

ВАРИАНТ № 1

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 - 5y^2}{x^2 + y^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow -1}} \frac{\sqrt{x^2 + (y+1)^2} + 1 - 1}{x^2 + (y+1)^2}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \ln(e^x + e^y)$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \operatorname{arctg} xy$, $x = \frac{u}{v^2}$, $y = \frac{u^2}{v}$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = xy \ln(x+y)$, $x = t^2 + 1$, $y = \frac{1}{t^2}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f(x^2 + y^2, xy)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^2 x + x^2 y + y^2 z + 2x - y = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y - 1$ найти:

а) производную в точке $M(2,1)$ в направлении от точки M к точке $O(0,0)$;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $N(2,2)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $y^2 - 2z^2 - x^2 = 1$ в точке $M(1,2,1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = \ln(2x - y)$ в окрестности точки $M(1,1)$

13) Исследовать функцию $z = x + y - \sqrt{(x+y)}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0;0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2y^2$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

15) Вычислить приближённо $1,002 \cdot (2,003)^2$.

ВАРИАНТ № 2

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy + x^2}{x^3 + y^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{4 - x^2 - 2y^2} - 2}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{y^2}{4x}}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \frac{x+y}{x-y}$, $x = u^2 v^2$, $y = \frac{u^2}{v^2} - 1$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = x^2 y - y^3 x$, $x = te^{-t}$, $y = \frac{e^t}{e^t + 1}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f(x^2 y; -y^3 x)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 + 2y = 9$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 + 3x^2 z = 2xy$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $u = xyz$ найти:

а) производную в точке $M(5, 1, 2)$ в направлении от точки M к точке $N(0, 1, 1)$;

б) $grad u$ в точке $K(3, 1, 1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ в точке $M(1, 1, 2)$. В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление вектора $\vec{q} = \{1, -1, 1\}$.

11) Исследовать на экстремум функцию $z = \frac{x^3}{3} + 2y^2 - x + y$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = \sin(2\pi x - y)$ в окрестности точки $M(1, 0)$

13) Исследовать функцию $z = x - \sqrt{(x^2 + y^2)}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = (x^2 - y^2) \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$ в области, ограниченной кривыми $y^2 = x$, $x = 2$.

15) Вычислить приближённо $3,01 \cdot e^{0,01}$.

ВАРИАНТ № 3

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y^2}{2x^2 y^2 + (x - y)^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{\frac{3x^2}{x+y}}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \ln \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$, ($a, b - const$).

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = \sqrt{xy} + x$, $x = \log_2 t$, $y = 2^t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f(y \sin x; x \cos y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $0,5x^2 + 0,25y^2 = 1$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - xz - yz = 2$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = (1 + \log_y x)^3$ найти:

- а) производную в точке $M(e, e)$ в направлении от точки M к точке $N(3e, -2e)$;
- б) $grad z$ в точке $K(1, 2)$.

10) Найти касательные плоскости к поверхности $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$, которые были бы параллельны плоскости $2x + 2y - 3z = 0$.

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = \cos(x - y)$ в окрестности точки $M(\pi, 0)$.

13) Исследовать функцию $z = x - \sqrt{x^2 + y^2}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \frac{xy}{2} - \frac{x^2 y}{6} - \frac{xy^2}{8}$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$.

15) Вычислить приближённо значение функции $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ в точке $M(1,98; 1,01)$.

ВАРИАНТ № 4

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2} - 2}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = xe^y + ye^x$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $x = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$, $y = u + v$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $x = ctgt$, $y = \cos t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f(y + \sin x; x + \cos y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \ln(x + y)$ найти:

а) производную в точке $M(1, 2)$ в направлении от точки M к точке $N(-3, 6)$;

б) $grad z$ в точке $K(1, 1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 + y^2 + z^2 = 8$ в точке $M(1, -1, 2)$. В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление вектора $\vec{q} = \{0, 1, 1\}$?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2xy - 3y$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = e^{x^2 - y}$ в окрестности точки $M(1, 0)$.

13) Исследовать функцию $z = y - \sqrt{x^3 + y^4}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 5x^2 + 3xy + y^2 + 4$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x = -1$, $y = -1$, $x + y = 1$.

15) Вычислить приближённо значение функции $z = \frac{1}{2} \ln(y^2 - 2x^2)$ в точке $M(2, 1; 3, 02)$.

ВАРИАНТ № 5

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)x^2 y^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$ ($a - const$).

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \frac{y}{x}$, $x = u^v$, $y = u^2$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = t \operatorname{tg} t$, $y = \frac{1}{\sin t}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[\sin(x + y); \cos(x - y)]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $xyz = x + y + z$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ найти:

- а) производную в точке $M(-3, 1, 0)$ в направлении от точки M к точке $O(0, 0, 0)$;
б) $\operatorname{grad} u$ в точке $N(1, 2, 2)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $-3x^2 + y^2 + z^2 = 8$ в точке $M(0, -2, 2)$. В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление вектора $\vec{q} = \{0, 1, 1\}$.

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3axy$ ($a > 0$).

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = e^{x-y^2}$ в окрестности точки $M(0, 1)$.

13) Исследовать функцию $z = 2x - y^2 - \sqrt{x^2 + y^4}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ в круге $x^2 + y^2 \leq 25$.

15) Вычислить приближённо $\sin 59^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$.

ВАРИАНТ № 6

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{5xy}{x^3 + 3y^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = x \sin \frac{x}{y}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \ln \frac{x}{y}$, $x = \ln(e + uv)$, $y = 1 + uv$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$, $x = \sqrt{t}$, $y = \ln t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f\left[\frac{x}{y}; x^2 - y^2\right]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением

$2(x^2 + y^2) + 3(2y^2 + 1) + 8(2x - y) - 4x = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 - 3xyz = a^3$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ найти:

а) производную в точке $M(3; 1)$ в направлении от точки M к точке $N(6, 5)$;

б) $grad z$ в точке $K(2, 1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 + y^2 - 4z^2 = -12$ в точке $M(1, -1, 2)$. В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = \sqrt{x + y}$ в окрестности точки $M(2, 2)$.

13) Исследовать функцию $z = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^4}}, & x^2 + y^4 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^4 = 0 \end{cases}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в треугольнике, ограниченном прямыми $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 3$.

15) Вычислить приближённо $(5, 2)^2 + (3, 96)^2$.

ВАРИАНТ № 7

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x + y}{x - 2y}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x + 2y}{2x^2 - 3x + 4xy - 6y}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \cos xy^2$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = tg(x + y)$, $x = 2^{uv}$, $y = u - v$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = x^y$, $x = \arctg t$, $y = \ln t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x^2 + y^3; xy]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^2(x + y) = y^2(x - y)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $u = xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$ найти:

а) производную в точке $M(1; 2; -3)$ в направлении от точки M к точке $N(3, 3, -1)$;

б) $grad u$ в точке $K(1, 0, 1)$.

10) Записать уравнения касательной и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 9$ в точке $M(1, -2, -2)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy^2 + 3axy$ ($a > 0$).

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = \frac{x}{y}$ в окрестности точки $M(1, 1)$.

13) Исследовать функцию $z = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^4}}, & x^2 + y^4 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^4 = 0 \end{cases}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = xy$ в круге $x^2 + y^2 \leq 4$.

15) Вычислить приближённо $\sqrt{(3,01)^2 + (3,98)^2}$.

ВАРИАНТ № 8

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x-y}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sin yx}{x}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \sin(x^2 + xy)$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \ln(2x + 3y)$, $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x-y; xy]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $xy - \ln y = 1$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ найти:

а) производную в точке $M(1; 1; 2)$ в направлении, образующим с осями координат углы 60° , 45° и 60° соответственно;

б) *gradu* в точке $N(2, 1, 1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$ в точке $M_0(-1; 1; -1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = x^{yz}$ в окрестности точки $M(1, 1, 0)$.

13) Исследовать функцию $z = \sqrt{x^2 + y^4}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 4y^2$ в области, ограниченной кривыми $x^2 = y - 2$, $y = 6$.

15) Вычислить приближённо $\arcsin \frac{0,2}{1,3}$.

ВАРИАНТ № 9

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^4 - 4y^4}{x^4 + y^4}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{3x^2 + 2x - 3xy - 2y}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = xy^2 + \sin \frac{x}{y}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = 2^{\frac{x}{y}}$, $x = 3u - 4v$, $y = 2uv$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = \sin xy$, $x = t^2$, $y = e^{-t}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x^2 + y^3; xy]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $y - \sin x - \cos(x - y) = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \arctg(xy)$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла;

б) $grad z$ в точке $N(1,0)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$ в точке $M(1,1,1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = \ln(x - y + z)$ в окрестности точки $M(1,0,1)$.

13) Исследовать функцию $z = 5x - \sqrt{x^3 + y^4}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0;0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sqrt{2 - 2x^2 - y^2}$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

15) Вычислить приближённо $0,99^{1,01}$.

ВАРИАНТ № 10

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{4 + x^2 - y^2} - 2}{x - y}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = x^2 e^{\frac{y}{x}}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = 2x - y^2$, $x = \ln(u + v)$, $y = \ln u + \ln v$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = \sqrt[3]{y+1}$, $x = 3t + 1$, $y = \ln t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[\sin(x + y); x - y]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x \sin y - \cos y + \cos xy = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = 3x^4 - xy + y^3$ найти:

а) производную в точке $M(1, 2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60° , а с осью Oy – тупой угол;

б) $grad z$ в точке $N(2, 1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $y^2 - 2z^2 + x^2 = 3$ в точке $M(-2, 1, 1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = e^{x-y+z}$ в окрестности точки $M(1, 0, 1)$.

13) Исследовать функцию $z = 5x - x^3 + y^4$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4x$ в круге $x^2 + y^2 \leq 9$.

15) Вычислить приближённо $\sqrt{(1,02)^2 + (1,97)^3}$.

ВАРИАНТ № 11

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3y}{2x - y}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2 - \sqrt{xy + 4}}{3xy}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = x \cdot 2^{\frac{x}{y}}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \frac{1}{\sin xy}$, $x = \frac{1}{\sqrt{u+1}}$, $y = \frac{v}{u}$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$, $x = (t-1)^2$, $y = 4^{t \operatorname{tg} t}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x + y^2; x - y]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $\cos xy = x + 2y$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $\ln z = x + y + z - 1$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \ln(e^x + e^y)$ найти:

- а) производную в точке $O(0,0)$ в направлении вектора $\bar{e} = \{-3, 4\}$;
б) $\operatorname{grad} z$ в точке $N(1,1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2 - y^2 + z^2 = 2$ в точке $M(1,1,1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости XOY ?

11) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4.$$

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = \cos(x - y)$ в окрестности точки $M(\pi, 0)$.

13) Исследовать функцию $z = 5x - \sqrt{y^3}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0;0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

15) Вычислить приближённо значение функции $z = \frac{x+y}{x-y}$ в точке $M(2,04; 2,95)$.

ВАРИАНТ № 12

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2(1-y)}{x^2+y^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3(1+y)}{x^2+y^2}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \ln \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}$
($a - \text{const}$).

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = \sqrt{u} + v$, $y = uv$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = \arcsin \frac{y}{x}$, $x = 3^{-t}$, $y = t^3$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x^2 - y^2; xy]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $2^x + 2^y = 2^{x+y}$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 + xz + y - 2x = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ найти:

а) производную в точке $O(0,0,0)$ в направлении вектора $\vec{e} = \{1, -2, 3\}$;

б) $\text{grad} u$ в точке $O(0,0,0)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 9$ в точке $M(1,0,2)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = xy - x^2y - xy^2$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = \sin(x - y)$ в окрестности точки $M(\pi, 0)$.

13) Исследовать функцию $z = y - \sqrt{yx^3}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0;0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sqrt{3 - x^2 - 2y^2}$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

15) Вычислить приближённо $\sqrt[5]{1,002} \cdot \sqrt[3]{7,995}$.

ВАРИАНТ № 13

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x-y}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3 - \sqrt{xy+9}}{xy}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \ln(x + e^y)$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = y^x$, $x = 3u^2 + 1$, $y = u^3 + v^3$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = e^{x^2y}$, $x = \lg t$, $y = \frac{1}{t^3}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x + y^2; \frac{x}{y}]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x - y = \arcsin x - \arcsin y$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ найти:

- а) производную в точке $M(1,2)$ в направлении от точки M к точке $N(2,0)$;
б) $grad z$ в точке $K(2,2)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 10y + 2z^2 = 2$ в точке $M(2,1,2)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = 6x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = x^3y - yz^2 + xyz$ в окрестности точки $M(1,1,1)$.

13) Исследовать функцию $z = x + y - \sqrt{y^3 + x^3}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0;0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 + 2xy - 3x^2 + x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

15) Вычислить приближённо $0,97^{1,05}$.

ВАРИАНТ № 14

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{5xy}{3x^2 + y^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = ye^{\frac{y}{x}}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \left(\frac{x}{y}\right)^2$, $x = \sin(2u + v)$, $y = \cos(u + 2v)$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = 2^{\frac{x}{y}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $y = \arctg \sqrt{t}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[xy^2; \frac{x^2}{y}]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ зада на неявно уравнением $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^3 + 2y^3 + z^3 - 2xyz - 2y + 8 = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \sin(x^2 + y^2)$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении от точки M к точке $N(3,7)$;

б) $grad z$ в точке $K\left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ в точке $M(1, 1, 3)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = x^2yz - xyz^2 + xy^2z$ в окрестности точки $M(1,1,1)$.

13) Исследовать функцию $z = \begin{cases} \frac{x+y}{y^3+x^3}, & y^3+x^3 \neq 0 \\ 0, & y^3+x^3 = 0 \end{cases}$ на непрерывность и дифферен-

цируемость в точке $M(0;0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ в области $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

15) Вычислить приближённо значение функции $z = \sqrt{x^3 + y^3}$ в точке $M(1,02; 1,97)$.

ВАРИАНТ № 15

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 2}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2x - xy - 2y}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \ln \sqrt{x^2 + y}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = x^3 + y$, $x = e^{u-v}$, $y = e^{u+v}$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = \frac{x}{y^2}$, $x = \cos \frac{1}{t}$, $y = \frac{1}{\cos t}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[\ln(x+y); x-y]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^2 - 2xy + 1 = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $xz^5 + y^2z - x^3 = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении от точки M к точке $N(2,2)$;

б) $grad z$ в точке $K(3,4)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0$ в точке $M(1,1,2)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = x^3 - z^3 + xy^2$ в окрестности точки $M(1,1,1)$.

13) Исследовать функцию $z = \begin{cases} \frac{x+y}{\sqrt[3]{y^3+x^3}}, & y^3+x^3 \neq 0 \\ 0, & y^3+x^3 = 0 \end{cases}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0;0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в квадрате $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

15) Вычислить приближённо $\sqrt{(2,98)^2 + (4,01)^2}$.

ВАРИАНТ № 16

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)xy}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{1 + x^2 y^2} - 1}{x^2 + y^2}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = y^{2x}$, $x = u \cdot v$, $y = \frac{v}{u}$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = \operatorname{arctg} \frac{1}{xy}$, $x = \sqrt[3]{t}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x + y^2; x^2 - y] + \sin xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $y = 1 + xe^y$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x - yz + e^z = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ найти:

а) производную в точке $M(3, 4)$ в направлении радиус-вектора точки M ;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 2z = 2$ в точке $M(-2, 3, 0)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + xy^2 - 16x$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = \ln(x^3 y^3)$ в окрестности точки $M(1, 1)$.

13) Исследовать функцию $z = \begin{cases} e^{-\frac{x+y}{y^3+x^3}}, & y^3 + x^3 \neq 0 \\ 0, & y^3 + x^3 = 0 \end{cases}$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

15) Вычислить приближённо $(1, 1)^{3,97}$.

ВАРИАНТ № 17

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3x - y + 2x^2 + y^2}{x + y}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 - (y - 3)^2 + 1} - 1}{x^2 - (y - 3)^2}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \sqrt[3]{x^3 + y^2}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \frac{x}{y}$, $x = u^2 + v^2$, $y = u \cdot v$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[e^{x+y}; x - y] + e^{x+y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $a^2(x^4 + y^4) - x^3 y^2 = 9a^6$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x + y + z = e^z$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ найти:

а) производную в точке $O(0,0)$ в направлении от точки M к точке $N(3,4)$;

б) $grad z$ в точке $O(0,0)$.

10) Записать уравнения касательной и нормали к поверхности $2x^2 - 2y^2 + 7z^2 = -3$ в точке $M(4,7,3)$. Существует ли на поверхности точка, в которой касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости XOZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^4$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = e^{x^2 + y}$ в окрестности точки $M(1,1)$.

13) Исследовать функцию $z = 3x - 2y + x^2 - xy$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0;0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 3y^2 + y$ в замкнутой области, ограниченной треугольником с вершинами в точках $A(1,0)$, $B(0,0)$ и $C(0,1)$.

15) Вычислить приближённо значение функции $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ в точке $M(1,01; 1,03)$.

ВАРИАНТ № 18

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + 1 - 1}{x^2 + (y-1)^2}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = x^2 + y^3$, $x = 2u + 4v^3$, $y = 3u^2 + v$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = e^{x-2y}$, $x = \sin^2 t$, $y = t^3$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x + y^2; x^2 - y] + \sin xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^4 + y^4 = 2x^2y^2$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $e^z - xyz - 1 = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ найти:

а) производную в точке $M(1, 3)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{1, -2\}$;

б) $\text{grad} z$ в точке $N(1, 0)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2 - 2y^2 - z^2 = 2$ в точке $M(-2, 1, 2)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 - x$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = e^{x+y^2}$ в окрестности точки $M(0, 1)$.

13) Исследовать функцию $z = -2y + y^2 - xy$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x - 2y - 3$ в области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

15) Вычислить приближённо значение функции $z = 1 + \sqrt{y + x^2}$ в точке $M(0, 99; 0, 02)$.

ВАРИАНТ № 19

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3xy}{x^2 + y^2}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 2}} \left(1 + \frac{2y}{x}\right)^x$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = y \cos \frac{2x}{y}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = x^3 - y^3$, $x = u \cdot v$, $y = u^2 + v^2$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ ($r - \text{const}$); $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f\left[\frac{x}{y}; x^2 - y^2\right] + \ln(x - y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $y^3 - 3y + 2x = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = 3yx^2$ найти:

а) производную в точке $M(-9, 12)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла;

б) $\text{grad} z$ в точке $M(-9, 12)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$ в точке $M(1, 1, 1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль на поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - 2xy + y^4$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = x^4 + y^3 + z^2xy + x^2y^2z^2$ в окрестности точки $M(1, 1, 0)$.

13) Исследовать функцию $z = 3x - 2y - 2z + x^2 - xy$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0; 0; 0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в квадрате $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$.

15) Вычислить приближённо $2,003^2 \cdot 3,998^3$.

ВАРИАНТ № 20

Найти предел функции или доказать, что он не существует

1) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$; 2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \sqrt{xy}$, $x = u^2 - v^2$, $y = e^{uv}$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = \ln \cos \frac{\sqrt{x}}{y}$, $x = \sqrt[3]{t+1}$, $y = 3^t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[xy; x^2 - y^2] + \varphi(xy)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 2xy = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 + zxy - x = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \ln \left(x + \frac{1}{y} \right)$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении от точки M к точке $O(0,0)$;

б) $grad z$ в точке $M(1,1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2z + y^2 + x^2 = 0$ в точке $M(1,1,-1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = x^2 + y^3 + zxy + x^3 y^3 z^3$ в окрестности точки $M(1,1,1)$.

13) Исследовать функцию $z = 3x - 2y - 2z + x^2 - xy + y^2$ на непрерывность и дифференцируемость в точке $M(0;0;0)$.

14) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2xy - 3x^2 - 3y^2 + 4x + 4y + 4$ в прямоугольнике $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 2$.

15) Вычислить приближённо $e^{1,02} \cdot 2,96$.