

Вариант 1

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = (2 - x)^2, x_0=1;$ 1.2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0=0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x \cdot \ln(x+1);$ 2.2. $y = 1 - \sin x + (1 - x^2)^3;$
2.3. $y = x^2 \cdot e^{\sqrt{x^2+x+1}};$ 2.4. $y = \frac{3x^5 - 2x^4 + 4}{\sqrt{x^2 - 1}};$
2.5. $y = 2\sqrt[3]{x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^2+x+1}};$ 2.6. $y = \cos^3(1 - 5x^2);$
2.7. $y = \ln(2x + \sqrt{2^x - \sqrt{x+1}});$ 2.8. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{1 - \sin x}).$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin x)^{x^2}.$

4. Найти производную неявной функции $y=y(x): \operatorname{tg}(xy) = e^{x^2+y^3}.$

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = \frac{1}{2}t^2 - t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0, y_0):$

6.1. $y = \frac{4x - x^2}{4}, x_0 = 2;$ 6.2. $\begin{cases} x = a \sin^3 t, \\ y = a \cos^3 t, \end{cases} M_0\left(\frac{a}{8}; a \frac{3\sqrt{3}}{8}\right).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = x^2 \cdot e^{\sqrt{x^2+x+1}};$ 7.2. $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin^2 t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[3]{7.76}.$

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln(1 - \cos 2x)$ в точке $x_0 = \pi/2.$

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right];$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)};$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}.$

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x_0:$

а) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x_0=1;$ б) $y = x \cdot \sin x^2, x_0=0.$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1; \quad б) y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}; \quad в) y = x - 2 \ln x.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x + \sqrt{x}, \quad [0;4]; \quad б) y = \frac{x+3}{x^2+7}, \quad [-3;7].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \frac{(x+1)^2}{x-2} \quad б) y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;4) \cup (4;\infty).$

2) Вертикальные асимптоты: $x = 4.$

3) Горизонтальные асимптоты: $y = 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$

4) Наклонные асимптоты: $y = x \quad (x \rightarrow -\infty).$

5) Стационарные точки: $1; 2.$

6) Точки, где $(y' = \infty)$: $-2; 0.$

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty;-2), (-2;-1), (0;2), (2;4)$

б) убывания: $(-1;0), (4;\infty).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-2;0), (0;2)$

б) вогнутости: $(-\infty;-2), (2;4), (4;\infty).$

9) Значение функции в некоторых точках:
 $y(-2)=0, y(-1)=2, y(0)=0, y(2)=3, y(5)=2.$

Вариант 2

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = (2+x)^2, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x \cos \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$\begin{array}{ll} 2.1. y = (x+1) \cdot \ln x; & 2.2. y = 2 - \cos x + (1-x^2)^4; \\ 2.3. y = x^3 \cdot e^{\sqrt{x^2-x+1}}; & 2.4. y = \frac{2x^3 - 2x + 1}{\sqrt{1-x^2}}; \\ 2.5. y = \sqrt[4]{x+3} - \frac{3}{(x^2+x+1)^2}; & 2.6. y = \cos^2(1-5x^3); \\ 2.7. y = \ln(x - \sqrt{3^x - \sqrt{x+1}}); & 2.8. y = \operatorname{arcctg}(tg^3 x + \sqrt{1+\sin x}). \end{array}$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\cos x)^{x^2}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\operatorname{ctg}(xy) = e^{x^2+y}$.

5. Найти производную параметрической функции:
$$\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 1 + x - x^2, x_0 = 2; \quad 6.2. \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} M_0\left(\frac{1}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = x^2 \cdot e^{x^2+1}; \quad 7.2. \begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[4]{x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[4]{16.06}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln(1 - \sin 2x)$ в точке $x_0 = \pi/8$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

$$\begin{array}{ll} а) \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x^n \cdot \sin \frac{a}{x} \right]; & б) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos(\pi x/2)}; \\ в) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x \right). & \end{array}$$

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

$$a) y = \cos x, x_0 = \frac{\pi}{4}; \quad б) y = x \cdot e^{-6x^2}, x_0 = 0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = \frac{2}{3}x^2 \cdot \sqrt[3]{6x-7}; \quad б) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}; \quad в) y = \ln x + \frac{1}{x}.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^4 - 2x^2 + 3, [-3; 2]; \quad б) y = \frac{x-5}{x^2+11}, [-3; 7].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = x + \ln(x^2 - 4); \quad б) y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

- 1) Область определения: $X \in (-2; +\infty)$.
- 2) Вертикальные асимптоты: $x = -2$.
- 3) Горизонтальные асимптоты: $y = 2 (x \rightarrow +\infty)$.
- 4) Наклонные асимптоты: —
- 5) Стационарные точки: $-1; 1$.
- 6) Точки, где $(y' = \infty)$: $0; 2$.
- 7) Интервалы монотонности:
 - a) возрастания: $(-1; 0), (1; 2), (2; \infty)$
 - б) убывания: $(-2; -1), (0; 1)$.
- 8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
 - a) выпуклости: $(2; \infty)$
 - б) вогнутости: $(-2; 0), (0; 2)$.
- 9) Значение функции в некоторых точках:
 $y(-1) = -2, y(0) = 0, y(1) = -2, y(2) = 0$.

Вариант 3

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = (1+x)^3, x_0=1;$ 1.2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^2 \cos \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0=0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x^2 \cdot \ln x;$

2.2. $y = 2 - \cos x + x^2;$

2.3. $y = x^3 \cdot e^{\sqrt[3]{x^2-x+1}};$

2.4. $y = \frac{x^3 + 2x^2 - 11}{\sqrt{1-x^3}};$

2.5. $y = \sqrt[4]{3x-1} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+x+1}};$

2.6. $y = \operatorname{tg}^2(1+5x^3);$

2.7. $y = \log_3(x - \sqrt{3^x - \sqrt{x}});$

2.8. $y = \arcsin(\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{1 - \sin x}).$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin(1+x))^{x^2}.$

4. Найти производную неявной функции $y=y(x): \operatorname{tg}(x+y) = e^{x^2+y}.$

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0):$

6.1. $y = 1 + x^3 - 2x^5, x_0 = -1;$

6.2. $\begin{cases} x = 2 \sin^3 t, \\ y = 2 \cos^3 t, \end{cases} M_0\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4}\right).$

7. Найти производную второго порядка y''_{xx} для функций:

7.1. $y = x \cdot e^{x^2-1};$

7.2. $\begin{cases} x = \frac{1}{t}, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \frac{x + \sqrt{5-x^2}}{2}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.98).$

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x \cdot e^{x^2-1};$ в точке $x_0=1.$

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} [x^n \cdot e^{-x}];$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}};$ в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctgx} - \frac{1}{x} \right).$

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x_0:$

$$a) y = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4};$$

$$б) y = \frac{\ln(1-3x)}{x}, x_0=0.$$

12. Найти экстремумы функций:

$$a) y = x \cdot \sqrt{2-x^2};$$

$$б) y = \frac{1 + \ln x}{x};$$

$$в) y = (x-1)^4.$$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$$a) y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2, \left[-\frac{1}{2}; 3\right];$$

$$б) y = \frac{x-4}{x^2+9}, [-4; 6].$$

14. Исследовать и построить графики функций:

$$a) y = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2$$

$$б) y = x^3 \cdot e^x.$$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$$X \in (-\infty; 2) \cup (2; \infty).$$

2) Вертикальные асимптоты:

$$x = 2.$$

3) Горизонтальные асимптоты:

$$y = 3 \quad (x \rightarrow +\infty), \quad y = 0 \quad (x \rightarrow -\infty).$$

4) Наклонные асимптоты:

—

5) Стационарные точки:

$$-2; 1; 3.$$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

$$0.$$

7) Интервалы монотонности:

$$a) \text{возрастания: } (-2; 0), (3; \infty)$$

$$б) \text{убывания: } (-\infty; -2), (0; 1), (1; 2), (2; 3).$$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

$$a) \text{выпуклости: } (-\infty; -3), (1; 2), (4; \infty)$$

$$б) \text{вогнутости: } (-3; 0), (0; 1), (2; 4).$$

9) Значение функции в некоторых точках:

$$y(-3) = -1, y(-2) = -2, y(0) = 3, y(1) = 1, y(3) = 2, y(4) = 2,5.$$

Вариант 4

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

$$1.1. f(x) = (1-x)^3, x_0 = -1; \quad 1.2. f(x) = \begin{cases} \arcsin\left(x^2 \cos \frac{1}{3x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

2. Найти производную функций:

$$2.1. y = (1-x^2) \cdot \ln x;$$

$$2.2. y = 2x^2 - \operatorname{tg} x + 2;$$

$$2.3. y = x \cdot e^{\sqrt[5]{x-x^2+1}};$$

$$2.4. y = \frac{\sin(2x^2 - 11)}{\sqrt{x^3 - 1}};$$

$$2.5. y = \sqrt[3]{x-3} - \frac{1}{\sqrt{x^3 + x + 1}};$$

$$2.6. y = \operatorname{ctg}^2(1 - 5x^3);$$

$$2.7. y = \log_2(3x - \sqrt{4^x - \sqrt{2x}});$$

$$2.8. y = \arccos(\ln x + \sqrt{1 - e^x}).$$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{x}{y} = 2^{x^2+y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$6.1. y = 2x^3 - x^2, x_0 = -1;$$

$$6.2. \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad M_0\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

$$7.1. y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2 - 1};$$

$$7.2. \begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[3]{1.012}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x^2 - 1) \cdot e^{x^2 - 1}$ в точке $x_0 = -1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} [\ln x \cdot \ln(x-1)]; \quad б) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}; \quad в) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}.$$

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 :

a) $y = \ln x, x_0 = e;$

б) $y = \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^4}}, x_0=0.$

12. Найти экстремумы функций:

a) $y = (1+x) \cdot e^x;$

б) $y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2};$

в) $y = 2x^3 - 3x^2.$

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

a) $y = 3x^4 - 16x^3 + 2, [-3;1];$

б) $y = \frac{x-2}{x^2+5}, [-2;3].$

14. Исследовать и построить графики функций:

a) $y = x + \frac{2x}{x^2-1};$

б) $y = x + \frac{1}{x^2}.$

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$X \in (-3;0) \cup (0;2).$

2) Вертикальные асимптоты:

$x = -3, x = 2.$

3) Горизонтальные асимптоты:

—

4) Наклонные асимптоты:

—

5) Стационарные точки:

$-2; -1; 1.$

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

$0 (x \rightarrow \pm 0).$

7) Интервалы монотонности:

a) возрастания:

$(-3;-2), (-1;0), (0;1), (1;2);$

б) убывания:

$(-2;-1).$

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

a) выпуклости:

$(-3;-\frac{3}{2}), (0;1);$

б) вогнутости:

$(-\frac{3}{2};0), (1;2).$

9) Значение функции в некоторых точках:
 $y(-1) = 1, y(-0) = 2, y(+0) = 0, y(1) = 1.$

Вариант 5

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 1 + x + x^2, x_0 = -1;$ 1.2. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + x^2 \sin \frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases} x_0 = 0.$

2. Найти производную функций:

2.1. $y = (1 - x) \cdot \ln(1 - x);$

2.2. $y = 2x^5 - \operatorname{arctg} x + 1;$

2.3. $y = x^2 \cdot 7^{\sqrt{1-x^2+x}};$

2.4. $y = \frac{\ln(2x^2 - 11)}{e^{x^3 - 1}};$

2.5. $y = \sqrt[3]{x+3} - \frac{1}{\sqrt{x^3+x}};$

2.6. $y = \sin^2(1 + x^3);$

2.7. $y = \log_2\left(3 - \sqrt{4^x - \frac{1}{\sqrt{2x}}}\right);$

2.8. $y = \arccos(\cos x + \sqrt{e^x - 1}).$

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}.$

4. Найти производную неявной функции $y=y(x): \frac{x+1}{y} = \sin(x^2 + y).$

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0(x_0; y_0):$

6.1. $y = x^5 - 2x^3, x_0 = 1;$ 6.2. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} M_0\left(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3}; 1\right).$

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (x^2 - 1) \cdot e^{1-x^2};$

7.2. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[3]{27.54}.$

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x^2 - 1) \cdot e^{1-x^2}$ в точке $x_0 = 0.$

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталья:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2} \cdot \ln(1-x)};$ б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x};$ в) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right].$

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x_0:$

a) $y = \ln(2 + x)$, $x_0 = -1$;

б) $y = \frac{x^3}{6} - \sin x^3$, $x_0 = 0$.

12. Найти экстремумы функций:

a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$;

б) $y = (1 + x) \cdot e^{-x}$;

в) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

a) $y = x^3 - 3x + 1$, $[\frac{1}{2}; 2]$;

б) $y = \frac{4 - x^2}{4 + x^2}$, $[-1; 3]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

a) $y = 2x - \arcsin x$;

б) $y = \ln \frac{x-1}{x+2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения:

$X \in (-\infty; \infty)$.

2) Вертикальные асимптоты:

—

3) Горизонтальные асимптоты:

$y=0$, $(x \rightarrow -\infty)$.

4) Наклонные асимптоты:

$y=x-2$ $(x \rightarrow \infty)$.

5) Стационарные точки:

-1 ; 1 ; 3 .

6) Точки, где $(y' = \infty)$:

0 ; 2 .

7) Интервалы монотонности:

a) возрастания:

$(-\infty; -1)$, $(0; 1)$, $(3; \infty)$,

б) убывания:

$(-1; 0)$; $(1; 2)$; $(2; 3)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

a) выпуклости:

$(-2; 0)$, $(0; 2)$

б) вогнутости:

$(-\infty; -2)$, $(2; \infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-2) = 1$, $y(-1) = 2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 4$, $y(2) = 3$, $y(3) = 2$.