

## Минимум задач к экзамену по УМФ

1. Вычислить

$$\int_0^{+\infty} x^5 \exp(-x^5) dx.$$

2. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^5 \delta'(x^2 - 9) dx.$$

3. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0; y(2) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = x - 1$ .

4. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(3) = 0.$$

5. Найти решение задачи Коши

$$x u_x - y u_y = 0, \quad u|_{y=1} = x.$$

6. Определить тип и найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

$$u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} + u_x + 5u_y = 0.$$

7. Найти общее решение уравнения

$$x y'' - \left(1 + \frac{1}{x}\right) y' + \left(\frac{1}{2x} - \frac{4}{x^2}\right) y = 0.$$

Указание: сделать замену переменных  $y = e^{-x/2} z$ .

8. Выразить функции Бесселя  $N_{3/2}(x)$ ,  $K_{3/2}(x)$  через элементарные функции.

9. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u(x, 0) = 0; \quad u_t(t, 0) = \sin(2\pi t).$$

10. Решить задачу о колебаниях струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если  $u|_{t=0} = A$ ;  $u_t|_{t=0} = 0$ .

11. Функцию  $f(x) = x^3 + 1$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, 1)$  при  $\nu = 0$ .

12. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} = y; u|_{x=1} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u|_{y=1} = x.$$

13. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса 1 с центром в начале координат, такую, что  $u|_{r=1} = \sin^2 \varphi$ .

14. Цилиндр, радиус основания которого  $b$  и высота  $h$ , имеет температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную нулю. Температура верхнего основания  $T$ . Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

15. Найти явный вид полиномов

$$P_3(x), P_4(x), H_3(x), H_4(x), L_3(x), L_2^2(x), L_3^1(x).$$

16. Функцию  $f(x) = x^5$  разложить в ряд Фурье по полиномам Лежандра на интервале  $(-1, 1)$ , по полиномам Эрмита на интервале  $(-\infty, \infty)$ , по полиномам Лагерра на интервале  $(0, \infty)$ .

### Билет N 2012

1. Самосопряженный вид дифференциального уравнения. Задача Штурма-Лиувилля для линейных дифференциальных уравнений второго порядка.  
(8 баллов)
2. Асимптотика и графики функций Бесселя первого и второго рода.  
(8 баллов)
3. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра  $u(r, z)$  с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ , если его основания теплоизолированы, а температура в каждой точке боковой поверхности равна  $T$ . (14 баллов)
4. Найти решение задачи Коши

$$yu_x - xyu_y = 2xu, \quad u|_{x=2} = \frac{y}{2}.$$

(12 баллов)