Под полным исследованием функции обычно понимается решение таких вопросов:

1. Найти область определения функции.
2. Отметить (если они есть) особенности функции (периодичность, четность и нечетность) и точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Исследовать непрерывность функции. Если граничные точки области определения функции принадлежат ей, то найти значения функции в этих точках.
4. Найти наклонные асимптоты (вертикальные определяются в пункте 3) или убедиться в их отсутствии.
5. Найти y'. Определить интервалы монотонности (возрастания и убывания функции) и локальные экстремумы.
6. Найти y''. Определить интервалы, на которых график функции выпуклый вверх (выпуклый) или выпуклый вниз (вогнутый) и точки перегиба.
7. Построить график функции, используя все полученные результаты исследования.

Замечание. Если полученных результатов исследования окажется недостаточно, то следует найти еще несколько точек графика функции, исходя из ее уравнения.

Построение графика функции целесообразно выполнять по его элементам, вслед за выполнением отдельных пунктов исследования.

Не всегда нужно точно следовать этой схеме. Выполнение пункта 2 исследования требует решения уравнения $f(x) = 0$ и может быть опущено, если это решение нельзя получить элементарным путем.

Примеры

Пример 1. Провести полное исследование и построить график функции $y = \dfrac{3x}{x^2-4}$.

Решение.

1. Область определения функции $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.
2. Область определения симметрична относительно начала координат и

$$f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2-4} = -\frac{3x}{x^2-4} = -f(x).$$

Следовательно, функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пересечение с осью Ox:

$$y = 0 \Rightarrow \frac{3x}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Пересечение с осью Oy:

$$x = 0 \Rightarrow \frac{3\cdot 0}{0^2-4} = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат в точке O (0; 0).

3. Функция имеет две точки разрыва: $x = -2$ и $x = 2$. Определим тип разрывов:

$$\lim_{x\to -2-0} f(x) = \lim_{x\to -2-0} \frac{3x}{(x-2)(x+2)} = \left(\frac{3(-2)}{(-2-0-2)(-2-0+2)}\right) = \left(\frac{6}{4(-0)}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -2+0} f(x) = \lim_{x\to -2+0} \frac{3x}{(x-2)(x+2)} = \left(\frac{3(-2)}{(-2+0-2)(-2+0+2)}\right) = \left(\frac{6}{4(+0)}\right) = +\infty.$$

Учитывая симметрию графика функции, относительно начала координат для $x = 2$ получаем

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = -\infty \text{ и } \lim_{x\to 2+0} f(x) = +\infty.$$

Итак, точки $x = -2$ и $x = 2$ точки разрыва второго рода, прямые $x = -2$ и $x = 2$ – **вертикальные асимптоты** графика функции.

4. Функция определена при сколь угодно больших x. Следовательно, возможно существование наклонных асимптот. Поведения функции при $x \to \pm\infty$ сразу позволяет найти горизонтальные асимптоты (частный случай наклонной асимптотой $y = k\,x + b$ при $k = 0$). Исследуем поведение функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{3x}{x^2} = 0.$$

Учитывая четность функции

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{(x-2)(x+2)} = 0,$$

или вычисляя

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x^2} = 0.$$

Итак, $y = 0$ – **горизонтальная асимптота** графика функции при $x \to \pm\infty$.

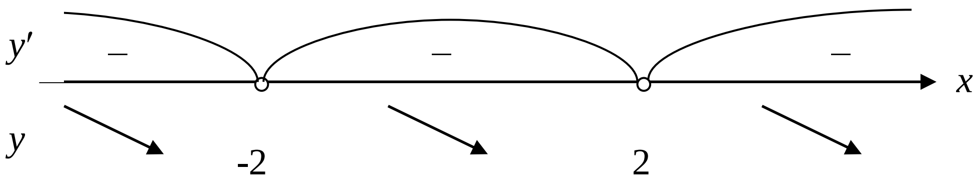
5. Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = \left(\frac{3x}{x^2-4}\right)' = 3\frac{(x^2-4) - x\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = -\frac{3(4+x^2)}{(x^2-4)^2} \Rightarrow$$

а) $y' \neq 0$ при $\forall\, x \in D(y)$;

б) $y' = \infty$ (производная «не существует») при $x = \pm 2 \notin D(y)$.

Точки разрыва $x = \pm 2$ разбивают область определения функции на три части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, **функция убывает** на интервалах (–∞; –2), (–2; 2) и (2;+∞). **Точек экстремума нет.**

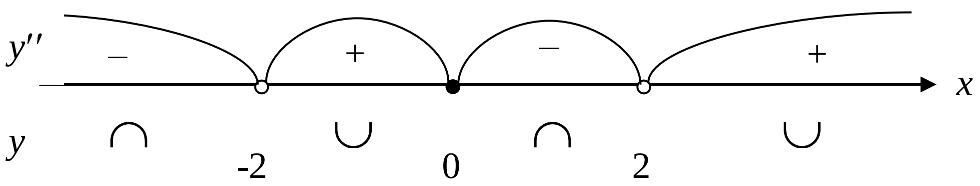
6. Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

$$y'' = \left(-\frac{3(4+x^2)}{(x^2-4)^2}\right)'' = -3\frac{2x(x^2-4)^2-(4+x^2)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{6x(12+x^2)}{(x^2-4)^3} \Rightarrow$$

а) $y'' = 0$ при $x = 0$;

б) $y'' = \infty$ (вторая производная «не существует») при $x = \pm 2 \notin D(y)$.

Критическая точка второго рода и точки разрыва разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, *график функции выпуклый* на интервалах (–∞; –2) и (0;2), **график функции вогнутый** на интервалах (–2; 0) и (2;+∞). **Точка перегиба** $x = 0$.

7. На основании проведенного исследования строим схему графика рис. 1.

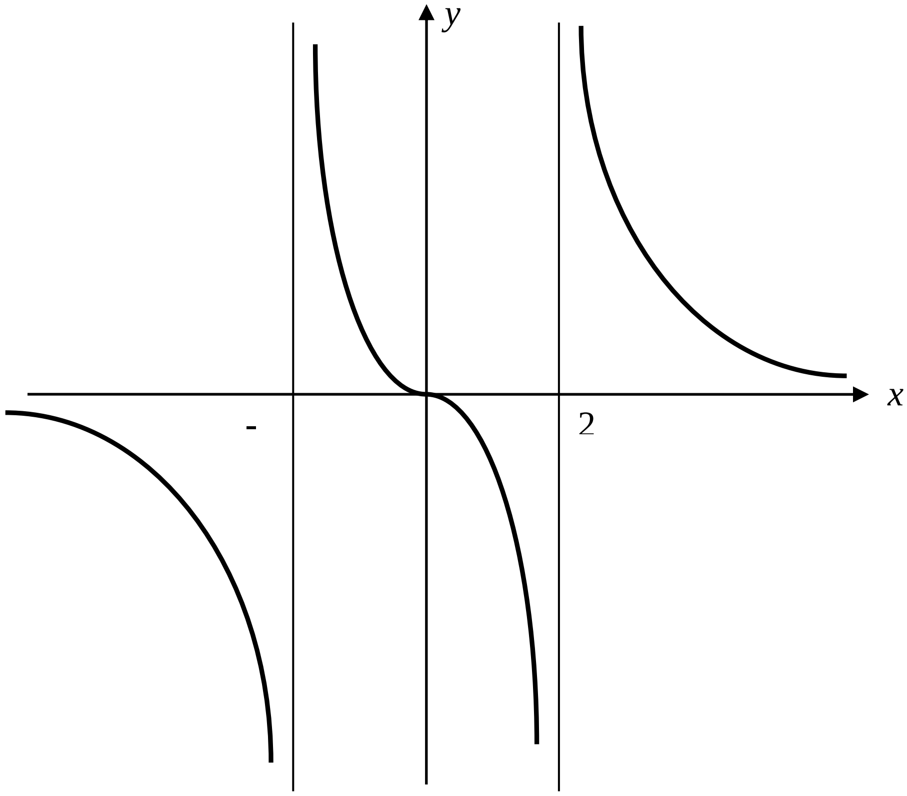


Рис. 1. График функции $y = \dfrac{3x}{x^2 - 4}$

Пример 2. Провести полное исследование и построить график функции $y = x^2 e^{-x}$.

Решение.

1. Область определения функции $D(y) = R$.
2. Область определения симметрична относительно начала координат и

$$f(-x) = \left(-x\right)^2 e^{-(-x)} = x^2 e^x \neq \pm f(x).$$

Следовательно, функция общего вида, и ее график не является симметричным относительно оси *Oy* или начала координат.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пересечение с осью *Ox*:

$$y = 0 \Rightarrow x^2 e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Пересечение с осью *Oy*:

$$x = 0 \Rightarrow 0^2 e^0 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат в точке *O* (0; 0).

3. Функция не имеет точек разрыва. Поэтому **вертикальных асимптот у графика функции нет**.

4. Функция определена при сколь угодно больших x. Следовательно, возможно существование наклонных асимптот. Исследуем поведение функции при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{+\infty}{+0}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x)'}{\left(e^x\right)'} = 0.$$

Итак, $y = 0$ – **горизонтальная асимптота** графика функции при $x \to +\infty$.

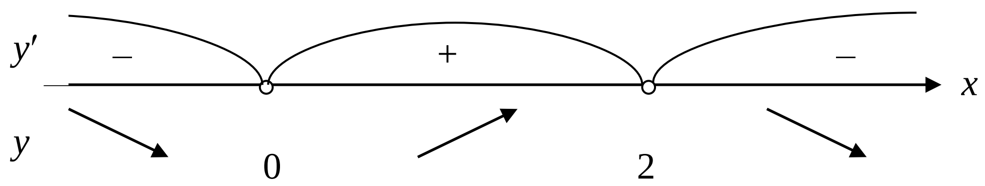
5. Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} x(2-x) \Rightarrow$$

а) $y' = 0$ при $x = 0$, $x = 2$;

б) y' всюду существует и непрерывна $\forall\, x \in R$.

Таким образом, критическими точками первого рода являются точки $x = 0$, $x = 2$. Критические точки разбивают область определения функции на три части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, **функция убывает** на интервалах $(-\infty;\ 0)$ и $(2;+\infty)$, **функция возрастает** на интервале $(0;\ 2)$.

Точка $x = 0$ – точка минимума. **Минимум функции**: $y_{\min} = y(0) = 0$.

Точка $x = 2$ – точка максимума. **Максимум функции**: $y_{\max} = y(2) = 4\,e^{-2}$.

6. Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

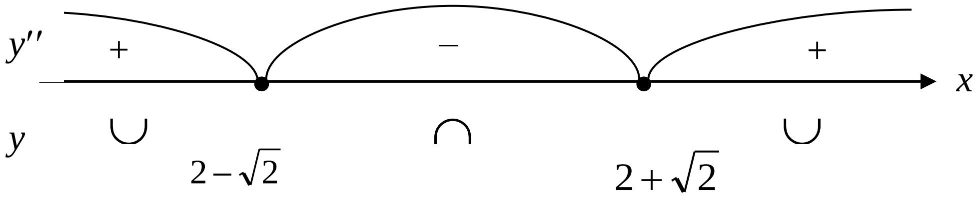
$$y'' = \left(e^{-x}(2x - x^2)\right)' = e^{-x} \cdot (-1)(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2); \Rightarrow$$

а) $y'' = 0$ при $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$;

б) y'' всюду существует и непрерывна $\forall\, x \in R$.

Таким образом, критическими точками второго рода являются точки $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$.

Критические точки второго рода разбивают область определения функции на три части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, **график функции выпуклый** на интервале $\left(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}\right)$, **график функции вогнутый** на интервалах $\left(-\infty;2-\sqrt{2}\right)$ и $\left(2+\sqrt{2};+\infty\right)$. **Точки перегиба**

$$A\left(2-\sqrt{2};\left(2-\sqrt{2}\right)^2\cdot e^{-\left(2-\sqrt{2}\right)}\right) \text{ и } B\left(2+\sqrt{2};\left(2+\sqrt{2}\right)^2\cdot e^{-\left(2+\sqrt{2}\right)}\right).$$

7. На основании проведенного исследования строим схему графика рис. 2.

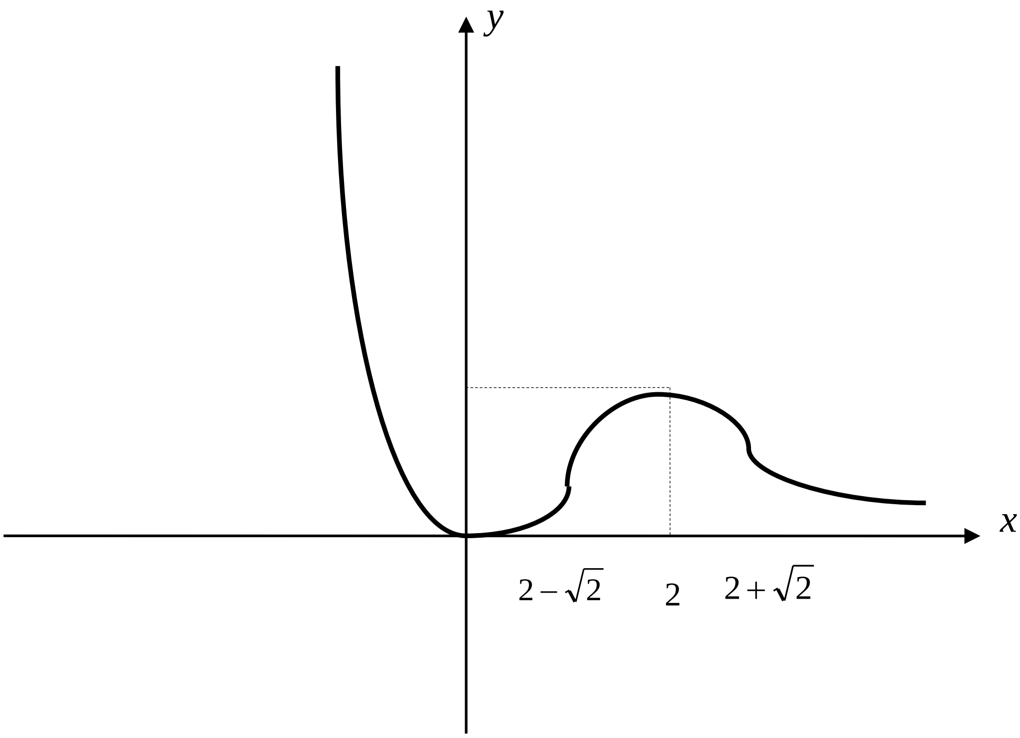


Рис. 2. График функции $y=x^2e^{-x}$

Пример 3. Провести полное исследование и построить график функции $y=\sqrt{8x^2-x^4}$.

Решение.

1. Область определения функции:

$$8x^2-x^4\ge 0 \Rightarrow (8-x^2)\ge 0 \Rightarrow |x|\le 2\sqrt{2}.$$

Следовательно, $D(y)=\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$.

2. Область определения симметрична относительно начала координат и

$$f(-x)=\sqrt{8(-x)^2-(-x)^4}=\sqrt{8x^2-x^4}=f(x).$$

Следовательно, функция четная, и ее график симметричен относительно оси *Oy*.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Пересечение с осью *Ox*:

$$y=0 \Rightarrow \sqrt{8x^2-x^4}=0 \Rightarrow x=0,\ x=\pm 2\sqrt{2}.$$

Пересечение с осью *Oy*:

$$x=0 \Rightarrow \sqrt{8\cdot 0^2-0^4}=0 \Rightarrow y=0.$$

Следовательно, график функции пересекает обе координатные оси в начале координат в точке *O* (0; 0) и пересекает ось *Ox* в точках $A(-2\sqrt{2};0)$ и $B(2\sqrt{2};0)$.

3. 3 Граничные точки области определения функции представляют собой точки *A* ($-2\sqrt{2}$, 0) и *B* ($2\sqrt{2}$, 0). Функция **не имеет точек разрыва и вертикальных асимптот**.

4. Функция не определена при сколь угодно больших *x*. Следовательно, **наклонных асимптот у графика функции нет**.

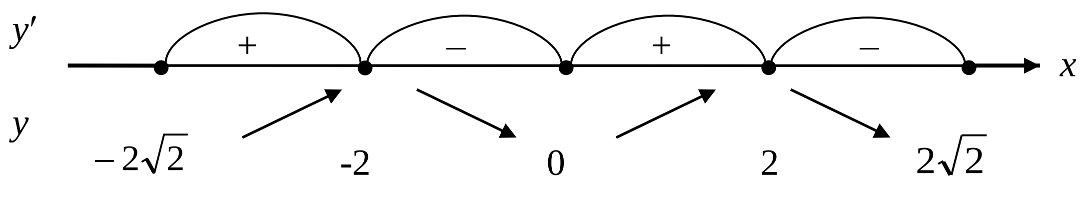
5. Найдем производную функции и критические точки первого рода. Имеем:

$$y'=\left(\sqrt{8x^2-x^4}\right)'=\frac{16x-4x^3}{2\sqrt{8x^2-x^4}}=\frac{4x(4-x^2)}{2\sqrt{8x^2-x^4}}=-\frac{2x(x-2)(x+2)}{\sqrt{8x^2-x^4}} \Rightarrow$$

а) $y'=0$ при $x=0$, $x=2$, $x=-2$;

б) $y'=\infty$ (производная «не существует») при $x=\pm 2\sqrt{2}$, $x=0$.

Таким образом, критическими точками первого рода являются точки $x=0$, $x=2$ и $x=-2$. Критические точки разбивают область определения функции на четыре части. Определим знак производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, **функция убывает** на интервалах (– 2; 0) и $(2;2\sqrt{2})$, **функция возрастает** на интервалах ($-2\sqrt{2}$; – 2) и (0; 2).

Точка $x=0$ – точка минимума.

Минимум функции: $y_{\min}=y(0)=0$.

Точки $x=2$ и $x=-2$ – точки максимума.

Максимум функции: $y_{\max}=y(2)=4$, $y_{\max}=y(-2)=4$.

6. Найдем вторую производную функции и критические точки второго рода. Имеем:

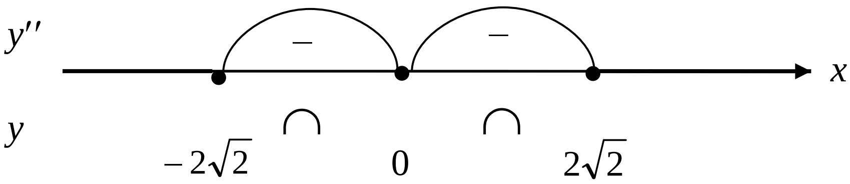
$$y'' = \left(-\frac{2(x^3-4x)}{\sqrt{8x^2-x^4}} \right)' = -2\frac{(3x^2-4)(8x^2-x^4)-(x^3-4x)\cdot(8x-2x^3)}{\sqrt{\left(8x^2-x^4\right)^3}} =$$

$$= -2\frac{x^2(12-x^2)}{\sqrt{8x^2-x^4}\,(8-x^2)} \quad \Rightarrow$$

а) $y'' = 0$ при $x = 0$, $x = \pm\, 2\sqrt{3} \notin D\,(y)$.;

б) $y'' = \infty$ (вторая пр-ая «не существует») при $x = \pm 2\sqrt{2}$, $x = 0$.

Критическая точка второго рода и точки разрыва разбивают область определения функции на две части. Определим знак второй производной в каждой из них. Получим:



Следовательно, **график функции выпуклый** на интервалах (–2; 0)∪(0;2). **Точек перегиба** нет.

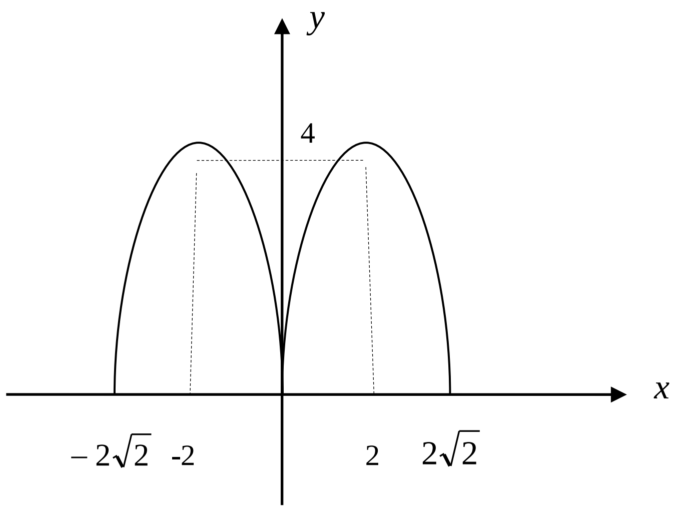


Рис. 3. График функции $y = \sqrt{8x^2 - x^4}$

7. На основании проведенного исследования строим схему графика рис. 3.