4. Уравнение Бернулли

Решение уравнений движения Эйлера для установившегося потока приводит к одному из наиболее важных и широко используемым уравнений гидродинамики – уравнению Бернулли.

Умножив левые и правые части каждого из уравнений (6) соответственно на *dx*, *dy* и *dz* и разделив на плотность *ρ* жидкости получим

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} d\omega_x = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial x} dx \\ \dfrac{dy}{d\tau} d\omega_y = -\dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial y} dy \\ \dfrac{dz}{d\tau} d\omega_z = -gdz - \dfrac{1}{\rho} \cdot \dfrac{\partial p}{\partial z} dz \end{cases}$$

Сложим эти уравнения, учитывая, что производные

$$\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}$$

выражают проекции ω_x, ω_y, ω_z скорости на соответствующие оси координат.

Тогда

$$\omega_x d\omega_x + \omega_y d\omega_y + \omega_z d\omega_z = -gdz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right)$$

,

Уравнения гидродинамики

Слагаемые левой части этого уравнения могут быть представлены как

$$\omega_x d\omega_x = d\left(\frac{\omega_x^2}{2}\right),\ \omega_y d\omega_y = d\left(\frac{\omega_y^2}{2}\right),\ \omega_z d\omega_z = d\left(\frac{\omega_z^2}{2}\right)$$

Следовательно, их сумма

$$d\left(\frac{\omega_x^2}{2}\right) + d\left(\frac{\omega_y^2}{2}\right) + d\left(\frac{\omega_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}{2}\right) = d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)$$

где – $\omega = |\vec{\omega}|$ скорость, составляющие которых вдоль соответствующих осей равны ω_x, ω_y, ω_z.

В тоже время сумма членов, стоящих в скобках в правой части записанного уравнения, представляет собой полный дифференциал давления *dp* (при установившихся условиях давление зависит только от положения точки в пространстве, но в каждой данной точке не меняется со временем).

Значит

$$d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = -\frac{dp}{\rho} - gdz$$

Уравнения гидродинамики

Разделив обе части этого уравнения на ускорение свободного падения g и перенеся все его члены в левую часть, находим

$$d\left(\frac{\omega^2}{2g}\right)+\frac{dp}{\rho}+dz=0$$

причем для несжимаемой однородной жидкости ρ = const.

Сумма дифференциалов может быть заменена дифференциалом суммы, следовательно

$$d\left(z+\frac{p}{\rho g}+\frac{\omega^2}{2g}\right)=0$$

откуда

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{\omega^2}{2g}=const \qquad (9)$$

Уравнение (9) для любых двух поперечных сечений 1 и 2 потока (трубопровода) можно представить в виде

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\omega_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\omega_2^2}{2g} \qquad (10)$$

Уравнение **(9)** является **уравнением Бернулли для идеальной жидкости**.

Величину $z+\dfrac{p}{\rho g}+\dfrac{\omega^2}{2g}$ называют **полным гидродинамическим напором**, или просто **гидродинамическим напором**.

Уравнения гидродинамики

Следовательно, **согласно уравнению Бернулли**, для всех поперечных сечений установившегося потока идеальной жидкости гидродинамический напор остается неизменным.

Гидродинамический напор включает три слагаемых, из которых первые два слагаемых, *z* и $\frac{p}{\rho g}$, входят в основное уравнение гидростатики:

z – нивелирная высота, называемая также геометрическим, или высотным, напором ($h_г$), представляет собой удельную потенциальную энергию положения в данной точке (данном сечении);

$\frac{p}{\rho g}$ – напор давления ($h_{давл}$), или пьезометрический напор, характеризует удельную потенциальную энергию давления в данной точке (данном сечении).

Сумма $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$, называемая полным гидростатическим, или просто статическим напором ($h_{ст}$), следовательно, выражает полную удельную потенциальную энергию в данной точке (данном сечении).

Уравнения гидродинамики

Величины z и $\frac{p}{\rho g}$ могут быть выражены как в единицах длины, так и в единицах удельной энергии, т.е. энергии, приходящейся на единицу веса жидкости.

Третья составляющая, $\frac{\omega^2}{2g}$ также выражена в единицах длины

$$\left[\frac{\omega^2}{2g}\right] = \left[\frac{м^3 \cdot сек^2}{сек^2 \cdot м}\right] = [м]$$

или после умножения и деления на единицу веса

$$\left[\frac{\omega^2}{2g}\right] = \left[\frac{н \cdot м}{н}\right] = \left[\frac{дж}{н}\right]$$

Или

$$\left[\frac{\omega^2}{2g}\right] = \left[\frac{кгс \cdot м}{кгс}\right]$$

Величину $\frac{\omega^2}{2g}$ называют скоростным, или динамическим, напором ($h_{ск}$).

Скоростной напор характеризует удельную кинетическую энергию в данной точке (данном сечении).

Уравнения гидродинамики

Таким образом, **согласно уравнению Бернулли**, при установившемся движении идеальной жидкости сумма скоростного и статического напоров, равная гидродинамическому напору, не меняется при переходе от одного поперечного сечения к другому.

Вместе с тем **из уравнения Бернулли** в соответствии с энергетическим смыслом его членов следует, что при установившемся движении идеальной жидкости сумма потенциальной $\left(z + \frac{p}{\rho g}\right)$ и кинетической $\left(\frac{\omega^2}{2g}\right)$ энергии жидкости для каждого из поперечных сечений потока остается неизменной.

При изменении поперечного сечения трубопровода и соответственно скорости движения жидкости происходит превращение энергии: при сужении трубопровода часть потенциальной энергии давления переходит в кинетическую и, наоборот, при расширении трубопровода часть кинетической энергии переходит в потенциальную, но общее количество энергии остается постоянным. Отсюда следует, что для идеальной жидкости количество энергии, поступающей с потоком через начальное сечение трубопровода, равно количеству энергии, удаляющейся с потоком через конечное сечение трубопровода.

Таким образом, **уравнение Бернулли** является частным случаем закона сохранения энергии и выражает энергетический баланс потока.

Уравнения гидродинамики

Если умножить левую и правую части уравнения (10) на удельный вес жидкости ***γ = ρg***, то **уравнение Бернулли для идеальной жидкости** может быть представлено в виде

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{\rho\omega_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \frac{\rho\omega_2^2}{2} \qquad (10a)$$

В уравнении (10а) каждый член выражает удельную энергию в данной точке, отнесенную не к единице веса, а к единице объема жидкости (1 м^3). Например

$$[\rho] = \left[\frac{н}{м^2}\right] = \left[\frac{н \cdot м}{м^2 \cdot м}\right] = \left[\frac{дж}{м^3}\right]$$

В случае горизонтально расположенного трубопровода $z_1 = z_2$ и уравнение Бернулли для идеальной жидкости упрощается:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\omega_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\omega_2^2}{2g} \qquad (11)$$

Уравнения гидродинамики

Покажем применение уравнения Бернулли на примере потока идеальной жидкости, движущейся через произвольно расположенный в пространстве трубопровод переменного сечения (рис. 4).

Пусть для точек, лежащих на оси трубопровода в поперечных сечениях 1–1 и 2–2, нивелиры высоты равны z_1 и z_2 соответственно.

Установим в каждой из этих точек две вертикальные открытые так называемые пьезометрические трубки, у одной из которых нижний конец загнут навстречу потоку жидкости в трубопроводе.

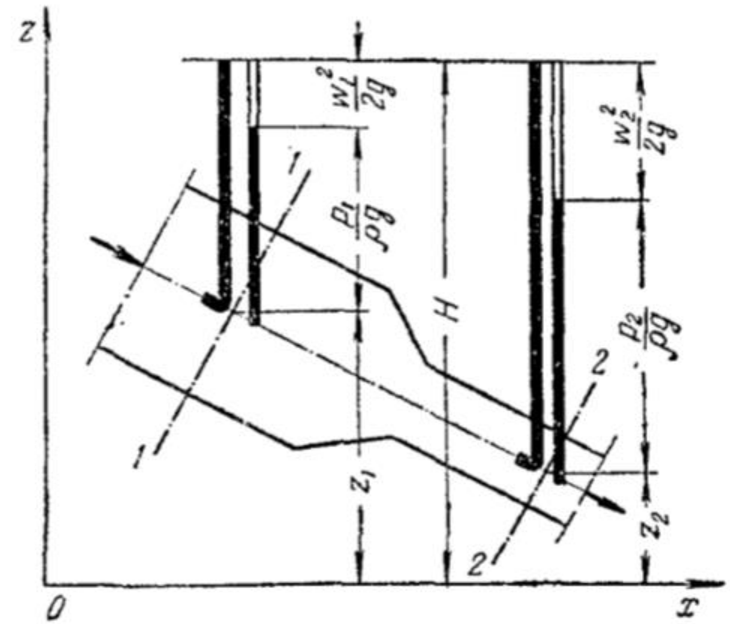


Рисунок 4. К уравнению Бернулли для идеальной жидкости

Уравнения гидродинамики

В прямых вертикальных трубках (с незагнутыми нижними концами) жидкость поднимается на высоту, отвечающую гидростатическому давлению в точках их погружения, т.е. эти трубки будут измерять пьезометрические напоры в соответствующих точках.

В трубках с нижними концами, направленными навстречу потоку, уровень жидкости будет выше, чем в соседних вертикальных трубках, так как трубки с загнутыми концами будут показывать сумму пьезометрического и динамического (скоростного) напоров.

Однако, согласно уравнению (9), во всех трубках с загнутыми нижними концами жидкость поднимается на одну и ту же высоту относительно произвольной горизонтальной плоскости сравнения, равную гидродинамическому напору *H* (см. рис. 4).

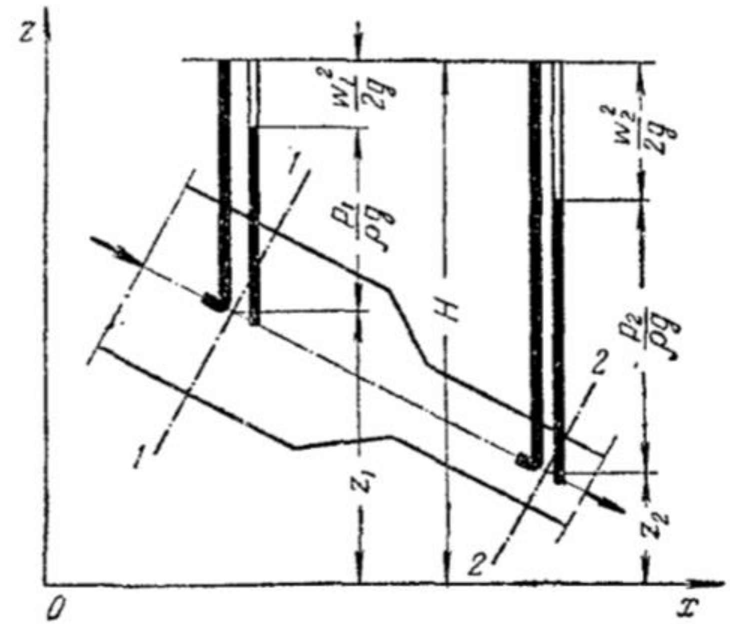


Рисунок 4. К уравнению Бернулли для идеальной жидкости

Уравнения гидродинамики

Площадь поперечного сечения 2–2 трубопровода меньше сечения 1–1. Поэтому скорость жидкости ω_2 при данном ее расходе, согласно уравнению неразрывности потока, будет больше ω_1.

Соответственно $$\frac{\omega_2^2}{2g} > \frac{\omega_1^2}{2g}$$

В любом поперечном сечении трубопровода скоростной напор можно измерить по разности показаний установленных здесь трубок (с загнутым и прямым нижними концами). Следовательно, эта разность должна быть больше для сечения 2–2, чем для сечения 1–1. Вместе с тем из уравнения Бернулли следует, что высота уровня жидкости в прямой трубке в сечении 2–2 должна быть меньше соответствующей высоты в прямой трубке сечения 1–1 настолько же, насколько скоростной напор в сечении 2–2 больше, чем в сечении 1–1.

Приведенный пример демонстрирует взаимный переход потенциальной энергии в кинетическую и наоборот при изменении площади сечения трубопровода, а также постоянство суммы этих энергий в любом поперечном сечении трубопровода.

,

Уравнения гидродинамики

При движении реальных жидкостей начинают действовать силы внутреннего трения, обусловленные вязкостью жидкости и режимом ее движения, а также силы трения о стенки трубы. Эти силы оказывают сопротивление движению жидкости.

На преодоление возникающего гидравлического сопротивления должна расходоваться некоторая част энергии потока.

Поэтому общее количество энергии потока по длине трубопровода будет непрерывно уменьшаться вследствие перехода потенциальной энергии в потерянную энергию – затрачиваемую на трение и безвозвратно теряемую при рассеивании тепла в окружающую среду.

При этом для двух любых сечений 1–1 и 2–2 трубопровода, расположенных по ходу движения реальной жидкости (см. рис. 4)

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\omega_1^2}{2g} > z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\omega_2^2}{2g}$$

Уравнения гидродинамики

При движении реальной жидкости высоты ее подъема (относительно плоскости сравнения) в трубках с концами, обращенными навстречу потоку, уже не будут равны в сечениях 1–1 и 2–2, как было показано на рис. 4 применительно к идеальной жидкости. Разность высот в этих трубках, обусловленная потерями энергии на пути жидкости от сечения 1–1 до сечения 2–2, характеризует потерянный напор $h_{п}$.

Для соблюдения баланса энергии при движении реальной жидкости в правую часть уравнения (1) должен быть введен член, выражающий потерянный напор. Тогда получим **уравнение Бернулли для реальных жидкостей**:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\omega_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\omega_2^2}{2g} + h_n \qquad (12)$$

Потерянный напор $\boldsymbol{h_п}$ характеризует удельную (т.е. относительную к единице веса жидкости) энергию, расходуемую на преодоление гидравлического сопротивления при движении реальной жидкости.

Уравнения гидродинамики

Некоторые практические приложения уравнения Бернулли

Рассмотрим применение уравнения Бернулли для определения скоростей, расходов и времени истечения жидкостей из резервуаров.

Принципы измерения скорости и расхода жидкости

Для определения скоростей и расходов жидкостей в промышленной практике обычно применяются дроссельные приборы и пневмометрические трубки.

Принцип работы пневмометрических трубок, например трубки Пито – Прандтля, может быть пояснено с помощью рис. 4. В каждом сечении разность уровней жидкости в трубках, изображенных на рисунке, выражает скоростной напор $h_{ск}$ в точке сечения, лежащей на оси трубы.

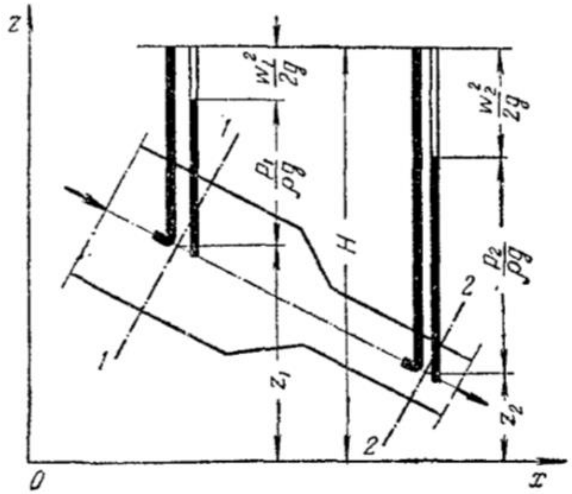


Рисунок 4. К уравнению Бернулли для идеальной жидкости

Уравнения гидродинамики

Разность уровней рабочей жидкости в трубках удобнее измерять не посредством пьезометрических трубок, как показано на рис. 4, а при помощи дифференциального манометра (рис. 5).

По результатам измерений $h_{ск} = \dfrac{\omega^2}{2g}$

находят максимальную скорость жидкости вдоль оси трубопровода. Для определения средней скорости жидкости используют соотношения между средней и максимальной скоростями при ламинарном и турбулентном режимах течения. Расход жидкости находят, умножая среднюю скорость на площадь поперечного сечения трубопровода.

Такой способ определения скорости и расхода жидкости прост, но недостаточно точен из-за трудности установки пневмометрических трубок строго вдоль оси трубопровода.

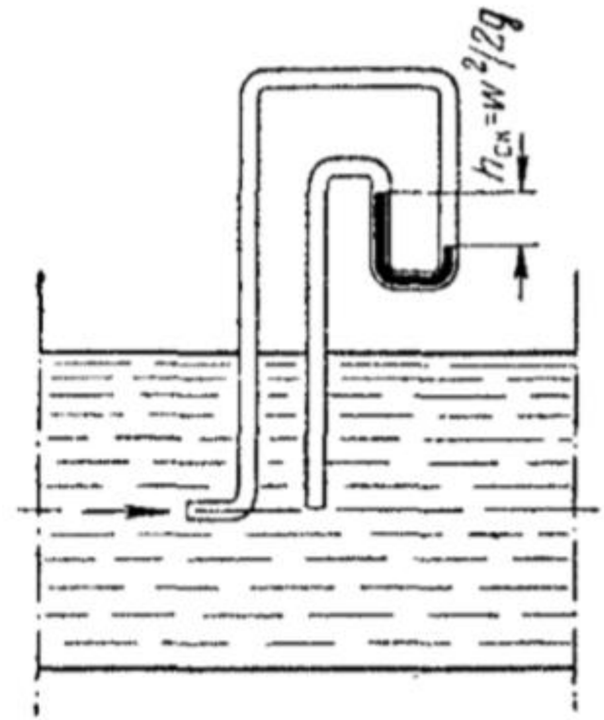


Рисунок 5. Измерение скорости жидкости пневмометрической трубкой

Уравнения гидродинамики

Более широко распространено определение скоростей и расходов жидкостей с помощью **дроссельных приборов**, принцип работы которых основан на измерении перепада давлений при изменении поперечного сечения трубопровода.

При искусственном сужении сечения потока посредством дроссельного прибора скорость и, соответственно, кинетическая энергия потока в этом более узком сечении возрастают, что приводит к уменьшению потенциальной энергии давления в том же сечении.

Поэтому, измерив дифференциальным манометром перепад давлений между сечением трубопровода до его сужения и сечением в самом сужении (или вблизи него), можно вычислить изменение скорости между сечениями, а по нему – скорость и расход жидкости.

В качестве **дроссельных приборов** используют

- мерные диафрагмы
- сопла
- трубы Вентури

Уравнения гидродинамики

Мерная диафрагма (рис. 6) представляет собой тонкий диск с отверстием круглого сечения, центр которого расположен на оси трубы.

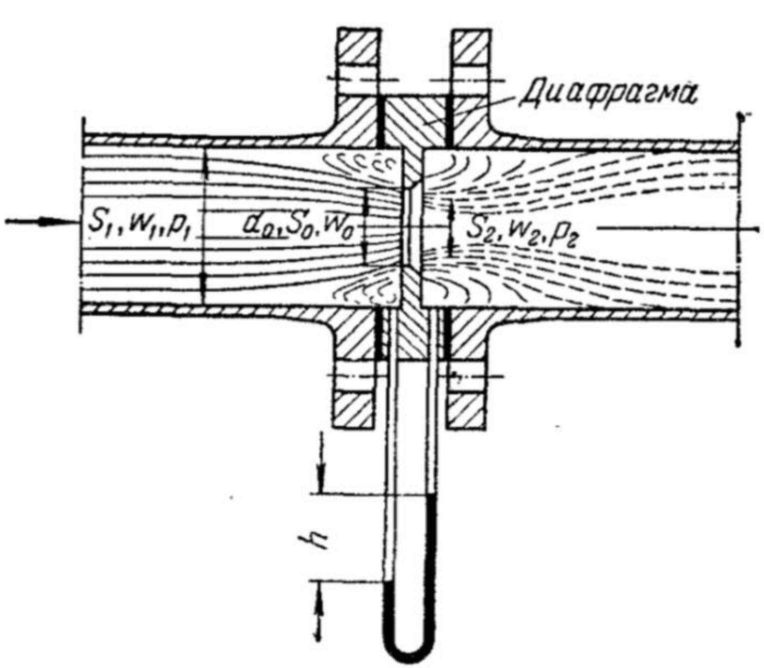
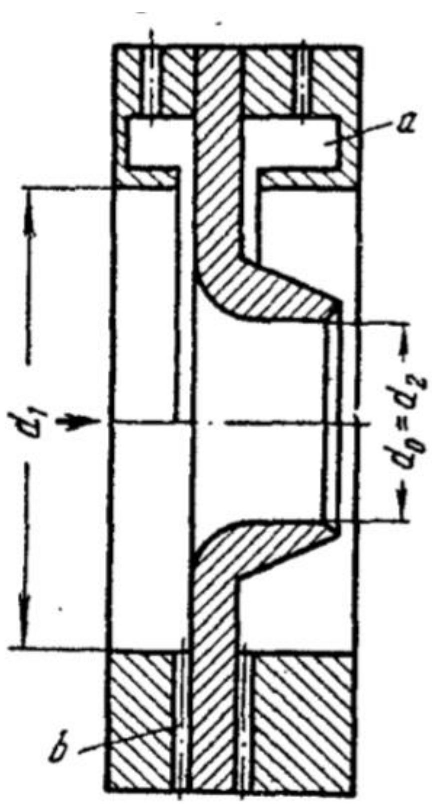


Рисунок 6. Мерная диафрагма



Мерное сопло является насадкой, имеющей плавно закругленный вход и цилиндрический выход (рис. 7).

Рисунок 7. Мерное сопло

Уравнения гидродинамики

Труба Вентури (рис. 8) имеет постепенно сужающееся сечение, которое затем расширяется до первоначального размера.

Вследствие такой формы трубы Вентури потеря давления в ней меньше, чем в диафрагмах или соплах.

Вместе с тем длина трубы Вентури очень велика по сравнению с толщиной диафрагмы или сопла, которые могут быть установлены между фланцами трубопровода.

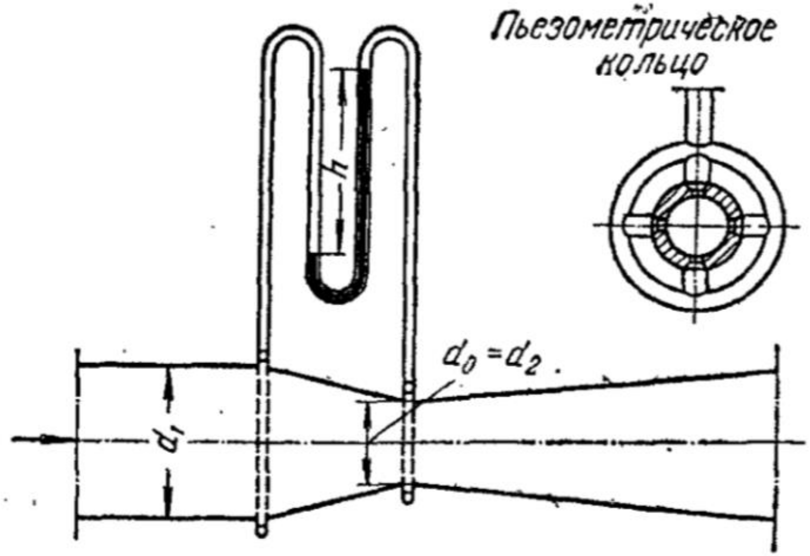


Рисунок 8. Труба Вентури

Уравнения гидродинамики

В трубе Вентури и в сопле площадь сечения сжатой струи $S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}$

($S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$ – площадь сечения трубопровода, на котором установлен дроссельный прибор). В диафрагме $S_2 < S_0$ (см. рис. 6).

Считая трубопровод горизонтальным, запишем для двух сечений, перепад давлений между которыми измеряется дифференциальным манометром, уравнение Бернулли. В соответствии с обозначениями на рис. 6 и пренебрегая потерей напора, имеем

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{\omega_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\omega_2^2}{2g}$$

откуда

$$\frac{\omega_2^2}{2g} - \frac{\omega_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = h$$

где *h* – перепад (разность) давлений, измеряемый дифференциальным манометром и выражаемый в метрах столба рабочей жидкости.

Уравнения гидродинамики

Чтобы определить скорость и расход жидкости в трубопроводе, выразим скорость ω_1 в сечении трубы через скорость ω_2 в узком сечении струи за диафрагмой, в которой замеряется давление p_2, пользуясь уравнением неразрывности потока

$$\omega_1 = \omega_2 \frac{S_2}{S_1} = \omega_2 \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

Подставим значение ω_1 в выражение разности скоростных напоров

$$\frac{\omega_2^2}{2g} - \frac{\omega_2^2}{2g}\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4 = h$$

откуда

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}}$$

Уравнения гидродинамики

Объемный расход жидкости Q в сечении S_0 отверстия диафрагмы (а значит, и в трубопроводе) будет равен

$$Q = \frac{\alpha\pi}{4} d_0^2 \sqrt{\frac{2gh}{1-\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \qquad (14)$$

где α – поправочный коэффициент (α < 1); этим коэффициентом учитывается уменьшение скорости ω_0 в сечении S_0 по сравнению со скоростью ω_2 из-за сужения струи ($S_0 > S_2$), а также потеря напора в диафрагме.

Коэффициент α называется коэффициентом расхода дроссельного прибора. Его значение зависит от значения критерия Рейнольдса для жидкости и от отношения диаметра отверстия дроссельного прибора к диаметру трубопровода:

$$\alpha = f\left(\mathrm{Re}, \frac{d_0}{d_1}\right) \qquad (15)$$

Значение α, определенные опытным путем, приводятся в специальной и справочной литературе.

Уравнения гидродинамики

Диаметр дроссельного устройства обычно в 3-4 раза меньше диаметра трубопровода, поэтому величиной $(d_2/d_1)^4$ в уравнении (14) можно в первом приближении пренебречь и находить расход жидкости по уравнению

$$Q = \frac{\alpha\pi}{4} d_0^2 \sqrt{2gh} \qquad (16)$$

Среднюю скорость жидкости в трубопроводе определяют, разделив Q на площадь сечения трубопровода:

$$\omega = \alpha \left(\frac{d_0}{d} \right)^2 \sqrt{2gh} \qquad (17)$$

В случае работы со сжимаемыми жидкостями (газом или паром) при больших перепадах давлений в уравнения (16) и (17) вводят еще один поправочный коэффициент, учитывающий изменение плотности газа (пара).

Уравнения гидродинамики

Истечение жидкостей

Определим расход жидкости при ее истечении через круглое отверстие в тонком днище открытого сосуда, в котором поддерживается постоянный уровень *H* жидкости (рис. 9а).

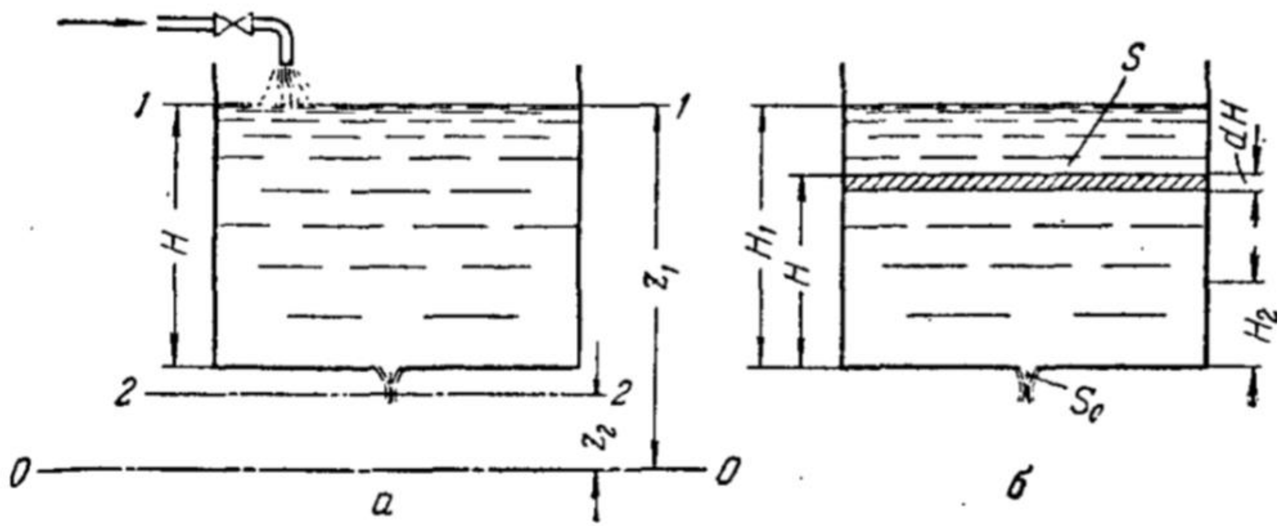


Рисунок 9. Истечение жидкости из сосуда
а – при постоянном уровне; б – при переменном уровне

Уравнения гидродинамики

Вытекающая из такого отверстия струя резко сжимается при выходе вследствие инерционного движения частиц жидкости, приближающихс внутри сосуда к отверстию по криволиненым траекториям (некоторые из них даже непосредственно перед выходом еще скользят почти параллельно днищу, то есть перпендикулярно оси струи). Расстояние от днища до сжатого сечения (вслед за которым дальнейшее сужение струи из-за увеличения скорости падающей жидкости выражено гораздо слабее) невелико и составляет около половины диаметра отверстия.

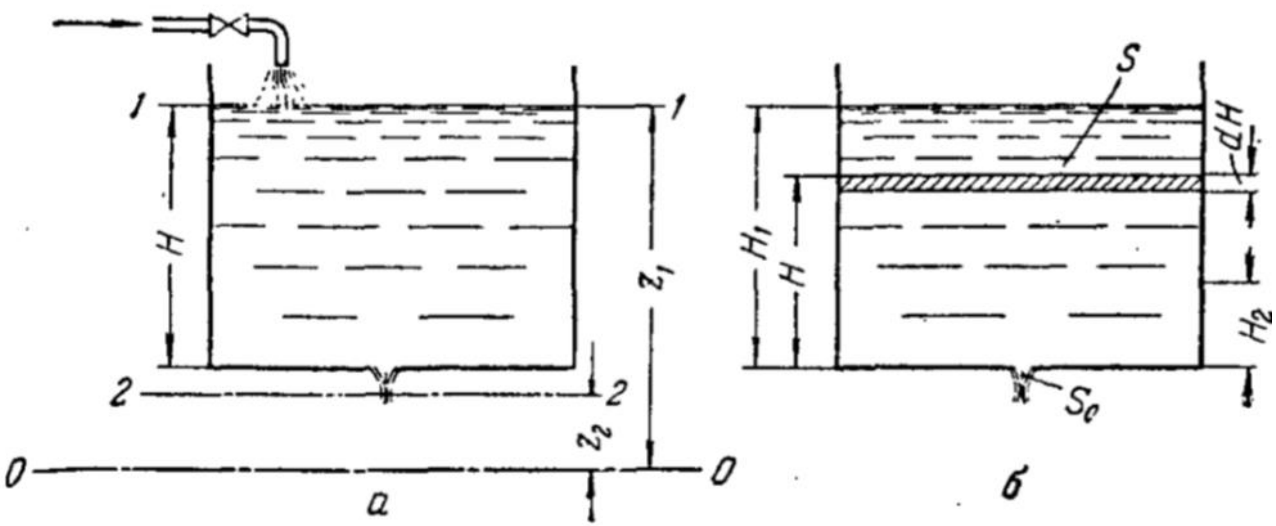


Рисунок 9. Истечение жидкости из сосуда
а – при постоянном уровне; б – при переменном уровне

Уравнения гидродинамики

Выбрав плоскость сравнения 0–0 параллельной днищу сосуда, напишем уравнение Бернулли (считая жидкость идеальной) для сечения 1–1, соответствующего верхнему уровню жидкости в сосуде, и сечения 2–2, плоскость которого проходит через указанное сжатое сечение вытекающей струи:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\omega_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\omega_2^2}{2g}$$

Для открытого сосуда $p_1 = p_2$; кроме того, при постоянном уровне жидкости скорость ее $\omega_1 = 0$. Пренебрегая небольшим расстоянием от плоскости отверстия в днище сосуда до плоскости сжатого сечения струи, можно принять, что $z_1 - z_2 \approx H$.

Отсюда

$$\frac{\omega_2^2}{2g} = H$$

Следовательно

$$\omega_2 = \varphi\sqrt{2gH} \qquad (18)$$

где φ – поправочный коэффициент ($\varphi < 1$), называемый коэффициентом скорости, которым учитываются потери напора при истечении через отверстие.

Уравнения гидродинамики

Объемный расход Q (в м^3/сек) жидкости равен произведению ее скорости ω_2 на площадь сжатого сечения S_2 струи. Обозначим отношение S_2 к площади поперечного сечения S_0 отверстия в днище через ε. Это отношение $\varepsilon = S_2/S_0$ называют коэффициентом сжатия струи.

Тогда

$$Q = \omega_2 S_2 = \varphi\sqrt{2gH}\varepsilon S_0$$

Или

$$Q = \alpha S_0\sqrt{2gH} \qquad (19)$$

Коэффициент α представляет собой коэффициент расхода и выражается произведением коэффициентов скорости сжатия струи:

$$\alpha = \varphi\varepsilon \qquad (20)$$

Этот коэффициент определяют опытным путем, его значения зависят от значения критерия Re и могут быть найдены в справочниках в зависимости от свойств и скорости жидкости, а также от формы отверстия, его размера и удаленности от стенок сосуда.

Уравнения гидродинамики

Из уравнения (19) следует, что расход жидкости, вытекающей через отверстие в тонком днище, зависит от высоты постоянного уровня жидкости над отверстием и от размера отверстия, но не зависит от формы сосуда.

Это уравнение применимо также для определения расхода жидкости, вытекающей через отверстие в тонкой боковой стенке сосуда, если считать H расстоянием от верхнего уровня жидкости до оси отверстия.

Если сосуд, из которого вытекает жидкость, закрыт и давление p_2 над жидкостью в нем отличается от наружного давления p_1, то при определении расхода по уравнению (19) вместо H в него следует поставить

$$H + \frac{p_2 - p_1}{\rho g}$$

Уравнения гидродинамики

Теперь рассмотрим истечение при **переменном уровне жидкости** в сосуде с целью определения времени опорожнения сосудов.

При таком истечении жидкости (рис. 9б) ее уровень H в сосуде снижается во времени и, согласно уравнению (18), уменьшается также скорость истечения ω_0. Следовательно, процесс истечения носит нестационарный характер.

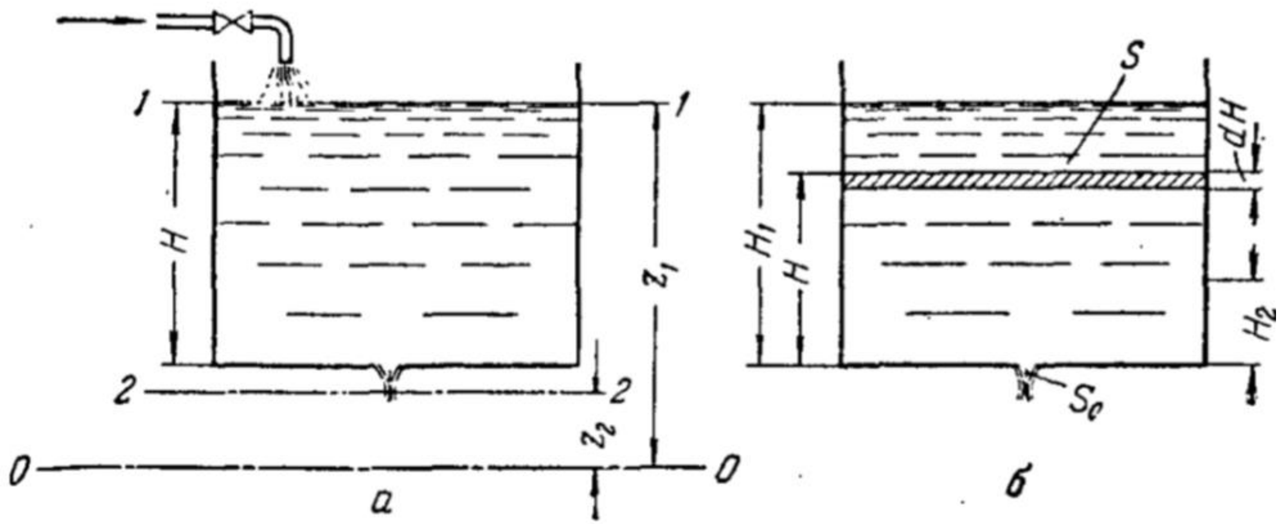


Рисунок 9. Истечение жидкости из сосуда
а – при постоянном уровне; б – при переменном уровне

Уравнения гидродинамики

Определим время, за которое уровень жидкости в сосуде опустится от первоначальной высоты H_1 до некоторой высоты H_2. За бесконечно малый промежуток времени $d\tau$, в соответствии с уравнением (19), через отверстие в днище вытечет объем жидкости

$$dV = Qd\tau = \alpha S_0 \sqrt{2gH}\, d\tau$$

где S_0 – площадь поперечного сечения отверстия в днище сосуда.

За тот же промежуток времени $d\tau$ уровень жидкости в сосуде понизится на бесконечно малую величину dH, и при постоянной площади поперечного сечения S сосуда убыль жидкости в нем составит

$$dV = -SdH$$

Знак минус в правой части указывает на уменьшение высоты жидкости в сосуде.

Уравнения гидродинамики

Приравнивая, согласно уравнению неразрывности потока, эти объемы, получим

$$\alpha S_0\sqrt{2gH}\,d\tau = -SdH$$

Откуда

$$d\tau = -\frac{SdH}{\alpha S_0\sqrt{2gH}}$$

Проинтегрируем это выражение, принимая, что коэффициент расхода α постоянен, т.е. не зависит от скорости течения:

$$\int_0^{\tau} d\tau = -\int_{H_1}^{H_2}\frac{SdH}{\alpha S_0\sqrt{2gH}}$$

$$\tau = \frac{S}{\alpha S_0\sqrt{2g}}\int_{H_1}^{H_2} H^{-1/2}dH = \frac{2S}{\alpha S_0\sqrt{2g}}\left(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}\right)$$

Уравнения гидродинамики

Таким образом, время опорожнения сосуда, имеющего постоянное поперечное сечение, от высоты H_1 до высоты H_2 составляет

$$\tau = \frac{2S\left(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2}\right)}{\alpha S_0 \sqrt{2g}} \qquad (21)$$

В случае полного опорожнения резервуара $H_2 = 0$ и уравнение (21) принимает вид

$$\tau = \frac{2S\sqrt{H_1}}{\alpha S_0 \sqrt{2g}} \qquad (21а)$$

Решая задачу о времени опорожнения сосуда, площадь поперечного сечения которого изменяется по высоте (например, при истечении из конических резервуаров, горизонтальных цистерн и т.п.), следует при интегрировании выражения $d\tau$ учесть зависимость площади сечения S от уровня H жидкости, т.е. учесть вид функции $S = f(H)$.