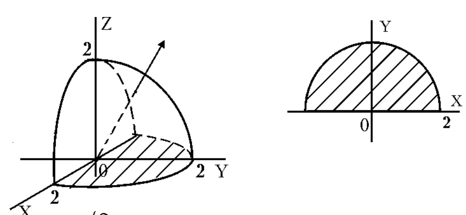
<table>
<tr><th></th><th>Область интегрирования</th><th>Рисунок
Повторный интеграл</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2R^2, \\ x^2+y^2=Rz, \\ z \ge 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} z=\sqrt{2R^2-\rho^2}, \\ z=\rho^2/R \end{cases}$$</td><td>

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^2/R}^{\sqrt{2R^2-\rho^2}} f(\rho,\varphi,z)\, dz$$</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$$\begin{cases} z=4-x^2-y^2, \\ z=3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} z=4-\rho^2, \\ z=3 \end{cases}$$</td><td>

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \rho\, d\rho \int\limits_{3}^{4-\rho^2} f(\rho,\varphi,z)\, dz$$</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} z=\rho, \\ z=\rho^2 \end{cases}$$</td><td>

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \rho\, d\rho \int\limits_{\rho^2}^{\rho} f(\rho,\varphi,z)\, dz$$</td></tr>
</table>

4.	$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ x^2+y^2=2x, \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=0, \quad z=\rho, \\ \rho=2\cos\varphi \end{cases}$	 $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \rho\, d\rho \int\limits_{0}^{\rho} f(\rho,\varphi,z)\ dz$
5.	$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=-1, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\pm\sqrt{1+\rho^2}, \\ \rho=1 \end{cases}$	 $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} \rho\ d\rho \int\limits_{-\sqrt{1+\rho^2}}^{\sqrt{1+\rho^2}} f(\rho,\varphi,z)\ dz$
6.	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x^2+y^2=Ry, \\ z\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z=\sqrt{R^2-\rho^2}, \\ \rho=R\sin\varphi, \\ z=0 \end{cases}$	 $\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R\sin\varphi} \rho\ d\rho \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} f(\rho,\varphi,z)\ dz$
7.	$\begin{cases} z\leq\sqrt{R^2-y^2}, \\ x=0, \quad x=1, \\ z\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=0, \quad x=1, \\ \rho=R \end{cases}$	 $\int\limits_{0}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \rho\ d\rho \int\limits_{0}^{1} f(\rho,\varphi,z)\ dx$

	Область интегрирования	Рисунок Повторный интеграл
8.	$x^2+y^2+z^2=R^2$ $\rho = R$	 $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta \int\limits_0^{R} f(\rho,\varphi,\theta)\ \rho^2\ d\rho$
9.	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \geq 4, \\ x^2+y^2+z^2 \leq 9, \\ x \geq 0, \quad y \geq 0, \\ z \geq 0 \end{cases}$ $2 \leq \rho \leq 3$	 $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_2^{3} f(\rho,\theta,\varphi)\ \rho^2\ d\rho$
10.	$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 4, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0 \end{cases}$ $\rho = 2.$	 $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2} f(\rho,\theta,\varphi) \rho^2\ d\rho$

Глава 2. Скалярные и векторные поля

2.1. Векторное поле

2.1.1. Понятие векторного поля

Говорят, что в области (V) задано векторное поле, если в каждой точке этой области определен вектор $\vec{A} = \{P,\ Q,\ R\}$, координаты которого есть функции координат точки, т.е.

$$\vec{A} = \{P(x,\ y,\ z),\ \ Q(x,\ y,\ z),\ \ R(x,\ y,\ z)\ \},\ \text{или}$$
$$\vec{A} = P(x,\ y,\ z)\cdot\vec{i}\ +\ Q(x,\ y,\ z)\cdot\vec{j}\ +\ R(x,\ y,\ z)\cdot\vec{k}.$$

Для плоского векторного поля

$\vec{A} = \{P(x,\ y),\ \ Q(x,\ y)\ \}$, или $\vec{A} = P(x,\ y)\cdot\vec{i}\ +\ Q(x,\ y)\cdot\vec{j}$.

Физическими примерами векторных полей могут служить:

– электрическое поле вокруг некоторого заряда. Здесь в каждой точке пространства определен вектор напряженности поля, связанный с координатами точки величиной и конфигурацией заряда;

– магнитное поле вокруг проводника с током;

– поле скоростей частиц текущей жидкости;

– гравитационное поле.

Силовые поля, к которым относятся гравитационные, электрические, магнитные и скоростные, являются самыми распространенными физическими полями. Важнейшими характеристиками векторных полей являются:

1. Поток (П).
2. Циркуляция (Ц).
3. Дивергенция $(div\vec{A})$.
4. Ротор или вихрь ($\overline{rotA}$).
5. Линии тока.

При этом поток и циркуляция являются суммарными (интегральными) характеристиками, а дивергенция и ротор – дифференциальными (точечными) характеристиками поля.

Остановимся подробнее на первых четырех характеристиках, их физическом смысле и нахождении.

2.1.2. Поток и дивергенция вектора

О п р е д е л е н и е.
Потоком векторного поля $\vec{A} = P\cdot\vec{i} + Q\cdot\vec{j} + R\cdot\vec{k}$ через какую-либо сторону поверхности (σ) называется величина поверхностного интеграла от скалярного произведения вектора поля $\vec{A}$ на единичный вектор нормали $\vec{n}^0$ к выбранной стороне поверхности

$$\Pi = \iint\limits_{(\sigma)} (\vec{A}\cdot\vec{n}^o)\, d\sigma.$$

Физический смысл потока векторного поля хорошо просматривается на примере поля скоростей частиц текущей жидкости. При этом, если поверхность свободно пропускает поток жидкости (сетка), то величина потока векторного поля через выбранную сторону поверхности есть количество жидкости, которое протекает через выбранную сторону поверхности в единицу времени, т.е. мощность течения.

Возьмем некоторую точку $M_0(x_0; y_0;\ z_0)$ области, в которой задано векторное поле, и окружим эту точку любой замкнутой поверхностью (σ). Получим некоторый ограниченный объем (V), содержащий точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

О п р е д е л е н и е. Дивергенцией (или расходимостью) векторного поля $\vec{A} = P\cdot\vec{i} + Q\cdot\vec{j} + R\cdot\vec{k}$ в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ называется предел отношения потока векторного поля через внешнюю сторону поверхности (σ), окружающей эту точку, к объему, ограниченному этой поверхностью, при стягивании объема в точку M_0

$$div\vec{A} = \lim_{V\to 0}\frac{\oiint\limits_{(\sigma)}(\vec{A}\cdot\vec{n}^o)\, d\sigma}{V}.$$

Физический смысл дивергенции векторного поля скоростей частиц текущей жидкости состоит в том, что дивергенция поля есть количество жидкости, которое выделяется (или поглощается) в данной точке пространства в единицу времени. Другими словами дивергенция есть удельная мощность векторного поля в точке.
При этом говорят, что в данной точке находится
источник, если $div\vec{A} > 0$, **сток**, если $div\vec{A} < 0$,
нет ни источника, ни стока, если $div\vec{A} = 0$.

Дивергенция поля вычисляется по формуле

$$div\vec{A} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0}.$$

Дивергенция поля в точке равна сумме значений частных производных координат поля в этой точке.

Так, для поля $\vec{A} = \{x^2 z;\ x - 2y;\ y/z\}$

$div\vec{A} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = 2xz - 2 - y/z^2$

в точке $M_1(1;\ 3;\ -1)$ $div\vec{A} = -2 - 2 - 3 = -7$ поле имеет сток с удельной мощностью 7 ед.

В точке $M_2(5;\ 3;\ 1)$ $div\vec{A} = 10 - 2 - 3 = 5$ поле имеет источник с удельной мощностью 5 ед.

Для поля $\vec{A} = 2x\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$

$$div\vec{A} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = 2 - 4 + 0 = -2,$$

т.е. диверенция поля есть постоянная величина, не зависящая от координат точки, а значит все пространство является стоком с удельной мощностью 2 ед. Все пространство, как губка, равномерно впитывает жидкость.

Заметим, что в данном случае поток поля через внешнюю сторону любой замкнутой поверхности равен $\Pi = -2V$, где V – объем, ограниченный данной поверхностью, а знак $(-)$ показывает, что течение происходит внутрь объема (идет поглощение).

2.1.3. Поток вектора через незамкнутую поверхность

Пусть требуется вычислить поток вектора $\vec{A} = P\cdot\vec{i} + Q\cdot\vec{j} + R\cdot\vec{k}$ через какую-либо сторону поверхности (σ).

Вычисление потока сводится к вычислению поверхностного интеграла $\Pi = \iint\limits_{(\sigma)} (\vec{A}\cdot\vec{n}^o)\,d\sigma$.

Запишем скалярное произведение $(\vec{A}\cdot\vec{n}^o)$ в координатной форме. Координаты вектора поля $\vec{A} = \{P;\ Q;\ R\}$, координатами единичного вектора нормали $\vec{n}^o$ являются направляющие косинусы вектора нормали $\vec{N}$ к поверхности, т.е. $\vec{n}^o = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$

Скалярное произведение векторов находим как сумму произведений одноименных координат

$(\vec{A}\cdot\vec{n}^o) = \{P;\ Q;\ R\}\cdot\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\} = P\ \cos\alpha + Q\ \cos\beta + R\ \cos\gamma$

и формула вычисления потока в координатной форме примет вид

$$\Pi = \iint\limits_{(\sigma)} (\vec{A}\cdot\vec{n}^o)\ d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} (P\ \cos\alpha + Q\ \cos\beta + R\ \cos\gamma)\ d\sigma.$$

Такой поверхностный интеграл зависит от выбора стороны поверхности, так как при изменении стороны поверхности меняется направление вектора нормали и, соответственно, знаки направляющих косинусов, сменится знак интеграла в целом.

Дальнейшее вычисление такого интеграла сводится к вычислению двойного интеграла по проекции (D) данной поверхности (σ) на одну из координатных плоскостей.

Пусть поверхность задана уравнением $F(x;\ y;\ z) = 0$

Тогда координатами вектора нормали будут значения частных производных функции $F(x;\ y;\ z)$, т.е. $\vec{N} = \{F'_x;\ \ F'_y;\ \ F'_z\}$

Длина вектора $|\vec{N}| = \sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}$.

Направляющие косинусы вектора нормали или, что тоже самое, координаты единичного вектора нормали $\vec{n}^o$

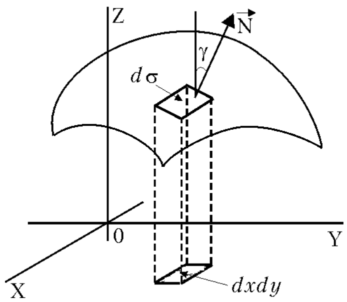
$$\cos\alpha = \frac{F'_x}{|\vec{N}|} = \frac{F'_x}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{F'_y}{|\vec{N}|} = \frac{F'_y}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{F'_z}{|\vec{N}|} = \frac{F'_z}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}$$

Далее подынтегральное выражение преобразуется в зависимости от того, на какую координатную плоскость спроектируется поверхность. Рассмотрим три случая.

1. Проецирование на плоскость XOY



Записываем выражение для элемента площади

$$d\sigma = \frac{dx\ dy}{|\cos\gamma|} = \frac{|\vec{N}|}{|F'_z|}\ dx\ dy.$$

Подставляем выражения для направляющих косинусов и элемента площади в интеграл, получим

$$\iint\limits_{(\sigma)} (P(x,y,z)\ \cos\alpha + Q(x,y,z)\ \cos\beta + R(x,y,z)\ \cos\gamma)\ d\sigma =$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left(P(x,y,z)\ \frac{F'_x}{|\vec{N}|} + Q(x,y,z)\ \frac{F'_y}{|\vec{N}|} + R(x,y,z)\ \frac{F'_z}{|\vec{N}|} \right) \frac{|\vec{N}|}{|F'_z|}\ dx\ dy =$$

сокращаем $|\vec{N}|$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left(P(x,y,z)\ \frac{F'_x}{|F'_z|} + Q(x,y,z)\ \frac{F'_y}{|F'_z|} + R(x,y,z)\ \frac{F'_z}{|F'_z|} \right)\ dx\ dy.$$

В полученном подынтегральном выражении исключаем переменную z, выражая ее из уравнения поверхности (σ)

$$F(x,y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = z(x,y)$$

Подставляем выражение $z = z(x,y)$ в функции

$$P(x;y;z), \quad Q(x;y;z), \quad R(x;y;z).$$

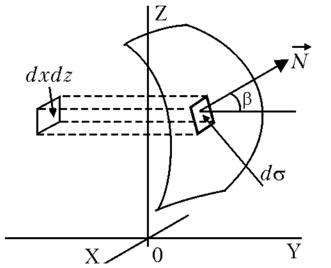
Таким образом, подынтегральные функции будут зависеть только от двух переменных x и y.

В результате мы получаем двойной интеграл по проекции (D_1) поверхности (σ) на плоскость XOY и выражение для вычисления потока примет вид

$$\Pi = \iint\limits_{(D_1)} \left(P(x,y,z(x;y))\ \frac{F'_x}{|F'_z|} + Q(x,y,z(x;y))\frac{F'_y}{|F'_z|} + R(x,y,z(x;y))\frac{F'_z}{|F'_z|} \right) dxdy.$$

Заметим, что отношение $\dfrac{F'_z}{|F'_z|} = \pm 1$ в зависимости от того, острый или тупой угол образует вектор нормали поверхности с положительным направлением оси OZ.

2. Проецирование на плоскость XOZ



Элемент площади
$$d\sigma = \frac{dx\,dz}{|\cos\beta|} = \frac{|\vec{N}|}{|F'_y|}\,dx\,dz.$$

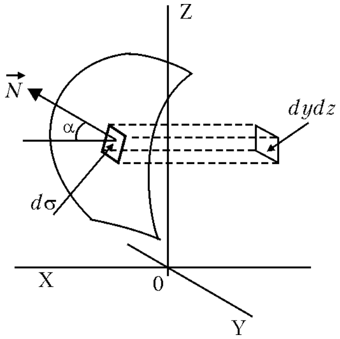
Подставляем выражения для направляющих косинусов и элемента площади в интеграл, получим
$$\iint\limits_{(\sigma)} (P(x,y,z)\ \cos\alpha + Q(x,y,z)\ \cos\beta + R(x,y,z)\ \cos\gamma)\ d\sigma =$$
$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left(P(x,y,z)\ \frac{F'_x}{|\vec{N}|} + Q(x,y,z)\ \frac{F'_y}{|\vec{N}|} + R(x,y,z)\ \frac{F'_z}{|\vec{N}|}\right) \frac{|\vec{N}|}{|F'_y|}\ dx\ dz =$$
$$= \iint\limits_{(\sigma)} \left(P(x,y,z)\ \frac{F'_x}{|F'_y|} + Q(x,y,z)\ \frac{F'_y}{|F'_y|} + R(x,y,z)\ \frac{F'_z}{|F'_y|}\right)\ dx\ dz.$$

Из уравнения поверхности (σ) выражаем переменную y
$$F(x,y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = y(x,z).$$

В результате мы получаем двойной интеграл по проекции (D_2) поверхности (σ) на плоскость XOZ и выражение для вычисления потока примет вид
$$\Pi = \iint\limits_{(D_2)} \left(P(x,y(x;z),z)\ \frac{F'_x}{|F'_y|} + Q(x,y(x;z),z)\frac{F'_y}{|F'_y|} + R(x,y(x;z),z)\frac{F'_z}{|F'_y|}\right) dxdz.$$

Заметим, что отношение $\dfrac{F'_y}{|F'_y|} = \pm 1$ в зависимости от того, острый или тупой угол образует вектор нормали поверхности с положительным направлением оси OY.

3. Проецирование на плоскость YOZ



Элемент площади
$$d\sigma = \frac{dy\,dz}{|\cos\alpha|} = \frac{|\vec{N}|}{|F'_x|}\,dy\,dz.$$

Из уравнения поверхности (σ) выражаем переменную x
$$F(x,y,z) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x(y,z).$$

В результате мы получаем двойной интеграл по проекции (D_3) поверхности (σ) на плоскость YOZ и выражение для вычисления потока примет вид

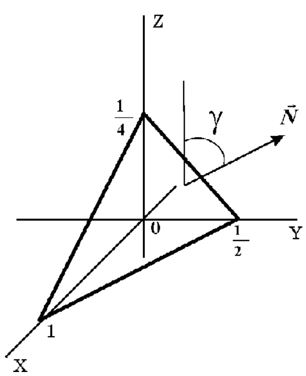
$$\Pi = \iint\limits_{(D_2)} \left(P(x(y;z),y,z)\,\frac{F'_x}{|F'_x|} + Q(x(y;z),y,z)\frac{F'_y}{|F'_x|} + R(x(y;z),y,z)\frac{F'_z}{|F'_x|} \right) dydz.$$

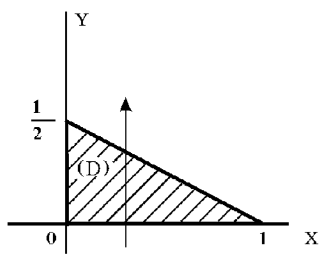
Заметим, что отношение $\dfrac{F'_x}{|F'_x|} = \pm 1$ в зависимости от того, острый или тупой угол образует вектор нормали поверхности с положительным направлением оси OX.

Рассмотрим примеры на вычисление потока через незамкнутую поверхность.

• **1.** Найти поток векторного поля $\vec{A} = 7x\vec{i} + 5y\vec{j} + z\vec{k}$ через часть плоскости $x+2y+4z = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ в направлении внешней нормали.

Поток вычисляем по формуле $\Pi = \iint\limits_{(\sigma)} (\vec{A} \cdot \vec{n}^o)\, d\sigma$. Выпишем все сомножители подынтегрального выражения.





Вектор поля $\vec{A} = \{7x, 5y, z\}$ дан по условию.
Вектор нормали к повехности $F(x,y,z) = x + 2y + 4z - 1 = 0$:
$\vec{N} = \{F'_x, F'_y, F'_z\} = \{1, 2, 4\}$. Вектор образует с осью OZ острый угол и является вектором именно внешней нормали.
Так как $|\vec{N}| = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$, то

$$\vec{n}_o = \frac{1}{\sqrt{21}}\{1,2,4\} == \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Ввиду того, что проецирование на все три координатные плоскости для данной поверхности равнозначно, остановимся на проецировании на плоскость XOY. Тогда элемент площади

$$d\sigma = \frac{dx\,dy}{|\cos\gamma|} = \frac{dx\,dy}{4/\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{4}dx\,dy.$$

Подставим все найденное в формулу вычисления потока

$$\Pi = \iint\limits_{(\sigma)} (\vec{A}\cdot\vec{n_0})\ d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \{7x, 5y, z\}\frac{1}{\sqrt{21}}\{1,2,4\}\frac{\sqrt{21}}{4}dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{(\sigma)} \frac{1}{4}(7x\cdot 1 + 5y\cdot 2 + z\cdot 4)\,dx\,dy = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{7}{4}x + \frac{5}{2}y + z\right)dx\,dy.$$

Последнее, что осталось сделать, это выразить из уравнения поверхности интегрирования переменную $z:\quad z = 1/4(1-x-2y)$
и подставить вместо z в подынтегральную функцию. Получим теперь уже двойной интеграл по проекции

$$\Pi = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{7}{4}x+\frac{5}{2}y+\frac{1}{4}(1-x-2y)\right)dx\,dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{3}{2}x+2y+\frac{1}{4}\right)dx\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}(1-x)} \left(\frac{3}{2}x+2y+\frac{1}{4}\right)dy = \int\limits_0^1 \left(\frac{3}{2}xy+y^2+\frac{1}{4}y\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}(1-x)}dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}\right)\ dx = \left(-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{16}x^2+\frac{3}{8}x\right)\Big|_0^1 = \frac{13}{48}.$$

• **2.** Найти поток векторного поля $\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ через внешнюю сторону левой полусферы $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4,\quad 0 \le y \le 2.$

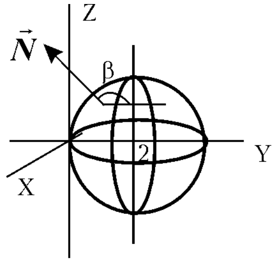
Вектор нормали к поверхности $F(x,y,z) = x^2 + (y-2)^2 + z^2 - 4\ = 0\quad :$

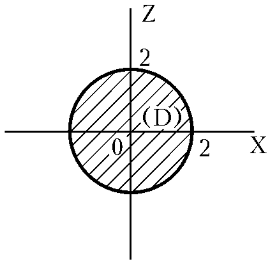
$\vec{N} = \{F'_x,\ F'_y,\ F'_z\} = \{2x,\ 2(y-2),\ 2z\}.$

Единичный вектор (орт) нормали:

$$\vec{n}^o = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{1}{|\vec{N}|}\{x,\ (y-2), z\ \},\quad |N| = \sqrt{x^2+(y-2)^2+z^2}.$$

Так как для всех точек поверхности имеем $y-2<0$, то найденный вектор образует с осью OY тупой угол и служит вектором внешней нормали.





Как видно из рисунка, наиболее удачным в данном примере будет проектирование поверхности на плоскость XOZ. Выражение элемента площади поверхности при этом

$$d\sigma=\frac{dx\,dz}{|\cos\beta|}=\frac{dx\ dz}{|y-2|/|\vec{N}|}=\frac{|\vec{N}|\ dx\ dz}{|y-2|}.$$

Проекцией полусферы на плоскость XOZ служит круг, радиус которого равен радиусу сферы т.е. область $(D):\quad x^2+z^2\leq 4$. Вычисляем поток вектора

$$\Pi=\iint\limits_{(\sigma)}(\vec{A}\cdot\vec{n}^o)\ d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\{x,y,z\}\cdot\frac{1}{|\vec{N}|}\{x,(y-2),z\}\,\frac{|\vec{N}|dx\ dz}{|y-2|}=$$

$$=\iint\limits_{(\sigma)}\left(x^2+y(y-2)+z^2\right)\frac{dx\ dz}{|y-2|}=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{x^2}{|y-2|}+y\frac{y-2}{|y-2|}+\frac{z^2}{|y-2|}\right)dx\ dz.$$

В подынтегральной функции исключаем переменную y, которую мы выражаем из уравнения сферы

$x^2+(y-2)^2+z^2=4,\implies |y-2|=\sqrt{4-x^2-z^2}$.

Так как $y\leq 2$, то $|y-2|=-(y-2)$, поэтому

$y-2=-\sqrt{4-x^2-z^2},\Longrightarrow\ y=2-\sqrt{4-x^2-z^2}$.

Кроме того, учтем, что $\dfrac{y-2}{|y-2|}=-1$.

Подставляем все в подынтегральное выражение и вычисляем соответствующий двойной интеграл

$$\Pi=\iint\limits_{(D)}\left(\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2-z^2}}-(2-\sqrt{4-x^2-z^2})+\right.$$

$$\left.+\frac{z^2}{\sqrt{4-x^2-z^2}}\right)dx\ dz=\iint\limits_{(D)}\left(\frac{4}{\sqrt{4-x^2-z^2}}-2\right)dx\ dz.$$

Перейдем в двойном интеграле к полярным координатам:

$x=\rho\cos\varphi,\quad z=\rho\sin\varphi,\quad dx\,dz=\rho\ d\rho\ d\varphi,\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi,\qquad 0\leq\rho\leq 2.$

$$\Pi = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{4}{\sqrt{4-\rho^2}} - 2\right)\rho d\rho d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(\frac{4}{\sqrt{4-\rho^2}} - 2\right)\rho\, d\rho =$$

$$= \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \int\limits_0^2 \left(\frac{4\rho}{\sqrt{4-\rho^2}} - 2\rho\right) d\rho = 2\pi\left(-2\int\limits_0^2 \frac{d(4-\rho^2)}{\sqrt{4-\rho^2}} - 2\int\limits_0^2 \rho d\rho\right) =$$

$$= 2\pi\left(-2\cdot 2\sqrt{4-\rho^2}\Big|_0^2 - 2\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2\right) = 2\pi\ (8-4) = 8\pi.$$

• **3.** Найти поток векторного поля $\vec{A} = x^2\vec{i} + 2xy\vec{j} - (x^2+z^2)\vec{k}$ в направлении внешней нормали к части цилиндра $x^2+y^2=4$, вырезанной плоскостями $z=0, \quad z=5$.

Находим вектор нормали внешней стороны цилиндра. Так как уравнение цилиндра $F((x,y,z) = x^2+y^2-4=0$, то

$$\vec{N} = \{F'_x, F'_y, F'_z\} = \{2x,\ 2y,\ 0\} \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \{x,y,0\}.$$

Единичный вектор нормали

$$\vec{n}^o = \frac{1}{|\vec{N}|}\cdot\{x,y,0\}, \quad \text{где} \quad |N| = \sqrt{x^2+y^2+0} = \sqrt{x^2+y^2}.$$

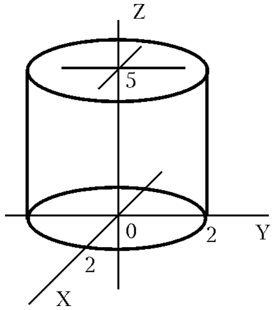
Так как $\cos\gamma = 0$, то проектировать данную поверхность на плоскость XOY нельзя. Из рисунка также видно, что проекцией поверхности на горизонтальную плоскость $z=0$ служит не область, а линия (окружность).

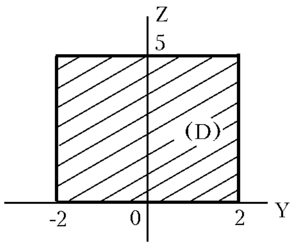
Проецируем цилиндр на плоскость YOZ, тогда переменная x есть двузначная функция от y и z : $\quad x(y,\ z) = \pm\sqrt{4-y^2}$.

Элемент площади поверхности, при этом, выразится

$$d\sigma = \frac{dy\ dz}{|\cos\alpha|} = \frac{dy\ dz}{|x|\ /|\vec{N}|} = \frac{|\vec{N}|\ dy\ dz}{|x|}.$$

Проекцией цилиндра будет прямоугольник $-2 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 5$.





Вычисляем поток

$$\Pi=\iint\limits_{(\sigma)}(\vec{A}\cdot\vec{n}^o)\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\left\{x^2,\ 2xy,\ -(x^2+z^2)\right\}\cdot\frac{1}{|\vec{N}|}\{x,\ y,\ 0\}\cdot\frac{|\vec{N}|\ dy\ dz}{|x|}=$$

$$\iint\limits_{(\sigma)}\left(x^2\cdot x+2xy\cdot y-(x^2+z^2)\cdot 0\right)\frac{dy\ dz}{|x|}=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{x\cdot(x^2+2y^2)}{|x|}\right)\ dy\ dz=$$

$$=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{x\cdot(x^2+y^2+y^2)}{|x|}\right)\ dy\ dz=\iint\limits_{(\sigma)}\left(\frac{x\cdot(4+y^2)}{|x|}\right)\ dy\ dz.$$

В подынтегральном выражении мы заменили из уравнения цилиндра: $x^2+y^2=4\Rightarrow\quad x^2+2y^2=(x^2+y^2)+y^2=4+y^2$.

Для вычисления полного потока через цилиндрическую поверхность необходимо найти и сложить потоки через переднюю и заднюю части цилиндра.

Для передней части: $x=+\sqrt{4-y^2},\ \cos\alpha>0,\ \dfrac{x}{|x|}=+1.$

Для задней: $x=-\sqrt{4-y^2},\ \cos\alpha<0,\ \dfrac{x}{|x|}=-1.$

Вычисляем полный поток

$$\Pi=\iint\limits_{(D)}(4+y^2)\frac{x}{|x|}dy\,dz=\Pi_1+\Pi_2=\iint\limits_{(D)}(4+y^2)\cdot(+1)dy\,dz+$$

$$+\iint\limits_{(D)}(4+y^2)\cdot(-1)dy\,dz=\iint\limits_{(D)}(4+y^2)dy\,dz-\iint\limits_{(D)}(4+y^2)dy\,dz=0.$$

2.1.4. Поток вектора через незамкнутую поверхность.

Формула Остроградского

Вычисление потока векторного поля через внешнюю сторону замкнутой поверхности лучше проводить не непосредственно, а с помощью формулы Остроградского, которая сводит вычисление поверхностного интеграла по замкнутой поверхности от скалярного произведения вектора поля на единичный вектор нормали к поверхности к вычислению тройного интеграла от дивергенции поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

В векторной форме формула имеет вид

$$\Pi=\oiint\limits_{(\sigma)}(\vec{A}\cdot\vec{n_o})\,d\sigma=\iiint\limits_{(V)}div\vec{A}\cdot dv.$$

Если подставить сюда выражение для дивергенции, то получим формулу Остроградского в координатной форме

$$\Pi = \oiint\limits_{(\sigma)} (\vec{A}, \vec{n}^0) d\sigma = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \, dv$$

Физический смысл формулы Остроградского. Так как дивергенция в физическом смысле есть удельная мощность источника или стока, а тройной интеграл - это соответствующая сумма по объему, то можно сказать, что

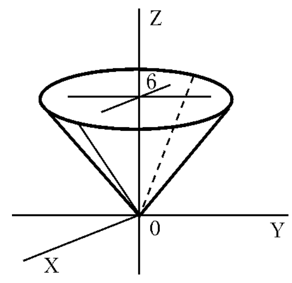
поток вектора через внешнюю сторону замкнутой поверхности равен суммарной мощности источников и стоков внутри данной поверхности.

Если велина потока вектора через внешнюю сторону замкнутой поверхности положительна, то внутри этой поверхности преобладают источники (выделяется больше, чем поглощается, и излишки вытекают наружу).

Если величина этого потока отрицательна, то внутри поверхности преобладают стоки (выделяется меньше, чем поглощается, и идет приток извне).

Если величина потока равна нулю, то внутри поверхности источники и стоки либо уравновешивают друг друга по мощности, либо их там вовсе нет.

• **4**. Найти поток вектора $\vec{A} = \{\sqrt{z} - 2x, \ e^x + 4y, \ \sqrt{y} + 3z\}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $\{x^2 + y^2 = z^2, \quad z = 6\}$.



Так как поверхность замкнута, воспользуемся формулой Остроградского

$$\Pi = \oiint\limits_{(\sigma)} (\vec{A} \cdot \vec{n}_0) \, d\sigma = \iiint\limits_{(V)} div\vec{A} \cdot dv.$$

Найдем дивергенцию векторного поля

$$div\vec{A} = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) =$$

$$= \frac{\partial(\sqrt{z} - 2x)}{\partial x} + \frac{\partial(e^x + 4y)}{\partial y} + \frac{\partial(\sqrt{y} + 3z)}{\partial z} = -2 + 4 + 3 = 5.$$

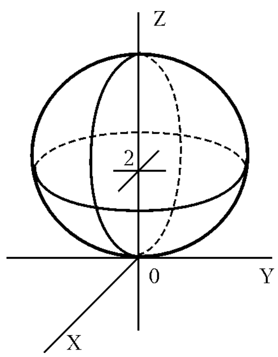
Дивергенция поля есть постоянная величина и в физическом смысле поле представляет собой сплошной источник с одинаковой во всех точках удельной мощностью, равной 5 ед.

Поток векторного поля

$$\Pi = \iiint\limits_{(V)} div\vec{A}\cdot dv = 5\cdot\iiint\limits_{(V)} dv = 5\cdot V_{\text{конуса}} = 5\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot R^2\cdot H = 5\cdot 72\pi = 360\pi.$$

Радиус R основания конуса получим, приняв в уравнении конуса $x^2+y^2=z^2\ :\ z=6$, т.е. $x^2+y^2=6^2\ \Rightarrow\ R=6$. Высота конуса $H=6$.

• **5**. Найти поток векторного поля $\vec{A}=\{yz-2x,\ x^3+y-z,\ xy^2-z+8\}$ через внешнюю сторону сферы $x^2+y^2+z^2=4z$.



Найдем дивергенцию поля $div\vec{A}=$

$$=\frac{\partial(yz-2x)}{\partial x}+\frac{\partial(x^3+y-z)}{\partial y}+$$
$$+\frac{\partial(xy^2-z+8)}{\partial z}=-2+1-1=-2.$$

Дивергенция постоянна и отрицательна и в физическом смысле поле представляет собой сплошной сток с одинаковой во всех точках удельной мощностью, равной -2 ед. Вычисление потока опять сведется к вычислению объема.

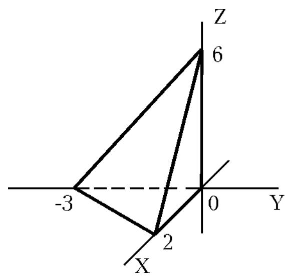
$$\Pi=\iiint\limits_{(V)} div\ \vec{A}\cdot dv=-2\cdot\iiint\limits_{(V)} dv=-2V_{\text{шара}}=-2\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=-\frac{64}{3}\pi.$$

Для определения радиуса сферы достаточно в уравнении сферы дополнить до полного квадрата

$$x^2+y^2+z^2-4z=0\Longrightarrow\ x^2+y^2+(z-2)^2=2^2\ \Longrightarrow\ R=2.$$

• **6**. Найти поток поля $\vec{A}=(2y-5x)\cdot\vec{i}+(x-1)\cdot\vec{j}+(\sqrt{xy}+2z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю сторону поверхности треугольной пирамиды

$$3x-2y+z-6=0,\ x=0,\quad y=0,\quad z=0.$$



Найдем дивергенцию

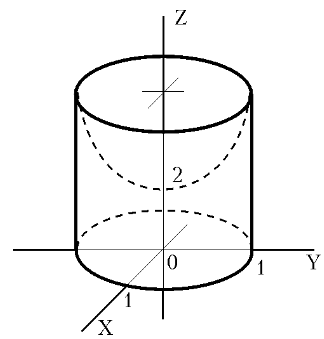
$$div\vec{A} = \frac{\partial(2y-5x)}{\partial x} + \frac{\partial(x-1)}{\partial y} +$$
$$+\frac{\partial(\sqrt{xy}+2z)}{\partial z} = -5+0+2 = -3.$$
$$\Pi = -3\iiint\limits_{(V)} dv = -3\cdot V_{\text{пирамиды}} =$$
$$= -3\frac{1}{6}|\ a\cdot b\cdot c\ | = -3\cdot\frac{1}{6}\ 2\cdot 3\cdot 6 = -18.$$

Так как дивергенция поля является константой, то вычисление потока свелось к вычислению объема пирамиды ($a,\ b,\ c-$ размеры ребер.)

• **7**. Найти поток вектора $\vec{A} = 2(z-y)\cdot\vec{j} + (x+6z)\cdot\vec{k}$ через внешнюю сторону замкнутой поверхности $z = x^2+y^2+2,\ \ x^2+y^2 = 1,\ \ z \geq 0.$ Найдем дивергенцию поля

$$div\vec{A} = \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial 2(z-y)}{\partial y} + \frac{\partial(x+6z)}{\partial z} =$$
$$= 0-2+6 = 4.$$

$$\Pi = \iiint\limits_{(V)} div\vec{A}\cdot dv = 4\iiint\limits_{(V)} dv = 4\cdot V.$$



Хотя в данном примере дивергенция и является постоянной величиной, но готовой формулы для объема данного тела нет, поэтому вычисляем объем с помощью тройного интеграла, используя цилиндрическую систему координат:

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi,\quad z = z,\quad dv = dx\ dy\ dz = \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz,$$
$$z = x^2+y^2+2 \quad\Rightarrow\quad z = \rho^2+2,\qquad x^2+y^2 = 1 \quad\Longrightarrow\quad \rho = 1,$$
$$0 \leq z \leq \rho^2+2,\qquad 0\leq\varphi\leq 2\pi,\qquad 0\leq\rho\leq 1.$$

$$V = \iiint\limits_{(V)} dv = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1 \rho d\rho\int\limits_0^{\rho^2+2} dz = 2\pi\int\limits_0^1 \rho d\rho\left(z\Big|_0^{\rho^2+2}\right) =$$
$$= 2\pi\int\limits_0^1 \rho(\rho^2+2)d\rho = 2\pi\int\limits_0^1(\rho^3+2\rho)d\rho = 2\pi\left(\frac{\rho^4}{4}+\rho^2\right)\Big|_0^1 = 2,5\pi.$$

Таким образом, $\quad \Pi = 4\cdot 2,5\pi = 10\pi.$

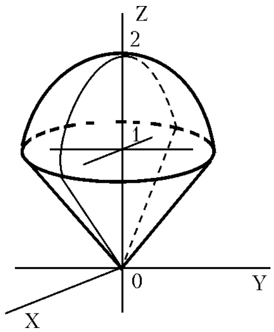
- **8**. Найти поток поля

$$\vec{A} = \{x^2/2 - 2x + 1,\ 3\cos z + 6y,\quad e^y - 4z\}$$

через внешнюю сторону замкнутой поверхности

$$x^2 + y^2 = 2 - z, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Найдем дивергенцию поля



$$div\vec{A} = \frac{\partial(x^2/2 - 2x + 1)}{\partial x} + \frac{\partial(3\cos z + 6y)}{\partial y} +$$
$$+\frac{\partial(e^y - 4z)}{\partial z} = x - 2 + 6 - 4 = x.$$

$$\Pi = \iiint\limits_{(V)} div\ \vec{A}\cdot dv = \iiint\limits_{(V)} x \cdot dv.$$

Дивергенция поля не является величиной постоянной, поэтому в данной задаче необходимо решить тройной интеграл от функции дивергенции по объему. Для решения интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z, \quad dv = dxdydz = \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz,$$
$$x^2 + y^2 = 2 - z \implies z = 2 - \rho^2,\ x^2 + y^2 = z^2 \implies z = \rho,$$
$$2 - \rho^2 = \rho \ \Rightarrow\ \rho = 1, \quad \rho \le z \le 2 - \rho^2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le 1.$$

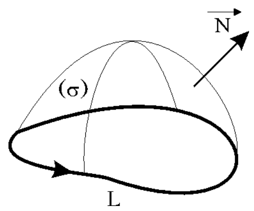
$$\Pi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho d\rho \int\limits_\rho^{2-\rho^2} \rho\ \cos\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_0^1 \rho^2\, d\rho \int\limits_\rho^{2-\rho^2} dz = 0.$$

Не проводя вычислений внутренних интегралов, можно сделать вывод, что интеграл равен нулю, так как $\int\limits_0^{2\pi} \cos\varphi\ d\varphi = \sin\varphi\ |_0^{2\pi} = 0$.

Таким образом, если дивергенция поля есть величина постоянная, то вычисление потока сводится к вычислению объема тела, ограниченного данной замкнутой поверхностью. В ряде случаев, как мы видим, можно использовать формулы объемов тел (шара, цилиндра, конуса, пирамиды, параллелепипеда), известные из элементарной геометрии. Использование формулы Остроградского оправдано и в случаях, когда дивергенция поля не является постоянной.

2.1.5. Циркуляция вектора

О п р е д е л е н и е. Циркуляцией векторного поля вдоль замкнутого гладкого контура (L) называется величина криволинейного интеграла от скалярного произведения вектора поля $\vec{A} = \{P,\ Q,\ R\}$ на элементарный вектор касательной к контуру $\vec{dl} = \{dx, dy, dz\}$.



$$Ц = \oint\limits_{(L)} (\vec{A} \cdot \vec{dl}).$$

Расписав скалярное произведение векторов, получаем формулу для циркуляции в координатной форме

$$Ц = \oint\limits_{(L)} P\ dx + Q\ dy + R\ dz.$$

Введем понятие ротора или вихря векторного поля.

2.1.6. Ротор (вихрь) поля

Рассмотрим точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$. Поместим точку внутрь замкнутого контура (L) и натянем на контур некоторую поверхность (σ), проходящую через эту точку.

Найдем величину циркуляции поля вдоль контура, разделим полученную величину на площадь поверхности, натянутой на контур, и перейдем к пределу при стягивании контура в точку

$$\lim_{S \to 0} \left[\frac{1}{S} \oint\limits_{(L)} \vec{A} \cdot \vec{dl} \right] = (\overrightarrow{rot A} \cdot \vec{n}^o) = \text{ПР}_{\vec{n}_0} \overrightarrow{rot A}.$$

В результате такой операции получаем проекцию некоторого вектора, называемого *ротором*, на орт вектора нормали к поверхности.

О п р е д е л е н и е. Ротором, или вихрем, векторного поля $\vec{A} = \{P, Q, R\}$ в некоторой точке называется вектор

$$\overrightarrow{rot A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},\ \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},\ \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\}$$

Векторный определитель раскрывается как и обычный числовой. Необходимо только иметь ввиду, что произведение, например, $\dfrac{\partial}{\partial x}\cdot Q$ следует понимать как производную $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Физический смысл ротора и циркуляции.
С физической точки зрения наличие ненулевого вектора-ротора силового поля в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ характеризует способность поля совершать работу при перемещении вдоль замкнутого контура, охватывающего точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, а величина циркуляции по контуру есть работа силового поля.

2.1.7. Вычисление циркуляции вектора. Формулы Стокса и Грина

Вычисление циркуляции векторного поля для пространственного контура есть задача о вычислении криволинейного интеграла по замкнутому контуру и эту задачу рациональнее проводить с использованием формул Стокса (для контура в пространстве) и формулы Грина (для плоского контура). Приведем эти формулы. Формула Стокса в векторной форме (применительно к вычислению циркуляции)

$$\text{Ц} = \oint\limits_{(L)} \vec{A}\cdot\vec{dl} = \iint\limits_{(\sigma)} (\overrightarrow{rot A}\cdot\vec{n}_0)\, d\sigma.$$

Физический смысл формулы Стокса. Циркуляция векторного поля вдоль положительного направления контура равна потоку вектора – ротора поля через любую поверхность, натянутую на данный контур

Формула Стокса связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру с поверхностным интегралом по поверхности, натянутой на этот контур.

Согласно формуле Стокса для вычисления циркуляции нужно сначала найти ротор поля. При этом, если ротор окажется нулевым вектором $\overrightarrow{rot\ A} = \{0, 0, 0\}$, то циркуляция поля тождественно равна нулю по любому контуру.

Если ротор поля есть вектор с постоянными координатами и контур интегрирования лежит в некоторой плоскости, то задача о вычислении циркуляции сведется к задаче о вычислении площади фигуры, ограниченной контуром.

Если векторное поле – плоское, то его координаты $\vec{A} = \{P(x;y),\ Q(x;y)\}$.

Элементарный вектор касательной к контуру, лежащему в этой плоскости имеет координаты $\vec{dl} = \{dx, dy\}$.

Скалярное произведение $(\vec{A} \cdot \vec{dl}) = P(x;y)\ dx + Q(x;y)\ dy$.

Ротор поля будет равен

$$\overrightarrow{rot\vec{A}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & 0 \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left\{0,\ 0,\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}$$

Единичный вектор нормали к поверхности (в данном случае это плоскость XOY) $z = 0$ имеет координаты $\vec{n^0} = \{0;0;1\}$.

Скалярное произведение вектора ротора на единичные вектор нормали к поверхности $(\overrightarrow{rot\vec{A}} \cdot \vec{n}_0) = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$.

Элемент площади поверхности $d\sigma = dx\ dy$ и формула для вычисления циркуляции примет вид

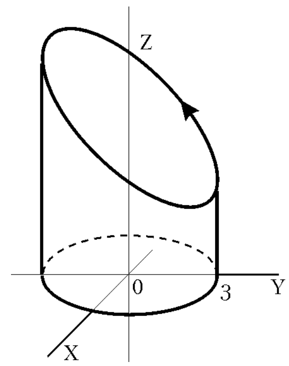
$$\text{Ц} = \oint\limits_{(L)} (\vec{A} \cdot \vec{dl}) = \oint\limits_{(L)} P\ dx + Q\ dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dx\ dy.$$

Она является частным случаем формулы Стокса для плоского поля и называется формулой Грина. Формула Грина связывает криволинейный интеграл по замкнутому контуру на плоскости с двойным интегралом по плоской области, ограниченной этим контуром.
Рассмотрим примеры на вычисление циркуляции (обход контура совершается в положительном направлении)

• **1**. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A} = x\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ вдоль линии пересечения цилиндра $x^2 + y^2 = 9$ с плоскостью $2x + y + z = 1$.

1) Находим координаты вектора-ротора

$$\overrightarrow{rotA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & z & x \end{vmatrix} = \{-1,-1,0\}.$$



2) Находим единичный вектор нормали $\vec{n}^o$. Контур интегрирования есть линия пересечения цилиндра плоскостью $2x+y+z=1$ и целиком лежит в этой плоскости. Вектор внешней нормали при этом $\vec{N}=\{2,1,1\}$, а единичный вектор нормали $\vec{n}_0=\frac{1}{\sqrt{6}}\{2,1,1\}$. Имеем

$$Ц = \iint\limits_{(\sigma)} (\overrightarrow{rotA}\cdot\vec{n}^o)d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} \{-1,-1,0\}\{2,1,1\}\frac{1}{\sqrt{6}}\,d\sigma = \frac{-3}{\sqrt{6}}\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma.$$

Задача свелась к вычислению площади фигуры, ограниченной эллипсом. Проецируем на горизонтальную плоскость XOY. Так как вектор нормали к плоскости эллипса составляет с осью OZ угол, косинус которого $\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{6}}$, то $d\sigma=\dfrac{dx\ dy}{|\cos\gamma|}=\sqrt{6}\,dx\ dy$.

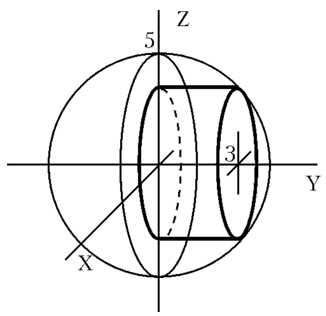
$$Ц = \frac{-3}{\sqrt{6}}\iint\limits_{(D)}\sqrt{6}\,dx\ dy = -3\iint\limits_{(D)}dx\ dy = -3\ S_{\text{круга}} = -3\cdot\pi\cdot 3^2 = -27\pi.$$

• **2**. Найти циркуляцию вектора $\vec{A}=yz\vec{i}+2xz\vec{j}+y^2\vec{k}$ вдоль линии пересечения поверхностей сферы $x^2+y^2+z^2=25$ и цилиндра $x^2+z^2=16, \quad (y>0)$.

1) Находим координаты вектора-ротора

$$\overrightarrow{rotA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & 2xz & y^2 \end{vmatrix} = \left[(y^2)'_y-(2xz)'_z\right]\vec{i}-\left[(y^2)'_x-(yz)'_z\right]\vec{j}+$$

$$+\left[(2xz)'_x-(yz)'_y\right]\vec{k}=\{2y-2x,y,z\}.$$



2) Находим единичный вектор нормали. Сфера $x^2+y^2+z^2=25$ и цилиндр $x^2+z^2=16$ в правой полуплоскости $(y>0)$ пересекаются по окружности радиуса $R=4$, лежащей в плоскости $y=3$. Действительно, из решения системы

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ x^2+z^2=16 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} 16+y^2=25 \quad \Rightarrow \\ y=3. \end{matrix}$$

Наиболее простой поверхностью, которую можно натянуть на контур, и является плоскость $y=3$, единичный вектор нормали к которой $\vec{n}_0=\{0,1,0\}$.

3) Находим циркуляцию по формуле Стокса

$$\text{Ц}=\iint\limits_{(\sigma)}(\overrightarrow{rot A}\cdot\vec{n}^o)\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}\{(2y-2x),\ y,\ z\}\cdot\{0,\ 1,\ 0\}\,d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}y\,d\sigma.$$

Переходим к двойному интегралу по проекции нашей поверхности (плоскости $y=3$) на плоскость XOZ. Проекцией будет круг $D:\ x^2+z^2\le 16$ радиуса $R=4$. Элемент площади поверхности $d\sigma$ в точности совпадает со своей проекцией, которая равна $dx\ dz$, а значение переменной y на поверхности, как мы выяснили ранее, равно 3. Получаем

$$\text{Ц}=\iint\limits_{(\sigma)}y\,d\sigma=\left|\begin{matrix} d\sigma=dx\ dz, \\ y=3 \end{matrix}\right|=\iint\limits_{(D)}3\ dx\ dz=3\ S_{\text{кр.}}=3\ \pi\ 4^2=48\pi.$$

• **3**. Найти модуль циркуляции векторного поля

$$\vec{A}=x^2-z^2\vec{i}+3yz\vec{j}+y\vec{k}$$

вдоль линии пересечения поверхностей

$$\begin{cases} z=1+3(x^2+y^2), \\ z=4. \end{cases}$$

1) Находим координаты вектора – ротора

$$\overrightarrow{rot A}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2-z^2 & 3yz & y \end{vmatrix}=$$

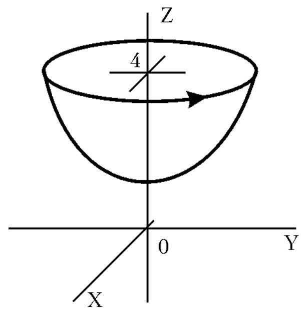
$$= \left[(y)'_y - (3yz)'_z\right]\vec{i} - \left[(y)'_x - (x^2 - z^2)'_z\right]\vec{j} + \left[(3yz)'_x - (x^2 - z^2)'_y\right]\vec{k} =$$

$$= (1 - 3y)\vec{i} - 2z\vec{j} + 0 \cdot \vec{k} = \{1 - 3y,\ -2z,\ 0\}.$$

2) Находим единичный вектор нормали.

Контур (L) в нашем случае есть окружность – линия пересечения параболоида $z = 1 + 3(x^2 + y^2)$ и плоскости $z = 4$. Эту плоскость и используем в качестве поверхности интегрирования (σ), вектор единичной нормали к которой

$\vec{n}_0 = \{0,\ 0,\ 1\}$.



3) Находим скалярное произведение

$$(\overrightarrow{rot A} \cdot \vec{n}^o) = \{1 - 3y,\ -2z,\ 0\} \cdot \{0,\ 0,\ 1\} = (1 - 3y) \cdot 0 + (-2z) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

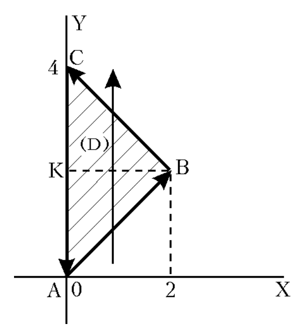
Тогда циркуляция

$$\text{Ц} = \iint\limits_{(\sigma)} (\overrightarrow{rot A} \cdot \vec{n}^o)\ d\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} 0 \cdot d\sigma = 0.$$

• **4.** Найти циркуляцию вектора $\vec{A} = \{(x + y),\ y^2\}$ вдоль контура треугольника ABC с вершинами в точках $A(0;\ 0)$, $B(2;\ 2)$, $C(0;\ 4)$.

Поскольку мы имеем плоское поле, воспользуемся формулой Грина

$$\text{Ц} = \oint\limits_{(L)} (\vec{A} \cdot \vec{dl}) = \oint\limits_{(L)} P\ dx + Q\ dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dx\ dy.$$



Имеем

$P(x,\ y) = (x + y)$, $\quad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$,

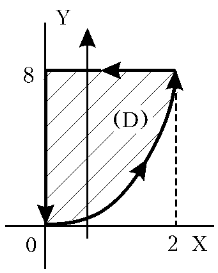
$Q(x,\ y) = y^2$, $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0$, $\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$.

$$\text{Ц} = -\iint\limits_{(D)} dx\ dy = -S_{\text{треуг.}} = -1/2 \cdot 4 \cdot 2 = -4.$$

Поскольку подынтегральная функция является постоянной величиной, вычисление циркуляции сводится к вычислению площади области интегрирования. Здесь мы можем воспользоваться известной из геометрии формулой площади треугольника, основание которого $AC = 4$, а высота $KB = 2$.

• **5**. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A} = \{(x + y^2),\ \ (2xy + 5x - 1)\}$ вдоль замкнутой кривой, составленной линиями $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$.

Воспользуемся опять формулой Грина



$$P(x,\ y) = (x + y^2), \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y,$$

$$Q(x,\ y) = 2xy + 5x - 1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 5 + 2y,$$

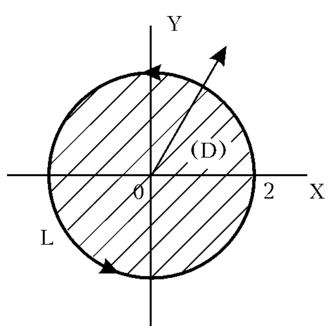
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 5 + 2y - 2y = 5.$$

Тогда $\quad \text{Ц} = 5 \iint\limits_{(D)} dx\ dy.$

Готовой формулы для вычисления площади такого параболического сегмента нет, поэтому продолжаем вычисление двойного интеграла

$$\text{Ц} = 5 \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x^3}^8 dy = 5 \int\limits_0^2 dx \left(y \ \Big|_{x^3}^8 \right) = 5 \int\limits_0^2 (8 - x^3\ )\ dx = 5\ \left(8x - x^4/4\right)\Big|_0^2 = 60.$$

• **6**. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{A} = x^2\ y \cdot \vec{i} - y^2\ x \cdot \vec{j}$ вдоль замкнутой кривой $x^2 + y^2 = 4$.



Имеем

$$P(x,\ y) = x^2 y, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2,$$

$$Q(x,\ y) = -y^2\ x, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -y^2,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -(x^2 + y^2).$$

Тогда

$$\text{Ц} = -\iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)\ dx\ dy.$$

Перейдем к полярным координатам

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad dx\ dy = \rho\ d\rho\ d\varphi,$$

$$(x^2 + y^2) = \rho^2 \implies \rho = 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le 2.$$

$$Ц = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (\rho^2)\ \rho\ d\rho = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^3\ d\rho = -2\pi\frac{16}{4} = -8\pi.$$

2.1.8. Работа в силовом поле

Ранее было отмечено, что криволинейный интеграл 2-го рода в физическом смысле выражает работу силового поля. То есть, если переменный вектор силы, действующей со стороны поля на материальную точку, $\vec{F} = P \cdot \vec{i} + Q \cdot \vec{j} + R \cdot \vec{k}$, то работа, совершаемая полем при перемещении точки вдоль некоторой линии (L), равна величине криволинейного интеграла

$$A = \int\limits_{(L)} (\vec{F} \cdot \vec{dl}) = \int\limits_{(L)} P \cdot dx + Q \cdot dy + R \cdot dz.$$

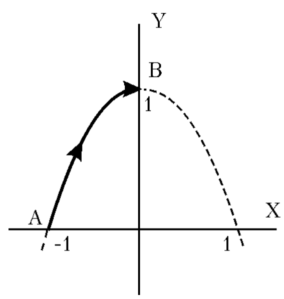
В частности, для плоского поля

$$A = \int\limits_{(L)} (\vec{F} \cdot \vec{dl}) = \int\limits_{(L)} P \cdot dx + Q \cdot dy.$$

Заметим, что циркуляция силового поля есть не что иное, как работа, совершаемая по замкнутому контуру.

Таким образом, если вычисляется работа поля по замкнутой линии, то, как и в случае вычисления циркуляции, можно воспользоваться формулами Стокса и Грина. Если контур не замкнут, то интеграл вычисляется непосредственно.

• **1**. Найти работу силового поля $\vec{F} = y \cdot \vec{i} + (y + 2x) \cdot \vec{j}$ при перемещении единицы массы по дуге параболы $y = 1 - x^2$ от точки $A(-1;\ 0)$ до точки $B(0;\ 1)$.



Работа плоского поля находится по формуле

$$A = \int\limits_{(L)} (\vec{F} \cdot \vec{dl}) = \int\limits_{(L)} P \cdot dx + Q \cdot dy =$$

$$= \int\limits_{(L)} y \cdot dx + (y + 2x) \cdot dy.$$

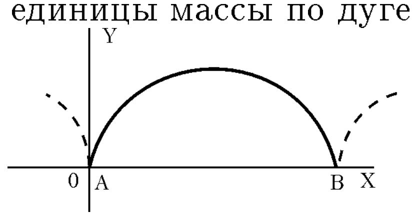
Из уравнения контура интегрирования имеем $y = 1 - x^2$,

$dy = -2x\ dx, \quad -1 \le x \le 0.$ Подставляем в интеграл

$$A = \int\limits_{-1}^{0} (1 - x^2) \cdot dx + (1 - x^2 + 2x) \cdot (-2x)\ dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (2x^3 - 5x^2 - 2x + 1)\ dx = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{5}{3}\, x^3 - x^2 + x \right) \Bigg|_{-1}^{0} = -\frac{1}{6}.$$

• **2**. Найти работу силового поля $\vec{F} = \{x : \ -y\}$ при перемещении единицы массы по дуге циклоиды



$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

от точки $A(0;\ 0)$ до точки $B(2\pi a;\ 0)$.

Работу вычисляем по формуле

$$A = \int\limits_{(L)} (\vec{F} \cdot \vec{dl}) = \int\limits_{(L)} P \cdot dx + Q \cdot dy = \int\limits_{(L)} x \cdot dx - y \cdot dy.$$

Делаем замены: $\left| \begin{array}{ll} x = a(t - \sin t), & dx = a(1 - \cos t)\ dt, \\ y = a(1 - \cos t), & dy = a \sin t\ dt. \end{array} \right|$

Точке $A(0;\ 0)$ соответствует значение параметра $t = 0$.

Точке $B(2\pi a;\ 0)$ соответствует значение параметра $t = 2\pi$.

$$A = \int\limits_{0}^{2\pi} [\ a(t - \sin t) \cdot a(1 - \cos t) - a(1 - \cos t) \cdot a \sin t\ ]\ dt =$$

$$= a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} (t - \sin t - t\ \cos t + \sin t \cos t - \sin t\ + \sin t \cos t\ )\ dt =$$

$$= a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} (t - 2\sin t - t\ \cos t + 2 \sin t \cos t\ )\ dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{t^2}{2} + 2\cos t - t \sin t - \cos t + 2\frac{\sin^2 t}{2} \right) \Bigg|_{0}^{2\pi}.$$

Интеграл $\int\limits_0^{2\pi} t \cos t\, dt$ берется по частям.

Легко показать, что все слагаемые в скобках, кроме первого, будут равны нулю, поэтому останется

$$A = a^2\, \frac{t^2}{2} \Bigg|_{0}^{2\pi} = a^2 \cdot 2\pi^2 = 2a^2\pi^2.$$

2.1.9. Простейшие векторные поля

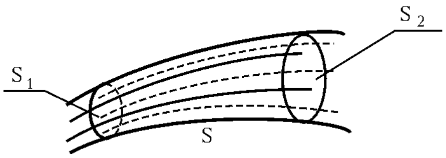
Соленоидальное или трубчатое поле Векторное поле называется соленоидальным или трубчатым, если дивергенция равна нулю во всех точках поля

$$div\vec{A} \equiv 0,$$

т.е. соленоидальное поле – это поле без источников и стоков.
Тогда, согласно формуле Остроградского-Гаусса

$$\Pi = \oiint\limits_{(\sigma)} (\vec{A}\cdot\vec{n}^o)\; d\sigma = \iiint\limits_{(V)} div\ \vec{A}\cdot dv = 0.$$

Поток через любую замкнутую поверхность будет равен нулю.
Течение в таком поле аналогично течению в трубе с непроницаемыми стенками. Для такого поля вводится понятие векторной трубки. Если взять замкнутый контур и через каждую точку контура провести векторные линии (линии тока, которые в соленоидном поле нигде друг с другом не пересекаются), получится что-то вроде трубки, через стенки которой ничего не втекает и не вытекает.



Поток через любое сечение такой трубки одинаков. Сколько в трубку в одно сечение S_1 втекает, столько же через другое сечение S_2 вытекает.

Для того, чтобы доказать, что поле является трубчатым или соленоидальным, нужно убедиться в том, что дивергенция поля равна нулю. Например:

$$\vec{A} = (7x^2 - e^y)\cdot\vec{i}\ +\ (\cos z - 3xy)\cdot\vec{j}\ +\ (\sqrt{xy} - 11xz)\cdot\vec{k},$$

$$div\vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\ = 14x - 3x - 11x = 0.$$

Вывод: данное поле является соленоидальным.

Потенциальное поле. Потенциал. Потенциальным, или безвихревым, полем называется векторное поле, в котором

$$\overrightarrow{rot\ A} = 0,\ \text{или}\ \overrightarrow{rot\ A} = \{0,\ 0,\ 0\}$$

Потенциальное поле обладает следующими характерными свойствами.

1) Циркуляция потенциального поля по любому контуру равна нулю.

2) Работа в потенциальном силовом поле не зависит от пути, а зависит только от конечной и начальной точек.

3) Всякое потенциальное поле можно характеризовать не тремя скалярными функциями, определяющими координаты вектора поля

$$\vec{A} = P(x,\ y,\ z)\cdot\vec{i}\ +\ Q(x,\ y,\ z)\cdot\vec{j}\ +\ R(x,\ y,\ z)\cdot\vec{k},$$

а всего одной функцией $U = U(x,\ y,\ z)$, называемой *потенциалом* поля. При этом координаты вектора поля связаны с потенциалом поля равенствами

$$P(x,\ y,\ z) = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q(x,\ y,\ z) = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R(x,\ y,\ z) = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

4) Если поле является силовым, то работа в потенциальном поле равна разности потенциалов в конечной и начальной точках пути.

Гармоническое поле. Оператор Лапласа. Векторное поле называется гармоническим, если

$$div\vec{A} \equiv 0, \quad \overrightarrow{rot\vec{A}} \equiv 0.$$

Гармоническое поле – это поле безвихревое и без источников и стоков. Гармоническое поле является одновременно трубчатым и потенциальным.

Характерной особенностью такого поля является то, что поле можно характеризовать потенциалом $U = U(x,\ y,\ z)$, являющимся гармонической функцией, т.е. функцией, удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta U = 0,$$

где, так называемый, оператор Лапласа Δ определяется по следующей символической формуле

$$\boxed{\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.}$$

Большинство реальных физических полей являются гармоническими и характеризуются гармоническими потенциалами.

Оператор Гамильтона. Оператором Гамильтона или набла-вектором ($\vec{\nabla}$) называют символический вектор

$$\boxed{\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.}$$

С помощью данного оператора можно кратко записывать различные векторные дифференциальные операции 1-го порядка.
Так, если задано векторное поле $\vec{A} = \{P,\ Q,\ R\}$ и скалярная функция $U = U(x,\ y,\ z)$, то

1. $\vec{\nabla}\, U = \left\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right\} \cdot U = \left\{\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}\right\} = \overrightarrow{grad\, U}.$

2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right\} \cdot \{P,\ Q,\ R\} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = div\vec{A}.$

3. $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left\{\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right\} \times \{P,\ Q,\ R\} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \overrightarrow{rot A}.$

Итак: $\boxed{\vec{\nabla}\, U = \overrightarrow{grad\, U}, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = div\vec{A}, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \overrightarrow{rot A}.}$

Легко показать, что

1) $\overrightarrow{rot\, grad\, U} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot U = 0$ – поле вектора градиента всегда является потенциальным.

2) $div\ \overrightarrow{rot\ A} = \nabla \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$ – векторное поле ротора всегда трубчатое.

Отметим, что возможно нахождение $\overrightarrow{grad}$ только от скалярных величин, а $\overrightarrow{rot}$ и div только от векторных, а также, что в результате нахождения $\overrightarrow{grad}$ и $\overrightarrow{rot}$ получается векторная величина, а в результате нахождения div – скалярная.

2.2. Скалярное поле

2.2.1. Понятие скалярного поля

Говорят, что в некоторой области плоскости XOY задано скалярное поле, если в каждой точке этой области определена некоторая функция двух независимых переменных

$$U = f(x;\ y).$$

Говорят, что в некоторой области 3-х мерного пространства задано скалярное поле, если в каждой точке этой области определена некоторая функция трех независимых переменных

$$U = f(x;\ y;\ z).$$

Физическими примерами скалярных полей могут служить

– поле температур неравномерно нагретого тела $T = T(x;\ y;\ z)$,

– поле атмосферного давления на некотором участке земной поверхности $P = P(x;\ y)$,

– поле распределения высоты поверхности над уровнем моря $H = H(x;\ y)$,

– потенциал электрического или магнитного поля вокруг проводника с током $\varphi = \varphi(x;\ y;\ z)$.

Важнейшими характеристиками скалярных полей, знание которых позволяет наглядно представлять и анализировать их, являются следующие:

1. Линии и поверхности уровня.
2. Производная поля в точке в заданном направлении.
3. Градиент поля.

Остановимся подробнее на этих понятиях.

2.2.2. Линии и поверхности уровня

Линией уровня скалярного поля $U = U(x;\ y)$ называется линия на плоскости, соединяющая точки равных значений функции, т.е. семейство линий уровня на плоскости определяется уравнением

$$U(x;\ y) = const.$$

В случае пространственного поля говорят о поверхностях уровня – поверхностях, на которых функция принимает одинаковые значения. Уравнения поверхностей уровня: $U(x;\ y;\ z) = const$.

Физические примеры линий и поверхностей уровня:

– изотермы, изобары в метеорологии,

– горизонтали в картографии,

– эквипотенциальные линии и поверхности в теории электромагнетизма.

Задача Найти и изобразить линии и поверхности уровня скалярных полей.

• 1. $U = x^2 - y^2$.
Семейство линий уровня определяется уравнением

$$x^2 - y^2 = C, \implies \frac{x^2}{C} - \frac{y^2}{C} = 1.$$

Это семейство равнобоких гипербол с асимптотами $y = x,\quad y = -x$. В зависимости от знака взятой константы C действительной осью гипербол может быть и ось OX, и ось OY. (Рис.a)

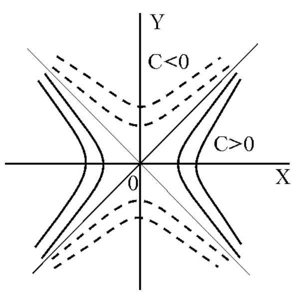


Рис. a

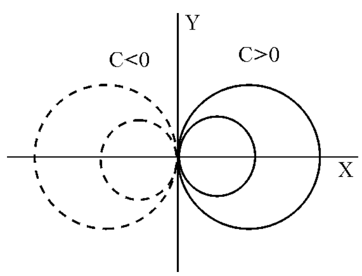


Рис. b

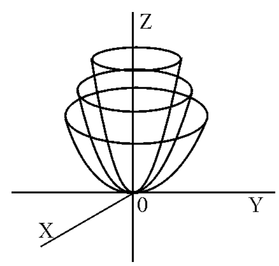


Рис. c

• 2. $U = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.
Семейство линий уровня определяется уравнением

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = C, \implies x^2 + y^2 = \frac{x}{C}.$$

Это семейство окружностей с центром, смещенным по оси влево или вправо в зависимости от знака C на величину $|1/2C|$

и радиусом $R = \dfrac{1}{(2C)^2}$. (Рис.b)

• 3. $U = \dfrac{z}{x^2+y^2}$.

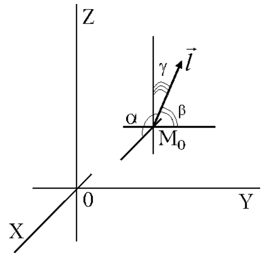
Семейство поверхностей равного уровня определяется уравнением

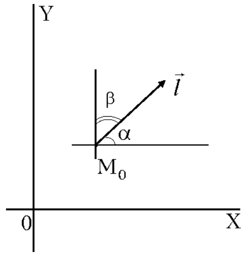
$$\frac{z}{x^2+y^2} = C, \implies z = C(x^2+y^2).$$

Это семейство параболоидов, с вершинами в начале координат и сью симметрии OZ. (Рис.с) В зависимости от знака C параболоиды могут быть направлены вверх или вниз.

2.2.3. Производная по направлению

Пусть в некоторой области 3-х мерного пространства, содержащей точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, задана дифференцируемая функция $U = U(x;\ y;\ z)$. Проследим за ее изменением при перемещении из точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ в заданном направлении, характеризуемом единичным вектором $\vec{l^o}$, образующим с осями координат OX, OY, OZ углы α, β, γ соответственно.





О п р е д е л е н и е. Производной скалярной функции $U(x;\ y;\ z)$ по направлению $\vec{l}$ в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ называется конечный предел отношения приращения ΔU функции при перемещении из точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ в направлении вектора $\vec{l}$ к величине этого перемещения ρ при стремлении величины перемещения к нулю

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta U}{\rho}.$$

Производная по направлению вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\cos\gamma,$$

где $\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $\dfrac{\partial U}{\partial y}$, $\dfrac{\partial U}{\partial z}$ — частные производные функции $U(x;\ y;\ z)$, вычисленные в точке M_0, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы направления $\vec{l}$ или что тоже – координаты его орта

$$\vec{l^o} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}.$$

Если известны координаты вектора $\vec{l} = \{\ x;\ y;\ z\ \}$, то его направляющие косинусы находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\ \vec{l}\ |},\ \cos\beta = \frac{y}{|\ \vec{l}\ |},\ \cos\gamma = \frac{z}{|\ \vec{l}\ |},\quad |\ \vec{l}\ | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

В частном случае производная плоского скалярного поля $U(x;\ y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ по направлению, составляющему с осями координат OX и OY углы α и β соответственно, выражается формулой

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\cos\beta.$$

Так как на плоскости углы α и β связаны соотношением $\beta = \pi/2 - \alpha$, то можно записать

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\sin\alpha.$$

В физическом смысле производная скалярной функции в данной точке по заданному направлению есть скорость изменения этой функции в данной точке по указанному направлению.

Для вычисления производной скалярного поля в данной точке по данному направлению необходимо:

a) Найти значения всех частных производных первого порядка в данной точке.

b) Из условий задачи, если не задано сразу, найти единичный вектор (орт) заданного направления $\vec{l^o}$.

c) Вычислить производную согласно приведенным выше формулам.

Рассмотрим примеры.

• 1. Найти производную скалярного поля $U = 3x^2 - 4xy$ в точке $M_0(-1;\ 4)$ в направлении, составляющем с осью OX угол $\alpha = 2\pi/3$.

a) Находим частные производные и их значения в точке M_0

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_0} = 6x - 4y\ |_{x=-1,\ y=4} = -22,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{M_0} = -4x\ |_{x=-1,\ y=4} = 4.$$

b) Направление на плоскости задано углом α. Находим

$$\cos\alpha = \cos(2\pi/3) = -1/2, \qquad \sin\alpha = \sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2.$$

c) Подставляем все полученные значения в формулу для производной по направлению для случая плоского поля

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\sin\alpha = -22\cdot\frac{-1}{2} + 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 11 + 2\sqrt{3} \approx 14,4.$$

• 2. Найти производную скалярного поля $U = x\sqrt{y} - z^2y + 4z$ в точке $M_0(1;\ 1;\ -2)$ в направлении от точки M_0 к точке $M_1(-1;-1;\ 2)$.

a) Находим частные производные и их значения в точке M_0

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_0} = \sqrt{y}\ \ |_{M_0} = 1,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{M_0} = \left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - z^2\right)\ |_{M_0} = \frac{1}{2} - 4 = -3,5.$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{M_0} = (-2zy + 4)\ |_{M_0} = 4 + 4 = 8.$$

b) Находим вектор направления

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \{-1-1; -1-1; 2-(-2)\} = \{-2, -2,\ 4\}.$$

Находим единичный вектор, деля каждую координату вектора на его длину

$$\vec{l}^o = \frac{\overrightarrow{M_0M_1}}{|\overrightarrow{M_0M_1}|} = \{-\frac{2}{\sqrt{24}};\ -\frac{2}{\sqrt{24}};\ \frac{4}{\sqrt{24}}\} = \{-\frac{1}{\sqrt{6}};\ -\frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{2}{\sqrt{6}}\}.$$

Таким образом, направляющие косинусы

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}};\quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{6}};\quad \cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

c) Вычисляем производную по направлению

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\cos\gamma =$$

$$= 1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) - 3,5\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + 8\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{18,5}{\sqrt{6}} \approx \quad 7,55.$$

• 3. Найти производную скалярного поля
$U = \ln(1+x^2+y^2) - \sqrt{x^2+y^2}$ в точке $M_0(3;\ 0;\ -4)$ в направлении вектора нормали к поверхности
$S: x^2-6x+9y^2+z^2=4z+4,$ образующего острый угол с осью OZ.

a) Находим частные производные функции $U(x;y;z)$ в точке M_0

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{M_0} = \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2} - \frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)_{M_0} = \frac{6}{10} - \frac{3}{\sqrt{25}} = 0.$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{M_0} = \left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)_{M_0} = 0.$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_{M_0} = -\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)_{M_0} = -\frac{-4}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$$

b) Находим вектор направления. Как известно, координатами вектора нормали к поверхности, заданной уравнением S :
$F(x;y;z)=0$ являются частные производные функции $F(x;y;z)$, т.е. $\vec{N} = \{F'_x;\ F'_y;\ F'_z\}$.
Находим вектор нормали к заданной поверхности

$$S: x^2-6x+9y^2+z^2=4z+4 \quad \Rightarrow$$

$$F(x;y;z) = x^2-6x+9y^2+z^2-4z-4 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \{(2x-6);\ 18y;\ (2z-4)\}.$$

Вычисляем координаты вектора нормали в данной точке
$M_0(3;\ 0;\ -4)$: $\quad \vec{N} = \{0;\ 0;\ -12\}$.
Находим единичный вектор, деля каждую координату вектора на его длину

$$(|\vec{N}| = 12): \qquad \vec{l^o} = \{0;\ 0;\ -1\}.$$

Так как в условии задачи сказано, что вектор нормали должен образовывать с осью OZ острый угол, то координата z должна быть положительной, поэтому берем противоположный вектор
$\vec{l^o} = \{0;\ 0;\ 1\}$.
Таким образом, направляющие косинусы
$\cos\alpha = 0;\quad \cos\beta = 0;\ \cos\gamma = 1.$

c) Вычисляем производную по направлению

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\cos\gamma = 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + \frac{4}{5}\cdot 1 = 0,8.$$

2.2.4. Вектор–градиент скалярного поля

О п р е д е л е н и е. Вектором-градиентом скалярного поля $U(x;\ y;\ z)$ в данной точке называется вектор, координатами которого служат значения частных производных функции поля в этой точке.

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\ U} = \left\{\frac{\partial U}{\partial x};\ \frac{\partial U}{\partial y};\ \frac{\partial U}{\partial z}\right\}.$$

Или

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\ U} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k}.$$

Для плоского поля $U(x;\ y)$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\ U} = \left\{\frac{\partial U}{\partial x};\ \ \frac{\partial U}{\partial y}\right\}.$$

Или

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\ U} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\vec{j}.$$

Напомним еще раз, что частные производные функции U вычисляются в точке точке M_0.

Сопоставив определения вектора-градиента и понятия производной по направлению и линий (поверхностей) уровня, можно сделать следующие важные выводы, объясняющие суть вектора-градиента.

1. Вектор-градиент в каждой точке поля направлен перпендикулярно к линии (поверхности) уровня, проходящей через данную точку.

2. Величина производной в точке по направлению есть проекция вектора-градиента поля в данной точке на данное направление.

3. Величина вектора-градиента (его модуль) есть наибольшая из всех производных в данной точке по всем направлениям.

Направление вектора-градиента при этом есть направление, в котором поле растет с наибольшей скоростью.

Рассмотрим примеры.

• 1. Найти величину и направление вектора-градиента поля
$U = xz^2 - \sqrt{x^3 y}$ в точке $M_0(2;\ 2;\ 4)$.

Находим частные производные функции $U(x; y; z)$ и вычисляем их в заданной точке M_0

$$\frac{\partial U}{\partial x} = z^2 - \frac{3\sqrt{xy}}{2}\Big|_{M_0} = 13, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\sqrt{x^3}}{2\sqrt{y}}\Big|_{M_0} = -1, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 2xz\Big|_{M_0} = 16.$$

Записываем вектор-градиент

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\ U} = 13 \cdot \vec{i} - 1 \cdot \vec{j} + 16 \cdot \vec{k} = \{13;\ -1;\ 16\}.$$

Находим длину вектора-градиента

$$|\ \overrightarrow{\mathrm{grad}\ U}\ | = \sqrt{13^2 + \ (-1)^2 + \ 16^2} = \sqrt{426} \ \approx \ 20,64.$$

Направление вектора-градиента задается его направляющими косинусами

$$\cos\alpha = \frac{13}{\sqrt{426}}; \quad \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{426}}; \quad \cos\gamma = \frac{16}{\sqrt{426}}.$$

• 2. Найти величину и направление наибольшей скорости изменения скалярного поля $U = \dfrac{xy^2}{z^3}$ в точках $M_1(3;\ 2;\ -2)$ и $M_2(2;\ -1;\ 1)$.

Так как поле растет с наибольшей скоростью в направлении вектора-градиента, то данная задача сводится к нахождению градиентов заданной функции, т.е. их длин и направляющих косинусов в указанных точках.

Находим частные производные функции $U(x; y; z)$ и вычисляем их в точке M_1

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y^2}{z^3}\Big|_{M_1} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2xy}{z^3}\Big|_{M_1} = \frac{12}{-8} = -\frac{3}{2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{3xy^2}{z^4}\Big|_{M_1} = -\frac{36}{16} = -\frac{9}{4}.$$

Градиент в точке M_1 $\quad \overrightarrow{\mathrm{grad}\ U} = -\dfrac{1}{2}\cdot\vec{i} - \dfrac{3}{2}\cdot\vec{j} - \dfrac{9}{4}\cdot\vec{k} = \{-1/2;\ -3/2;\ -9/4\}.$

Модуль вектора-градиента - величина наибольшей скорости изменения функции в точке M_1 будет равен

$$|\overrightarrow{\text{grad } U}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+\frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{121}{16}} = \frac{11}{4} = 2,75.$$

Направление вектора-градиента в точке M_1 характеризуется его направляющими косинусами

$$\cos\alpha = \frac{1/2}{11/4} = \frac{2}{11}; \quad \cos\beta = -\frac{3/2}{11/4} = -\frac{6}{11}; \quad \cos\gamma = -\frac{9/4}{11/4} = -\frac{9}{11}.$$

Вычисляем частные производные функции $U(x;y;z)$ в точке M_2

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y^2}{z^3}\Big|_{M_2} = 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2xy}{z^3}\Big|_{M_2} = -4, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{3xy^2}{z^4}\Big|_{M_2} = -6.$$

Градиент в точке M_2

$$\overrightarrow{\text{grad } U} = 1\cdot\vec{i} - 4\cdot\vec{j} - 6\cdot\vec{k} = \{1;\ \ -4;\ \ -6\ \}.$$

Модуль вектора-градиента - величина наибольшей скорости изменения функции в точке M_2 будет равен

$$|\overrightarrow{\text{grad } U}| = \sqrt{1+16+36} = \sqrt{53} \approx 7,28.$$

Направление вектора-градиента в точке M_2 характеризуется его направляющими косинусами

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{53}}; \quad \cos\beta = -\frac{4}{\sqrt{53}}; \quad \cos\gamma = -\frac{6}{\sqrt{53}}.$$

Сравнивая величины векторов-градиентов, можно сказать, что наибольшая скорость изменения функции в точке M_2 примерно в 2,6 раза больше, чем наибольшая скорость изменения функции в точке M_1.

Г л а в а 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА и ФУНКЦИИ

3.1. Комплексные числа

3.1.1. Понятие комплексного числа

В множестве действительных чисел действие извлечения корня четной степени из отрицательного числа невыполнимо. Выражения $\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-9}, \quad \sqrt[4]{-7}$ не имеют смысла и, поэтому, уравнения

$$x^2+1=0, \quad x^4+16=0, \quad x^2+6x+25=0$$

на этом множестве решений не имеют. Для того, чтобы сделать возможным извлечение корня четной степени из отрицательного числа множество действительных чисел было расширено добавлением к нему множества мнимых чисел.

О п р е д е л е н и е 1. *Число, квадрат которого равен -1, называется мнимой единицей и обозначается буквой i.* Т.е.

$$i^2=-1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-1}=\pm i.$$

Итак: $\sqrt{-4}=\pm 2i, \quad \sqrt{-25}=\pm 5i, \quad \sqrt{-2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}=\pm\sqrt{2}\,i$ и т.п.

О п р е д е л е н и е 2. *Число вида $z=x+i\,y$, где $x,y-$ действительные числа, а $i-$ мнимая единица, называется комплексным числом.*

Число x называется действительной частью комплексного числа и обозначается $x=\operatorname{Re} z=\operatorname{Re}(x+i\,y)$,

число $y-$ называется мнимой частью числа и обозначается

$$y=\operatorname{Im} z=\operatorname{Im}(x+i\,y).$$

Два комплексных числа $z_1=x_1+i\,y_1$ и $z_2=x_2+i\,y_2$ равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части

$$z_1=z_1 \quad \Longrightarrow \quad x_1=x_2, \quad y_1=y_2.$$

В множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение, в том числе и с отрицательным дискриминантом, имеет решения

- $x^2+1=0 \;\Rightarrow\; x^2=-1 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\pm i.$
- $x^2+9=0 \;\Rightarrow\; x^2=-9 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\pm 3\,i.$
- $x^4-16=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)(x^2+4)=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm 2, \quad x_{3,4}=\pm 2i$
- $x^2+6x+25=0 \Rightarrow x_{1,2}=-3+\sqrt{-16}=-3+4\sqrt{-1}=-3\pm 4\,i.$
- $x^2+6x+13=0 \Rightarrow x_{1,2}=-3+\sqrt{9-13}=-3\pm\sqrt{-4}=-3\pm 2i$

3.1.2. Алгебраическая форма записи комплексного числа

Запись комплексного числа в виде $\boxed{z = x + i\,y}$ называется *алгебраической формой записи* комплексного числа.

О п р е д е л е н и е 3. *Комплексное число, имеющее ту же действительную и противоположную по знаку мнимую часть, называется комплексно-сопряженным с числом* $z = x + i\,y$ *и обозначается* $\overline{z} = \overline{x + i\,y} = x - i\,y$.

О п р е д е л е н и е 4. *Число* $\sqrt{x^2 + y^2}$ *называется модулем числа* $z = x + iy$ *и обозначается* $|z|$, *или* r :

$$\boxed{|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.}$$

Очевидно, что модуль комплексного числа есть всегда неотрицательное действительное число $|z| \geq 0$.

Алгебраическая форма записи очень удобна при проведении арифметических операций над комплексными числами, т.к. они аналогичны арифметическим операциям над алгебраическими двучленами.

Сложение (вычитание) комплексных чисел. *При сложении (вычитании) двух комплексных чисел складываются (вычитаются) соответственно их действительные и мнимые части.*

- $(2 - 3i) + (1 + 4i) = (2 + 1) + i(-3 + 4) = 3 + i$,
- $(3 - 5i) - (2 + 4i) = (3 - 2) + i(-5 - 4) = 1 - 9i$.

Уножение комплексных чисел. *Комплексные числа умножаются как алгебраические двучлены, но при этом необходимо учесть, что* $i^2 = -1$, *а затем привести подобные члены*

- $(2 - 3i)(1 + 4i) = 2 + 8i - 3i - 12i^2 = 2 + 5i + 12 = 14 + 5i$,
- $(3 - 5i)(2 + 4i) = 6 + 12i - 10i - 20i^2 = 6 + 2i + 20 = 26 + 2i$,
- $(4 - 3i)^2 = 16 - 24i + 9i^2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$,
- $2\,(3 - i) + 5\,(4 + 2i) = 6 - 2i + 20 + 10i = 26 + 8i$,
- $4\,(2 + i) + i\,(1 - 2i) = 8 + 4i + i - 2i^2 = 8 + 5i + 2 = 10 + 5i$.

Найдем произведение двух комплексно-сопряженных чисел

$$z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + ixy - ixy - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

Итак, произведение $z \cdot \overline{z}$ есть действительное число, равное сумме квадратов действительной и мнимой части комплексного числа. Или: согласно определению 4, произведение двух комплексно-сопряженных чисел равно квадрату модуля комплексного числа z.

$$z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Например,

- $(3+2i) \cdot (3-2i) = 3^2 + 2^2 = 13.$
- $(1-i) \cdot (1+i) = 1^2 + 1^2 = 2.$
- $(\sqrt{3} - \sqrt{2}i) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}i) = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2 = 5.$

З а м е ч а н и е. Используя результат произведения комплексно- сопряженных чисел, можно проводить разложение на множители суммы квадратов действительных чисел

- $x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy).$

- $x^2 + 25 = (x+5i) \cdot (x-5i).$
- $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1 = (x+2+i)(x+2-i).$

Деление комплексных чисел. *Чтобы раэделить одно комплексное число на другое, нужно записать операцию деления в виде дроби, умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, учитывая, что $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$, и записать окончательный ответ, выделив дейсвительную и мнимую части.*

- $$(2-3i):(1+4i) = \frac{2-3i}{1+4i} = \frac{(2-3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)} = \frac{2-3i-8i+12i^2}{1+16} = \\ = \frac{-10-11i}{1+16} = -\frac{10}{17} - \frac{11}{17}\,i.$$

- $$(4+5i):i = \frac{4+5i}{i} = \frac{(4+5i)(-i)}{i(-i)} = \Big| -i^2 = 1 \Big| = -4i - 5i^2 = 5 - 4i.$$

Полезно запомнить, что • $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1\cdot(-i)}{i\cdot(-i)} = \dfrac{-i}{+1} = -i.$ Итак $\dfrac{1}{i} = -i.$

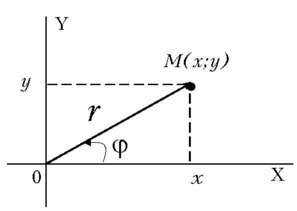
Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают следующими свойствами:

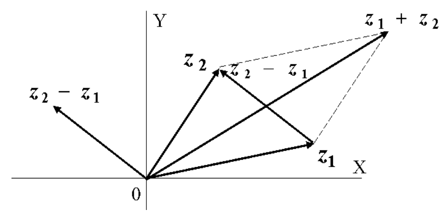
1. К о м м у т а т и в н о с т и (переместительный закон):
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1.$$
2. А с с о ц и а т и в н о с т и (сочетательный закон):
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$
3. Д и с т р и б у т и в н о с т и (распределительный закон):
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

3.1.3. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Если договориться откладывать вдоль оси OX действительную, а вдоль оси OY мнимую части комплексного числа $z = x + iy$, то это число изобразится точкой на плоскости с координатами x и y. Плоскость XOY будем в дальнейшем именовать *комплексной плоскостью*, ось $OX-$ действительной осью, а ось $OY-$ мнимой. Между точками комплексной плоскости и множеством комплексных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

Комплексное число можно также изображать радиус-вектором этой точки $\overrightarrow{OM} = \{x, y\}$. В этом смысле, между множеством радиус-векторов на комплексной плоскости и множеством комплексных чисел также существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому вектор, изображающий число $z = x + iy$, обозначается той же буквой z. Из рисунка 1 видно, что длина радиуса-вектора точки есть модуль комплексного числа $|z| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.





С помощью векторной интерпретации наглядно иллюстрируются сложение и вычитание комплексных чисел. Так, сумма $z_1 + z_2$ изображается вектором суммы (находится по правилу параллелограмма) двух векторов z_1 и z_2, (диагональ, выходящая из общего начала), а разность $z_2 - z_1$ как вектор разности $z_2 - z_1$ (диагональ параллелограмма, соединяющая концы векторов)

3.1.4. Тригонометрическая форма комплексного числа

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется не только декартовыми (x, y), но и полярными координатами (r, φ), где $r-$ расстояние от точки до начала координат, а

$\varphi-$ угол между положительным направлением действительной оси и радиусом-вектором z. Этот угол называется *аргументом* комплексного числа и определяется с точностью до $2\pi k, \quad k=1,2,3,\ldots$ Аргумент числа, точнее все множество значений угла, обозначается $\operatorname{Arg} z$. При работе с комплексными числами обычно используется так называемое *главное значение* аргумента $\varphi=\arg z$, которое удовлетворяет условию $-\pi \leq \arg z \leq \pi, \quad$ (т.е $-3,14 \leq \arg z \leq 3,14$).

Вообще, $\varphi=\arg z$ есть единственное решение системы
$\sin\varphi=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в интервале $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Принято определять аргумент числа в зависимости от знаков действительной и мнимой частей числа следующим образом:

$$\varphi=\arg z=\begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & x>0, \quad (\text{I}-\text{я и IV четверти}), \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi & x<0, \quad y\geq 0, \quad (\text{II}-\text{я четверть}), \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}-\pi & x<0, \quad y\leq 0, \quad (\text{III}-\text{я четверть}) \end{cases}$$

Таким образом, $\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k$, где $k-$ любое целое число.

Приведем значения арктангенсов некоторых углов

$$\begin{array}{lll} \operatorname{arctg}\, 0=0, & \operatorname{arctg}\, \infty=\pi/2, & \operatorname{arctg}\, (-\infty)=-\pi/2. \\ \operatorname{arctg}\, (1/\sqrt{3})=\pi/6, & \operatorname{arctg}\, (-1/\sqrt{3})=-\pi/6, & \\ \operatorname{arctg}\, 1=\pi/4, & \operatorname{arctg}\, (-1)=-\pi/4, & \\ \operatorname{arctg}\, (\sqrt{3})=\pi/3, & \operatorname{arctg}\, (-\sqrt{3})=-\pi/3. & \end{array}$$

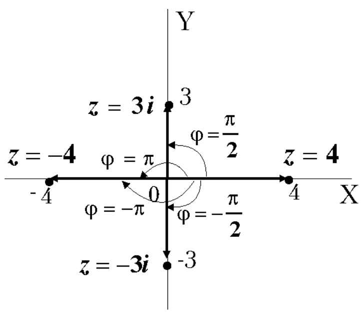
Заметим, что в расчетах далеко не всегда участвуют основные острые углы, тангенсы которых известны. В случае произвольного угла используем калькулятор, который с некоторой степенью точности даст значение угла в радианах или в градусах:

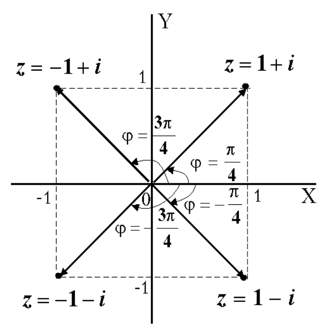
- $\operatorname{arctg}\,(2,835)\approx 1.23\approx 70,6^o$,
- $\operatorname{arctg}\,(67,83)\approx 1.56\approx 89,2^o$,
- $\operatorname{arctg}\,(-0,324)\approx -0,31\approx -18^o$.

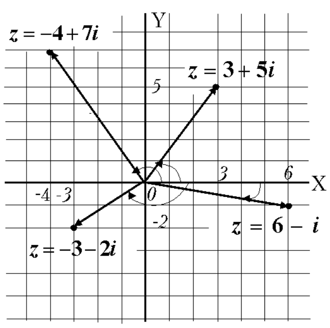
Часто главное значение аргумента числа берут из интервала $[0;2\pi]$. Тогда значению аргумента $\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$ из интервала $[-\pi;\pi]$ будет соответствовать угол $\varphi=\dfrac{5\pi}{4}$ из интервала $[0;2\pi]$, а значению аргумента $\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$ будет соответствовать $\varphi=\dfrac{11\pi}{6}$ и т.п.

Рассмотрим примеры нахождения аргумента комплексных чисел. Для правильного определения аргумента следует всегда изобразить число на комплексной плоскости для того, чтобы определить, в какой четверти находится данное число.

- $\arg(4) = \arg(4 + 0 \cdot i) = \operatorname{arctg}(0/4) = \operatorname{arctg} 0 = 0$,
- $\arg(-4) = \arg(-4 + 0 \cdot i) = \operatorname{arctg}(0/(-4)) = \operatorname{arctg} 0 + \pi = \pi$,
- $\arg(3i) = \arg(0 + 3i) = \operatorname{arctg}(3/0) = \operatorname{arctg} \infty = \pi/2$,
- $\arg(-3i) = \arg(0 - 3i) = \operatorname{arctg}(-3/0) = \operatorname{arctg}(-\infty) = -\pi/2$,
- $\arg(1 + i) = \operatorname{arctg}(1/1) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$
- $\arg(1 - i) = \operatorname{arctg}(-1/1) = \operatorname{arctg}(-1) = -\pi/4$,
- $\arg(-1 + i) = \operatorname{arctg}(1/(-1)) = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\pi/4 + \pi = 3\pi/4$,
- $\arg(-1 - i) = \operatorname{arctg}(-1/(-1)) = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \pi/4 - \pi = -3\pi/4$.







Если значения аргумента не являются табличными, то вычисления арктангесов выполняются с помощью калькулятора и аргумент записывается с учетом четверти, в которой находится комплексное число.

- $\arg(3 + 5i) = \operatorname{arctg}(5/3) = \operatorname{arctg} 1{,}667 \approx 1{,}030 \approx 59^o$.
- $\arg(-4 + 7i) = \operatorname{arctg}(-7/4) + \pi = \operatorname{arctg}(-1{,}75) + \pi \approx -1{,}05 + 3{,}14 \approx 2{,}09 \approx -60{,}3^o + 180^o \approx 119{,}7^o$.
- $\arg(-3 - 2i) = \operatorname{arctg}(2/3) - \pi = \operatorname{arctg} 0{,}667 - \pi \approx 0{,}588 - 3{,}14 \approx -2{,}55 \approx 33{,}7^o - 180^o \approx -146{,}3^o$.
- $\arg(6 - i) = \operatorname{arctg}(-1/6) = \operatorname{arctg}(-0{,}167) \approx -0{,}165 \approx -9{,}5^o$.

Из рисунка 1 видно, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, и любое комплексное число $z \neq 0$ можно представить в виде

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).}$$

Подобная запись называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа. Число, комплексно-сопряженное к данному, запишется в виде

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Тригонометрическая запись необходима при переводе показательной формы записи числа в алгебраическую.

3.1.5. Комплексное число в показательной форме

Пусть комплексное число записано в тригонометрической форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Воспользуемся формулой Эйлера

$$\boxed{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.}$$

Тогда получим $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$.

Таким образом, если r и φ соответственно модуль и аргумент комплексного числа z, то выражение

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

и есть *показательная форма* записи числа.

Отметим, что комплексно-сопряженное число в показательной форме будет иметь вид

$$\overline{z} = re^{-i\varphi}.$$

Показательная форма записи комплексного числа удобна для придания геометрического смысла операциям умножения и деления чисел. Пусть $z_1 = r_1\, e^{i\,\varphi_1}$, $z_2 = r_2\, e^{i\,\varphi_2}$

$$z_1\, z_2 = r_1\, e^{i\,\varphi_1}\, r_2\, e^{i\,\varphi_2} = r_1\, r_2\, e^{i\,(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

$$z_1 : z_2 = r_1\, e^{i\,\varphi_1} : r_2\, e^{i\,\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{i\,(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Из полученного следует важный вывод:

a) При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

b) При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

c) Аргумент отношения двух комплексных чисел есть угол между радиус-векторами этих чисел. Угол отсчитывается от радиус-вектора знаменателя к радиус-вектору числителя.

- $3\,e^{3\pi i/4}\cdot 2\,e^{2\pi i/3} = 6\,e^{i(3\pi/4+2\pi/3)} = 6\,e^{(17\pi/12)\,i}$,
- $4\,e^{\pi i/4}\cdot 5\,e^{-\pi i/3} = 20\,e^{i(\pi/4-\pi/3)} = 20\,e^{-\pi\, i/12}$,
- $\dfrac{3\,e^{3\pi i/4}}{2\,e^{2\pi i/3}} = \dfrac{3}{2}\,e^{i(3\pi/4-2\pi/3)} = \dfrac{3}{2}\,e^{\pi i/12}$,
- $\dfrac{5\,e^{\pi i/3}}{4\,e^{-\pi i/6}} = \dfrac{5}{4}\,e^{i(\pi/3+\pi/6)} = \dfrac{5}{4}\,e^{\pi i/2}$.

Отметим ряд интересных результатов.
Число i имеет модуль равный единице, и аргумент $\dfrac{\pi}{2}$, т.е. $i = e^{i\pi/2}$. Поэтому, при умножении на число i некоторого числа $z = r\,e^{i\,\varphi}$ модуль результата останется равным модулю числа z, а к аргументу прибавится $\dfrac{\pi}{2}$, что приведет к повороту вектора, изображающего число z, на 90^o в положительном направлении без изменения длины.

Любое число, модуль которого равен единице, можно записать в виде $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$. Умножение числа $z = |z|\,e^{i\varphi}$ на $e^{i\,\varphi}$ означает его поворот на угол φ вокруг начала координат без изменения модуля.

3.1.6. Перевод числа из одной формы записи в другую

При выполнении операций над комплексными числами используют все формы записи. Рассмотрим примеры перехода от одной формы записи к другой.

От алгебраической к тригонометрической и показательной

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = x + iy$.

Для перехода к показательной форме представления комплексного числа находим:

1) модуль числа по формуле $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$,

2) аргумент числа $\varphi = \arg z$ по указанному выше правилу (см. п.1.1.3). При определении аргумента числа полезно использовать геометрическое представление числа, т.е. построить число на комплексной плоскости.

3) Записываем число в показательной и тригонометрической форме

$$z = re^{i\varphi}, \qquad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Рассмотрим примеры перехода от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной и тригонометрической.

- **1**. $z = 1 + i = \left| \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \varphi = \arg z = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4 \end{array} \right|$

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}},$$
$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + i\ \sin\tfrac{\pi}{4}\right)$$

- **2**. $z = 1 - i\sqrt{3} = \left| \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{1+3} = 2 \\ \varphi = \arg z = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\pi/3 \end{array} \right|$

$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2\, e^{-\frac{i\pi}{3}}.$$
$$z = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\ \sin\frac{\pi}{3}\right).$$

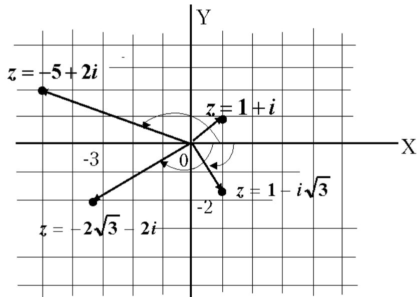
- **3**. $z = -5 + 2i = \left| \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}, \quad \varphi = \arg z = \\ = \operatorname{arctg}\left(-0.4\right) + \pi \approx -0,38 + 3,14 = 2,76 \\ \operatorname{arctg}\left(-0.4\right) + \pi \approx -21,8^o + 180^o = 158,2^o \end{array} \right|$

$$z = -5 + 2i = \sqrt{29}\, e^{2,76\, i}.$$
$$z = -5 + 2i = \sqrt{29}\left(\cos 2,76 + i\ \sin 2,76\right).$$
$$z = -5 + 2i = \sqrt{29}\left(\cos 158,2^o + i\ \sin 158,2^o\right).$$

В данном примере показано, что в тригонометрической записи числа можно использовать как радианные, так и градусные значения аргумента.

• **4.** $z = -2\sqrt{3} - 2\,i = \left| \begin{array}{l} r = |z| = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4, \quad \varphi = \arg z = \\ = \operatorname{arctg} \dfrac{-2}{-2\sqrt{3}} - \pi = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \\ = \dfrac{\pi}{6} - \pi = -\dfrac{5\pi}{6} \end{array} \right|$

$z = -2\sqrt{3} - 2\,i = 4\,e^{-\frac{5\pi}{6}\,i}.$



$z = -2\sqrt{3} - 2\,i =$
$= 4\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} - i\,\sin\dfrac{5\pi}{6}\right).$

В приведенных примерах использованы четность функции $\cos\varphi$: $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ и нечетность функции $\sin\varphi$: $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$.
Запишем в показательной и тригонометрической формах числа, аргументы которых уже были найдены выше

- $z = 4, \quad |z| = 4, \quad \arg(4) = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 4\,e^{0\,i} = 4\,(\cos 0 + i\sin 0).$
- $z = -4, \quad |z| = 4, \quad \arg(-4) = \pi \quad \Rightarrow \quad z = 4\,e^{\pi\,i} = 4\,(\cos\pi + i\,\sin\pi).$
- $z = 3i, \quad |z| = 3, \quad \arg(3i) = \dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad z = 3\,e^{\pi/2\,i} = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\sin\dfrac{\pi}{2}\right).$
- $z = -3i, \quad |z| = 3, \quad \arg(-3i) = -\dfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad z = 3\,e^{-\pi/2\,i} = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{2} - i\,\sin\dfrac{\pi}{2}\right).$

От показательной к алгебраической

Пусть комплексное число задано в показательной форме $z = r\,e^{i\varphi}$. Для перехода к алгебраической форме:

1) сначала переходим к тригонометрическому представлению числа $z = r\,e^{i\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\,\cos\varphi + i\,r\,\sin\varphi$.

2) Вычисляем $\cos\varphi$, $\sin\varphi$.

3) Находим действительную $x = r\cos\varphi$ и мнимую $y = r\,\sin\varphi$ части числа и записываем окончательно число в алгебраической форме $z = x + iy$

- $z = e^{2\pi i} = \cos\,2\pi + i\sin\,2\pi = 1 + i\cdot 0 = 1$
- $z = e^{\pi i} = \cos\,\pi + i\sin\,\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$
- $z = 2e^{\pi i} = 2[\cos\,\pi + i\sin\,\pi] = 2(-1 + i\cdot 0) = -2.$
- $z = e^{\frac{\pi i}{2}} = [\cos\,\dfrac{\pi}{2} + i\sin\,\dfrac{\pi}{2}] = (0 + i) = i.$
- $z = e^{\frac{-\pi i}{2}} = [\cos\,\dfrac{-\pi}{2} + i\sin\,\dfrac{-\pi}{2}] = (0 - 1\cdot i) = -i.$

- $z=3e^{-\frac{2\pi i}{3}}=3[\cos(-\frac{2\pi}{3})+i\sin(-\frac{2\pi}{3})]=3(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=-\frac{3}{2}-i\frac{3\sqrt{3}}{2}.$
- $z = 7e^{-2,015\,i} = 7[\cos(-2,015) + i\ \sin(-2,015)] \approx$

$\approx 7(-0,43 - 0,90\ i) = -3,01 - 6,32\,i.$

Показательная и тригонометрическая формы записи комплексного числа очень удобны для выполнения таких действий над комплексными числами, как возведение в степень и извлечение корня.

3.1.7. Возведение в степень и извлечение корня

Произведение n равных комплексных чисел z называется $n-$ ой степенью числа. Например: $z^2 = z \cdot z$, $z^3 = z \cdot z \cdot z$.

Корнем $n-$ ой степени из числа z называется такое число $\sqrt[n]{z}$, $n-$ я степень которого равна z.

Как будет показано ниже, результат возведения в целую степень единственен, в то время как при извлечении корня $n-$ ой степени количество корней равно показателю корня.

Использование показательной и тригонометрической формы комплексных чисел позволяет довольно просто получить формулы и сформулировать правила возведения в целую степень и извлечение корня.

Пусть $r = |z|-$ модуль комплексного числа, а $\operatorname{Arg} z-$ его аргумент, где $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k$, $\varphi-$ главное значение аргумента. Комплексное число в показательной форме запишется $z = r\ e^{i\,(\varphi+2\pi k)}$.

$$\boxed{\begin{gathered} z^n = \left(r\ e^{i\,(\varphi+2\pi k)}\right)^n = r^n\ e^{i\,(n\varphi+2\pi nk)} = r^n\ e^{i\,n\varphi}. \\ \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\ e^{i\,(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{r}\ e^{i\ \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)},\quad (k = 0,\ 1,\ ...,n-1). \end{gathered}}$$

Соответствующие формулы в тригонометрической форме называются формулами Муавра

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad (k = 0,\ 1,\ ...,n-1).$$

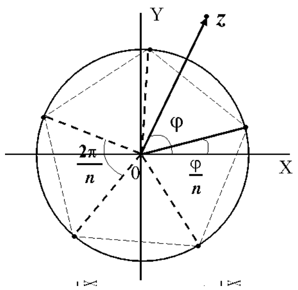
При возведении в целую степень можно не учитывать неоднозначность аргумента $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k$, т.к. в результате целое количество полных оборотов $2\pi k$ все равно можно отбросить. Если величина $n\varphi$ выйдет за пределы интервала $[-\pi, \pi]$, то необходимо отбросить еще один, или большее количество оборотов.

При извлечении корня ситуация другая. Существует несколько значений корня, главные значения аргумента которых укладываются в рамки интервала $[-\pi, \pi]$.

Полученные формулы позволяют сформулировать соответствующие правила и пояснить геометрический смысл рассматриваемых действий.

a) При возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени (увеличивается во столько же раз). В геометрическом смысле радиус-вектор точки удлиняется (укорачивается), его новая длина становится равной $\sqrt[n]{r}$, и поворачивается на новый угол, который составляет с положительным направлением действительной оси величину $n\varphi$.

b) При извлечении корня из комплексного числа корень извлекается из модуля этого числа, а аргумент делится на показатель корня. Все корни, количество которых равно показателю корня, имеют один и тот же модуль, а аргументы соседних значений корней отличаются на $2\pi/n$.



Чтобы построить все корни, достаточно построить окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат, отметить на ней точку (конец радиуса-вектора под углом φ/n), соответствующую одному из значений корня, и равномерно с шагом $2\pi/n$ распределить остальные корни на этой же окружности

Задача. Выполнить действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

- **1**. $(-1-i\sqrt{3})^6$.

Действия возведения в степень и извлечение корня можно выполнять как в показательной, так и в тригонометрической формах записи комплексных чисел.

Перейдем к показательной форме записи. Изобразим число на комплексной плоскости. Оно находится в 3-ей четверти.

1) Находим модуль числа $|-1-i\sqrt{3}| = \sqrt{1+3} = 2$.

2) Находим аргумент

$\arg\,(-1-i\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \pi = \dfrac{\pi}{3} - \pi = -\dfrac{2\pi}{3}$.

3) Записываем число $z = 2\,e^{-2\pi\,i/3}$.

4) Возводим в степень

$$z^6 = \left(2\,e^{-2\pi i/3}\right)^6 = 2^6\,e^{(-2\pi i/3)\cdot 6} = 64\,e^{-4i\pi} = \\ = 64(\cos(-4\pi) + i\,\sin(-4\pi)) = 64\cos(4\pi) = 64.$$

- **2**. $(1+i)^9$.

Проведем вычисления, перейдя к тригонометрической форме записи комплексного числа. Так как оно находится в 1-ой четверти, то

1) модуль числа $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

2) аргумент $\arg\,(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$.

3) Записываем число $z = \sqrt{2}\,\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4) Возводим в степень

$$z^9 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^9 = (\sqrt{2})^9\,\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\,\sin\frac{9\pi}{4}\right) =$$

$$= (\sqrt{2})^8\sqrt{2}\,\left(\cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) + i\,\sin(2\pi + \frac{\pi}{4})\right) = 2^4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= 16\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16\left(\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16\,(1+i) = 16 + 16\,i.$$

- **3**. $(-2+3i)^5$.

Число находится во 2-й четверти.

1) Находим модуль числа $|-2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.
2) Находим аргумент

$$\arg\,(-2+3i) = \text{arctg}\frac{3}{-2} + \pi = -\text{arctg}\frac{3}{2} + \pi \approx -56,3^o + 180^o \approx 123,7^o.$$

3) Записываем число $z = \sqrt{13}\,(\cos 123,7^o + i\sin 123,7^o)$.
4) Возводим в степень $z^5 = \left(\sqrt{13}\,(\cos 123,7^o + i\sin 123,7^o)\right)^5$ $= (\sqrt{13})^5\,(\cos 5\cdot 123,7^o + i\sin 5\cdot 123,7^o) \approx 609\,(\cos 618^o + i\sin 618^o) \approx$ $\approx 609(-0,2-0,98\,i) \approx -121,8\,(1+4,9\,i)$.

- **4**. $\left(\dfrac{1+i\,\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Переводим выражение в скобках в показательную форму. Для этого найдем модуль и аргумент числителя и знаменателя

$$1+i\,\sqrt{3} = \left|\begin{array}{c} |1+i\,\sqrt{3}| = \sqrt{4} = 2, \\ \arg(1+i\,\sqrt{3}) = \text{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \end{array}\right| = 2\,e^{i\pi/3}.$$

$$1-i = \left|\begin{array}{c} |1-i| = \sqrt{2}, \\ \arg(1-i) = \text{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} \end{array}\right| = \sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}.$$

Тогда $\dfrac{1+i\,\sqrt{3}}{1-i} = \dfrac{2\,e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}\,e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}\,e^{i(\pi/3+\pi/4)} = \sqrt{2}\,e^{i(7\pi/12)}$.

Возводим в степень

$$\left(\frac{1+i\,\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20} = \left(\sqrt{2}\,e^{i(7\pi/12)}\right)^{20} = 2^{10}\,e^{i(140\pi/12)} =$$

$$= 2^{10}\,e^{i(35\pi/3)} = 2^{10}\left(\cos\frac{35\pi}{3} + i\,\sin\frac{35\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{10}\left[\cos\left(12\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\,\sin\left(12\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2^{10}\left[\cos\frac{\pi}{3} - i\,\sin\frac{\pi}{3}\right] =$$

$$= 2^{10}\left[\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2^9\,(1-i\,\sqrt{3}) \approx 512 - 887\,i.$$

- **5**. $\sqrt[4]{i}$.

Записываем число в показательной форме $i = e^{i(\pi/2+2\pi\, k)}$. При извлечении корня 4-ой степени получаем 4 значения корня. Записываем выражение для всех корней

$$\sqrt[4]{i} = e^{\frac{i(\pi/2+2\pi\, k)}{4}} = e^{i(\pi/8+\pi\, k/2)}$$

и перебираем значения k от $k=0$ до $k=(n-1)=4-1=3$.

$$\sqrt[4]{i} = \begin{cases} k=0: \quad \sqrt[4]{i} = e^{i\,\pi/8} = \cos\dfrac{\pi}{8} + i\sin\dfrac{\pi}{8} \approx 0,92 + 0,38\, i. \\ k=1: \quad e^{i(\pi/8+\pi/2)} = \cos\dfrac{5\pi}{8} + i\sin\dfrac{5\pi}{8} \approx -0,38 + 0,92\, i. \\ k=2: \quad \sqrt[4]{i} = e^{i(\pi/8+\pi)} = \cos\left(\dfrac{\pi}{8}+\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{8}+\pi\right) = \\ \qquad = -\cos\dfrac{\pi}{8} - i\sin\dfrac{\pi}{8} \approx -0,92 - 0,38\, i. \\ k=3: \quad \sqrt[4]{i} = e^{i(\pi/8+3\pi/2)} = e^{i\,13\pi/8} = \cos\dfrac{13\pi}{8} + i\sin\dfrac{13\pi}{8} = \\ \qquad = -\cos\dfrac{5\pi}{8} - i\sin\dfrac{5\pi}{8} \approx 0,38 - 0,92\, i. \end{cases}$$

Заметим, что в вычислениях можно пользоваться формулами приведения.

- **6**. $\sqrt[3]{-2+2i}$.

Записываем число в показательной форме $\sqrt[3]{-2+2i} = \sqrt{8}\, e^{i(3\pi/4+2\pi\, k)}$. При извлечении корня 3-ей степени получим 3 значения корня. Записываем выражение для вычисления всех корней

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\, e^{\frac{i(3\pi/4+2\pi\, k)}{3}} = \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4+2\pi\, k/3)}$$

и перебираем значения k от $k=0$ до $k=(n-1)=3-1=2$.

$$\sqrt[3]{-2+2i} = \begin{cases} k=0: \; = \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \\ \qquad = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1+i. \\ k=1: \quad \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4+2\pi/3)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) \approx \\ \qquad \approx 1,4\,(-0,97+0,26\, i) \approx -1,36+0,36\, i. \\ k=2: \quad \sqrt{2}\, e^{i(\pi/4+4\pi/3)} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) \\ \qquad \approx 1,4\,(0,26-0,97\, i) \approx 0,36-1,36\, i. \end{cases}$$

- **7**. $\sqrt[6]{-1}$.

Записываем число в показательной форме $-1 = e^{i(\pi+2\pi\, k)}$. При извлечении корня 6-ой степени должны получить 6 значений корня. Записываем выражение для вычисления всех корней

$$\sqrt[6]{-1} = e^{\frac{i(\pi+2\pi\, k)}{6}} = e^{i(\pi/6+\pi\, k/3)}$$

и перебираем значения k от $k=0$ до $k=(n-1)=6-1=5$.

$$\sqrt[6]{-1} = \begin{cases} k=0: \quad e^{i(\pi/6)} = \cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2} \approx 0,87+0,5\, i. \\ k=1: \quad e^{i(\pi/6+\pi/3)} = e^{i\,\pi/2} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = i. \\ k=2: \quad e^{i(\pi/6+2\pi/3)} = e^{i\,5\pi/6} \cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6} = \\ \qquad = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \approx -0,87+0,5\, i. \\ k=3: \quad e^{i(\pi/6+\pi)} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\pi\right) = \\ \qquad = -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \approx -0,87-0,5\, i. \\ k=4: \quad e^{i(\pi/6+4\pi/3)} = e^{i\,3\pi/2} = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} = -i. \\ k=5: \quad e^{i(\pi/6+5\pi/3)} = e^{i\,11\pi/6} = \cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6} = \\ \qquad = \cos\dfrac{\pi}{6} - i\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2} \approx 0,87-0,5\, i. \end{cases}$$

Отметим, что можно складывать и вычитать комплексные числа, записанные в показательной форме.

- **8**. Вычислить $\quad 2\, e^{2,3\, i} + 3\, e^{-0,17\, i}$

Для того, чтобы выполнить сложение, нужно перевести числа в алгебраическую форму записи.

$$2\, e^{2,3\, i} + 3\, e^{-0,17\, i} = 2\left(\cos 2,3 + i\ \sin 2,3\right) + 3\left(\cos 0,17 - i\ \sin 0,17\right) \approx$$

$$\approx 2\,(-0,67 + i\ \cdot 0,75) + 3\,(0,99 - i\,0,17) \approx$$
$$\approx (-1,34 + 2,97) + i\,(1,5 - 0,51) \approx 1,63 + 0,99\,i.$$

В принципе, ответ получен. Но можно сделать обратный переход к показательной форме (так как числа в задаче были заданы в показательной форме). Находим модуль и аргумент полученного числа

$$|1,63 + 0,99\,i| = \sqrt{1,63^2 + 0,99^2} \approx \sqrt{2,66 + 0,98} \approx \sqrt{3,64} \approx 1,9.$$

$$\arg(1,63 + 0,99\,i) \approx \mathrm{arctg}\frac{0,99}{1,63} = \mathrm{arctg}0,6 \approx 0,55.$$

Итак, $\quad 2\,e^{2,3\,i} + 3\,e^{-0,17\,i} \approx 1,63 + 0,99\,i \approx 1,9\,e^{0,55\,i}$.
При выполнении действий с комплексными числами можно сочетать действия, выполняемые в алгебраической форме с действиями, выполняемыми в показательной форме.

• **9**. Вычислить $\dfrac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2}$, если $z_1 = 1 - 2i$, $\quad z_2 = -3 + 4i$.

Выполним сложение чисел в алгебраической форме

$$\frac{(1-2i)\cdot(-3+4i)}{(1-2i)+(-3+4i)} = \frac{(1-2i)\cdot(-3+4i)}{-2+2i},$$

а затем умножение и деление – в показательной. Найдем модули и аргументы всех чисел, входящих в это выражение

$$|1-2i| = \sqrt{5}, \quad \arg(1-2\mathrm{i}) = \mathrm{arctg}(-2) \approx -1,1.$$

$$|-3+4i| = \sqrt{25} = 5,\ \ \arg(-3+4\mathrm{i}) = \mathrm{arctg}(-4/3) + \pi \approx -0,93 + 3,14 \approx 2,21.$$

$$|-2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},\ \ \arg(-2+2i) = \mathrm{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \approx 2,36.$$

Тогда $1 - 2i = \sqrt{5}\,e^{-1,1\,i}$, $\quad -3 + 4i = 5\,e^{2,21\,i}$, $\quad -2 + 2i = 2\sqrt{2}\,e^{2,36\,i}$.
Подставляем

$$\frac{(1-2i)\cdot(-3+4i)}{-2+2i} =$$
$$= \frac{\sqrt{5}\,e^{-1,1\,i}\cdot 5\,e^{2,21\,i}}{2\sqrt{2}\,e^{2,36\,i}} = \frac{5\,\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\cdot e^{i(-1,1+2,21-2,36)} \approx 3,95\,e^{-1,25\,i}.$$

Результат можно при необходимости перевести в алгебраическую форму.

3.2. Функции комплексного переменного

3.2.1. Предел последовательности комплексных чисел. Бесконечно удаленная точка

О п р е д е л е н и е. *Окрестностью точки z_0 называется внутренность круга некоторого радиуса R с центром в этой точке, т.е. множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < R$.*

Заметим, что окрестностью точки может служить любая область, которая содержит внутри себя эту точку, но использование окрестности в виде круга значительно удобнее.

Пусть дана некоторая последовательность комплексных чисел $\{z_n\}: \ z_1; z_2; ...z_n; ...$

О п р е д е л е н и е. *Число z_0 называется пределом числовой последовательности $\{z_n\}$, если для любого сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое действительное число $N = N(\varepsilon) > 0$, что для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$.*

Иначе говоря, числовая последовательность $\{z_n\}$ сходится к z_0, если начиная с некоторого номера, все члены последовательности (точки) попадают в сколь угодно малую окрестность точки z_0.

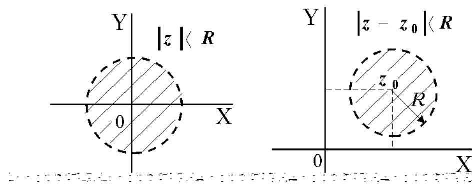
Для записи предела используют стандартную форму $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$.

Совершенно очевидно, что если $\{z_n\} = \{x_n + i\,y_n\}$ а $z_0 = x_0 + i\,y_0$, то для существования предела последовательности необходимо выполнение условий

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Если числовая последовательность имеет предел, то она называется сходящейся. Если, начиная с некоторого номера N, члены числовой последовательности становятся по модулю больше сколь угодно большого положительного числа M $(|z_n| > M)$, $n \geq N$, то последовательность является расходящейся, что можно записать следующим образом $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. В этом случае говорят, что последовательность сходится к бесконечно удаленной точке $z = \infty$. Окрестностью точки $z = \infty$ может служить внешность круга произвольного радиуса R.

Так неравенства $|z| < R$, $|z - z_0| < R$ определяют окрестности точек $z = 0$ и $z = z_0$, а неравенства $|z| > R$, $|z - z_0| > R$ определяют окрестность одной точки $z = \infty$.



Так как определения пределов, как конечного, так и бесконечного, по существу одинаковы, то точка $z = \infty$ вполне равноправна с любой конкретной точкой комплексной плоскости.

О п р е д е л е н и е. *Комплексная плоскость, дополненная точкой $z = \infty$, называется расширенной комплексной плоскостью.*

Запись $z \to \infty$ означает, что точка $z = x + i\,y$ удаляется на бесконечность в любом направлении от начала координат. Т.е. запись $z = x + i\,y \to \infty$ равносильна одной из следующих

$$\begin{aligned}
&x \to \pm\infty \ \text{ и } \ y \to \pm\infty,\\
&x \to \pm\infty \ \text{ и } \ y \to y_0 - \text{вдоль действительной оси},\\
&x \to x_0 \ \text{ и } \ y \to \pm\infty - \text{вдоль мнимой оси}.
\end{aligned}$$

Приведем примеры нахождения пределов последовательностей

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+5} + i\,\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+5} + i\,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{2}{3} + i\cdot 0 = \frac{2}{3}.$

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-3} + i\,\frac{4n^2}{3n-2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2-3} + i\,\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{3n-2} = 1 + i\,\infty.$

- $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3}{n-3} + i\,\frac{4n}{n-2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n-3} + i\,\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n-2} = \infty + 4\,i.$

3.2.2. Понятие функции комплексного переменного

О п р е д е л е н и е. *Если каждому значению комплексной переменной $z = x + i\,y$ соответствует определенное значение комплексной переменной $w = u + i\,v$, то говорят, что переменная w есть функция независимой переменной z и пишут $w = f(z)$.*

Если каждому значению z соответствует только одно значение w, то функцию $w = f(z)$ называют однозначной. Если же каждому значению z соответствует несколько (возможно бесконечное множество) значений w, то функцию называют многозначной.

В геометрическом смысле задание функции $w = f(z)$ означает задание закона отображения множества точек комплексной плоскости $z = x + i\,y$ на множество точек комплексной плоскости $w = u + i\,v$.

Множество точек комплексной плоскости $z = x + i\,y$, при которых $w = f(z)$ имеет смысл, называется областью определения этой функции.

К примеру, функции:

1. $w = z^2$ – однозначна и определена на всей комплексной плоскости.

2. $w = \dfrac{z}{z^4 - 1}$ – однозначна и определена всюду кроме точек
$$z_{1,2} = \pm 1, \quad z_{3,4} = \pm i.$$

3. $w = \sqrt{z}$ – двузначная функция, определенная на всей комплексной плоскости. (Напомним, что в множестве комплексных чисел корень любой степени можно извлекать из любого числа).

4. $w = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$ – многозначная функция, определенная на всей плоскости.

Аналогично тому, что задание комплексного числа равносильно заданию пары действительных чисел, задание функции комплексной переменной z равносильно заданию двух функций пары действительных переменных x и y. А именно: $w = f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$.

Преобразования, целью которых служит нахождение функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, называется выделением действительной и мнимой частей функции комплексного переменного. При этом, как и при работе с комплексными числами, удобно использовать как алгебраическую, так и тригонометрическую и показательную формы представления. Рассмотрим примеры:

• **1**. $w = z^2 \quad \Rightarrow \quad u + i\,v = (x + i\,y)^2 \quad \Rightarrow$
$u + i\,v = x^2 + 2i\,x\,y + (i\,y)^2 = (x^2 - y^2) + i\,2xy, \quad \Rightarrow u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$

• **2**. $w = \dfrac{z}{z - 3i}$.

$$\frac{z}{z-3i}=\frac{x+i\,y}{x+i\,y-3i}=\frac{x+i\,y}{x+i\,(y-3)}=\frac{(x+i\,y)(x-i\,(y-3))}{x^2+(y-3)^2}=$$
$$=\frac{x^2+ixy-ix(y-3)-i^2y(y-3)}{x^2+(y-3)^2}=\frac{x^2+y(y-3)}{x^2+(y-3)^2}+i\,\frac{3x}{x^2+(y-3)^2}.$$

Имеем $\quad u=\dfrac{x^2+y(y-3)}{x^2+(y-3)^2},\quad v=\dfrac{3x}{x^2+(y-3)^2}.$

• **3**. $w=z^5$.

Можно, конечно, возводить в пятую степень скобку $(x+i\,y)$, но проще воспользоватся тригонометрическим представлением комплексного выражения. Т.к. $z=x+i\,y=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где
$r=|z|=|x+i\,y|=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arg z$, тогда
$w=z^5=r^5(\cos 5\varphi+i\sin 5\varphi),\Rightarrow u=r^5\cos 5\varphi,\quad v=r^5\sin 5\varphi.$

• **4**. $w=z\,\bar z=(x+i\,y)(x-i\,y)=x^2+y^2,\ \Rightarrow\ u=x^2+y^2,\quad v=0.$

Понятия предела и непрерывности функции комплексного переменного практически полностью схожи с аналогичными понятиями для функции двух независимых действительных переменных.

3.2.3. Основные элементарные функции

Степенная функция $\quad w=z^n\quad$ ($n-$ натуральное число.)
Мы рассматривали уже возведение комплексных чисел в степень с натуральным показателем. Эти примеры можно рассматривать как примеры вычисления степенной функции в конкретных точках. Также было показано выделение действительной и мнимой частей такой функции. Отметим, что при $n\le 3$ можно пользоваться алгебраическим представлением комплексного числа, а при больших значениях показателя степени – тригонометрическим или показательным.

$$w=z^3=(x+i\,y)^3=x^3+3x^2(iy)+3x(iy)^2+(iy)^3=$$
$$=x^3+i\,3x^2y-3xy^2+i^3\,y^3=$$
$$=x^3-3xy^2+i\,3x^2y-i\,y^3=(x^3-3xy^2)+i\,(3x^2\,y-y^3),$$
$$u(x;y)=x^3-3xy^2,\quad v(x;y)=3x^2\,y-y^3.$$

Таким образом, можно выделить действительную и мнимую части функции, а значит можно при необходимости найти модуль и аргумент функции.

$$w = z^{10} = (x+i\,y)^{10} = \left(|z|\cdot e^{i\varphi}\right)^{10} = |z|^{10}\cdot e^{i\ 10\varphi} = |z|^{10}(\cos 10\varphi + i\sin 10\varphi),$$

$$u(x;y) = |z|^{10}\ \cos 10\varphi, \quad v(x;y) = |z|^{10}\ \sin 10\varphi.$$

Функция $w = \sqrt[n]{z}$ является обратной для z^n и, как было показано на примерах вычисления корней $n-$ ой степени из комплексного числа, является $n-$ значной, т.е. имеет n значений – каждому значению z соответствует n значений функции $w = \sqrt[n]{z}$. Например,

$$\sqrt[3]{z} = \begin{cases} \sqrt[3]{|z|}\ \left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\ \sin\frac{\varphi}{3}\right) \\ \sqrt[3]{|z|}\ \left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{3} + i\ \sin\frac{\varphi+2\pi}{3}\right) \\ \sqrt[3]{|z|}\ \left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{3} + i\ \sin\frac{\varphi+4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Каждое значение корня называется *ветвью* многозначной функции.

Показательная функция $w = e^z$.

Показательную функцию $w = e^z$ для любого комплексного числа $z = x + i\,y$, т.е. $w = e^z = e^{x+i\,y}$, естественно определить так, чтобы при $y = 0$ эта функция совпадала с функцией действительной переменной e^x, а при $x = 0$ – с функцией $e^{i\,y} = \cos y + i\ \sin y$.

Одним из основных свойств этой функции является $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Поэтому можно записать, что

$$\boxed{w = e^z = e^{x+i\,y} = e^x\cdot e^{i\,y} = e^x\cdot(\cos y + i\ \sin y).}$$

Выделяем действительную и мнимую части функции

$$\operatorname{Re} e^z = e^x\cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = e^x\sin y,$$

а также находим модуль и аргумент

$$\left|e^z\right| = e^x, \qquad \arg e^z = y.$$

Функция e^z является периодической с периодом $2\pi\,i$. Действительно:

$$e^{z+2\pi\,i} = e^z e^{2\pi\,i} = e^z\left(\cos 2\pi + i\sin 2\pi\right) = e^z.$$

Кроме этого, можно записать соотношения

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}, \qquad \left(e^z\right)^n = e^{n\,z}.$$

Функция e^z не обращается в ноль, поэтому уравнение $e^z = A$ разрешимо для всех $A \neq 0$.

Вычислим значения функции в некоторых точках

- **1**. $e^{i\pi/2} = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2 = i$.
- **2**. $e^{-i} = \cos 1 - i\sin 1 = 0,54 - 0,84\,i$.
- **3**. $e^{2+5\,i} = e^2(\cos 5 + i\ \sin 5) \approx 7.39(0,28 - 0,96\,i) \approx 2,07 - 7,09\,i$.

Логарифмическая функции $w = \mathrm{Ln}\,z$ и $w = \ln z$.

Логарифмическая функция определяется как функция, обратная показательной. Если $e^w = z$, где $z \neq 0$, то w называется *логарифмом числа* z и обозначается $w = \mathrm{Ln} z$.

Если комплексную переменную $z = x + i\,y$ представить в показательной форме $z = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z} = |z|\cdot e^{i\,(\varphi+2\pi k)}$, где $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arg z-$ модуль и аргумент комплексной переменной, то

$w = \mathrm{Ln}\,z = \mathrm{Ln}\,|z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z} = \ln\,\left(|z|\cdot e^{i\,(\varphi+2\pi k)}\right) = \ln|z| + i\,(\varphi + 2\pi k)$.

$w = \ln z = \ln\left(|z|\cdot e^{i\arg z}\right) = \ln|z| + i\arg z = \ln\,|z| + i\,\varphi$.

$$\boxed{\mathrm{Ln}\,z = \ln|z| + i\,(\arg z + 2\pi k), \qquad \ln z = \ln|z| + i\arg z}.$$

Действительная часть функции $u(x;y) = \ln|z|$,

мнимая – $v(x;y) = Arg z$.

Отличие приведенных логарифмических функций состоит лишь в том, что функция $w = \mathrm{Ln}\,z$ является многозначной функцией в силу многозначности ее мнимой части, которая содержит слагаемое $2\pi k$. При $k = 0$ получаем *главное значение логарифма.* Т.е. $w = \ln z$ есть функция однозначная и является одной (главной) ветвью функции $w = \mathrm{Ln}\,z$.

Для обеих функций справедливы свойства логарифмов:

$\ln(z_1z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad \ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2 \quad \ln z^\alpha = \alpha\ln z$.

Эти равенства, однако, следует понимать лишь в смысле однго из значений логарифма произведения, частного и степени.

Вычислим значения логарифмов некоторых чисел.

- **1**. $\mathrm{Ln}\,(-1+\sqrt{3}\,i) = \left| \begin{array}{l} |-1+\sqrt{3}\,i| = \sqrt{1+3} = 2, \\ \arg\,(-1+\sqrt{3}\,i) = 2\pi/3 \end{array} \right| =$

$= \ln 2 + i(2\pi/3 + 2\pi k) \approx 0,69 + i\,(2,09 + 6,28k), \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$

- **2**. $\mathrm{Ln}\,(-i) = \left| \begin{array}{l} |-i| = 1, \\ \arg\,(-i) = -\pi/2 \end{array} \right| = \ln 1 + i(-\pi/2 + 2\pi k) =$

$= \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\, i \approx i\,(-1,57 + 6,28k), \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$

При $k = 0$ получим $\ln(-i) = -\dfrac{\pi}{2}\, i$.

- **3**. $\ln(-6) = \left| \begin{array}{l} |-6| = 6, \\ \arg\,(-6) = \pi \end{array} \right| = \ln 6 + i\,\pi \approx 1,79 + 3,14\,i.$

- **4**. Вычислить значение функции $\ln \dfrac{(1+z)^2}{(1-i\,z)^3}$ в точке $z_0 = 3 - 4\,i$

$$\ln \frac{(1+z)^2}{(1-i\,z)^3} = 2\ln(1+z) - 3\ln(1-iz) = 2\ln(4-4i) - 3\ln(-3-3i) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} |4-4i| = \sqrt{32} \approx 5,66, \quad \arg\,(4-4i) = -\pi/4 \approx -0,79 \\ |-3-3i| = \sqrt{18} \approx 4,24, \quad \arg\,(-3-3i) = -3\pi/4 \approx -2,36 \end{array} \right| =$$

$$= 2(\ln 5,66 - 0,79i) - 3(\ln 4,24 - 2,36i) \approx 3,47 - 1,58i - 4,33 + 7,08i =$$

$$= -0,86 + 5,5i.$$

Общая степенная функция $w = z^p$, где $p-$ любое комплексное число. Данная функция определяется так:

$$\boxed{z^p = e^{p\,\mathrm{Ln}\,z}.}$$

Поскольку в это выражение входит функция $\mathrm{Ln}\,z$, которая является многозначной, то и степенная функция $w = e^p$ будет многозначной. Главное значение будет получаться при подстановке $\ln z$ в $e^{p\,\mathrm{Ln}\,z}$ вместо $\mathrm{Ln}\,z$.

Вычислим значения этой функции для некоторых значений z и p.

• **1**. $2^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,2} = \left| \begin{array}{l} |2| = 2, \quad \arg(2) = 0 \\ \mathrm{Ln}2 = \ln|2| + i\,\mathrm{Arg}\;2 = \ln 2 + i(0 + 2\pi k), \\ \mathrm{Ln}\;2 = \ln 2 + 2\pi k\,i \end{array} \right| =$

$= e^{i\,(\ln 2 + i\,2\pi k)} = e^{i\;\ln 2} \cdot e^{i^2\;2\pi k} = e^{-\;2\pi k} \cdot e^{i\;\ln 2} =$
$= e^{-2\pi k}(\cos\ln 2 + i\;\sin\ln 2) \approx e^{-2\pi k}(\cos 0,69 + i\;\sin 0,69) \approx$
$\approx e^{-6,28k}(0,77 + i\,0,64), \qquad (k = 0; \pm 1; \pm 2; ...).$

При $k = 0$ имеем: $\quad 2^i \approx 0,77 + 0,64\,i.$

• **2**. $(-2)^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3}\mathrm{Ln}\,(-2)} = \left| \begin{array}{l} |-2| = 2, \quad \arg(-2) = \pi \\ \mathrm{Ln}(-2) = \ln|-2| + i\,\mathrm{Arg}(-2) = \\ = \ln 2 + i(\pi + 2\pi k) \end{array} \right| =$

$= e^{\sqrt{3}\,[\ln 2 + i(\pi + 2\pi k)]} = e^{\sqrt{3}\;\ln 2} \cdot e^{\sqrt{3}\,\pi(2k+1)\,i} = 2^{\sqrt{3}} \cdot e^{\sqrt{3}\,\pi(2k+1)\,i}.$
$(k = 0; \pm 1; \pm 2; ...).$
При $k = 0$ имеем: $\quad (-2)^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}} \cdot e^{\sqrt{3}\,\pi\,i} =$
$= 2^{\sqrt{3}}[\cos(\sqrt{3}\pi) + i\sin(\sqrt{3}\pi)] \approx 3,32\;(0,66 - 0,75\,i) \approx 2,2 - 2,5\,i.$

• **3**. $i^i = e^{i\ln i} = e^{i(\ln 1 + i\,\pi/2)} = e^{-\pi/2} \approx 0,21.$ Здесь найдено главное (первое, одно из многих) значение степени.

• **4**. $(1+i)^{(1-i)} = e^{(1-i)\mathrm{Ln}(1+i)} = \left| \begin{array}{l} |1+i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1+i) = \pi/4 \\ \mathrm{Ln}(1+i) = \ln|1+i| + i\,\mathrm{Arg}(1+i) = \\ = \ln\sqrt{2} + i(\pi/4 + 2\pi k) \end{array} \right|$

Ограничимся случаем $k = 0$, тогда $\mathrm{Ln}\;(1+i) = \ln(1+i) =$
$= \ln\sqrt{2} + i\pi/4$ и вычислим отдельно показатель степени

$(1-i)\ln(1+i) = (1-i)(\ln\sqrt{2} + i\pi/4) = (\ln\sqrt{2} + \pi/4) + i\,(\pi/4 - \ln\sqrt{2}) \approx$
$\approx (0,35 + 0,79) + i\,(0,79 - 0,35) = 1,14 + 0,44\,i.$

Итак, $(1+i)^{(1-i)} = e^{(1-i)\ln(1+i)} \approx e^{1,14 + 0,44i} = e^{1,14} \cdot e^{0,44\,i} \approx$
$\approx e^{1,14} \cdot (\cos 0,44 + i\sin 0,44) \approx 3,13(0,9 + 0,43\,i) \approx 2,8 + 1,3\,i.$

Тригонометрические функции

$$w = \sin z, \quad w = \cos z, \quad w = \mathrm{tg}\,z, \quad w = \mathrm{ctg}\,z.$$

Эти функции определяются через функцию $w = e^z$ по формулам Эйлера

$$\boxed{\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\qquad \cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.}$$

Функции $w=\operatorname{tg}z$, $w=\operatorname{ctg}z$ определяются следующим образом:

$$\boxed{\operatorname{tg}z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},\qquad \operatorname{ctg}z=\frac{\cos z}{\sin z}=i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}.}$$

"Тригонометрические" функции $w=\sin z$ и $w=\cos z$ практически ничего общего с обычными функциями $y=\sin x$, $y=\cos x$ не имеют, хотя и совпадают с ними на действительной оси и имеют такой же период 2π. Функции $w=\sin z$ и $w=\cos z$ не являются ограниченными и в этом их самое существенное отличие от обычных тригонометрических функций.

Справедливы следующие формулы и соотношения

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1.$$
$$\sin 2z=2\sin z\cos z,\qquad \cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z.$$
$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2.$$
$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2.$$
$$\sin(z+3\pi/2)=-\cos z,\qquad \cos(\pi-z)=-\cos z.$$
$$1+\operatorname{tg}^2 z=1/\cos^2 z,\qquad 1+\operatorname{ctg}^2 z=1/\sin^2 z\quad \text{и др.}$$

Докажем формулу $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$, используя формулы Эйлера

$$\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2=$$

$$=\frac{e^{iz_1}-e^{-iz_1}}{2i}\cdot\frac{e^{iz_2}+e^{-iz_2}}{2}+\frac{e^{iz_1}+e^{-iz_1}}{2}\cdot\frac{e^{iz_2}-e^{-iz_2}}{2i}=$$

$$=\frac{1}{4i}(e^{iz_1}e^{iz_2}-e^{-iz_1}e^{iz_2}+e^{iz_1}e^{-iz_2}-e^{-iz_1}e^{-iz_2}+$$
$$+e^{iz_1}e^{iz_2}-e^{iz_1}e^{-iz_2}+e^{-iz_1}e^{iz_2}-e^{-iz_1}e^{-iz_2})=\frac{1}{4i}(2e^{iz_1}e^{iz_2}-2e^{-iz_1}e^{-iz_2})=$$
$$=\frac{e^{iz_1}e^{iz_2}-e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{2i}=\frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}=\sin(z_1+z_2).$$

• **1**. $\sin\pi k=0$, $\sin\pi/2=1$, $\sin 3\pi/2=-1$, $\cos 2\pi k=1$, $\cos\pi/2=0$, $\operatorname{tg}\pi k=0$, $\operatorname{tg}\pi/2=\infty$, $\operatorname{tg}\pi/4=\operatorname{ctg}\pi/4=1$, $\operatorname{ctg}\pi/2=0$, $\operatorname{ctg}\pi k=\infty$. Значения тригонометрических функций в точках, не принадлежащих действительной оси, следует вычислять, используя формулы Эйлера.

- **2**. $\sin(\pi\, i) = \dfrac{e^{i\ (\pi\, i)} - e^{-i\ (\pi\, i)}}{2i} = \dfrac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2i} \approx -\dfrac{i}{2}\,(0,04 - 23,10) \approx -11,58\, i.$
- **3**. $\cos(3-2i) = \dfrac{e^{i\ (3-2i)} + e^{-i\ (3-2i)}}{2} = 0,5[e^2e^{3i} + e^{-2}e^{-3i}] =$

$= 0,5[e^2(\cos 3 + i\sin 3) + e^{-2}(\cos 3 - i\sin 3)] =$
$= 0,5[\cos 3(e^2 + e^{-2}) + i\sin 3(e^2 - e^{-2})] = -3,72 + 0,51i.$

- **4**. $\operatorname{tg} i = \dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{e^{i\,i} - e^{-i\,i}}{e^{i\,i} + e^{-i\,i}} = -i\cdot\dfrac{e^{-1} - e}{e^{-1} + e} \approx 0,76\, i.$

Гиперболические функции

$w = \operatorname{sh} z,\quad w = \operatorname{ch} z,\quad w = \operatorname{th} z,\quad w = \operatorname{cth} z.$

Гиперболические функции определяются соотношениями

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.}$$

Можно доказать справедливость следующих соотношений

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(iz) = i\operatorname{sh} z, & \cos(iz) = \operatorname{ch} z,\\ \operatorname{sh}(iz) = i\sin z, & \operatorname{ch}(iz) = \cos z,\\ \operatorname{tg}(iz) = i\operatorname{th} z, & \operatorname{ctg}(iz) = -i\operatorname{cth} z,\\ \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, & \operatorname{sh}^2 z + \operatorname{ch}^2 z = \operatorname{ch} 2z. \end{array}}$$

С помощью гиперболических функций можно записать формулы

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin z = \sin(x + i\,y) = \sin x\operatorname{ch} y + i\ \cos x\operatorname{sh} y,\\ \cos z = \cos(x + i\,y) = \cos x\operatorname{ch} y - i\ \sin x\operatorname{sh} y, \end{array}}$$

из которых можно выделить выражения для действительной и мнимой частей тригонометрических функций

$$\boxed{\begin{array}{ll} \operatorname{Re}\ \sin(x + i\,y) = \sin x\operatorname{ch} y, & \operatorname{Im}\ \sin(x + i\,y) = \cos x\operatorname{sh} y.\\ \operatorname{Re}\ \cos(x + i\,y) = \cos x\operatorname{ch} y, & \operatorname{Im}\ \cos(x + i\,y) = -\sin x\operatorname{sh} y. \end{array}}$$

Вычислить значения:

- **1**. $\operatorname{sh}\dfrac{i\pi}{2} = i\sin\dfrac{\pi}{2} = i,$
- **2**. $\operatorname{ch} i\pi = \cos\pi = -1.$
- **3**. $\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{2} \approx \dfrac{e^{1,57} - e^{-1,57}}{2} \approx 2,30.$
- **4**. $\operatorname{ch}\pi = \dfrac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2} \approx \dfrac{e^{3,14} - e^{-3,14}}{2} \approx 23,15.$

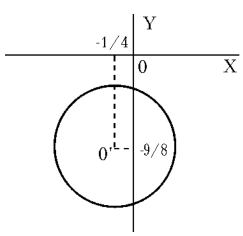
3.2.4. Линии и области на комплексной плоскости

При построении линий и областей будем пользоваться алгебраической (в прямоугольных координатах) или показательной(в полярных координатах) формой преобразования.

Задача. Построить линии, заданные соотношениями:

- **1**. $\left|\dfrac{z-2}{z+i}\right| = 3.$

Так как $|z - z_0|$ выражает расстояние от переменной (текущей) точки линии z до данной фиксированной z_0, то исходное равенство,



$\left|\dfrac{z-2}{z+i}\right| = 3 \quad\Rightarrow\quad |z-2| = 3|z+i|$ означает, что расстояние от текущей точки искомой линии до точки $z = 2$ в три раза больше расстояния от этой же точки до точки $z = -i$. Линия, все точки которой обладают подобным свойством, есть окружность. Получим уравнение этой окружности.

$$|z-2| = 3|z+i| \;\Rightarrow\; |x+i\,y-2| = 3|x+i\,y+i| \;\Rightarrow\; \sqrt{(x-2)^2+y^2} =$$

$$= 3\sqrt{x^2+(y+1)^2} \;\Rightarrow\; x^2-4x+4+y^2 = 9(x^2+y^2+2y+1)$$

$$\Rightarrow\; 8x^2+8y^2+4x+2y-4 = 0 \;\Rightarrow\; (x+1/4)^2+(y+9/8)^2 = 45/64.$$

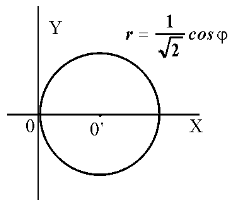
Эта линия есть окружность с центром в точке $O'(-1/4; -9/8)$ и радиусом $\sqrt{45/64} \approx 0,84$.

- **2**. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$.

Воспользуемся показательной формой записи комплексной переменной $z = re^{i\varphi}$.

Тогда $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r\,e^{i\varphi}} =$

$= \dfrac{1}{r}\,e^{-i\varphi} = \dfrac{1}{r}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)$.



Откуда следует,что действительная часть выражения равна

$\dfrac{1}{r}\,\cos\varphi$.

Тогда из уравнения $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \sqrt{2}$ следует

$$\frac{1}{r}\,\cos\varphi = \sqrt{2} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi.$$

Эта линия есть окружность.

- **3**. $\operatorname{Im}(z^2 - 3z) = -1$.

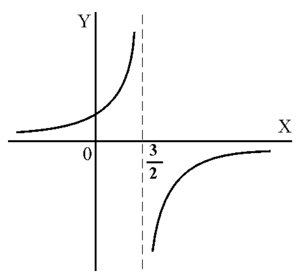
Здесь удобнее использовать алгебраическую форму преобразований.

$z^2 - 3z = (x+iy)^2 - 3(x+iy) = x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3iy = x^2 - 3x - y^2 + i(2xy - 3y)$.

Таким образом

$\operatorname{Im}(z^2 - 3z) = -1$

$\Rightarrow\ 2xy - 3y = -1 \ \Rightarrow\ y = \dfrac{-1/2}{x - 3/2}$.



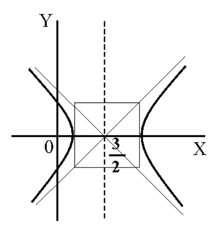
Линия представляет собой гиперболу.

- **4**. $\operatorname{Re}(z^2 - 3z) = -1$.

Используем результаты преобразований предыдущего примера

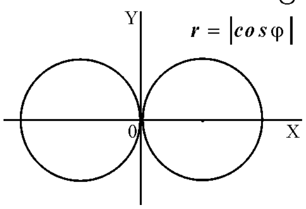
$\operatorname{Re}(z^2 - 3z) = -1 \ \Rightarrow\ x^2 - 3x - y^2 = -1$

$\Rightarrow\ (x - 3/2)^2 - y^2 = 5/4$.



Это также гипербола .

- **5**. $z\,\bar{z} = \cos^2 \arg z$.



Используем вновь показательную форму.
$z = r\,e^{i\varphi}, \quad \bar{z} = r\,e^{-i\varphi}, \quad |z| = r,$
$\arg z = \varphi$
Имеем $z\,\bar{z} = \cos^2 \arg z \;\Rightarrow$
$r^2 = \cos^2\varphi \;\Rightarrow\; r = |\cos\varphi|.$

3.2.5. Решение уравнений

Уравнения на комплексной плоскости решаются практически теми же методами и приемами,что и уравнения с действительной переменной.

Найти решения следуюших уравнений:

- **1**. $z^2 + 4z = 4i$.

$$z^2 + 4z = 4i \;\Rightarrow\; z^2 + 4z - 4i = 0 \;\Rightarrow\; z = -2 + \sqrt{4+4i} =$$
$$= -2 + \sqrt[4]{32}e^{i\,(\pi/8+\pi k)} = \begin{cases} -2+2,38(\cos(\pi/8+i\sin(\pi/8) = 0,20+0,91\,i \\ -2+2,38(\cos(9\pi/8+i\sin(9\pi/8) = -4,20-0,91\,i \end{cases}$$

- **2**. $(1+i)e^{-iz} = 2 - 2i$.

$$(1+i)e^{-iz} = 2-2i \;\Rightarrow\; e^{-iz} = \frac{2-2i}{1+i} \;\Rightarrow\; e^{-iz} = \frac{(2-2i)(1-i)}{2} \;\Rightarrow$$
$$e^{-iz} = (1-i)^2 \;\Rightarrow\; e^{-iz} = 2e^{-\pi\,i/2} \;\Rightarrow\; -iz = \ln 2e^{\pi\,i/2} \;\Rightarrow$$

$$z = i(\ln 2 + (\pi/2 + 2\pi k)i) = -\pi/2 + 2k\pi + i\ln 2 \approx -1,57 + 6,28\,k + 0,69\,i.$$

- **3**. $\operatorname{tg} 2z = i\sqrt{3}$.

$$\operatorname{tg} 2z = i\sqrt{3} \;\Rightarrow\; 2z = \operatorname{Arctg} i\sqrt{3} \;\Rightarrow\; z = \frac{i}{4}\mathrm{Ln}\left(\frac{1-i(i\sqrt{3})}{1+i(i\sqrt{3})}\right) =$$
$$= \frac{i}{4}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) = \frac{i}{4}\mathrm{Ln}\left(\frac{2e\pi\,i/3}{2e{-}\pi\,i/3}\right) = \frac{i}{4}\mathrm{Ln}e^{2\pi\,i/3} = -\frac{\pi}{6} + \pi k/2.$$

- **4**. $\sin z + 2\cos z = -\sqrt{5}$.

$\sin z + 2\cos z = -\sqrt{5} \;\Rightarrow\; \sqrt{5}\sin(z+\varphi_0) = -\sqrt{5} \;\Rightarrow\; \left|\varphi_0 = \operatorname{arctg} 2\right| \;\Rightarrow$
$\sin(z+\varphi_0) = -1 \;\Rightarrow\; z+\varphi_0 = -\pi/2 + 2\pi k \;\Rightarrow\; z = -\pi/2 + 2k\pi - \varphi_0 =$

$$= -\pi/2 + 2k\pi - \operatorname{arctg} 2 \approx -2,68 + 6,28k.$$

- **5**. $\cos z - i\sin z = i$.

$$\cos z - i\sin z = i \;\Rightarrow\; \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} - i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = i \;\Rightarrow\; e^{-iz} = i.$$

Так как $i = e^{\pi i/2}$, то

$$e^{-iz} = e^{i\pi/2} \;\Rightarrow\; -iz = \pi i/2 + 2\pi k i, \qquad z = -\pi/2 - 2\pi k.$$

- **6**. $\mathrm{sh} z - \mathrm{ch} z = 2i$.

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} - \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 2i \;\Rightarrow\; -\frac{2e^{-z}}{2} = 2i \quad\Rightarrow\quad -e^{-z} = 2i \quad\Rightarrow$$
$$z = -\mathrm{Ln}(-2i) = -(\ln 2 + i(-\pi/2 + 2\pi k)).$$

- **7**. $\cos z - \mathrm{ch} z = 0$.

Так как $\mathrm{ch} z = \cos(iz)$, то

$$\cos z - \cos(iz) = 0 \quad\Rightarrow\; -2\sin\frac{z+iz}{2}\sin\frac{z-iz}{2} = 0,$$

1) $\sin\dfrac{z+iz}{2} = 0, \quad \dfrac{z+iz}{2} = \pi k, \quad z(1+i) = 2\pi k, \quad z = \dfrac{2\pi k}{1+i} =$

$$z = \frac{2\pi k(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2\pi k(1-i)}{2} = \pi k(1-i).$$

2) $\sin\dfrac{z-iz}{2} = 0, \quad \dfrac{z-iz}{2} = \pi n, \quad z(1-i) = 2\pi n, \quad z = \dfrac{2\pi n}{1-i} =$

$$= \frac{2\pi n(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2\pi n(1+i)}{2} = \pi n(1+i).$$

Итак, $z = \pi k(1\pm i), \quad k \in Z$.

3.3. Дифференцирование функций

3.3.1. Производная. Условия Коши–Римана.

Производная функции комплексного переменного вводится точно таким же образом, как и производная функции двух действительных переменных.

Пусть функция $w = f(z)$ определена в точке z_0 и некоторой ее окрестности.

О п р е д е л е н и е. *Производной функции в точке z_0 называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю*

$$w'\Big|_{z_0} = f'(z_0) = \frac{d}{dz}f(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z},$$

где $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta f(z_0) = f(z) - f(z_0)$– приращения аргумента и функции.

Для того, чтобы производная в точке существовала, т.е. существовал конечный предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta z}$, необходимо выполнение некоторых условий. Выясним эти условия.

Мы уже ранее отмечали, что в любой функции комплексного переменного можно выделить действительную и мнимую части, т.е. представить функцию в виде $f(z) = f(x+iy) = u(x;y) + i\,v(x;y)$. Тогда

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{\Delta z}.$$

Предел не должен зависеть от положения соседней точки $z = z_0 + \Delta z$ относительно начальной z_0 и от траектории сближения этих точек.

Если $z = z_0 + \Delta x$, то $\Delta z \to 0 \;\Rightarrow\; \Delta x \to 0$ и

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

Если $z = z_0 + i\Delta y$, то $\Delta z \to 0 \;\Rightarrow\; \Delta y \to 0$ и

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u(x;y) + i\Delta v(x;y)}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Таким образом: $\quad w' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = -i\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$

Откуда имеем два равенства ***условия Коши – Римана***

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.}$$

Эти условия являются необходимыми и достаточными для дифференцируемости функции в точке. Выполнение этих условий в каждой точке некоторой области означает дифференцируемость функции в области.

Производную функции при условии ее дифференцируемости, т.е. при выполнении условий Коши – Римана, можно получить 4-мя различными вариантами.

$$w' = (u+iv)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}.$$

При нахождении производных нет необходимости каждый раз проверять условия Коши – Римана, а затем искать саму производную одним из указанных способов. Само выделение действительной и мнимой частей функции является трудоемкой операцией. Доказано, что все элементарные функции, т.е. те, которые являются композициями основных элементарных функций, всегда дифференцируемы в области определения. В случае многозначной функции имеется ввиду каждая в отдельности ветвь функции за исключением точек ветвления (т.е. таких точек, при обходе вокруг которых можно перейти от одной ветви к другой). Так, каждая из двух ветвей функции $w = \sqrt{z}$ является дифференцируемой функцией на всей комплексной плоскости за исключением точки $z = 0$. Недифференцируемы функции, которые содержат слагаемыми, множителями и т.п. "нестандартные" функциональные выражения $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Arg} z$.

Правила и формулы дифференцирования те же, что и для функции действительного переменного.

Например:

- **1**. $\left[\sqrt{z^2+4z+5}\right]' = \dfrac{z+2}{\sqrt{z^2+4z+5}}$.
- **2**. $(\ln\sqrt[3]{z})' = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{z}$.
- **3**. $\left(\operatorname{tg} e^{2z}\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 e^{2z}}\cdot e^{2z}\cdot 2$.
- **4**. $\left(e^{-z^2}\right)' = -2z\cdot e^{-z^2}$.
- **5**. $\left(\operatorname{arcctg} z^3\right)' = -\dfrac{1}{1+z^6}\cdot 3z^2$.

Таблица производных

1. $\left(z^k\right)' = k\, z^{k-1}$	10. $(\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$
2. $\left(\sqrt{z}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$	11. $(\operatorname{ctg} z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$
3. $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$	12. $(\arcsin z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
4. $(a^z)' = a^z \cdot \ln a$	13. $(\arccos z)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
5. $(e^z)' = e^z$	14. $(\operatorname{arctg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$
6. $(\log_a z)' = \dfrac{1}{z \ln a}$	15. $(\operatorname{arcctg} z)' = -\dfrac{1}{1+z^2}$
7. $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$	16. $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$
8. $(\sin z)' = \cos z$	17. $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$
9. $(\cos z)' = -\sin z$	18. $(\operatorname{th} z)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 z}$

О п р е д е л е н и е. *Однозначная функция называется аналитической в данной точке, если она дифференцируема в этой точке и ее окрестности. Функция, дифференцируемая во всех точках некоторой области, называется аналитической в этой области.*

Об аналитичности многозначной функции можно говорить только по отношению к каждой ее отдельной ветви.

Точки комплексной плоскости, в которых функция является аналитической, называются *правильными* точками этой функции. Точки, в которых функция не является аналитической (в том числе точки, в которых функция не определена) – *особыми точками.*

Функция $f(z) = z - \sin z$ является аналитической всюду за исключением точки $z = \infty$.

Функции $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z}$, $f(z) = zr^{1/z}$, $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z}$ имеют особую точку $z = 0$.

Функции $f(z) = \operatorname{Im} z$, $f(z) = e^{\bar z}$, не аналитичны ни в одной точке комплексной плоскости.

Аналитические функции являются основными объектами изучения в курсе функций комплексного переменного. Производная аналитической функции также является аналитической. Из последнего утверждения следует, что если однозначная функция $f(z)$ дифференцируема в точке или в области, то она дифференцируема в этой точке или области бесконечное число раз.

3.3.2. Связь аналитической функции с гармоническими

Пусть функция $f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y)$ дифференцируема в области (D) плоскости комплексной переменной $x + i\,y$. При этом функция является аналитической и, как следует из сказанного выше, она дифференцируема в этой области сколько угодно раз, т.е. функция $f(z) = u(x;y) + i\,v(x;y)$ будет иметь в (D) непрерывные частные производные всех порядков. Так как функция $f(z)$ дифференцируема по предположению, выполняются условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Продифференцируем первое равенство по x а второе по y и сложим. Учитывая, что $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, получим $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

Аналогичным образом можно показать, что $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$

Известно, что функции, которые удовлетворяют таким уравнениям, называются гармоническими. Таким образом, действительная $u(x,y)$ и мнимая $v(x,y)$ части аналитической функции являются функциями гармоническими. $\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0,$ где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Всякую аналитическую функцию можно восстановить по одной только данной действительной или мнимой частям.

Задача. Доказать, что функция $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x$ может служить действительной частью аналитической функции
$f(z) = u + i\,v$ и найти $f(z)$.

1) Действительной или мнимой частью аналитической функции может служить только гармоническая функция. Поэтому вначале нужно доказать, что заданная функция удовлетворяет уравнению Лапласа. $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0.$ На первый вопрос задачи мы ответили утвердительно.

2) Для нахождения мнимой части $v(x,y)$ функции воспользуемся условиями Коши – Римана. Из первого условия $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ имеем
$\dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 3$
Откуда функция $v(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2 + 3)dy = 3x^2 y - y^3 + 3y + C(x)$.
Для определения функции $C(x)$ воспользуемся вторым условием
$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$. Приравнивая производные от данной функции $u(x,y)$ по y $(\dfrac{\partial u}{\partial y} = -6xy)$ и от найденной $v(x,y)$ по x $(\dfrac{\partial v}{\partial x} = 6xy + C'(x))$ с противоположным знаком $-6xy = -6xy - C'(x)$. Отсюда $C'(x) = 0$ и $C(x) = \text{const} = C$.
Окончательно имеем с точностью до постоянного слагаемого

$$f(z) = u(x;y) + iv(x;y) = x^3 - 3xy^2 + 3x + i(3x^2 y - y^3 + 3y + C) =$$
$$= (x+iy)^3 + 3(x+iy) + iC = z^3 + 3z + iC.$$

Точно так же решается задача восстановления аналитической функции по заданной ее мнимой части $v(x,y)$.

3.3.3. Геометрический смысл производной

Пусть аналитическая функция $w = f(z)$ отображает множество точек из области определения функции $z = x + iy$ на множество точек плоскости $w = u + iv$. Если в точке z_0 существует производная $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\Delta w}{\Delta z}$, то с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости можно записать $f'(z_0) \cdot \Delta z = \Delta w$.

Или $w - w_o = f'(z_0)(z - z_0)$, где $w_0 = f(z_0)$ $\Rightarrow$ $f'(z_0) = \dfrac{w - w_0}{z - z_0}$.

Найдем модуль и аргумент производной.

$$|f'(z_0)| = \left|\frac{w - w_0}{z - z_0}\right| = \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}.$$

$$\arg(f'(z_0)) = \arg\frac{w - w_0}{z - z_0} = \arg(w - w_0) - \arg(z - z_0).$$

Полученные выражения можно переписать в другой форме

$$|w - w_0| = |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|, \qquad \arg(w - w_0) = \arg(z - z_0) + \arg(f'(z_0)).$$

Такая запись также позволяют сформулировать геометрический смысл производной.

Модуль производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 есть коэффициент растяжения k плоскости $z = x + iy$ в точке $z = z_0$ при данном отображении.

Аргумент производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 есть угол поворота α плоскости $z = x + iy$ в точке $z = z_0$ при данном отображении.

$$\boxed{|f'(z_0)| = k, \qquad \arg f'(z_0) = \alpha}.$$

Задача. Найти коэффициент растяжения и угол поворота комплексной плоскости $z = x + iy$ в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

- **1**. $f(z) = z^2 + (1 - i)z, \quad z_0 = 1 - i.$

Находим производную функции $w' = 2z + (1 - i)$. Значение производной в точке $z_0 = 1 + 2i$ равно $2(1 + 2i) + 1 - i = 3 + 3i$.

Коэффициент растяжения (сжатия) есть модуль производной, т.е.
$$k = |3 + 3i| = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2} \approx 4,24.$$

Угол поворота плоскости $\alpha = \arg(3 + 3i) = \pi/4$.

Таким образом, комплексная плоскость в данной точке при указанном отображении растягивается в $\approx 4,24$ раза и поворачивается на угол $\pi/4$ или 45^o.

- **2**. $f(z) = \left(\dfrac{2z - 1}{z + i}\right)^2, \quad z_0 = i.$

Находим производную функции
$$w' = 2\left(\frac{2z - 1}{z + i}\right)\frac{2(z + i) - (2z - 1)}{(z + i)^2} = 2\frac{(2z - 1)(2i + 1)}{(z + i)^3}.$$

Значение производной в точке $z_0 = i$ равно

$$f'(i) = 2\frac{(2i-1)(2i+1)}{(i+i)^3} = 2\frac{-4-1}{-8i} = -\frac{5}{4}i.$$

Коэффициент растяжения (сжатия) есть модуль производной, т.е.

$$k = |-5/4\,i| = 5/4.$$

Угол поворота плоскости $\alpha = \arg(-5/4ii) = \pi$.

Таким образом, комплексная плоскость в данной точке при указанном отображении растягивается в $5/4 = 1,25$ раза и поворачивается на угол π или 180^o.

• **3**. На комплексной плоскости $z = x + iy$ найти и изобразить область в каждой точке которой при отображении $w = \dfrac{z+2i}{z-1}$ имеет место сжатие $(k < 1)$.

Находим производную $\quad w' = \dfrac{(z-1)-(z+2i)}{(z-1)^2} = \dfrac{-1-2i}{(z-1)^2}$.

Находим модуль производной $\quad \left|\dfrac{-1-2i}{(z-1)^2}\right| = \dfrac{|1+2i|}{|(z-1)^2|}$.

Требуем, чтобы коэффициент растяжения, т.е. модуль производной был меньше единицы

$$\frac{|1+2i|}{|(z-1)^2|} < 1 \quad \Rightarrow \quad (z-1)^2 > |1+2i| \quad \Rightarrow \quad |z-1| > \sqrt[4]{5}.$$

Очевидно, что во всех внутренних точках круга имеет место растяжение $(k > 1,)$ а в точках самой окружности $|z-1| = \sqrt[4]{5}$ не будет ни растяжения, ни сжатия $(k = 1)$.

• **4**. На комплексной плоскости $z = x + iy$ найти и изобразить область в каждой точке которой при отображении $w = 3ie^{2z}$ имеет место поворот плоскости на угол $0 < \alpha < \pi/2$.

Находим производную $w' = (3ie^{2z})' = 6ie^{2z}$.

Находим аргумент производной. Так как

$$6ie^{2z} = 6e^{\pi\, i/2}e^{2x+2iy} = 6e^{2x}e^{i(2y+\pi\, i/2)},$$

то $\arg w' = 2y + \pi/2$.

Теперь требуем, чтобы $0 < \alpha = \arg w' < \pi/2$, т.е. $0 < 2y + \pi/2 < \pi/2 \quad \Rightarrow \quad -\pi/4 < y < 0$. Эта область на плоскости представляет собой бесконечную горизонтальную полосу.

3.4. Интегрирование функций

3.4.1. Непосредственное интегрирование

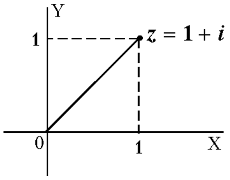
Пусть функция $w = f(z)$ непрерывна в области (D) и линия L целиком принадлежит этой области. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{(L)} f(z)dz$. Этот интеграл, как и интеграл от функции действительного переменного, есть предел соответствующей интегральной суммы. Если учесть, что

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad dz = d(x + iy) = dx + idy, \quad \text{то}$$

$$\int\limits_{(L)} f(z)dz = \int\limits_{(L)} (u + iv)(dx + idy) = \int\limits_{(L)} u\,dx - v\,dy + i \int\limits_{(L)} v\,dx + u\,dy.$$

Из полученного следует, что вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению двух криволинейных интегралов второго рода. Вычислим следующие интегралы.

- **1**. $\int\limits_{(L)} z^2\,dz$, где (L)– отрезок прямой от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$.



$$\int\limits_{(L)} z^2\,dz = \int\limits_{(L)} (x + iy)^2\,(dx + idy) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{уравнение линии (L)} : y = x \\ \text{тогда } dy = dx, \quad 0 \le x \le 1 \end{array} \right| =$$

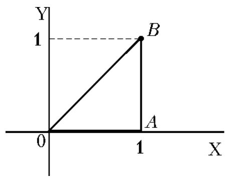
$$= \int\limits_0^1 (x + ix)^2(dx + idx) = (1 + i)^3 \int\limits_0^1 x^2\,dx =$$

$$= (1 + i)^3\, \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{(1 + i)^3}{3} = \frac{1 + 3i + 3i^2 + i^3}{3} = \frac{1 + 3i - 3 - i}{3} =$$

$$= \frac{-2 + 2i}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

При вычислении интегралов удобно наряду с алгебраической пользоваться и показательной формой (сказанное равносильно тому, что наряду с прямоугольной системой координат удобно иногда использовать полярную).

- **2.** $\int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z(z+1)dz$, где (L)– ломаная OAB, $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$.



$\int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z(z+1)dz = \int\limits_{(L)} x(x+1+iy)d(x+iy)$

Разбиваем контур интегрирования на два участка.

На отрезке OA имеем $y=0$, $dy=0$, $0 \le x \le 1$,

$$\int\limits_{(OA)} x(x+1+iy)(dx+idy) = \int\limits_0^1 x(x+1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

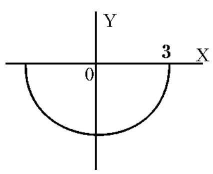
На отрезке AB имеем $x=1$, $dx=0$, $0 \le y \le 1$,

$$\int\limits_{(AB)} x(x+1+iy)(dx+idy) = i\int\limits_0^1 (2+iy)dy = i\left(2y + i\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 2i.$$

В итоге $\int\limits_{(L)} \operatorname{Re} z(z+1)dz = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} + 2i = \frac{1}{3} + 2i.$

- **3.** $\int\limits_{(L)} \frac{dz}{z^2}$, где (L)– нижняя полуокружность $|z|=3$, $\operatorname{Im} z \le 0$.

Воспользуемся показательной формой представления функции



$z = |z|e^{i\varphi}$, $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{|z|^2}e^{-2i\varphi}$,
$dz = |z|\, i\, e^{i\varphi}\, d\varphi$.

На контуре (L) имеем
$|z|=3$, $dz = 3ie^{i\varphi}\, d\varphi$, $-\pi \le \varphi \le 0$.

$$\int\limits_{(L)} \frac{dz}{z^2} = \int\limits_{-\pi}^{0} 3ie^{i\varphi}\frac{1}{9}e^{-2i\varphi}\, d\varphi = i/3\int\limits_{-\pi}^{0} e^{-i\varphi}\, d\varphi = -1/3e^{-i\varphi}\Big|_{-\pi}^{0} =$$

$$= -1/3(e^{0i} - e^{\pi i}) = -2/3.$$

3.4.2. Интегрирование аналитической функции. Первообразная

Как было показано выше
$$\int\limits_{(L)} f(z)dz = \int\limits_{(L)} (u+iv)(dx+idy) = \int\limits_{(L)} u\,dx - v\,dy + i \int\limits_{(L)} v\,dx + u\,dy.$$

Если функция $f(z)$ является аналитической, то выполнение для нее условий Коши – Римана автоматически означает и независимость записанных выше интегралов от пути интегрирования, а только от начальной и конечной точек пути. В этом случае всегда существует первообразная для подынтегральной функции $F'(z) = f(z)$, которая тоже является аналитической функцией. Справедлива в этом случае и формула, аналогичная формуле Ньютона – Лейбница
$$\boxed{\int\limits_{(L)} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).}$$

Линия интегрирования должна целиком принадлежать области аналитичности функции (все точки линии должны быть правильными).

Использование приведенной формулы значительно упрощает вычисление интегралов. При этом для отыскания первообразной используется стандартная таблица неопределенных интегралов.

Так, предыдущий пример: $\displaystyle\int\limits_{(L)} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}\Big|_{-3}^{3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

- 4. $\displaystyle\int\limits_{(L)} \cos^2 z \sin z dz$, $L-$ любая линия от точки $z = 0$ до $z = \pi$.

$$\int\limits_{(L)} \cos^2 z \sin z dz = \int\limits_0^{\pi} \cos^2 z \sin z dz = -\int\limits_0^{\pi} \cos^2 z d(\cos z) = -\frac{\cos^3 z}{3}\Big|_0^{\pi} = 2/3.$$

3.4.3. Интегральные теорема и формула Коши

Пусть контур интегрирования (γ) является замкнутой линией. В этом случае выбор начальной точки, которая будет и конечной, не имеет никакого значения.

Теорема Коши. *Интеграл по замкнутому контуру от функции, которая является аналитической в замкнутой области, ограниченной этим контуром, равен нулю* $\displaystyle\oint\limits_{(\gamma)} f(z) = 0.$

При этом утверждение теоремы справедливо как для односвязной, так и для многосвязной области.

Утверждение теоремы является очевидным следствием двух обстоятельств.

1) Интеграл от аналитической функции не зависит от пути интегрирования.

2) При смене направления движения по контуру интеграл меняет знак.

Так: $\oint\limits_{|z|=2} z\,e^{z}\,dz = 0$, т.к. подынтегральная функция аналитична на всей комплексной плоскости и в круге $|z| \leq 2$, в частности, тоже.

$\oint\limits_{|z|=2} \dfrac{z\,\sin z}{(z-3i)^3}dz = 0$, т.к. подынтегральная функция хотя и имеет разрыв (неаналитическая) в точке $z = 3i$, но эта точка находится вне области, ограниченной контуром интегрирования.

Из интегральной теоремы Коши вытекает одна из важнейших формул теории функций комплексного переменного – интегральная формула Коши.

Интегральная формула Коши. *Если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой односвязной области (D), то справедлива формула*

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi\,i}\oint\limits_{(\gamma)}\frac{f(z)\,dz}{z-z_0},}$$

где (γ)– замкнутый контур целиком лежащий в области (D) и проходимый в положительном направлении (против часовой срелки), а z_0– любая точка, лежащая внутри γ.

Формула связывает значение аналитической функции в некоторой точке z_0 с величиной интеграла по замкнутому контуру, который окружает область, содержащую эту точку. При этом ни вид, ни размеры контура γ предварительно не оговорены (они не имеют никакого значения) и, поэтому, в дальнейшем в качестве такого контура будем использовать наиболее простой – окружность произвольного радиуса с центром в точке z_0, т.е $(\gamma):\ |z-z_0|=r$, где r может быть сколь угодно малым.

Формула Коши эффективно используется для вычисления интегралов типа Коши по замкнутому контуру, а именно:

Если функция $f(z)$ является аналитической в точке z_0 (т.е функция дифференцируема в этой точке и ее окрестности $|z-z_0|=r$), то справедливы формулы (следствия интегральной формулы Коши):

$$I.\quad \oint\limits_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}=2\pi\, i\, f(z_0), \qquad II.\quad \oint\limits_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^2}=2\pi\, i\, f'(z_0),$$

$$III.\quad \oint\limits_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^3}=2\pi\, i\,\frac{f''(z_0)}{2!}, \qquad IV.\quad \oint\limits_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^n}=2\pi\, i\,\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}.$$

Точка z_0 везде обходится по контуру против часовой стрелки.

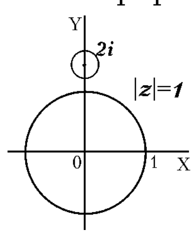
Найдем следующие интегралы по заданным контурам, используя интегральную формулу Коши и ее следствия:

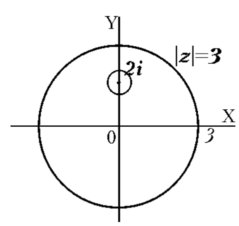
- **1**. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z\,\sin z}{z-2i}dz=0$, т.к. подынтегральная функция неаналитическая только в точке $z=2i$, которая лежит вне контура интегрирования $|z|=1$.

- **2**. $\oint\limits_{|z|=3} \frac{z\,\sin z}{z-2i}dz=2\pi\, i(z\,\sin z)\Big|_{z=2i}=2\pi\, i\cdot 2i\sin 2i=$

$$=2\pi\, i\cdot 2i\frac{e^{i\,2i}-e^{-i\,2i}}{2i}=2\pi\, i(e^{-2}-e^2)\approx -7,25\cdot 2\pi\, i\approx -45,53\, i.$$

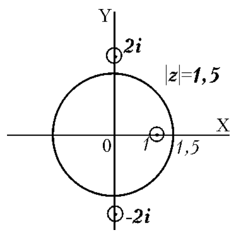
В данном случае точка $z=2i$ является внутренней точкой области и интеграл берется по формуле (I).





Часто бывает, что исходные интегралы необходимо вначале подготовить к использованию соответствующей формулы, а для этого нужно в подынтегральной функции предварительно выделить аналитическую в точке функцию. Если внутрь контура интегрирования попадают несколько особых точек (точек неаналитичности функции), то необходимо каждую точку изолировать некоторым контуром, представить исходный интеграл в виде суммы интегралов по отдельным контурам и вычислить каждый, используя соответствующую формулу.

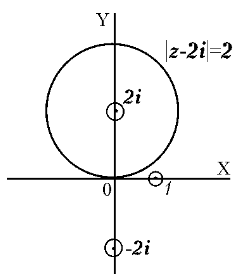
- **3**. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$



Подынтегральная функция имеет 3 особые точки (в данном случае точки разрыва) $z_1 = 1$, $z_{2;3} = \pm 2i$, но только $z_1 = 1$ находится внутри контура интегрирования. Таким образом, в качестве аналитической функции здесь выступает $f_1(z) = \dfrac{z^3}{z^2+4}$ и по формуле (II) имеем

$$\oint\limits_{|z|=1,5} \frac{z^3\,dz}{(z-1)^2(z^2+4)} = 2\pi\, i \left(\frac{z^3}{z^2+4}\right)'\Bigg|_{z=1} = 2\pi\, i \frac{3z^2(z^2+4) - 2z\, z^3}{(z^2+4)^2}\Bigg|_{z=1} =$$
$$= 2\pi\, i \tfrac{13}{25} \approx 3,27\, i.$$

- **4**. $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$.



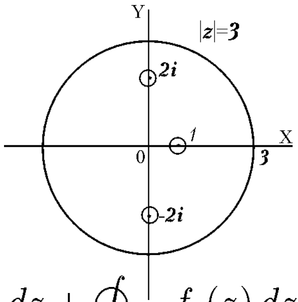
В данном случае внутрь контура интегрирования попадает только точка $z = 2i$, поэтому в качестве аналитической в области функции будет выступать
$f_2(z) = \dfrac{z^3}{(z-1)^2(z+2i)}$ и по формуле (I)

$$\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{z^3dz}{(z-1)^2(z^2+4)} = 2\pi\, i \frac{z^3}{(z-1)^2(z+2i)}\Bigg|_{z=2i} = 2\pi\, i \frac{(2i)^3}{(2i-1)^2 4i} =$$

$$= \frac{2\pi\, i(-8i)}{4i(2i-1)^2} = \frac{-4\pi\, i}{(2i-1)^2} = \frac{-4\pi\, i(2i+1)^2}{(-4-1)^2} = \frac{16\pi}{25} + i\frac{12\pi}{25} \approx 2,01 + 1,51\, i.$$

- **5**. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^3 dz}{(z-1)^2(z^2+4)}$.

В данном случае внутрь контура интегрирования попадает все три особые точки. Окружим каждую точку контурами и представим интеграл в виде суммы трех интегралов, каждый из которых уже вычислен п примерах 3 – 5.



$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z^3 dz}{(z-1)^2(z^2+4)} = \oint\limits_{|z|=1,5} f_1(z)\,dz + \oint\limits_{|z-2i|=2} f_2(z)\,dz + \oint\limits_{|z+2i|=2} f_3(z)\,dz \approx$$

$$\approx 3,27\,i + 2,01 + 1,51\,i - 2,01 + 1,51\,i = 3,27\,i + 3,02\,i = 6,29\,i.$$

Глава 4. ОПЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

4.1. Преобразование Лапласа

Большой популярностью у инженеров пользуется символический (операционный) метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений и систем, который был предложен известным американским инженером - электриком Оливером Хевисайдом (1850-1925). Сначала этот метод был предложен без строгого математического обоснования. Но поразительный успех метода заставил объяснить его с математической точки зрения, что привело к полному оправданию и дальнейшему развитию символических методов.

Применение операционного метода для решения задачи Коши позволяет свести решение дифференциального уравнения для некоторой функции $x(t)$ к решению алгебраического уравнения относительно ее "изображения" – функции $X(p)$. Операции над изображением оказываются более простыми.

Операционный метод хорош своей универсальностью. При решении дифференциальных уравнений и систем операционным методом нет необходимости обращать внимание на на такие важные для других методов решения обстоятельства, как:

-составление фундаментальной системы решений и общего решения линейного однородного уравнения, или системы по виду корней характеристического уравнения;

-поиск частного решения линейного неоднородного уравнения по виду правой части с учетом корней характеристического уравнения.

Особый выигрыш даёт операционный метод при интегрировании систем, характеристические уравнения для которых имеют комплексные или кратные корни.
В данном пособии рассмотрено применение операционного метода к решению дифференциальных уравнений и систем.

4.1.1. Оригинал и его изображение

Пусть функция $y = f(t)$ непрерывна для всех $t \geq 0$ за исключением, может быть, лишь конечного числа точек и удовлетворяет условиям

$\begin{cases} f(t) \equiv 0, & t < 0, \\ |\, f(t)\,| \le Me^{at}, & t \ge 0, \end{cases}$ где M и $a-$ произвольные, ограниченные и положительные константы. При этом a называют порядком роста функции $f(t)$.

Функция, удовлетворяющая данному условию называется ***о р и г и н а л о м.*** Условие это показывает, что оригиналом может служить лишь функция либо ограниченная, либо неограниченная, но растущая при этом не быстрее некоторой реальной показательной функции вида Me^{at}. Так функции

$f(t) = t^2,\ \ e^{3t},\ e^{-4t}\cos 2t$ могут служить оригиналами, а

$f(t) = \dfrac{1}{t},\ \operatorname{ctg} t,\ e^{t^2},\ \dfrac{1}{1+\ln t}, \ldots$ не могут (не являются таковыми).

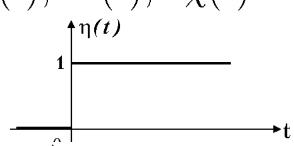
Пусть функция $f(t)$ является оригиналом, т.е удовлетворяет отмеченному выше условию. Умножим эту функцию на e^{-pt}, где $p-$ некоторый формальный комплексный параметр с положительной действительной частью, и проинтегрируем полученное произведение в интервале $[0;\ +\infty)$. Получим функцию

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

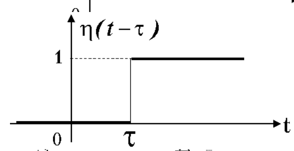
Такое действие над данной функцией называется ***п р е о б р а з о в а н и е м Л а п л а с а.*** Функция $F(p)$ называется ***и з о б р а ж е н и е м*** функции $f(t)$ по Лапласу, и этот факт символически записывается так : $f(t) \risingdotseq F(p)$.

Единичная функция Хевисайда Простейшим оригиналом служит, так называемая, "единичная функция" Хевисайда (единичная "ступенька"). Используются обозначения: $\eta(t),\ \ \theta(t),\ \ \chi(t)$.

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{для } t < 0; \\ 1, & \text{для } t > 0. \end{cases}$$



$$\eta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & \text{для } t < \tau; \\ 1, & \text{для } t > \tau. \end{cases}$$



Тогда любую функцию, которая равна нулю до некоторого момента времени, можно записать как произведение

$$f(t)\cdot\eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & t > 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad f(t)\cdot\eta(t-\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t), & t > \tau. \end{cases}$$

Итак, всякий оригинал должен содержать множитель $\eta(t)$ или $\eta(t-\tau)$.

В дальнейшем для упрощения записи оригиналов мы будем опускать эти множители и использовать их только тогда, когда необходимо заострить внимание на моменте "включения" функции - оригинала, например при использовании теоремы запаздывания. Итак, если в выражении для $f(t)$ нет множителя $\eta(t)$, то это означает, что "включение" функции происходит в момент времени $t = 0$. Наличие множителя $\eta(t-\tau)$ указывает, что "включение" функции происходит в момент времени $t = \tau$.

Найдем, пользуясь определением, изображения функций.

- $\eta(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty 1 \cdot e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}\,e^{-pt}\,\Big|_0^\infty = -\frac{1}{p}\left(e^{-\infty} - e^0\right) = \frac{1}{p}.$
- $\eta(t-\tau) \risingdotseq \int\limits_\tau^\infty 1 \cdot e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p}\,e^{-pt}\,\Big|_\tau^\infty = -\frac{1}{p}\left(e^{-\infty} - e^{-p\tau}\right) = \frac{e^{-p\tau}}{p}.$
- $e^{at} \risingdotseq \int\limits_0^\infty e^{at} \cdot e^{-pt}\,dt = -\frac{1}{p-a}\,e^{-(p-a)t}\,\Big|_0^\infty = \frac{1}{p-a}.$

Таким образом можно найти изображение любой функции-оригинала. Ниже приведены оригиналы и изображения наиболее часто встречающихся функций.

	$f(t)$	$F(p)$
1	$1,\quad \eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t-\tau)$	$\frac{1}{p}\,e^{-p\tau}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	t	$1/p^2$
5	t^2	$2/p^3$
6	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
7	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
8	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$

	$f(t)$	$F(p)$
9	$\mathrm{sh}\ \lambda t$	$\frac{\lambda}{p^2-\lambda^2}$
10	$\mathrm{ch}\ \lambda t$	$\frac{p}{p^2-\lambda^2}$
11	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
12	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
13	$e^{-at}\mathrm{sh}\ \lambda t$	$\frac{\lambda}{(p+a)^2-\lambda^2}$
14	$e^{-at}\mathrm{ch}\ \lambda t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2-\lambda^2}$

Для нахождения изображений необходимо привлекать наряду с таблицей и основные свойства операционного метода.

4.1.2. Свойства и теоремы операционного исчисления

Перейдем к рассмотрнию свойств оригиналов и их изображений и использованию этих свойств в решении примеров. Приведем свойства вначале в виде сводки соответствующих формул, а затем расшифруем более подробно и проиллюстрируем их примерами.

1. Свойство линейности $a\,f_1(t)+b\,f_2(t) \;\fallingdotseq\; a\,F_1(p)+b\,F_2(p)$

2. Свойство подобия $f(kt) \fallingdotseq \dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{p}{k}\right)$

3. Свойство затухания оригинала $e^{at}\,f(t) \fallingdotseq F(p-a)$

4. Свойство запаздывания оригинала $f(t-\tau) \fallingdotseq F(p)\cdot e^{-p\tau}$

5. Дифференцирование оригинала $f'(t) \fallingdotseq p\,F(p)-f(0)$

6. Дифференцирование изображения $F^{(n)}(p) \fallingdotseq (-1)^n\cdot t^n\cdot f(t)$

7. Интегрирование оригинала $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \fallingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$

8. Интегрирование изображения $\int\limits_p^\infty F(p)\,dp \fallingdotseq \dfrac{f(t)}{t}$

9. Изображение интеграла типа "свертка"

$$f_1(t)*f_2(t)=\int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau \fallingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p)$$

10. Изображение произведения оригиналов

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \fallingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq$$

11. Теорема разложения $f(t)=\sum \operatorname{res}\left[F(p)\,e^{pt},p_k\right]$

12. Изображение периодической функции $f(t)=f(t+T)$

$$f(t) \;\fallingdotseq\; \frac{1}{1-e^{-Tp}}\int\limits_0^T e^{-pt}\,f(t)\,dt$$

1. Свойство л и н е й н о с т и

Изображение линейной комбинации функций равно линейной комбинации изображений данных функций.

Т.е., если $f_1(t) \fallingdotseq F_1(p)$, $f_2(t) \fallingdotseq F_2(p)$, то

$$\boxed{a\,f_1(t)+b\,f_2(t) \fallingdotseq a\,F_1(p)+b\,F_2(p).}$$

Свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Так, используя таблицу изображений и свойство линейности, имеем

- $12+3\cos t-6e^{t} \risingdotseq 12\dfrac{1}{p}+3\dfrac{p}{p^2+1}-6\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{12}{p}+\dfrac{3p}{p^2+1}-\dfrac{6}{p-1}.$
- $7\sin 2t+5e^{-3t}-4t \risingdotseq 7\dfrac{2}{p^2+4}+5\dfrac{1}{p+3}-4\dfrac{1}{p^2}=\dfrac{14}{p^2+4}+\dfrac{5}{p+3}-\dfrac{4}{p^2}.$
- $5t+3-\cos 3t \risingdotseq \dfrac{5}{p^2}+\dfrac{3}{p}-\dfrac{p}{p^2+9}=\dfrac{2p^3+5p^2+27p+45}{p^2(p^2+9)}.$
- $\dfrac{1}{2}(\cos 3t+\operatorname{ch}\, 3t) \risingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{p^2+9}+\dfrac{p}{p^2-9}\right)=\dfrac{p^3}{p^4-81}.$
- $\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\cos 2t}{2} \risingdotseq \dfrac{1}{2p}-\dfrac{1}{2}\dfrac{p}{p^2+4}=\dfrac{2}{p\left(p^2+4\right)}.$
- $\sin 2t\cdot\sin 4t=-\dfrac{1}{2}(\cos 6t-\cos 2t) \risingdotseq -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{p}{p^2+36}-\dfrac{p}{p^2+4}\right).$

2. Свойство подобия

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\boxed{f(kt) \risingdotseq \dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{p}{k}\right).}$

- Так как $e^{t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}$, то $e^{-4t} \risingdotseq \dfrac{1}{-4}\cdot\dfrac{1}{-p/4-1}=\dfrac{1}{p+4}.$
- Так как $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, то $\sin 5t \risingdotseq \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{(p/5)^2+1}=\dfrac{5}{p^2+25}.$

3. Свойство затухания оригинала

Умножение оригинала на e^{at} *соответствует замене в изображении аргумента p на* $(p-a)$.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\boxed{e^{\alpha t}f(t) \risingdotseq F(p-\alpha).}$

- Так как $\cos 4t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+16}$, то $e^{-2t}\cos 4t \risingdotseq \dfrac{p+2}{(p+2)^2+16}.$
- Так как $t^2+3 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}+\dfrac{3}{p}$, то $e^{5t}(t^2+3) \risingdotseq \dfrac{2}{(p-5)^3}+\dfrac{3}{p-5}.$

4. Свойство запаздывания оригинала

Запаздывание оригинала на время $t=\tau$ *соответствует умножению изображения на* $e^{-p\tau}$.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $\boxed{f(t-\tau) \risingdotseq F(p)\cdot e^{-p\tau}.}$

- Табличные формулы: $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$, $1\cdot\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$,

$$1\cdot\eta(t-\tau) \risingdotseq \frac{1}{p}\,e^{-p\tau}, \quad \frac{1}{10}\cdot\eta(t-3) \risingdotseq \frac{1}{10}\,\frac{e^{-3p}}{p}.$$

- Табличная формула $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

$$t\,\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2}, \quad (t-2)\,\eta(t-2) \risingdotseq \frac{1}{p^2}\,e^{-2p}, \quad (t-1)^2\,\eta(t-1) \risingdotseq \frac{2}{p^3}\,e^{-p}$$

Но ! $t\,\eta(t-2)=[(t-2)+2]\eta(t-2)=(t-2)\eta(t-2)+2\eta(t-2) \risingdotseq \left(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{2}{p}\right)\,e^{-2p}$.

$$t^2\,\eta(t-1)=[(t-1)+1]^2\eta(t-1)=\left[(t-1)^2+2(t-1)+1\right]\eta(t-1)=$$
$$=(t-1)^2\cdot\eta(t-1)+2(t-1)\cdot\eta(t-1)+1\cdot\eta(t-1) \risingdotseq \left(\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}\right)\,e^{-p}.$$

- Табличная формула $e^{at} \risingdotseq \dfrac{1}{p-a}$.

$$e^t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \quad e^{t-3}\cdot\eta(t-3) \risingdotseq \frac{e^{-3p}}{p-1}, \quad e^{2(t-3)}\cdot\eta(t-3) \risingdotseq \frac{e^{-3p}}{p-2}.$$

Но ! $e^{2t}\cdot\eta(t-3)=e^{2(t-3)+6}\eta(t-3)=e^6e^{2(t-3)}\eta(t-3) \risingdotseq e^6\dfrac{e^{-3p}}{p-2}$.

- Табличные формулы $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$.

$$\sin t\cdot\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}, \qquad \sin(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) \risingdotseq \frac{e^{-p\pi/2}}{p^2+1}.$$

Но ! $\sin t\cdot\eta(t-\pi/2)=\sin[(t-\pi/2)+\pi/2]\cdot\eta(t-\pi/2)=$

$$=\cos(t-\pi/2)\cdot\eta(t-\pi/2) \risingdotseq \frac{p\,e^{-p\pi/2}}{p^2+1}.$$

$$\cos 3t\cdot\eta(t-\pi)=\cos 3[(t-\pi)+\pi]\cdot\eta(t-\pi)=$$
$$=-\cos 3(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi) \risingdotseq -\frac{p\,e^{-\pi p}}{p^2+9}.$$

5. Дифференцирование оригинала

Дифференцирование оригинала по t сводится с точностью до постоянных слагаемых к умножению изображения на p.

$$\boxed{\begin{array}{c} \dot{f}(t) = p\,F(p) - f(0), \\ \ddot{f}(t) = p^2\,F(p) - p\,f(0) - \dot{f}(0). \end{array}}$$

Так как $e^{-3t}\mathrm{sh}4t \risingdotseq \dfrac{4}{(p+3)^2-16}$, то с учетом $f(0) = e^0\cdot\mathrm{sh}0 = 0$

получим $\dfrac{d}{dt}(e^{-3t}\mathrm{sh}4t) \risingdotseq \dfrac{4\cdot p}{(p+3)^2-16}$.

6. Дифференцирование изображения

Дифференцирование изображения по p сводится к умножению оригинала на (-t).

Или : *умножение оригинала на t соответствует с точностью до знака дифференцированию его изображения по p.*

В общем случае справедливы формулы:

$$\boxed{F^{(n)}(p) = (-1)^n t^n f(t), \quad t^n f(t) \risingdotseq (-1)^n F^{(n)}(p) \quad .}$$

Используя эти формулы, можно находить как изображения по оригиналам, так и оригиналы по известным изображениям.

Возьмем для примера изображение $e^{-5t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+5} = F(p)$. Тогда

- $t\cdot e^{-5t} \risingdotseq -F'(p) = -\left(\dfrac{1}{p+5}\right)' = \dfrac{1}{(p+5)^2}$.
- $t^2\cdot e^{-5t} \risingdotseq (-1)^2\cdot F''(p) = \left(\dfrac{1}{p+5}\right)'' = \dfrac{2}{(p+5)^3}$,
- $t^3\cdot e^{-5t} \risingdotseq (-1)^3\cdot F'''(p) = -\left(\dfrac{1}{p+5}\right)''' = \dfrac{6}{(p+5)^4}$.

Возьмем изображение $\sin 3t \risingdotseq \dfrac{3}{p^2+9} = F(p)$, тогда

- $t\cdot\sin 3t \risingdotseq -F'(p) = -\left(\dfrac{3}{p^2+9}\right)' = \dfrac{6p}{(p^2+9)^2}$.
- $t^2\cdot\sin 3t \risingdotseq (-1)^2\cdot F''(p) = \left(\dfrac{3}{p^2+9}\right)'' = \dfrac{-6p^2+12p-54}{(p^2+9)^3}$.

Возьмем изображение $e^{-3t}\cos 4t \risingdotseq \dfrac{p+3}{(p+3)^2+16} = F(p)$, тогда

- $t\cdot e^{-3t}\cos 4t \;\risingdotseq\; -F'(p) = -\left(\dfrac{p+3}{(p+3)^2+16}\right)' = \dfrac{p^2+6p-7}{((p+3)^2+16)^2}.$

Данным свойством удобно пользоваться для нахождения оригинала по заданному изображению, если видно, что оно есть производная от более простой, а еще лучше, от табличной функции-изображения.

- $\dfrac{1}{(p-3)^2} = -\left(\dfrac{1}{p-3}\right)' \risingdotseq t\cdot e^{3t}.$
- $\dfrac{1}{(p-3)^3} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-3}\right)'' \risingdotseq \dfrac{1}{2}\,t^2\cdot e^{3t}.$
- $\dfrac{p}{(p^2-9)^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2-9}\right)' = -\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{3}{p^2-9}\right)' \risingdotseq \dfrac{1}{6}\cdot t\cdot \mathrm{sh}\,3t.$

7. Интегрирование оригинала

Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p. И в обратном порядке: *деление изображения на p означает интегрирование его оригинала в интервале* $[0;t]$.

$$\boxed{\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\,F(p), \qquad \frac{F(p)}{p} \risingdotseq \int_0^t f(\tau)\,d\tau.}$$

Покажем использование этого свойства для нахождения изображения интегралов.

- $\int_0^t \tau^2\cdot e^{-3\tau}\,d\tau.$

Нахождение изображения осуществляется в следующей последовательности:

a) изображение функции $e^{-3t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+3}$,

b) с помощью свойства дифференцирования изображения имеем

$$t^2\cdot e^{-3t} \risingdotseq (-1)^2\left(\frac{1}{p+3}\right)'' = \frac{2}{(p+3)^3},$$

c) по свойству интегрирования оригинала делим полученное выражение на p и получаем изображение интеграла

$$\int_0^t \tau^2\cdot e^{-3\tau}\,d\tau \risingdotseq \frac{2}{p\,(p+3)^3}.$$

- $\int\limits_0^t \tau \cdot \cos 2\tau \cdot e^{-3\tau}\, d\tau.$

Нахождение изображения осуществляется в следующей последовательности:

a) изображение функции $\cos 2t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+4}$,

b) с помощью свойства затухания оригинала имеем
$$e^{-3t} \cdot \cos 2t \risingdotseq \frac{p+3}{(p+3)^2+4},$$

c) используем свойство дифференцирования изображения
$$t \cdot e^{-3t} \cdot \cos 2t \risingdotseq -\left[\frac{p+3}{(p+3)^2+4}\right]' = \frac{(p+3)^2-4}{[(p+3)^2+4]^2},$$

d) делим полученное выражение на p
$$\int\limits_0^t \tau \cdot \cos 2\tau \cdot e^{-3\tau}\, d\tau \risingdotseq \frac{(p+3)^2-4}{p\,[(p+3)^2+4]^2}.$$

Проиллюстрируем использование этого свойства для нахождения оригиналов по изображению в случае, если знаменатель изображения содержит множитель p, p^2, и т.д.

- $\dfrac{1}{p^2(p+2)} \risingdotseq \dfrac{1}{4}\left(2t-1+e^{-2t}\right).$ Действительно,

  по таблице: $F(p) = \dfrac{1}{p+2} \risingdotseq e^{-2t}$. Тогда
  $$\frac{1}{p(p+2)} = \frac{F(p)}{p} \risingdotseq \int\limits_0^t e^{-2\tau} d\tau = -\frac{1}{2} e^{-2\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right). \quad \text{Далее}$$
  $$\frac{1}{p^2(p+2)} \risingdotseq \int\limits_0^t \frac{1}{2}\left(1-e^{-2\tau}\right) d\tau = \frac{1}{4}\left(2t-1+e^{-2t}\right).$$

- $\dfrac{1}{p^2(p^2+9)} \risingdotseq \dfrac{1}{27}(3t-\sin 3t).$ Действительно,

  по таблице: $F(p) = \dfrac{1}{p^2+9} \risingdotseq \dfrac{1}{3}\sin 3t$. Тогда
  $$\frac{1}{p(p^2+9)} = \frac{F(p)}{p} \risingdotseq \frac{1}{3}\int\limits_0^t \sin 3\tau d\tau = -\frac{1}{9}\cos 3\tau\Big|_0^t = \frac{1}{9}(1-\cos 3t). \quad \text{Далее}$$
  $$\frac{1}{p^2(p^2+9)} \risingdotseq \frac{1}{9}\int\limits_0^t (1-\cos 3\tau) d\tau = \frac{1}{9}\left(t-\frac{1}{3}\sin 3\tau\right)\Big|_0^t = \frac{1}{27}(3t-\sin 3t).$$

8. Интегрирование изображения

Интегрирование изображения сводится к делению оригинала на t. Или: *деление оригинала на t соответствует интегрированию изображения*

$$\boxed{\int_p^\infty F(p)\,dp \;\risingdotseq\; \frac{1}{t}\,f(t), \qquad \frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(p)\,dp.}$$

- $\dfrac{\sin 2t}{t} \risingdotseq \operatorname{arcctg}\dfrac{p}{2}$, так как

  по таблице: $\sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4} = F(p)$. Тогда

  $$\frac{\sin 2t}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(p)\,dp = \int_p^\infty \frac{2}{p^2+4}dp = \operatorname{arctg}\frac{p}{2}\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{p}{2} = \operatorname{arcctg}\frac{p}{2}.$$

- $$\frac{1-e^{-4t}}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+4}\right)dp = (\ln p - \ln(p+4))\Big|_p^\infty =$$

$$= \ln\frac{p}{p+4}\Big|_p^\infty = \ln 1 - \ln\frac{p}{p+4} = \ln\frac{p+4}{p} = \ln\left(1+\frac{4}{p}\right).$$

- $$\frac{e^{at}-e^{bt}}{t} \risingdotseq \int_p^\infty \left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-b}\right)dp = \ln\frac{p-b}{p-a}.$$

9. Изображение свертки функций

Сверткой функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется интеграл вида

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau.$$

Изображение свертки функций есть произведение изображений этих функций

$$\boxed{\int_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau \risingdotseq F_1(p)\cdot F_2(p).}$$

Рассмотрим примеры нахождения изображений свертки функций (интегралов типа свертки)

- $\int\limits_0^t \tau^2 \operatorname{ch}(t-\tau)\,d\tau \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}\cdot\dfrac{p}{p^2-1}$, так как
  $f_1(t)=t^2 \risingdotseq \dfrac{2}{p^3}, \qquad f_2(t)=\operatorname{ch} t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-1}.$
- $\int\limits_0^t e^{t-\tau}\,\sin\tau\,d\tau \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}\cdot\dfrac{1}{p^2+1}$, так как
  $f_1(t)=e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}, \qquad f_2(t)=\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}.$
- $\int\limits_0^t \tau^3\,e^{t-\tau}\,\cos(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t (t-\tau)^3\,e^t\,\cos t\,d\tau \risingdotseq$
  $$\risingdotseq \frac{6}{p^4}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+1}=\frac{6}{p^3\,[(p-1)^2+1]},$$
  так как $f_1(t)=t^3 \risingdotseq \dfrac{6}{p^4}, \qquad f_2(t)=e^t\cos t \risingdotseq \dfrac{p-1}{(p-1)^2+1}.$

Это свойство можно использовать и для нахождения оригинала для произведения двух изображений.

Оригинал произведения изображений вычисляется по формуле

$$\boxed{F_1(p)\cdot F_2(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f_1(\tau)\,f_2(t-\tau)\,d\tau = \int\limits_0^t f_1(t-\tau)\,f_2(\tau)\,d\tau.}$$

Например:

- $$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{1}{p^2+4}\cdot\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \left|\frac{p}{p^2+1} \risingdotseq \cos t,\ \frac{1}{p^2+4} \risingdotseq \frac{1}{2}\sin 2t\right|$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sin 2\tau\cos(t-\tau)d\tau = \frac{1}{4}\int\limits_0^t [\sin(\tau+t)+\sin(3\tau-t)]\,d\tau =$$
$$=\frac{1}{4}\left(-\cos(\tau+t)-\frac{1}{3}\cos(3\tau-t)\right)\Bigg|_0^t =$$
$$=\frac{1}{4}\left(-\cos 2t-\frac{1}{3}\cos 2t+\cos t+\frac{1}{3}\cos t\right)=\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t).$$

10. Изображение произведения оригиналов

$$f_1(t)\cdot f_2(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dq.$$

Примеры на использование этой формулы здесь не приводятся.

11. Теорема разложения

Если изображение функции $f(t) \risingdotseq F(p)$ *имеет только особые точки типа "полюс", то оригинал можно найти по формуле*

$$\boxed{f(t) = \sum \operatorname{res}\,[F(p)\,e^{pt}, p_k],}$$

где $\operatorname{res}\,[F(p)\,e^{pt}, p_k]$ – вычеты функции $F(p)\,e^{pt}$ в особых точках.

• $\dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)}$. Запишем функцию в виде

$$F(p) = \frac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)} = \frac{1}{(p-1)(p+1)(p+2-2i)(p+2+2i)}.$$

Точки $p_{1,2} = \pm 1$, $p_{3,4} = -2 \pm 2i$ являются простыми полюсами функции $F(p) = \dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)}$.

Согласно теореме разложения

$$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)} \risingdotseq \sum \operatorname{res}[F(p)\,e^{pt}, p_k].$$ Находим вычеты.

$$\operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_1] = \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, 1] = \frac{e^t}{2(3-2i)(3+2i)} = \frac{e^t}{26}.$$

$$\operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_2] = \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, -1] = \frac{e^{-t}}{-2(1-2i)(1+2i)} = -\frac{e^{-t}}{10}.$$

$$\operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_3] = \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, -2+2i] = \frac{e^{(-2+2i)t}}{(-3+2i)(-1+2i)(4i)} = \frac{e^{-2t}(\cos 2t + i\sin 2t)}{32-4i}.$$

$$\operatorname{res}[F(p)e^{pt}, p_4] = \operatorname{res}[F(p)e^{pt}, -2-2i] = \frac{e^{(-2-2i)t}}{(-3-2i)(-1-2i)(-4i)} = \frac{e^{-2t}(\cos 2t - i\sin 2t)}{32+4i}.$$

$$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)} \risingdotseq \frac{e^t}{26} - \frac{e^{-t}}{10} + \frac{e^{-2t}(\cos 2t + i\sin 2t)}{32-4i} + \frac{e^{-2t}(\cos 2t - i\sin 2t)}{32+4i} = \frac{e^t}{26} - \frac{e^{-t}}{10} + e^{-2t}\left(\frac{4}{65}\cos 2t - \frac{1}{130}\sin 2t\right).$$

- $F(p)=\dfrac{1}{(p+1)^2(p-3)^2}$.

Точки $p_1=-1$, $p_2=3$ являются полюсами 2-го порядка $F(p)$. Согласно теореме разложения

$$\frac{1}{(p+1)^2(p-3)^2}\fallingdotseq\sum \mathrm{res}[F(p)e^{pt},p_k]=\left(\frac{e^{pt}}{(p-3)^2}\right)'\Big|_{p=-1}+\left(\frac{e^{pt}}{(p+1)^2}\right)'\Big|_{p=3}=$$
$$=\frac{t\,e^{pt}\,(p-3)^2-2(p-3)e^{pt}}{(p-3)^4}\Big|_{p=-1}+\frac{t\,e^{pt}\,(p+1)^2-2(p+1)e^{pt}}{(p+1)^4}\Big|_{p=3}=$$
$$=\frac{t\,e^{pt}\,(p-3)-2e^{pt}}{(p-3)^3}\Big|_{p=-1}+\frac{t\,e^{pt}\,(p+1)-2e^{pt}}{(p+1)^3}\Big|_{p=3}=$$
$$=\frac{-4t\,e^{-t}-2e^{-t}}{-64}+\frac{4t\,e^{3t}-2e^{3t}}{64}=\frac{e^{-t}+e^{3t}}{16}\,t+\frac{e^{-t}+e^{3t}}{32}.$$

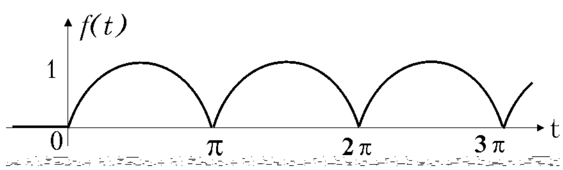
12. Изображение периодических функций

Изображение периодической функции $f(t)=f(t+T)$, где T – период, определяется соотношением

$$\boxed{f(t)\fallingdotseq\frac{1}{1-e^{-T\,p}}\int\limits_0^T e^{-pt}\,f(t)\,dt.}$$

- Найдем изображение функции $f(t)=|\sin t|$.

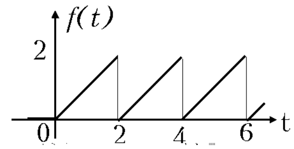
Функция $f(t)=\sin t$ имеет период $T=2\pi$ и изображением ее служит $\sin t\fallingdotseq\dfrac{1}{p^2+1}$. Функция $f(t)=|\sin t|$ имеет период $T=\pi$



Ее изображение мы можем найти по формуле

$$|\sin t|\fallingdotseq\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\int\limits_0^{\pi} e^{-pt}\sin t\,dt=\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\frac{e^{-pt}}{p^2+1}(-p\sin t-\cos t)\Big|_0^{\pi}=$$
$$=\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\left(\frac{e^{-p\pi}}{p^2+1}(-p\sin\pi-\cos\pi)-\frac{e^0}{p^2+1}(-p\sin 0-\cos 0)\right)=$$
$$=\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\left(\frac{e^{-p\pi}+1}{p^2+1}\right)=\frac{\mathrm{cth}\,\pi p/2}{p^2+1}.$$

• Найдем изображение функции с периодом $T = 2$, заданной на участке $[0; 2]$ законом $f(t) = t$ (бесконечная "пила").



$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{1-e^{-2p}} \int\limits_0^2 e^{-pt} t\, dt = \frac{1}{1-e^{-2p}} \left(-\frac{t}{p} e^{-pt} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \right) \Big|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2p}} \left(-\frac{2}{p} e^{-2p} - \frac{1}{p^2} e^{-2p} + \frac{1}{p^2} \right) = \frac{1-e^{-2p}(2p+1)}{1-e^{-2p}}.$$

4.1.3. Нахождение изображения

В рассмотренных свойствах операционного исчисления уже приводились приемы нахождения изображений заданных оригиналов. Приведем теперь еще ряд примеров, особенно обратим внимание на получение изображений органиченных во времени функций-оригиналов, требующих использования единичной функции Хевисайда и теоремы запаздывания.

Задача. Найти изображения следующих функций-оригиналов.

• **1**. $f(t) = t^4\, e^{-2t}$.

Изображение находим, используя табличное изображение и свойство 6 дифференцирования изображения

$$e^{-2t} \risingdotseq \frac{1}{p+2}, \quad t^4\, e^{-2t} \risingdotseq (-1)^4 \left(\frac{1}{p+2} \right)^{(4)} = \frac{24}{(p+2)^5}.$$

• **2**. $f(t) = t^2\, \left(e^{-t} + 2\mathrm{ch}3t\right)$.

Изображение находим, используя табличные изображения и свойства 1 и 6 (линейности и дифференцирования изображения)

$$e^{-t} + 2\mathrm{ch}3t \risingdotseq \frac{1}{p+1} + 2\frac{p}{p^2-9},$$

$$t\, \left(e^{-t} + 2\mathrm{ch}3t\right) \risingdotseq (-1) \cdot \left(\frac{1}{p+1} + 2\frac{p}{p^2-9} \right)' = \frac{1}{(p+1)^2} + 2\frac{p^2+9}{(p^2-9)^2}.$$

$$t^2\, \left(e^{-t} + 2\mathrm{ch}3t\right) \risingdotseq (-1)^2 \cdot \left(\frac{1}{p+1} + 2\frac{p}{p^2-9} \right)'' = \frac{2}{(p+1)^3} + 2\frac{36p}{(p^2-9)^3}.$$

• **3**. $f(t) = t\, e^{-3t}\, \mathrm{sh} t$.

Изображение находим, используя табличное изображение и свойства 3 и 6 (затухания оригинала и дифференцирования изображения)

$$\mathrm{sh} t \risingdotseq \frac{1}{p^2-1}, \qquad e^{-3t}\, \mathrm{sh} t \risingdotseq \frac{1}{(p+3)^2-1}.$$

$$t\, e^{-3t}\, \mathrm{sh} t \risingdotseq (-1)\cdot\left(\frac{1}{(p+3)^2-1}\right)' = \frac{2(p+3)}{[(p+3)^2-1]^2}.$$

• **4**. $f(t) = \sin^3 t$.

Запишем функцию в виде

$$\sin^3 t = \sin t \cdot \sin^2 t = \sin t \cdot \frac{1-\cos 2t}{2} = \frac{1}{2}(\sin t - \sin t \cdot \cos 2t) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}(\sin 3t - \sin t) = \frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t.$$

Тогда $\sin^3 t \risingdotseq \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{3}{p^2+9}$.

• **5**. $f(t) = \cos^4 t$.

Запишем функцию в виде

$$\cos^4 t = (\cos^2 t)^2 = \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 4t\right) =$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t.$$

Тогда $\cos^4 t \risingdotseq \dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{p^2+4} + \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{p}{p^2+16}$.

• **6**. $f(t) = \mathrm{ch} t \cdot \sin 3t$.

Запишем функцию в виде

$$\mathrm{ch} t \cdot \sin 3t = \sin 3t \cdot \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^t \sin 3t + e^{-t} \sin 3t\right).$$

Тогда $\mathrm{ch} t \cdot \sin 3t \risingdotseq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{(p-1)^2+9} + \dfrac{3}{(p+1)^2+9}\right)$.

• **7**. $f(t) = \mathrm{sh}^3 2t$.

$$\mathrm{sh}^3 2t = \left(\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{6t} - 3e^{4t}\cdot e^{-2t} + 3e^{2t}\cdot e^{-4t} - e^{-6t}\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{6t} - 3e^{2t} + 3e^{-2t} - e^{-6t}\right).$$

Тогда $\operatorname{sh}^3 2t \risingdotseq \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{p-6} - 3\dfrac{1}{p-2} + 3\dfrac{1}{p+2} - \dfrac{1}{p+6}\right).$

• **8**. $\int\limits_0^t (t-\tau)^3\, e^{-\tau}\, d\tau.$

Это интеграл типа "свертки". Для нахождения изображения используем свойство 9.

$$\int\limits_0^t (t-\tau)^3\, e^{-\tau}\, d\tau = t^3 * e^{-t} \risingdotseq \frac{6}{p^4}\cdot\frac{1}{p+1}.$$

• **9**. $\int\limits_0^t \tau^2\, e^{-2\tau}\, d\tau.$

Этот интеграл не относится к интегралам типа "свертки". Для нахождения изображения используем свойство 7 интегрирования оригинала. Находим изображение для подынтегральной функции и делим его на p

$$t^2\cdot e^{-2t} \risingdotseq (-1)^2\left(\frac{1}{p+2}\right)'' = \frac{2}{(p+2)^3}. \qquad \int\limits_0^t \tau^2\, e^{-2\tau}\, d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{2}{(p+2)^3}.$$

• **10**. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/6 \\ \sin(2t-\pi/3), & t > \pi/6. \end{cases}$

Данную функцию можно записать с помощью единичной функции Хевисайда

$f(t) = \sin(2t-\pi/3)\cdot\eta(t-\pi/6) = \sin 2(t-\pi/6)\cdot\eta(t-\pi/6).$

Согдасно теореме запаздывания изображение для функции

$\sin 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4}$ нужно умножить на $e^{-p\tau} = exp\left(-\frac{\pi}{6}\,p\right)$. Итак,

$\sin 2(t-\pi/6)\cdot\eta(t-\pi/6) \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+4}\, e^{-\pi\, p/6}.$

• **11**. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 5/4 \\ e^{-3t}\operatorname{ch}(4t-5), & t > 5/4. \end{cases}$

Данную функцию можно записать с помощью единичной функции Хевисайда

$f(t) = e^{-3t}\operatorname{ch}(4t-5)\cdot\eta(t-5/4) = e^{-3t}\operatorname{ch}[4(t-5/4)]\cdot\eta(t-5/4).$

Согдасно теореме запаздывания изображение для функции

$\operatorname{ch}4t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-16}$ нужно умножить на $e^{-p\tau} = e^{-5p/4}$. И, наконец, по свойству затухания нужно заменить p на $(p+3)$:

$e^{-3t}\operatorname{ch}[4(t-5/4)]\cdot\eta(t-5/4) \risingdotseq \dfrac{(p+3)}{(p+3)^2+16}\, e^{-5(p+3)/4}.$

Приведенные здесь и ранее примеры показывают, что изображениями элементарных непрерывных функций всегда служат правильные рациональные дроби.

Изображения функций, которые имеют точки устранимого разрыва, могут быть получены стандартными приемами, но они уже не являются рациональными дробями. Так, в следующих примерах используется свойство 8 интегрирования изображения: деление оригинала на t означает интегрирование изображения. Итоговые изображения уже не являются рациональными дробями.

- **12**. $\dfrac{e^{-3t}-e^{2t}}{t} \fallingdotseq \displaystyle\int_p^\infty \left(\frac{1}{p+3}-\frac{1}{p-2}\right)\,dp = \ln\frac{p+3}{p-2}\Big|_p^\infty = \ln\frac{p-2}{p+3}.$
- **13**. $\dfrac{1-\cos 2t}{t} \fallingdotseq \displaystyle\int_p^\infty \left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)\,dp = \ln\frac{p}{\sqrt{p^2+4}}\Big|_p^\infty = \ln\frac{\sqrt{p^2+4}}{p}.$
- **14**. $\dfrac{e^{-3t}\sin^2 t}{t} = \dfrac{e^{-3t}\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{t}\cdot e^{-3t}\cdot\dfrac{1-\cos 2t}{2} =$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}e^{-3t}-\frac{1}{2}\cdot e^{-3t}\cos 2t\right) \fallingdotseq \int_p^\infty \left[\frac{1}{2(p+3)}-\frac{1}{2}\frac{p+3}{(p+3)^2+4}\right]\,dp =$$

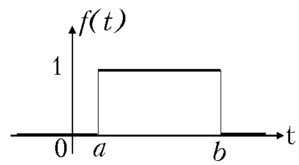
$$\frac{1}{2}\left[\ln(p+3)-\frac{1}{2}\ln((p+3)^2+4)\right] = \frac{1}{4}\cdot\ln\frac{(p+3)^2}{(p+3)^2+4}\Big|_p^\infty = \frac{1}{4}\cdot\ln\frac{(p+3)^2+4}{(p+3)^2}.$$

Изображения неэлементарных функций, например бесконечных степенных рядов в интервале сходимости, сумма которых не является элементарной функцией, также не являются правильными дробями. Вопрос о нахождении изображений неэлементарных функций в данном пособии не рассматривается.

С помощью функции Хевисайда удобно записывать, а далее и находить изображения, кусочно-непрерывных функций и функций, которые ограничены во времени. Так, единичная "ступенька" конечной длины

- **15**. $f(t) = \begin{cases} 0, & t < a, \\ 1, & a < t < b \\ 0, & t > b \end{cases} = \eta(t-a)-\eta(t-b) \fallingdotseq$

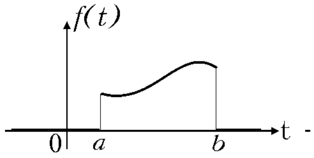
$$\fallingdotseq \frac{e^{-ap}}{p}-\frac{e^{-bp}}{p} = \frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p}.$$



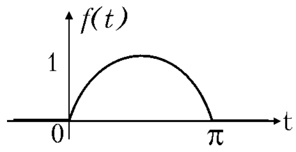
Очевидно, что умножение любой функции на такую ступеньку сохраняет эту функцию внутри интервала и зануляет вне его.

• **16**.

$$f(t)\cdot[\eta(t-a)-\eta(t-b)]=\begin{cases}0, & t<a,\\ f(t), & a<t<b\\ 0, & t>b.\end{cases}$$

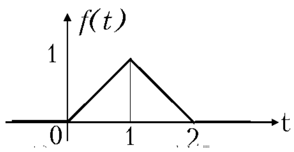


• **17**. $f(t)=\begin{cases}0, & \text{для} \quad t<0\\ 2, & \text{для} \quad 0<t<3\\ 0, & \text{для} \quad t>3\end{cases} =$



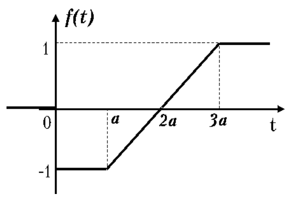
$$=2[\eta(t)-\eta(t-3)] \risingdotseq \frac{2}{p}-\frac{2e^{-3p}}{p}.$$

• **18**. $f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\pi\\ 0, & \quad t>\pi\end{cases} =$



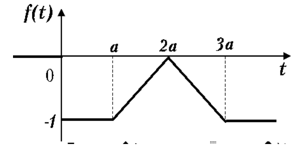
$$=\sin t\cdot[\eta(t)-\eta(t-\pi)]=\sin t\cdot\eta(t)-\sin t\cdot\eta(t-\pi)=$$
$$\sin t\cdot\eta(t)-\sin[(t-\pi)+\pi]\cdot\eta(t-\pi)=$$
$$=\sin t\cdot\eta(t)+\sin(t-\pi)\cdot\eta(t-\pi) \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}+\frac{e^{-p\pi}}{p^2+1}=\frac{1+e^{-p\pi}}{p^2+1}.$$

• **19**. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ -1, & 0<t<a;\\ \dfrac{t-2a}{a}, & a<t<3a;\\ 1, & t>3a\end{cases} =$



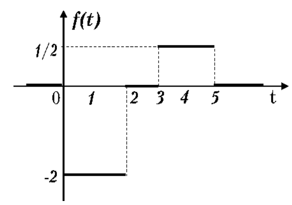
$$=[-\eta(t)+\eta(t-a)]+\frac{t-2a}{a}[\eta(t-a)-\eta(t-3a)]+\eta(t-3a)=$$
$$=-\eta(t)+\eta(t-a)+\frac{t-2a}{a}\eta(t-a)-\frac{t-2a}{a}\eta(t-3a)+\eta(t-3a)=$$
$$=-\eta(t)+\eta(t-a)+\frac{t-a}{a}\eta(t-a)-\eta(t-a)-\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a)-$$
$$-\eta(t-3a)+\eta(t-3a)=-\eta(t)+\frac{t-a}{a}\eta(t-a)-\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a) \risingdotseq$$
$$\risingdotseq \; -\frac{1}{p}+\frac{1}{ap^2}e^{-ap}+\frac{1}{ap^2}e^{-3ap}.$$

• **20**. $$f(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ -1, & 0<t<a;\\ \dfrac{t-2a}{a}, & a<t<2a;\\ \dfrac{2a-t}{a}, & 2a<t<3a;\\ -1, & t>3a\end{cases} =$$



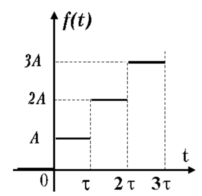
$$= [-\eta(t)+\eta(t-a)]+\frac{t-2a}{a}[\eta(t-a)-\eta(t-2a)]+$$
$$+\frac{2a-t}{a}[\eta(t-2a)-\eta(t-3a)]-\eta(t-3a)=$$
$$=-\eta(t)+\frac{t-a}{a}\eta(t-a)-2\frac{t-2a}{a}\eta(t-2a)+\frac{t-3a}{a}\eta(t-3a)\risingdotseq$$
$$\risingdotseq\quad -\frac{1}{p}+\frac{1}{ap^2}e^{-ap}-\frac{2}{ap^2}e^{-2ap}+\frac{1}{ap^2}e^{-3ap}.$$

• **21**. Найти изображение функции, заданной графически.



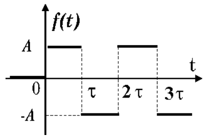
Запишем функцию следующим образом
$$f(t)=-2[\eta(t)-\eta(t-2)]+\frac{1}{2}[\eta(t-3)-\eta(t-5)]=$$
$$-2\eta(t)+2\eta(t-2)+\frac{1}{2}\eta(t-3)-\frac{1}{2}\eta(t-5)\risingdotseq\ -\frac{2}{p}+\frac{2}{p}e^{-2p}+\frac{1}{2p}e^{-3p}-\frac{1}{2p}e^{-5p}.$$

• **22**. Найти изображение функции, заданной графически.



Запишем функцию следующим образом
$$f(t)=A[\eta(t)+\eta(t-\tau)+\eta(t-2\tau)+\eta(t-3\tau)+\ldots]\risingdotseq$$
$$\frac{A}{p}\left(1+e^{-p\tau}+e^{-2p\tau}+e^{-3p\tau}+\ldots\right)=\frac{A}{p}\cdot\frac{1}{1-e^{-p\tau}}.$$

• **23**. Найти изображение периодической функции, заданной графически.



$$f(t)=A[\eta(t)-2\eta(t-\tau)+2\eta(t-2\tau)-2\eta(t-3\tau)+\ldots]\risingdotseq\frac{A}{p}\cdot\frac{1-e^{-p\tau}}{1+e^{-p\tau}}.$$

4.1.4. Нахождение оригинала по изображению

Как уже было отмечено выше, изображениями элементарных непрерывных функций всегда служат правильные рациональные дроби. Справедливо и обратное утверждение: оригиналами правильных рациональных дробей всегда являются непрерывные элементарные функции. Для нахождения оригинала в этих случаях всегда можно использовать разложение правильной рациональной дроби на простейшие слагаемые, что является основным и универсальным способом приведения изображения к набору простейших дробей, оригиналы которых можно найти по таблице.
В некоторых случаях, объем вычислений может уменьшить использование свойств операционного исчисления (преобразования Лапласа), что было проиллюстрировано выше.

Задача. Найти оригиналы по заданным изображениям.

- **1**. $\dfrac{p+4}{p^2+9} = \dfrac{p}{p^2+9} + \dfrac{4}{p^2+9} = \dfrac{p}{p^2+9} + 4 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3}{p^2+9} \risingdotseq \cos 3t + \dfrac{4}{3} \sin 3t.$
- **2**. $\dfrac{p+1}{p^2+4p+8} = \dfrac{p+1}{(p+2)^2+4} = \dfrac{(p+2)-1}{(p+2)^2+4} =$

  $= \dfrac{p+2}{(p+2)^2+4} - \dfrac{1}{(p+2)^2+4} \risingdotseq e^{-2t} \cos 3t + \dfrac{1}{2} e^{-2t} \sin 2t.$
- **3**. $\dfrac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)}.$

Разложим дробь на простейшие слагаемые

$$\frac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{p-3} + \frac{D}{p+3}.$$

$$p^2-5p+8 = A(p-2)(p-3)(p+3) + Bp(p-3)(p+3) +$$
$$+Cp(p-2)(p+3) + Dp(p-2)(p-3).$$

Подставляем поочередно:

$$p = 0 \;\Rightarrow\; 8 = 18A \;\Rightarrow\; A = 4/9,$$
$$p = 2 \;\Rightarrow\; 2 = -10B \;\Rightarrow\; B = -1/5,$$
$$p = 3 \;\Rightarrow\; 2 = 18C \;\Rightarrow\; C = 1/9,$$
$$p = -3 \;\Rightarrow\; 32 = -90D \;\Rightarrow\; D = -16/45.$$

Окончательное разложение

$$\frac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)}=\frac{4/9}{p}+\frac{-1/5}{p-2}+\frac{1/9}{p-3}+\frac{-16/45}{p+3}.$$

Оригинал каждого слагаемого находим по таблице.

$$\frac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)}\risingdotseq\frac{4}{9}-\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{16}{45}e^{-3t}.$$

• **4**. $\dfrac{p}{p^3-1}=\dfrac{p}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}$.

Раскладываем дробь на простейшие слагаемые

$$\frac{p}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+p+1}.$$

$$p=A(p^2+p+1)+Bp(p-1)+C(p-1).$$

Подставляем поочередно:

$$p=1\ \Rightarrow\ 1=3A\ \Rightarrow\ A=1/3,$$

$$p=0\ \Rightarrow\ 0=A-C\ \Rightarrow\ C=1/3.$$

Уравниваем коэффициенты при p^2

$$p^2:\ \ 0=A+B\quad\Rightarrow\ B=-1/3.$$

Окончательное разложение

$$\frac{p}{(p-1)\left(p^2+p+1\right)}=\frac{1/3}{p-1}+\frac{-1/3\cdot p+1/3}{p^2+p+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{p-1}{p^2+p+1}\right).$$

Находим оригинал $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{p-1}{p^2+p+1}\right)=$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{p-1}{(p+1/2)^2+3/4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{(p+1/2)-3/2}{(p+1/2)^2+3/4}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{(p+1/2)}{(p+1/2)^2+3/4}+\frac{3/2}{(p+1/2)^2+3/4}\right)\risingdotseq$$

$$\risingdotseq\frac{1}{3}\left(e^t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot e^{-t/2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot e^{-t/2}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(e^t-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot e^{-t/2}+\sqrt{3}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot e^{-t/2}\right).$$

Приведем несколько примеров разложения дробей и соответствующих оригиналов.

1. $\dfrac{1}{p\,(p+a)}=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+a}\right)\risingdotseq\dfrac{1}{a}(1-e^{-at})$

2. $\dfrac{1}{(p+a)(p+b)}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{p+a}-\dfrac{1}{p+b}\right)\risingdotseq\dfrac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$

3. $\dfrac{1}{p^2\,(p+a)} = \dfrac{1}{a^2}\,\left(\dfrac{a}{p^2} - \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p+a}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{a^2}(a\,t - 1 + e^{-at})$

4. $\dfrac{1}{p\,(p+a)^2} = \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{a}{(p+a)^2} - \dfrac{1}{p+a}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{a^2}(1 + (at-1)e^{-at})$

5. $\dfrac{1}{p\,(p^2+\omega^2)} = \dfrac{1}{\omega^2}\,\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$

6. $\dfrac{1}{(p+a)\,(p^2+\omega^2)} = \dfrac{1}{a^2+\omega^2}\,\left(\dfrac{1}{p+a} - \dfrac{p-a}{p^2+\omega^2}\right) \risingdotseq$

$$\risingdotseq \dfrac{1}{a^2+\omega^2}(e^{-at} - \cos\omega t + \dfrac{a}{\omega}\sin\omega t)$$

7. $\dfrac{1}{p\,(p^2-\lambda^2)} = \dfrac{1}{\lambda^2}\,\left(\dfrac{p}{p^2-\lambda^2} - \dfrac{1}{p}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{\lambda^2}(\text{ch}\,\lambda t - 1)$

8. $\dfrac{1}{p^2\,(p^2+\omega^2)} = \dfrac{1}{\omega^2}\,\left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2+\omega^2}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{\omega^2}\left(t - \dfrac{1}{\omega}\sin\omega t\right)$

9. $\dfrac{1}{p^2\,(p^2-\lambda^2)} = \dfrac{1}{\lambda^2}\,\left(\dfrac{1}{p^2-\lambda^2} - \dfrac{1}{p^2}\right) \risingdotseq \dfrac{1}{\lambda^2}\left(\dfrac{1}{\lambda}\text{sh}\,\lambda t - t\right)$

10. $\dfrac{1}{(p^2+\omega_1^2)\,(p^2+\omega_2^2)} = \dfrac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\,\left(\dfrac{1}{p^2+\omega_1^2} - \dfrac{1}{p^2+\omega_2^2}\right) \risingdotseq$

$$\risingdotseq \dfrac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left(\dfrac{1}{\omega\,1}\,\sin\omega_1 t - \dfrac{1}{\omega\,2}\,\sin\omega_2 t\right)$$

Чтобы восстановить оригинал по заданному его изображению, содержащему множитель $e^{-p\tau}$, нужно найти оригинал без учета этого множителя, а затем заменить в полученной функции t на $t-\tau$.

• **5**. $\dfrac{5p+2}{p^2-9}\cdot e^{-4p} = \left(\dfrac{5p}{p^2-9} + \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{p^2-9}\right)\,e^{-4p} \risingdotseq 5\,\text{ch}\,3t_1 + \dfrac{2}{3}\,\text{sh}\,3t_1 =$

$$= |t_1 \text{ заменяем на } (t-4)| = 5\,\text{ch}\,3(t-4) + \dfrac{2}{3}\,\text{sh}\,3(t-4).$$

• **6**. $\dfrac{1-e^{-3p}}{p^2} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{e^{-3p}}{p^2} \risingdotseq t\,\eta(t) - (t-3)\,\eta(t-3) = \begin{cases} 0, & t<0, \\ t, & 0<t<3, \\ 3, & t>3. \end{cases}$

• **7**. $\dfrac{2p}{(p^2+4)^2}\,e^{-3p} = -\left(\dfrac{1}{p^2+4}\right)'\,e^{-3p} \risingdotseq$

$\risingdotseq \dfrac{1}{2}\,t_1\,\sin 2t_1 = |t_1 \text{ заменяем на } (t-3)| = \dfrac{1}{2}\,(t-3)\,\sin 2(t-3).$

• **8**. $\dfrac{1}{(p^2+1)\,(p^2+4)}\,e^{-p/2} = |\text{используем приведенную формулу 7}| =$
$= \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{p^2+1} - \dfrac{1}{p^2+4}\right)\,e^{-p/2} \risingdotseq \dfrac{1}{3}\left[\sin t_1 - \dfrac{1}{2}\sin 2t_1\right] =$
$= |t_1 \text{ заменяем на } (t-1/2)| = \dfrac{1}{3}\left[\sin(t-1/2) - \dfrac{1}{2}\sin 2(t-1/2)\right].$

4.2. Решение дифференциальных уравнений и систем

Операционный метод наиболее просто реализуется при решении линейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений.

4.2.1. Схема применения операционного метода

Схему применения операционного метода продемонстрируем на примере решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Пусть требуется решить задачу Коши для уравнения

$$\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\,x = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0,$$

где $a,\ b$ – постоянные числа.

1. Находим изображение левой части уравнения.
Предполагаем, что искомое решение уравнения $x(t)$ имеет своим изображением функцию $X(p)$, т.е. $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тогда, согласно свойству о дифференцировании оригинала и с учетом начальных условий, имеем:

$$\dot{x} \risingdotseq pX(p) - x_0, \quad \ddot{x} \risingdotseq p^2X(p) - px_0 - \dot{x}_0.$$

В итоге, левая часть уравнения перепишется в виде

$$\ddot{x} + a\,\dot{x} + b\,x \risingdotseq p^2X(p) - px_0 - \dot{x}_0 + a(pX(p) - x_0) + bX(p) =$$
$$= (p^2 + ap + b)X(p) - (p+a)x_0 - a\dot{x}_0.$$

2. Находим изображение правой части уравнения $f(t) \risingdotseq F(p)$.
Если левая часть уравнения, в общем всегда стандартна, то возможных видов правой части уравнений достаточно много (непрерывные, кусочно-непрерывные, периодические). Поэтому для получения изображения функции $f(t)$ используются как стандартные таблицы, так и

свойства преобразования Лапласа. Окончательно имеем "операторное (операционное)" уравнение

$$(p^2+ap+b)X(p)-(p+a)x_0-a\dot{x}_0=F(p),$$

решением которого будет

$$X(p)=\frac{F(p)+(p+a)x_0+a\dot{x}_0}{p^2+ap+b}.$$

3. Находим оригинал решения $x(t)$ по полученному изображению $X(p)$. Эта часть задачи является обычно самой трудоемкой и здесь особенно эффективно следует использовать как разложение дроби на простые слагаемые, так и приемы, которые опираются на свойства преобразования Лапласа.

4.2.2. Линейные дифференциальные уравнения

Задача. Решить уравнения операционным методом.

- **1**. $\dot{x}+4x=0, \quad x(0)=3.$

Пусть изображение искомого решения $\quad x(t) \risingdotseq X(p).$

Тогда:

Изображение производной $\quad \dot{x} \risingdotseq pX(p)-x_0=pX(p)-3$

Операционное уравнение $pX(p)-3+4X(p)=0$, или $(p+4)X(p)=3$

Решение операционного уравнения $\quad X(p)=\dfrac{3}{p+4}.$

Соответствующий полученному изображению оригинал, т.е. решение уравнения, находим по таблице: $\quad x(t)=3e^{-4t}.$

- **2**. $\ddot{x}+4x=0, \quad x(0)=2,\ \dot{x}(0)=0.$

Если $x(t) \risingdotseq X(p)$, то $\quad \ddot{x} \risingdotseq p^2X(p)-px(0)-\dot{x}(0)=p^2X(p)-2p.$

Операционное уравнение $\quad X(p)(p^2+4)=2p.$

Его решение $\quad X(p)=2\dfrac{p}{p^2+4}.$

Оригинал – частное решение находим по таблице $\quad x(t)=2\cos 2t.$

• **3**. $\dot{x} - 5x = 2t, \quad x(0) = 1.$

Пусть $\quad x(t) \risingdotseq X(p), \qquad$ тогда: $\dot{x} \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$

Изображение правой части $\quad 2t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2}.$

Операторное уравнение $\qquad X(p)(p-5) = \dfrac{2}{p^2} + 1.$

Его решение $\quad X(p) = \dfrac{2}{p^2(p-5)} + \dfrac{1}{p-5} = \dfrac{2+p^2}{p^2(p-5)}.$

Для восстановления оригинала воспользуемся разложением полученной дроби на простейшие слагаемые.

$$\frac{2+p^2}{p^2(p-5)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p-5}.$$

Приводим к общему знаменателю и уравниваем числители дробей

$$2 + p^2 = A(p-5) + Bp(p-5) + Cp^2.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов полагаем в полученном уравнении поочередно:

$$\begin{aligned} p = 5 \ &\Rightarrow\ 2 + 25 = 25C \ \Rightarrow\ C = 27/25, \\ p = 0 \ &\Rightarrow\ 2 + 0 = -5A \ \Rightarrow\ A = -2/5, \\ p = 1 \ &\Rightarrow\ 3 = -4A - 4B + C \ \Rightarrow\ B = -2/25. \end{aligned}$$

Разложение изображения $\dfrac{2+p^2}{p^2(p-5)} = -\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{2}{25}\dfrac{1}{p} + \dfrac{27}{25}\dfrac{1}{p-5}.$

Оригинал – решение : $\quad x(t) = -\dfrac{2}{5}\,t - \dfrac{2}{25} + \dfrac{27}{25}e^{5t}.$

• **4**. $\ddot{x} + 4\dot{x} = 1 - t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Имеем: $x(t) \risingdotseq X(p), \quad \dot{x} \risingdotseq pX(p) - x(0) = p\,X(p),$

$\ddot{x}(t) \risingdotseq p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) = p^2X(p).$

Изображение правой части $\quad 1 - t \risingdotseq \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2}.$

Операционное уравнение

$$p^2X(p) + 4\,pX(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \qquad X(p)(p^2 + 4\,p) = \frac{p-1}{p^2}.$$

Его решение $\qquad X(p) = \dfrac{p-1}{p^2(p^2+4p)} = \dfrac{p-1}{p^3(p+4)}.$

Разложим дробь на простейшие:
$$\frac{p-1}{p^3(p+4)}=\frac{A}{p^3}+\frac{B}{p^2}+\frac{C}{p}+\frac{D}{p+4}.$$
Приводим дробь к общему знаменателю и уравняем числители
$$p-1=A(p+4)+Bp(p+4)+Cp^2(p+4)+Dp^3.$$
Подставим вместо p следующие значения

$p=0 \;\Rightarrow\; -1=4A \;\Rightarrow\; A=-1/4,$

$p=-4 \;\Rightarrow\; -5=-64D \;\Rightarrow\; D=5/64.$

Уравнивая коэффициенты

при $p^3 \;\Rightarrow\; 0=C+D \;\Rightarrow\; C=-D=-5/64,$

при $p^2 \;\Rightarrow\; 0=B+4C \;\Rightarrow\; B=-4C=20/64=5/16,$

при $p \;\Rightarrow\; 1=A+4B \;\Rightarrow\; A=1-4B=-1/4,$

получим окончательное разложение
$$\frac{p-1}{p^3(p+4)}=-\frac{1/4}{p^3}+\frac{5/16}{p^2}-\frac{5/64}{p}+\frac{5/64}{p+4},$$
и ответ: $x(t)=-\dfrac{1}{8}t^2+\dfrac{5}{16}t-\dfrac{5}{64}+\dfrac{5}{64}e^{-4t}.$

- **5**. $\ddot{x}-9x=e^{2t}-4,\quad x(0)=0,\quad \dot{x}(0)=1.$

$$\ddot{x}(t)\risingdotseq p^2X(p)-px(0)-\dot{x}(0)=p^2X(p)-1,\qquad e^{2t}-4\risingdotseq\frac{1}{p-2}-\frac{4}{p}.$$

Операционное уравнение $p^2X(p)-1-9X(p)=\dfrac{1}{p-2}-\dfrac{4}{p}.$

Его решение
$$X(p)=\frac{1}{p^2-9}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{4}{p}+1\right)=\frac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)}.$$

Разложим дробь на простейшие слагаемые (подробное решение приведено ранее в примере 3 п.7.1.4.)
$$\frac{p^2-5p+8}{p(p-2)(p-3)(p+3)}=\frac{4/9}{p}+\frac{-1/5}{p-2}+\frac{1/9}{p-3}+\frac{-16/45}{p+3}.$$

Частное решение уравнения:
$$x(t)=\frac{4}{9}-\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{1}{9}e^{3t}-\frac{16}{45}e^{-3t}.$$

- **6**. $\ddot{x} - 6\dot{x} + 13x = e^{-t}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Так как $e^{-t} \risingdotseq \dfrac{1}{p+1}$ и, в силу нулевых начальных условий, получаем операционное уравнение

$$(p^2 - 6p + 13)X(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Его решение

$$X(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2-6p+13)} = \frac{A}{p+1} + \frac{Bp+C}{p^2-6p+13}.$$

$$1 = A(p^2 - 6p + 13) + (Bp + C)(p + 1).$$

При $p = -1 \;\Rightarrow\; 1 = 20A \;\Rightarrow\; A = 1/20.$

Уравниваем коэффициенты при степенях

$p^2 \;\Rightarrow\; 0 = A + B \;\Rightarrow\; B = -A = -1/20,$

$p^0 \;\Rightarrow\; 1 = 13A + C \;\Rightarrow\; C = 1 - 13A = 7/20.$

$$X(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2-6p+13)} = \frac{1/20}{p+1} + \frac{-1/20p + 7/20}{p^2-6p+13} =$$

$$= \frac{1}{20(p+1)} - \frac{1}{20}\frac{p-7}{(p-3)^2+4} = \frac{1}{20(p+1)} - \frac{1}{20}\frac{p-3-4}{(p-3)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{20(p+1)} - \frac{1}{20}\frac{p-3}{(p-3)^2+4} + \frac{1}{20}\frac{4}{(p-3)^2+4}.$$

Находим оригинал, используя таблицу

$$x(t) = \frac{1}{20}e^{-t} - \frac{1}{20}e^{3t}\cos 2t + \frac{1}{10}e^{3t}\sin 2t.$$

- **7**. Найти общее решение уравнения

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = \operatorname{sh} t.$$

Здесь начальные условия не даны и, поэтому, выберем их произвольно и обозначим $x(0) = C_1, \quad \dot{x}(0) = C_2.$

Операционное уравнение с учетом введенных начальных условий и изображения правой части уравнения $\operatorname{sh} t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2-1}$ имеет вид

$$p^2X(p) - C_1p - C_2 + 4pX(p) - 4C_1 + 8X(p) = \frac{1}{p^2-1},$$

$$X(p)(p^2 + 4p + 8) = C_1p + (4C_1 + C_2) + \frac{1}{p^2-1}.$$

Его решение $\quad X(p) = \dfrac{C_1p + 4C_1 + C_2}{p^2+4p+8} + \dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)}.$

Оригинал для полученного изображения будем искать по частям.

$$\frac{C_1p+4C_1+C_2}{p^2+4p+8}=\frac{C_1p+4C_1+C_2}{(p+2)^2+4}=\frac{C_1(p+2)-2C_1+4C_1+C_2}{(p+2)^2+4}=$$
$$=\frac{C_1(p+2)}{(p+2)^2+4}+\frac{2C_1+C_2}{(p+2)^2+4}\risingdotseq C_1e^{-2t}\cos 2t+\frac{2C_1+C_2}{2}e^{-2t}\sin 2t.$$

Оригинал для второго слагаемого можно найти, например,

1) используя формулу изображения свертки функций:

так как $\dfrac{1}{p^2-1}\risingdotseq \operatorname{sh} t,\quad \dfrac{1}{p^2+4p+8}=\dfrac{1}{(p+2)^2+4}\risingdotseq \dfrac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t,$

то $\dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)}\risingdotseq \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^t e^{-2\tau}\sin 2\tau\,\operatorname{sh}(t-\tau)\,d\tau.$

2) Можно воспользоваться разложением дроби на простые слагаемые $\dfrac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)}=\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p+1}+\dfrac{Cp+D}{p^2+4p+8}.$

3) Применим вторую теорему разложения:

$$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)}\risingdotseq \sum \operatorname{res}[F(p),p_k]e^{p_kt},$$

где p_k- полюсы функции $(p_{1,2}=\pm1,\ p_{3,4}=-2\pm 2i)$.

Так как подробное решение приведено ранее при иллюстрации свойств операционного исчисления (см. п.7.1.2. теорема разложения), то запишем окончательный результат

$$\frac{1}{(p^2-1)(p^2+4p+8)}\risingdotseq \frac{1}{26}e^t-\frac{1}{10}e^{-t}+\frac{4}{65}e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{130}e^{-2t}\sin 2t.$$

Окончательно общее решение исходного уравнения запишется:

$$x(t)=C_1e^{-2t}\cos 2t+\frac{2C_1+C_2}{2}e^{-2t}\sin 2t+\frac{1}{26}e^t-\frac{1}{10}e^{-t}+$$
$$+\frac{4}{65}e^{-2t}\cos 2t-\frac{1}{130}e^{-2t}\sin 2t.$$

Или:

$$x(t)=\overline{C_1}e^{-2t}\cos 2t+\overline{C_2}e^{-2t}\cos 2t+\frac{e^t}{26}-\frac{e^{-t}}{10},$$

где константы $\overline{C_1}=C_1+4/65,\ \overline{C_2}=(2C_1+C_2)/2-1/130.$

- **8**. $\ddot{x} + 9x = \cos 3t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$

Операционное уравнение с учетом начальных условий и правой части уравнения и его решение:

$$p^2 X(p) - 1 + 9X(p) = \frac{p}{p^2+9}, \qquad X(p) = \frac{p}{(p^2+9)^2} + \frac{1}{p^2+9}.$$

Так как $\dfrac{p}{(p^2+9)^2} = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p^2+9}\right)' \risingdotseq \dfrac{1}{6}\, t\, \sin 3t, \qquad \dfrac{1}{p^2+9} \risingdotseq \dfrac{1}{3}\, \sin 3t,$

получаем ответ: $\qquad x(t) = \dfrac{1}{6}\, t\, \sin 3t + \dfrac{1}{3}\, \sin 3t = \dfrac{1}{6}\,(t+2)\, \sin 3t.$

- **9**. $\ddot{x} + 4x = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 < t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases}, \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Изображение левой части уравнения с учетом нулевых начальных условий $\ddot{x} + 4x \risingdotseq (p^2+4)X(p)$.

Изображение правой части получим с учетом свойства запаздывания оригинала $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 < t < \tau \\ 0, & t > \tau \end{cases} = 2\eta(t) - 2\eta(t-\tau) \risingdotseq \dfrac{2}{p} - \dfrac{2e^{-\tau p}}{p}.$

Операционное уравнение: $\quad (p^2+4)X(p) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{2e^{-\tau p}}{p}.$

Его решение: $\; X(p) = \dfrac{2}{p(p^2+4)} - \dfrac{2e^{-p\tau}}{p(p^2+4)}.$

Так как $\dfrac{2}{p^2+4} \risingdotseq \sin 2t$, то по свойству интегрирования оригинала (деление изображения на p соответствует интегрированию оригинала), имеем:

$$\frac{2}{p(p^2+4)} \risingdotseq \int\limits_0^t \sin 2t\, dt = -\frac{1}{2}\cos 2t\Big|_0^t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t).$$

Второе слагаемое отличается от первого лишь множителем $e^{-p\tau}$, поэтому воспользуемся свойством запаздывания оригинала (умножение изображения на $e^{-p\,\tau}$ означает замену в оригинале t на $(t-\tau)$)

$$\frac{2e^{-p\,\tau}}{p(p^2+4)} \risingdotseq \frac{1}{2}(\eta(t-\tau) - \cos 2(t-\tau)).$$

Итак, начиная с момента $t = \tau$, решением уравнения будет

$$x(t)=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)-\frac{1}{2}(1-\cos 2(t-\tau))=\frac{1}{2}(\cos 2(t-\tau)-\cos 2t).$$

Окончательно, ответ: $$x(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\cos 2t), & 0<t<\tau,\\ \frac{1}{2}(\cos 2(t-\tau)-\cos 2t), & t>\tau.\end{cases}$$

4.2.3. Линейные дифференциальные системы

Схема применения операционного метода при решении систем линейных уравнений, практически, такая же, как и для линейных уравнений.

Решим задачу Коши для следующих нормальных систем линейных однородных уравнений.

- **1**. $\begin{cases}\dot{x}=4x-13y, & x(0)=1,\\ \dot{y}=x, & y(0)=0.\end{cases}$

Пусть изображения искомых функций: $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$.
С учётом начальных условий имеем операционную систему

$$\begin{cases}p\,X(p)-1=4X(p)-13Y(p),\\ p\,Y(p)=X(p).\end{cases}$$

Подставляем из второго уравнения $Y(p)=\dfrac{1}{p}X(p)$ в первое:

$$p\,X(p)-1=4X(p)-\frac{13}{p}X(p)\ \Rightarrow\ (p^2-4p+13)X(p)=p\Rightarrow$$

$$X(p)=\frac{p}{p^2-4p+13}=\frac{p}{(p-2)^2+9}=\frac{p-2}{(p-2)^2+9}+\frac{2}{(p-2)^2+9}.$$

$$Y(p)=\frac{X(p)}{p}=\frac{1}{(p-2)^2+9}.$$

Решение системы: $$\begin{cases}x(t)=e^{2t}\cos 3t+\frac{2}{3}e^{2t}\sin 3t,\\ y(t)=\frac{1}{3}e^{2t}\sin 3t.\end{cases}$$

- **2**. $\begin{cases}\dot{x}=-8x+4y, & x(0)=-1,\\ \dot{y}=3x-4y, & y(0)=0.\end{cases}$

С учётом начальных условий имеем операционную систему:

$$\begin{cases} p\,X(p)+1=-8\,X(p)+4\,Y(p) \\ p\,Y(p)=3\,X(p)-4\,Y(p) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p)\,(p+8)\;-\;4\,Y(p)=-1, \\ -3\,X(p)+\;Y(p)\,(p+4)=\;0. \end{cases}$$

Умножим 1-е уравнение на $(p+4)$, а 2-е на 4 и сложим их.

Получим: $X(p)((p+8)(p+4)-12)=-(p+4)\;\Rightarrow$

$$X(p)=-\frac{p+4}{p^2+12p+20}=-\frac{p+2}{(p+6)^2-16}.$$

$$Y(p)=\frac{3X(p)}{p+4}=-\frac{3}{(p+6)^2-16}.$$

Находим оригиналы:

$$\frac{p+2}{(p+6)^2-16}=\frac{p+6}{(p+6)^2-16}-\frac{4}{(p+6)^2-16}\risingdotseq e^{-6t}\text{ch}\,4t-e^{-6t}\text{sh}\,4t.$$

$$\frac{3}{(p+6)^2-16}=\frac{3}{4}\frac{4}{(p+6)^2-16}\risingdotseq\frac{3}{4}e^{-6t}\text{sh}\,4t.$$

Окончательно, решение: $\begin{cases} x(t)=-e^{-6t}\text{ch}\,4t+e^{-6t}\text{sh}\,4t, \\ y(t)=-\frac{3}{4}e^{-6t}\text{sh}\,4t. \end{cases}$

- **3**. $\begin{cases} \dot x=3x+8y, & x(0)=0, \\ \dot y=-2x-5y, & y(0)=-2. \end{cases}$

С учётом начальных условий имеем операционную систему

$$\begin{cases} p\,X(p)=3\,X(p)+8\,Y(p), \\ p\,Y(p)\;+2=-2\,X(p)-5\,Y(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p)\,(p-3)-8\,Y(p)=0, \\ 2\,X(p)+Y(p)(p+5)=-2. \end{cases}$$

Умножим 1-е уравнение на $(p+5)$, а 2-е на 8 и сложим их.

$$X(p)((p-3)(p+5)+16)=-16\;\Rightarrow X(p)(p^2+2p+1)=-16\;\Rightarrow$$

$$X(p)(p+1)^2=-16,\Rightarrow X(p)=-\frac{16}{(p+1)^2}.$$

Тогда из 1-го уравнения системы $Y(p)=\dfrac{p-3}{8}X(p)=-\dfrac{2\,(p-3)}{(p+1)^2}$.

Находим оригиналы: $\dfrac{16}{(p+1)^2}\risingdotseq 16\,t\,e^{-t}$

$$\frac{2(p-3)}{(p+1)^2}=\frac{2(p+1)-8}{(p+1)^2}=\frac{2}{p+1}-\frac{8}{(p+1)^2}\risingdotseq 2e^{-t}-8\,t\,e^{-t}.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t)=-16\,t\,e^{-t}, \\ y(t)=-2e^{-t}+8\,t\,e^{-t}. \end{cases}$

- **4.** $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y + e^t, & x(0) = 0, \\ \dot{y} = x - 6y, & y(0) = 0. \end{cases}$

Данная система является неоднородной. С учётом начальных условий и изображения функции $e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}$ имеем :

$$\begin{cases} p\,X(p) = -4X(p) + 2Y(p) + \dfrac{1}{p-1}, \\ p\,Y(p) = X(p) - 6Y(p). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(p)(p+4) - 2Y(p) = \dfrac{1}{p-1}, \\ X(p) - (p+6)Y(p) = 0. \end{cases}$$

Умножим 1-е уравнение на $(p+6)$, а 2-е на (-2) и сложим их.

$$X(p)((p+6)(p+4) - 2) = \frac{p+6}{p-1}, \quad X(p)(p^2+10p+22) = \frac{p+6}{p-1} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad X(p) = \frac{p+6}{(p^2+10p+22)(p-1)}.$$

Из 1-го уравнения выражаем $Y(p) = \dfrac{1}{p+6}X(p) = \dfrac{1}{(p^2+10p+22)(p-1)}$.

Находим оригиналы:

$$\frac{p+6}{(p^2+10p+22)(p-1)} = \frac{Ap+B}{p^2+10p+22} + \frac{C}{p-1} =$$

$$= \frac{-7/33p - 4/3}{p^2+10p+22} + \frac{7/33}{p-1} = -\frac{7}{33}\frac{p+5}{(p+5)^2-3} - \frac{3/11}{(p+5)^2-3} + \frac{7/33}{p-1} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \; -\frac{7}{33}\, e^{-5t}\mathrm{ch}\sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{11}\, e^{-5t}\mathrm{sh}\sqrt{3}t + \frac{7}{33}\, e^t.$$

$$\frac{1}{(p^2+10p+22)(p-1)} = \frac{Ap+B}{p^2+10p+22} + \frac{C}{p-1} =$$

$$= \frac{-1/33p - 1/3}{p^2+10p+22} + \frac{1/33}{p-1} = -\frac{1}{33}\frac{p+5}{(p+5)^2-3} - \frac{2/11}{(p+5)^2-3} + \frac{1/33}{p-1}$$

$$\risingdotseq \; -\frac{1}{33}\, e^{-5t}\mathrm{ch}\sqrt{3}t - \frac{2}{11\sqrt{3}}\, e^{-5t}\mathrm{sh}\sqrt{3}t + \frac{1}{33}\, e^t.$$

Ответ: $\begin{cases} x(t) = -\dfrac{7}{33}\, e^{-5t}\mathrm{ch}\sqrt{3}t - \dfrac{\sqrt{3}}{11}\, e^{-5t}\mathrm{sh}\sqrt{3}t + \dfrac{7}{33}\, e^t, \\ y(t) = -\dfrac{1}{33}\, e^{-5t}\mathrm{ch}\sqrt{3}t - \dfrac{2}{11\sqrt{3}}\, e^{-5t}\mathrm{sh}\sqrt{3}t + \dfrac{1}{33}\, e^t. \end{cases}$

4.2.4. Формула Дюамеля

В том случае, если правая часть дифференциального уравнения есть функция, изображение которой затруднительно найти, полезно воспользоваться приёмом, который основан на использовании так называемой формулы Дюамеля. Суть его состоит в том, что решение $x(t)$ задачи Коши с нулевыми начальными условиями

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = f(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

определяется формулой:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\dot{x}_1(t-\tau)\, d\tau,$$

или

$$x(t) = \int_0^t \dot{x}_1(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau,$$

где $x_1(t)$ есть решение уравнения $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2 x = 1$ при тех же нулевых начальных условиях.

• **1**. $\ddot{x} + x = \dfrac{1}{1+\cos^2 t}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Решаем вначале уравнение $\ddot{x} + x = 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Операционное уравнение $(p^2+1)X_1(p) = \dfrac{1}{p} \Rightarrow X_1(p) = \dfrac{1}{p(p^2+1)}.$

Так как нам нужна не сама функция $x_1(t)$, а её производная $\dot{x}_1(t)$

$\dot{x}_1(t) \risingdotseq pX_1(p) = \dfrac{1}{p^2+1} \risingdotseq \sin t.$

Следовательно, по формуле Дюамеля, имеем решение задачи

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+\cos^2\tau}\sin(t-\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\sin t\cos\tau - \cos t\sin\tau}{1+\cos^2\tau}d\tau =$$

$$= \sin t\int_0^t \frac{\cos\tau}{1+\cos^2\tau}d\tau - \cos t\int_0^t \frac{\sin\tau}{1+\cos^2\tau}d\tau =$$

$$= \sin t\int_0^t \frac{d(\sin\tau)}{2-\sin^2\tau}d\tau + \cos t\int_0^t \frac{d(\cos\tau)}{1+\cos^2\tau} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\sin t\cdot\ln\left|\frac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right| + \cos t\,\mathrm{arctg}\,(\cos t) - \frac{\pi}{4}\cos t.$$

- **2**. $\ddot{x} - \dot{x} = \dfrac{e^t}{1+e^t}, \quad x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = -2.$

Отметим, что ограничение на начальные условия несущественно, так как простой заменой переменной можно задачу с ненулевыми начальными условиями свести к задаче с нулевыми условиями. В рассматриваемом примере сделаем замену:

$$x(t) = z(t) + x(0) + \dot{x}(0)\cdot t.$$

$$x(t) = z(t) + 1 - 2t, \quad \Rightarrow \ \dot{x} = \dot{z} - 2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = \ddot{z}.$$

Имеем уравнение для новой функции

$$\ddot{z} - \dot{z} = \frac{e^t}{1+e^t} - 2, \qquad z(0) = \dot{z}(0) = 0.$$

Решаем вначале уравнение $\quad \ddot{z} - \dot{z} = 1, \quad z(0) = \dot{z}(0) = 0.$

Операционное уравнение: $\quad (p^2 - p)z_1(p) = \dfrac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad z_1(p) = \dfrac{1}{p(p^2-p)}.$

$$\dot{z_1}(t) \risingdotseq pz_1(p) = \frac{1}{p^2-p} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \risingdotseq e^t - 1.$$

Используем формулу Дюамеля:

$$z(t) = \int_0^t f(\tau)\dot{z_1}(t-\tau)d\tau = \int_0^t \left(\frac{e^\tau}{1+e^\tau} - 2\right)(e^{t-\tau} - 1)d\tau =$$

$$= \int_0^t \left(\frac{e^t}{1+e^\tau} - \frac{e^\tau}{1+e^\tau} - 2e^{t-\tau} + 2\right)d\tau =$$

$$= \left[e^t(\tau - \ln|1+e^\tau|) - \ln|1+e^\tau| + 2e^{t-\tau} + 2\tau\right]\Big|_0^t =$$

$$= t\ e^t - \ln\left|\frac{1+e^t}{2}\right|(e^t+1) + 2(1-e^t) + 2t.$$

Окончательно, решение уравнения

$$x(t) = z(t) + 1 - 2t = t\ e^t - \ln\left|\frac{1+e^t}{2}\right|(e^t+1) + 2(1-e^t) + 1.$$

Как уже отмечалось, формула Дюамеля используется, в основном тогда, когда затруднительно найти изображение правой части уравнения. Однако ее можно эффективно применять и для стандартных случаев.

Проиллюстрируем сказанное на примере.

- **3**. $\ddot{x} + x = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & 0 \le t \le \pi \\ t, & \pi < t \le 2\pi, \\ 0, & t > 2\pi, \end{cases} \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

Находим решение задачи $\ddot{x} + x = 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

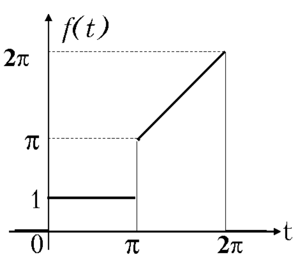
$$(p^2+1)X(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad pX(p) = \frac{1}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad \dot{x_1}(t) = \sin t.$$

Далее по формуле Дюамеля для каждого временного интервала:

для $0 < t < \pi : \quad f(t) = 1,$

$$x(t) = \int_0^t 1 \ \sin(t-\tau)d\tau = \cos(t-\tau) \ |_0^t = = 1 - \cos t.$$

Для $\pi \le t \le 2\pi : \quad f(t) = t,$



$$x(t) = \int_0^\pi 1 \ \sin(t-\tau)d\tau + \int_\pi^t \tau \ \sin(t-\tau)d\tau =$$

$$= \cos(t-\tau) \ |_0^\pi + (\tau\cos(t-\tau) + \sin(t-\tau)) \ |_\pi^t =$$

$$= \cos(t-\pi) - \cos t + t - \pi\cos(t-\pi) - \sin(t-\pi) =$$

$$= (\pi - 2)\cos t + t + \sin t.$$

Для $t > 2\pi : \quad f(t) = 0,$

$$x(t) = \int_0^\pi 1 \cdot \sin(t-\tau)d\tau + \int_\pi^{2\pi} \tau \cdot \sin(t-\tau)d\tau + \int_{2\pi}^t 0 \cdot \sin(t-\tau)d\tau =$$

$$= \cos(t-\tau) \ |_0^\pi + (\tau\cos(t-\tau) + \sin(t-\tau)) \ |_\pi^{2\pi} + 0 =$$

$$= \cos(t-\pi) - \cos t + 2\pi\cos(t-2\pi) + \sin(t-2\pi) - \pi\cos(t-\pi) - \sin(t-\pi) =$$

$$= -2\cos t + 2\pi\cos t + \sin t + \pi\cos t + 2\sin t =$$

$$= (3\pi - 2)\cos t + 2\sin t.$$

Ответ: $$x(t) = \begin{cases} 1 - \cos t, & 0 < t < \pi, \\ (\pi-2)\cos t + t + \sin t, & \pi \le t \le 2\pi, \\ (3\pi-2)\cos t + 2\sin t, & t > 2\pi. \end{cases}$$

СОДЕРЖАНИЕ