TOMSK POLYTECHNIC UNIVERSITY

ПРОЦЕССЫ И АППАРАТЫ ХИМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Лекция 3. Течение жидкости в пленках, трубах, струях и пограничных слоях

научный сотрудник, к.т.н.

Белинская Наталия Сергеевна

2019

План

Течение жидкости в пленках, трубах, струях и пограничных слоях

Уравнения и граничные условия гидродинамики. Течение, вызванное вращением диска. Гидродинамика тонких стекающих пленок. Струйные течения. Ламинарное течение в трубах различной формы. Продольное обтекание плоской пластины. Пограничный слой. Движение частиц, капель, пузырей в жидкости. Общее решение уравнений Стокса в осесимметричном случае. Обтекание сферической частицы, капли и пузыря поступательным стоксовым потоком. Сферические частицы в поступательном потоке при умеренных и больших числах Рейнольдса. Сферические капли и пузыри в поступательном потоке при умеренных и больших числах Рейнольдса. Обтекание сферической частицы, капли и пузыря сдвиговым потоком. Обтекание несферических твердых частиц. Обтекание цилиндра (плоская задача). Обтекание деформированных капель и пузырей. Стесненное движение частиц.

Введение

Гидродинамика – это раздел гидравлики, изучающий законы движения жидкостей и газов.

Движущей силой при течении жидкостей является разность давлений, которая создается с помощью насосов или компрессоров, либо вследствие разности уровней или плотностей жидкости.

Знание законов гидродинамики позволяет находить разность давлений, необходимую для перемещения данного количества жидкости с требуемой скоростью, а значит, и расход энергии на это перемещение, или наоборот – определять скорость и расход жидкости при известном перепаде давления.

Введение

Различают **внутреннюю** и **внешнюю** задачи гидродинамики.

- Внутренняя задача связана с анализом движения жидкостей внутри труб и каналов.
- Внешней задачей гидродинамики является изучение закономерностей обтекания жидкостями различных тел (при механическом перемешивании, осаждении твердых частиц в жидкости и т.п.).

Во многих случаях, например, при движении жидкости через зернистый слой твердого материала, она перемещается внутри каналов сложной формы и одновременно обтекает твердые частицы. Такие условия наблюдаются в процессах фильтрования, массопередачи в аппаратах с насадками, в химических процессах, осуществляемых в реакторах с твердыми катализаторами, и т.д. Анализ движения жидкостей в случаях такой смешанной задачи гидродинамики проводят, как правило, приближенно сводя его к решению внутренней или внешней задачи.

Уравнения гидродинамики

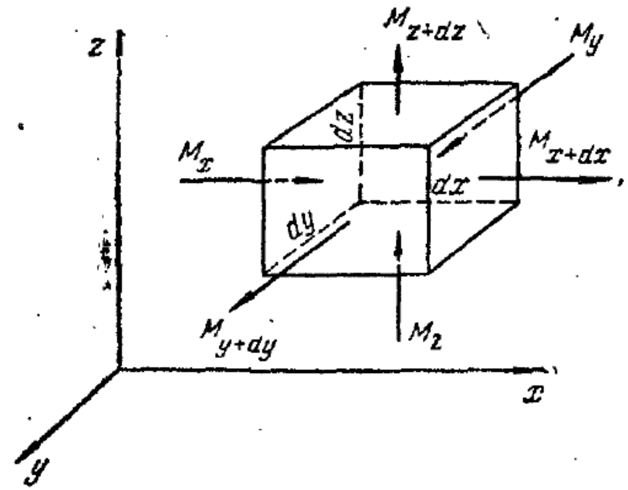
1. Уравнение неразрывности (сплошности) потока

Установим общую зависимость между скоростями в потоке жидкости, для которого соблюдается условие сплошности, или неразрывности, движения, т.е. не образуется пустот, не заполненных жидкостью.

Выделим внутри потока элементарный параллелепипед объемом $dV = dxdydz$. Массовый расход M (кг/сек) определяется произведением

$$M = \rho \omega S$$

где ρ – плотность жидкости, кг/м^3; ω – скорость потока, м/сек; S – площадь сечения (м^2).



Пусть составляющая скорости потока вдоль оси x в точках, лежащих на левой грани параллелепипеда площадью $dS = dydz$, равна ω_x.

Тогда через эту грань в параллелелпипед войдет вдоль оси x за единицу времени масса жидкости $\rho\omega_x dydz$, а за промежуток времени $d\tau$ – масса жидкости

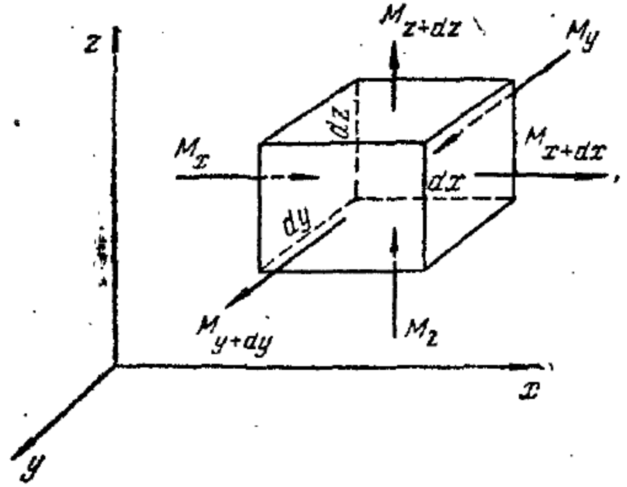
$$M_x = \rho \omega_x dydzd\tau$$

где ρ – плотность жидкости на левой грани параллелепипеда.

Уравнения гидродинамики

На противоположной (правой) грани параллелепипеда скорость и плотность жидкости могут отличаться от соответствующих величин на левой грани и будут равны:

$$\left(\omega_x + \frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx\right) \quad \text{и} \quad \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx\right).$$



Тогда через правую грань параллелепипеда за то же время $d\tau$ выйдет масса жидкости

$$M_{x+dx} = \left[\rho\omega_x + \frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} dx\right] dydzd\tau$$

Приращение массы жидкости в параллелепипеде вдоль оси *x*:

$$dM_x = M_x - M_{x+dx} = -\frac{\partial(\rho\omega_x)}{\partial x} dxdydzd\tau$$

Уравнения гидродинамики

Если составляющие скорости вдоль осей *y* и *z* равны ω_y и ω_z соответственно, то приращение массы в элементарном объеме вдоль этих осей по аналогии составят:

$$dM_y = -\frac{\partial\left(\rho\omega_y\right)}{\partial y}dydxdzd\tau$$

$$dM_z = -\frac{\partial\left(\rho\omega_z\right)}{\partial y}dzdxdyd\tau$$

Общее накопление массы жидкости в параллелепипеде за время $d\tau$ равно сумме ее приращений вдоль всех осей координат:

$$dM = -\left[\frac{\partial\left(\rho\omega_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho\omega_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho\omega_z\right)}{\partial z}\right]dxdydzd\tau$$

Уравнения гидродинамики

Вместе с тем изменение массы в полностью заполненном жидкостью объеме параллелепипеда возможно только вследствие изменения плотности жидкости в этом объеме. Поэтому

$$dM = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} dxdydzd\tau$$

Приравнивая оба выражения *dM*, сокращая на (*–dxdydz*) и перенося $\frac{\partial \rho}{\partial \tau}$ в левую часть уравнения, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \left(\rho \omega_x \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\rho \omega_y \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\rho \omega_z \right)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Уравнение (1) представляет собой **дифференциальное уравнение неразрывности потока для неустановившегося движения сжимаемой жидкости.**

Уравнения гидродинамики

В установившемся потоке плотность не изменяется во времени, т.е. $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$ и уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial\left(\rho\omega_x\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho\omega_y\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho\omega_z\right)}{\partial z} = 0 \qquad (2)$$

Для капельных жидкостей, которые практически несжимаемы, а также для газов в условиях изотермического потока при скоростях, значительно меньших скорости звука, ρ = cont и, следовательно

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0 \qquad (3)$$

Уравнение (3) является **дифференциальным уравнением неразрывности потока несжимаемой жидкости.**

Уравнения гидродинамики

Сумма изменений скорости вдоль оси координат в левой части уравнения (3) называется дивергенцией вектора скорости и обозначается через div *ω*. Поэтому данное уравнение можно представить как

$$\operatorname{div} \ \omega = 0 \qquad (3a)$$

Для того, чтобы перейти от элементарного объема ко всему объему жидкости, движущейся сплошным потоком (без разрыва и пустот) по трубопроводу переменного сечения (рис. 2), проинтегрируем дифференциальное уравнение (2).

Если бы площадь сечения трубопровода не изменялась, то для установившегося однонаправленного движения (в направлении оси x) интегрирование уравнения (2) дало бы зависимость

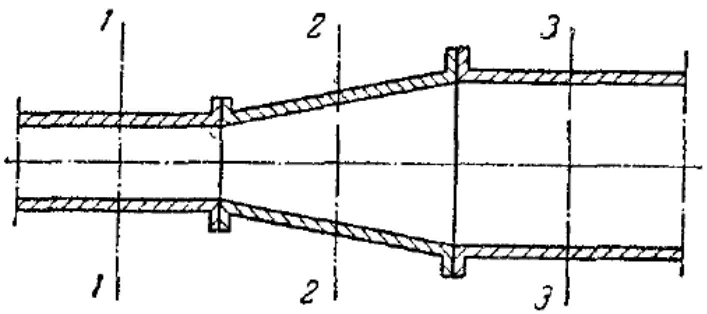
$$\rho\omega = \mathrm{const},$$

где ω – средняя скорость жидкости.

Уравнения гидродинамики

Если площадь сечения трубопровода S переменна, то, интегрируя также по площади, получим

$$\rho \omega S = \text{const} \qquad (4)$$



Для трех различных сечений трубопровода (1 – 1, 2 – 2, 3 – 3), имеем

$$\rho_1 \omega_1 S_1 = \rho_2 \omega_2 S_2 = \rho_3 \omega_3 S_3 \qquad (4)$$

или

$$M_1 = M_2 = M_3 \qquad (4а)$$

где $M = \rho \omega S$ – массовый расход жидкости, кг/сек.

Выражение (4) или (4а) представляет собой **уравнение неразрывности (сплошности) потока в его интегральной форме для установившегося движения**.

Это уравнение называется также **уравнением постоянства расхода**.

Уравнения гидродинамики

Согласно уравнению постоянства расхода, при установившемся движении жидкости, полностью заполняющей трубопровод, через каждое его поперечное сечение проходит в единицу времени одна и та же масса жидкости.

Для капельных жидкостей $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho = \text{const}$, и уравнение (4) принимает вид

$$\boldsymbol{\omega S = \text{const}} \qquad (5)$$

Следовательно

$$\boldsymbol{\omega_1 S_1 = \omega_2 S_2 = \omega_3 S_3 = \text{const}} \qquad (5а)$$

$$\boldsymbol{Q_1 = Q_2 = Q_3}$$

где $Q = \omega S$ – объемный расход жидкости, м^3/сек.

Из уравнения (5а) следует, что скорости капельной жидкости в различных поперечных сечениях трубопровода обратно пропорциональны площадям этих сечений.

Согласно уравнению (4), массовый расход жидкости через начальное сечение трубопровода равен ее расходу через конечное сечение трубопровода. Таким образом, уравнение постоянства расхода является частным случаем закона сохранения массы и выражает материальный баланс потока.

Уравнения гидродинамики

2. Дифференциальные уравнения движения Эйлера

Рассмотрим установившийся поток идеальной жидкости. Она не обладает вязкостью, т.е. движется без трения.

Выделим в потоке элементарный параллелепипед объемом *dV = dxdydz*, ориентированный относительно осей координат.

Проекция на оси координат сил тяжести и давления, действующих на параллелепипед, составляют:

для оси *x*

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz$$

для оси *y*

$$-\frac{\partial p}{\partial y}dxdydz$$

для оси z

$$-\left(\rho g+\frac{\partial p}{\partial z}\right)dxdydz$$

Согласно основному принципу динамики, сумма проекций сил, действующих на движущийся элементарный объем жидкости, равна произведению массы жидкости на ее ускорение.

Масса жидкости в объеме параллелепипеда

$$dm = \rho dxdydz$$

Уравнения гидродинамики

Если жидкость движется со скоростью *ω*, то ее ускорение равно $\frac{d\omega}{d\tau}$ а проекции ускорения на оси координат: $\frac{d\omega_x}{d\tau}$ $\frac{d\omega_y}{d\tau}$ $\frac{d\omega_z}{d\tau}$

где ω_x, ω_y и ω_z – составляющие скорости вдоль осей *x*, *y* и *z*. При этом соответствующие производные по времени не означают изменений во времени составляющих скорости в какой-либо фиксированной точке пространства. Так изменения $\frac{\partial\omega_x}{\partial\tau}$ $\frac{\partial\omega_y}{\partial\tau}$ $\frac{\partial\omega_z}{\partial\tau}$ равны нулю в случае установившегося потока.

Производные же $\frac{d\omega_x}{d\tau}$ $\frac{d\omega_y}{d\tau}$ $\frac{d\omega_z}{d\tau}$

отвечают изменению во времени значений ω_x, ω_y и ω_z при перемещении жидкости из одной точки пространства в другую (наблюдатель в данном случае связан с движущейся частицей потока).

,

Уравнения гидродинамики

В соответствии с основным принципом динамики

$$\begin{cases} \rho dxdydz\dfrac{d\omega_x}{d\tau} = -\dfrac{\partial p}{\partial x}dxdydz \\ \rho dxdydz\dfrac{d\omega_y}{d\tau} = -\dfrac{\partial p}{\partial y}dxdydz \\ \rho dxdydz\dfrac{d\omega_z}{d\tau} = \left(-\rho g - \dfrac{\partial p}{\partial z}\right)dxdydz \end{cases}$$

после сокращения, получим

$$\begin{cases} \rho\dfrac{d\omega_x}{d\tau} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} \\ \rho\dfrac{d\omega_y}{d\tau} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \rho\dfrac{d\omega_z}{d\tau} = -\rho g - \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \qquad (6)$$

производные соответствующих составляющих скорости равны

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega_x}{d\tau} = \dfrac{\partial\omega_x}{\partial x}\omega_x + \dfrac{\partial\omega_x}{\partial y}\omega_y + \dfrac{\partial\omega_x}{\partial z}\omega_z \\ \dfrac{d\omega_y}{d\tau} = \dfrac{\partial\omega_y}{\partial x}\omega_x + \dfrac{\partial\omega_y}{\partial y}\omega_y + \dfrac{\partial\omega_y}{\partial z}\omega_z \\ \dfrac{d\omega_z}{d\tau} = \dfrac{\partial\omega_z}{\partial x}\omega_x + \dfrac{\partial\omega_z}{\partial y}\omega_y + \dfrac{\partial\omega_z}{\partial z}\omega_z \end{cases} \qquad (7)$$

Уравнения гидродинамики

Система уравнений (6) с учетом выражений (7) представляет собой **дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости Эйлера для установившегося потока.**

При неустановившемся движении скорость жидкости изменяется не только при перемещении частицы потока из одной точки пространства в другую, но и с течением времени в каждой точке. Поэтому, составляющие ускорения в уравнении (6) для неустановившихся условий, имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega_x}{d\tau} = \dfrac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + \dfrac{\partial \omega_x}{\partial x}\omega_x + \dfrac{\partial \omega_x}{\partial y}\omega_y + \dfrac{\partial \omega_x}{\partial z}\omega_z \\ \dfrac{d\omega_y}{d\tau} = \dfrac{\partial \omega_y}{\partial \tau} + \dfrac{\partial \omega_y}{\partial x}\omega_x + \dfrac{\partial \omega_y}{\partial y}\omega_y + \dfrac{\partial \omega_y}{\partial z}\omega_z \\ \dfrac{d\omega_z}{d\tau} = \dfrac{\partial \omega_z}{\partial \tau} + \dfrac{\partial \omega_z}{\partial x}\omega_x + \dfrac{\partial \omega_z}{\partial y}\omega_y + \dfrac{\partial \omega_z}{\partial z}\omega_z \end{cases} \qquad (7а)$$

Система уравнений (6) с учетом выражений (7а) представляет собой **дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости Эйлера для неустановившегося потока.**

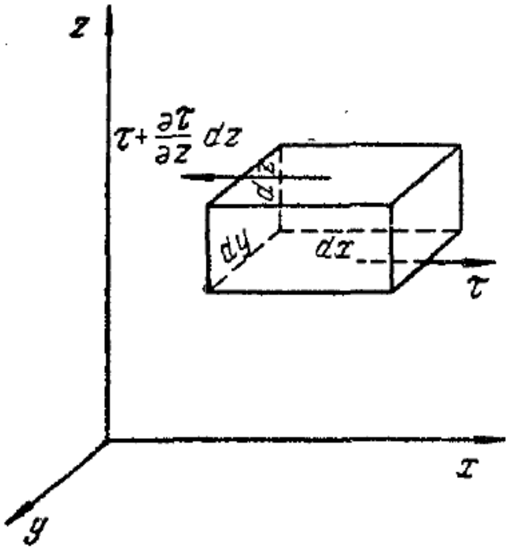
Интегралом уравнений движения Эйлера для установившегося потока является уравнение Бернулли, широко используемое для решения многих технических задач.

3. Дифференциальные уравнения движения Навье – Стокса

При движении реальной (вязкой) жидкости в потоке жидкости помимо сил давления и тяжести действуют также силы трения.

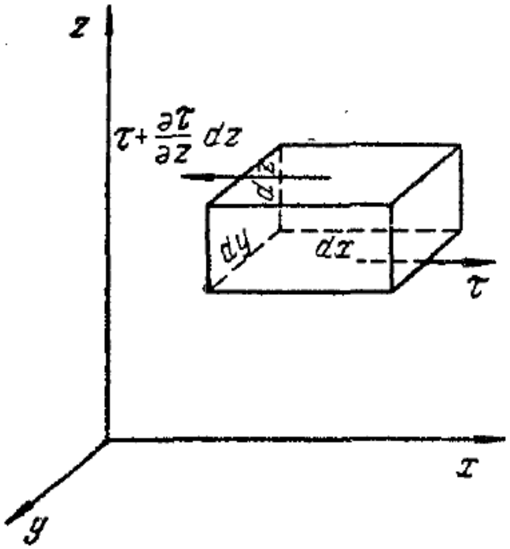
Действие сил трения *T* на выделенный в потоке вязкой жидкости элементарный параллелепипед проявляется в возникновении на его поверхности касательных напряжений τ.

Рассмотрим первоначально относительно простой случай одномерного плоского потока капельной жидкости в направлении оси *x*, когда проекция скорости ω_x зависит только от расстояния *z* до горизонтальной плоскости отсчета.



Уравнения гидродинамики

В этих условиях касательные напряжения возникают лишь на поверхностях *dF* верхней и нижней граней элементарного параллелепипеда, причем *dF* = *dxdy*. Если касательное напряжение на нижней грани параллелепипеда равно *τ*, то на верхней оно составляет $\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz\right)$



Производная $\frac{\partial \tau}{\partial z}$ выражает изменение касательного напряжения вдоль оси *z* в точках, лежащих на нижней грани параллелепипеда, а $\frac{\partial \tau}{\partial z} dz$ представляет собой изменение этого напряжения вдоль всей длины *dz* ребра параллелепипеда.

Проекция равнодействующей сил трения на ось *x*:

$$\tau dxdy - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial z} dz\right) dxdy = -\frac{\partial \tau}{\partial z} dxdydz$$

Подставив в это выражение значение касательного напряжения $\tau = -\mu \frac{\partial \omega_x}{\partial z}$ получим

$$\mu \frac{\partial \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z}\right)}{\partial z} dxdydz = \mu \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} dxdydz$$

Уравнения гидродинамики

В более общем случае трехмерного потока составляющая скорости ω_x будет изменяться не только в направлении *z*, но и в направлениях всех трех осей координат. Тогда проекция равнодействующей сил трения на ось *x* примет вид

$$\mu\left(\frac{\partial^2\omega_x}{\partial z^2}+\frac{\partial\omega_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial x^2}\right)dxdydz$$

Сумму вторых производных по осям координат называют оператором Лапласа:

$$\frac{\partial^2\omega_x}{\partial x^2}+\frac{\partial\omega_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial z^2}=\nabla^2\omega_x$$

Следовательно, проекция равнодействующей сил трения может быть представлена как

на ось *x*

$$\mu\nabla^2\omega_x dxdydz$$

на ось *y*

$$\mu\nabla^2\omega_y dxdydz$$

на ось z

$$\mu\nabla^2\omega_z dxdydz$$

Уравнения гидродинамики

Проекции на оси координат равнодействующей всех сил (тяжести, давления и трения), действующих на элементарный объем капельной жидкости, составляют:

на ось *x*

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2\omega_x\right)dxdydz$$

на ось *y*

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2\omega_y\right)dxdydz$$

на ось z

$$\left(-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2\omega_z\right)dxdydz$$

Суммы проекций сил на оси координат, в соответствии с основным принципом динамики, должны быть равны произведению массы жидкости *ρdxdydz* (*ρ* – плотность жидкости), заключенной в элементарном объеме, на проекции ускорения на оси координат. Поэтому, приравнивая проекции равнодействующей произведениям массы на проекции ускорения, после сокращения на *dxdydz*, получим (8)

$$\begin{cases}\rho\dfrac{d\omega_x}{d\tau}=-\dfrac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2\omega_x\\ \rho\dfrac{d\omega_y}{d\tau}=-\dfrac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2\omega_y\\ \rho\dfrac{d\omega_z}{d\tau}=-\dfrac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2\omega_z\end{cases}\qquad(8)$$

где соответствующие производные выражены для установившегося и неустановившегося потоков уравнениями (7) и (7а).

Уравнения гидродинамики

$$\begin{cases} \rho \dfrac{d\omega_x}{d\tau} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 \omega_x \\ \rho \dfrac{d\omega_y}{d\tau} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 \omega_y \\ \rho \dfrac{d\omega_z}{d\tau} = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 \omega_z \end{cases} \quad (8)$$

Уравнение (8) представляет собой **уравнение Навье – Стокса, описывающее движение вязкой капельной жидкости**.

Левые части уравнений (8) выражают произведение массы единицы объема ρ на проекцию ее ускорения, т.е. представляют собой проекции равнодействующей сил инерции, возникающих в движущейся жидкости.

В правых частях уравнений

- произведение ρg отражает влияние сил тяжести,
- частные производные – влияние изменения гидростатического давления,
- а произведения вязкости на сумму вторых производных проекций скорости – влияние сил трения на движущуюся жидкость.

Каждый член уравнений (8) имеет размерность соответствующей силы (тяжести, давления, трения или инерции), отнесенной к единице объема жидкости.

При движении идеальной жидкости, когда силы трения отсутствуют, при подстановке $\mu = 0$ в уравнения (8) последние совпадают с уравнениями (6), т.е. уравнения движения Эйлера можно получить как частный случай уравнений Навье – Стокса.

Уравнения гидродинамики

Полное описание движения вязкой жидкости в его наиболее общей форме возможно путем решения уравнений Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности потока. Однако уравнение Навье – Стокса не могут быть решены в общем виде. Получены решения этой сложной системы уравнений только для некоторых частных случаев. Так, для установившегося ламинарного движения жидкости решение уравнений Навье – Стокса позволяет вывести уравнение Пуазейля.

В большинстве же наиболее важных для промышленной практики случаев применение уравнения Навье – Стокса становится возможным либо при ряде допущений, либо при преобразовании этих уравнений методами теории подобия.