

### Вариант 1

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ .

2. Найти

$$\int_0^2 x^4 \sqrt{4-x^2} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^0 2^x \delta(\cos(2x)) dx.$$

4. Найти

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{x^4}{a^4}}}{a}.$$

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$a) \quad y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0, \quad y(0) = 0 = y(a);$$

$$b) \quad y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(1/3) + 3y(1/3) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x - yu_y + zu_z = 0.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - yu_y = 0, \quad u|_{y=1} = x.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

$$a) \quad 3u_{xx} + 8u_{xy} + 4u_{yy} = 0;$$

$$б) \quad 4u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} - 10u_x + 5u_y = 0.$$

9. Вычислить

$$\int x J_0(x) dx.$$

10. Найти изображение функции  $J_1(t)$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t (t - \tau) J_0(2\sqrt{\tau}) d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = 1$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, \pi)$  при  $\nu = 0$ .

13. Вычислить

$$\int_0^t (t - \tau)^3 L_n(\tau) d\tau.$$

14. Решить задачу о колебаниях струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если  $u|_{t=0} = A \sin(\pi n x / l)$ ;  $u_t|_{t=0} = 0$ .

15. Найти решение смешанной задачи

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + x + 2t; & 0 < x < 1; \\ u|_{x=0} &= u|_{x=1} = t; & u|_{t=0} &= \sin \pi x. \end{aligned}$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0; & 0 \leq x \leq 1; & & 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} &= y; & u|_{x=1} &= 0; & u|_{y=0} &= 0; & u|_{y=1} &= x. \end{aligned}$$

17. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $b$  с центром в начале координат, такую, что  $\partial u / \partial r|_{r=b} = \sin^3 \varphi$ .

18. Цилиндр, радиус основания которого  $b$  и высота  $h$ , имеет температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную нулю. Температура верхнего основания есть функция  $A(b^2 - r^2)$ . Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

19. Определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны  $0 \leq x \leq q$ ;  $0 \leq y \leq p$  с закрепленным краем для случая, когда начальное отклонение мембраны равно  $\sin(\pi x / q) \sin(\pi y / p)$ , а начальная скорость равна нулю.

20. Дан тонкий стержень  $0 < x < l$ , боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры  $u(x, t)$  в стержне, если левый конец стержня теплоизолирован, правый поддерживается при постоянной температуре  $u_2$ , а начальная температура равна  $Ax/l$ , где  $A = \text{const}$ .

21. Поставить краевую задачу об остывании однородного шара радиусом  $b$  с центром в начале координат, если он нагрет до температуры  $u_0$ , поверхность шара теплоизолирована, а в каждой точке этого шара вследствие химической реакции поглощается количество тепла, пропорциональное температуре  $u$  в этой точке.

## Вариант 2

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$

2. Найти

$$\int_0^3 x^6 \sqrt{9-x^2} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} \delta(\cos(\pi x)) dx.$$

4. Найти

$$(x|x|)''$$

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$a) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y(\pi) = 0;$$

$$b) \quad y'' + 2\frac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(1) + y(1) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x - yu_y + zu_z = u.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$u_x + (2e^x - y)u_y = 0, \quad u|_{x=0} = y.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

$$a) \quad u_{xx} + 36u_{xy} + 243u_{yy} = 0;$$

$$б) \quad u_{xx} - 8u_{xy} + 16u_{yy} + 3u_x - 12u_y = 0.$$

9. Найти общее решение уравнения

$$xy'' - \left(1 + \frac{1}{x}\right)y' + \left(\frac{1}{2x} - \frac{4}{x^2}\right)y = 0.$$

Указание: сделать замену переменных  $y = e^{-x/2}z$ .

10. Найти изображение функции  $J_2(t)$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t \cos(t-\tau)J_0(\tau) d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = x^2 + 1$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, 1)$  при  $\nu = 0$ .

13. Функцию  $f(x) = x^p$  разложить в ряд Фурье на интервале  $(0, \infty)$  по полиномам Лагерра.

14. В полуполосе  $0 < x < l, 0 < t$  решить смешанную задачу

$$\begin{aligned}u_{tt} &= a^2 u_{xx}; & u_x(0, t) &= u(l, t) = 0; \\u(x, 0) &= 0; & u_t(t, 0) &= \sin(2\pi x/l).\end{aligned}$$

15. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned}u_t - u_{xx} &= xt(2 - t), & 0 < x < \pi; \\u_x|_{x=0} &= t^2; & u_x|_{x=\pi} &= t^2; & u|_{t=0} &= \cos 2x.\end{aligned}$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0; & 0 \leq x \leq 1; & & 0 \leq y \leq 2; \\u|_{x=0} &= y; & u|_{x=1} &= 1; & u|_{y=0} &= x; & u|_{y=2} &= 0.\end{aligned}$$

17. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса 1 с центром в начале координат, такую, что  $u|_{r=1} = \sin^2 \varphi$ .

18. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра  $u(r, z)$  с радиусом основания  $b$  и высотой  $h$ , если температура верхнего и нижнего оснований равна нулю, а температура в каждой точке боковой поверхности зависит только от расстояния этой точки до нижнего основания (т.е. от  $z$ ).

19. В однородной прямоугольной мембране  $0 \leq x \leq q; 0 \leq y \leq p$  часть границы  $x = q, 0 \leq y < p$  и  $y = p, 0 \leq x < q$  свободна, а остальная часть закреплена. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные начальным отклонением  $Axy, A = \text{const}$ .

20. Начальная температура однородного шара радиуса  $b$  равна  $T$ . Найти температуру шара при  $t > 0$ , если поверхность шара поддерживается при постоянной температуре  $T_0$ .

21. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня  $0 \leq x \leq l$  с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня поддерживается постоянный тепловой поток.

### Вариант 3

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-8}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)$

2. Найти

$$\int_0^1 \sqrt{x^3 - x^5} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^6 e^{2x} \delta(\sin x) dx.$$

4. Найти

$$\lim_{a \rightarrow +0} \frac{a^5}{a^6 + x^6}.$$

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$a) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y'(1/2) = y(1) = 0.$$

$$b) \quad y'' + 2\frac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad |y(0)| < \infty, \quad y(\pi) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$yu_x - xu_y = 0.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - yu_y + zu_z = 0, \quad u|_{x=1} = y + z.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду

$$a) \quad 49u_{xx} + 28u_{xy} + 3u_{yy} = 0;$$

$$б) \quad u_{xx} - 12u_{xy} + 36u_{yy} + 2u_x - 12u_y = 0.$$

9. Вычислить

$$\int \frac{J_n(x)}{x^3} dx.$$

10. Найти изображение функции  $J_3(t)$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t \sin(t - \tau) J_0(\tau) d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = x^4$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, 2)$  при  $\nu = 2$ .

13. Вычислить

$$\int_0^t (t - \tau)^2 L_n(\tau) d\tau.$$

14. Решить задачу о колебаниях струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное отклонение имеет форму ломаной, где  $(0, 0)$ ,  $A(l/2, h)$ ,  $B(l, 0)$ .

15. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= t, & 0 < x < \pi; \\ u_x|_{x=0} &= t^2; & u_x|_{x=\pi} &= t^2; & u|_{t=0} &= \cos 2x. \end{aligned}$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0; & 0 \leq x \leq 1; & & 0 \leq y \leq 2; \\ u_x|_{x=0} &= 0; & u_x|_{x=1} &= 1; & u|_{y=0} &= x; & u|_{y=2} &= 0. \end{aligned}$$

17. Найти функцию, гармоническую в круговом секторе  $0 < r < b$ ,  $0 < \varphi < \alpha$  и такую, что  $u_\varphi(r, 0) = u_\varphi(r, \alpha) = 0$ ,  $u(b, \varphi) = V\varphi$ , где  $V = \text{const}$ .

18. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра  $u(r, z)$  с радиусом основания 2 и высотой 1, если его основания теплоизолированы, а температура в каждой точке боковой поверхности равна  $2z$ .

19. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны  $0 < x < p$ ;  $0 < y < q$ , закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = Axy(x-p)(y-q); \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad A = \text{const}.$$

20. На поверхности неограниченного кругового цилиндра с радиусом основания  $b$  поддерживается все время нулевая температура. Найти распределение температуры внутри цилиндра в момент времени  $t > 0$ , если  $u|_{t=0} = AJ_0(\mu_k^{(0)} r/b)$ , где  $\mu_k^{(0)}$  – положительный корень уравнения  $J_0(\mu) = 0$ .

21. Поставить краевую задачу о колебаниях круглой однородной мембраны, закрепленной по контуру, в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости. К поверхности мембраны приложена внешняя сила плотностью  $f(r, \varphi, t)$ , действующая перпендикулярно плоскости невозмущенной мембраны. Начальные скорости и начальные отклонения отсутствуют.

### Вариант 4

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^a x^{2n} \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a > 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

3. Доказать равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} = \sqrt{\pi} \delta(x).$$

4. Вычислить

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x} \delta(x^2 - 9) dx.$$

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(\pi) = y(2\pi) = 0.$

b)  $(xy')' + \frac{n^2}{x} y' + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < 1, \quad |y(0)| < \infty, \quad y(1) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$u_x + yu = 0.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$2\sqrt{x}u_x - yu_y = 0, \quad u|_{x=1} = yz.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду

a)  $4u_{xx} + 3u_{xy} - u_{yy} = 0;$

б)  $36u_{xx} + 12u_{xy} + u_{yy} + 18u_x + 3u_y = 0.$

9. Вычислить

$$\int J_1(x) dx.$$

10. Найти изображение функции  $J_0(t)$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t \frac{J_0(t-\tau)J_1(\tau)}{\tau} d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = x^4 + x^2$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, 2)$  при  $\nu = 2$ .

13. Пользуясь теоремами смещения и дифференцирования оригинала, доказать, что

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

14. В полуполосе  $0 < x < l$ ,  $0 < t$  для уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = x, \\ u_t(x, 0) = \sin(\pi x/2l) + \sin(3\pi x/2l). \end{aligned}$$

15. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} + u; \quad 0 < x < 2; \quad t > 0; \\ u|_{x=0} = 2t; \quad u|_{x=2} = 0; \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u_x|_{x=0} = 0; \quad u_x|_{x=1} = 0; \quad u|_{y=0} = x; \quad u|_{y=1} = x. \end{aligned}$$

17. Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = \cos^2 \varphi$ ,  $u|_{r=2} = \sin^2 \varphi$ .

18. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра  $u(r, z)$  с радиусом основания 1 и высотой 1, если его основания теплоизолированы, а температура в каждой точке боковой поверхности равна  $z$ .

19. Дана тонкая квадратная пластинка  $0 < x < l$ ,  $0 < y < l$  с начальным распределением температуры  $u|_{t=0} = f(x, y)$ . Края пластинки все время удерживаются при нулевой температуре. Найти температуру любой точки пластины в момент времени  $t > 0$ .

20. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса  $b$ , закрепленной по краю, если

$$u|_{t=0} = A(r^2 - b^2), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

21. Поставить краевую задачу о малых радиальных колебаниях идеального однородного газа, заключенного в сферический сосуд радиуса  $b$ , если начальные скорости и начальные отклонения заданы как функции от  $r$ . Граница непроницаема.



### Вариант 5

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)$
2. Используя гамма-функцию, доказать, что

$$\int_0^1 x^k \ln x dx = \frac{1}{(k+1)^2}, \quad k > -1.$$

3. Доказать равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta(x).$$

4. Вычислить

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \delta(\cos x) dx.$$

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(\pi/2) = y(\pi) = 0.$

b)  $y'' + 2\frac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad |y(0)| < \infty, \quad \pi y'(\pi) + y(\pi) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x - yu_y = 0.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - yu_y + zu_z = u, \quad u|_{x=1} = y + z.$$

8. Найти общее решение уравнения

a)  $25u_{xx} + 20u_{xy} + 3u_{yy} = 0;$

б)  $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$

9. Записать общее решение уравнения

$$y'' + \left(\frac{1}{x} + 2 \operatorname{ctg} x\right)y' - \left(\frac{2}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = z/\sin x$ .

10. Найти изображение функции  $\sqrt{t}J_1(\sqrt{t})$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t J_0(t)J_0(t-\tau)\tau d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = x^4$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, 1)$  при  $\nu = 0$ .

13. Функцию  $f(x) = 5 - 2|x|$  разложить в ряд Фурье–Лежандра на интервале  $(-1, 1)$ .

14. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения  $u_{tt} = 4u_{xx}$  на отрезке  $0 < x < 1$ ;  $t > 0$ , если

$$u(x, 0) = x(x - 1), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(1, t) = 0.$$

15. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u; & 0 < x < 2; & & t > 0; \\ u|_{x=0} &= 2; & u|_{x=2} &= 0; & u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0; & 0 \leq x \leq 1; & & 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} &= 0; & u|_{x=1} &= 2; & u|_{y=0} &= x; & u|_{y=1} &= x. \end{aligned}$$

17. Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = \cos \varphi$ ,  $u|_{r=2} = \sin^2 \varphi$ .

18. Круговой цилиндр, радиус основания которого  $R$ , а высота  $h$ , имеет температуру обеих оснований, равную нулю, а температура боковой поверхности постоянна и равна  $T$ . Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра.

19. Решить задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны  $0 < x < \pi$ ;  $0 < y < \pi$ , закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = 3 \sin x \sin 2y, \quad u_t|_{t=0} = 5 \sin 3x \sin 4y.$$

20. Дан тонкий однородный стержень  $0 < x < l$ , боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры в стержне, если левый конец стержня поддерживается при постоянной температуре  $T$ , а на правый подается постоянный тепловой поток  $Q$  и  $u|_{t=0} = \sin(5\pi x/2l) + 2 \sin(3\pi x/l)$ .

21. Однородный шар радиуса  $b$  с центром в начале координат нагрет до температуры  $T$ . Поставить краевую задачу об остывании шара, когда в шаре имеются тепловые источники постоянной мощности  $Q$ , а на его поверхности  $S$  происходит теплообмен с внешней средой нулевой температуры.

### Вариант 6

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-7}{5}\right)\Gamma\left(\frac{15}{5}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^{\pi/2} (\sin \varphi)^{100} (\cos \varphi)^{25} d\varphi.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \delta(x^2 + 7x - 12) dx.$$

4. Вычислить  $(x \operatorname{sign} x)'$ .

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(\pi/2) = y(3\pi/2) = 0;$

b)  $(2x + 3)^2 y'' + 4(2x + 3)y' + (\lambda + 1)y = 0, \quad y(0) = y(3) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$u_x = u_y.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$u_x + u_y + 2u_z = 0, \quad u|_{x=1} = yz.$$

8. Найти общее решение уравнения

a)  $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x - 3u_y = 0;$

б)  $xu_{xx} - yu_{yy} + (u_x - u_y)/2 = 0, \quad x > 0, \quad y > 0.$

9. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях струны, закрепленной на краях, в среде с сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости.

10. Записать общее решение уравнения

$$y'' + \frac{5}{x}y' + 2xy = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = z/x^2$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t \frac{J_0(t-\tau)J_0(\tau)}{\tau} d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = x^2$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, 1)$  при  $\nu = 0$ .

13. Функцию  $f(x) = 5 + x + x^3$  разложить в ряд Фурье–Лежандра на интервале  $(-1, 1)$ .

14. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1; \quad u_x|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = x^2 - 1.$$

15. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + t; & 0 < x < 2; & & t > 0; \\ u|_{x=0} &= 2; & u|_{x=2} &= 0; & u|_{t=0} &= u_t|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0; & 0 \leq x \leq 3; & & 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} &= 1; & u|_{x=3} &= 0; & u|_{y=0} &= 0; & u|_{y=1} &= x. \end{aligned}$$

17. Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = 0$ ,  $u|_{r=2} = \varphi$ .

18. Круговой цилиндр, радиус основания которого  $R$ , а высота  $h$ , имеет температуру обеих оснований, равную нулю, а температура боковой поверхности равна  $Tz$ . Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра.

19. Найти решение уравнения Лапласа  $\Delta u = 0$  в прямоугольнике  $0 < x < p$ ,  $0 < y < q$ , если:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= A \sin(\pi y/q), & u(p, y) &= 0, \\ u(x, 0) &= B \sin(\pi x/p), & u(x, q) &= 0. \end{aligned}$$

20. Дан неограниченный круговой цилиндр радиуса  $b$ . Найти распределение температуры внутри цилиндра в момент времени  $t > 0$ , если поверхность цилиндра поддерживается при постоянной температуре, а начальная температура внутри цилиндра равна нулю.

21. Найти стационарную температуру внутренних точек полусферы радиуса  $b$ , если сферическая поверхность поддерживается при постоянной температуре  $T$ , а основание полусферы – при нулевой.

### Вариант 7

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{10}} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^6 e^{2x} \delta(x^2 + 2x - 3) dx.$$

4. Вычислить  $(x|x|)''$ .

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(-1) = 0 = y(1);$

b)  $[(1 - x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad |y(-1)| < \infty, \quad |y(1)| < \infty.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(x + 2y)u_x - yu_y = 0.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - yu_y = 0, \quad u|_{x=1} = y^2.$$

8. Найти общее решение уравнения:

a)  $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} - u_x - 4u_y = 0;$

б)  $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - 2yu_y = 0.$

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(4 - \frac{6}{x^2}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = z\sqrt{x}$ .

10. Найти изображение функции  $[J_0(t) - 1]/t$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t (t - \tau)\sqrt{\tau}J_1(2\sqrt{\tau})d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = x^4 + x^2$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, 1)$  при  $\nu = 2$ .

13. Функцию  $f(x) = e^{-x}$  разложить в ряд Фурье на интервале  $(0, \infty)$  по полиномам Лагерра.

14. В полуполосе  $0 < x < l, 0 < t$  решить смешанную задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = A(l - x), \quad A = \text{const.}$$

15. Для уравнения  $u_{tt} = u_{xx} + \cos t$  решить смешанную задачу

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \pi.$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} = 1; u|_{x=3} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u_y|_{y=1} = x. \end{aligned}$$

17. Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = 1 + \cos^2 \varphi$ ,  $u|_{r=2} = \sin^2 \varphi$ .

18. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра  $u(r, z)$  с радиусом основания  $b$  и высотой  $h$ , если основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности  $T$ .

19. Определить поперечные колебания однородной прямоугольной мембраны  $0 \leq x \leq p$ ;  $0 \leq y \leq q$  с закрепленным краем, если колебания вызваны непрерывно распределенной по мембране силой с плотностью  $f(x, y, t) = \exp(-t) \sin(2\pi y/q)$ .

20. В однородном шаре радиуса  $b$ , начиная с момента  $t = 0$ , действуют источники тепла постоянной плотности  $Q$ . Начальная температура шара равна  $T$ . Определить распределение температуры в шаре при  $t > 0$ , если с поверхности шара происходит теплоотдача потоком постоянной мощности  $q$ .

21. Поставить краевую задачу об определении установившейся (стационарной) концентрации неустойчивого газа в цилиндре радиуса  $b$  и высоты  $h$ , если в цилиндре имеются источники газа постоянной мощности  $Q$ , а скорость распада газа пропорциональна его концентрации  $u$ . На основаниях цилиндра концентрация газа поддерживается равной нулю, а боковая поверхность газонепроницаема.

### Вариант 8

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$

2. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-4x^2} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^2 x \delta(4^x - 2^{x+2} + 3) dx.$$

4. Вычислить  $|\sin x|''$ .

5. Найти собственные значения и собственные функции задачи

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(\pi) = y(3\pi/2) = 0;$

b)  $y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad 3y'(3) + y(3) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x + yu_y + zu_z = 0.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x + yu_y + xyu_z = 0, \quad u|_{z=0} = \frac{x^2}{y^2}.$$

8. Найти общее решение уравнения

a)  $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x - 6u_y = 0;$

б)  $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$

9. Записать общие решения уравнения

$$y'' + x^4 y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = z\sqrt{x}, t = x^3$ .

10. Найти изображение функции  $J_2(t)/t$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t (t - \tau) \tau J_2(2\sqrt{\tau}) d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = x^2$  разложить в ряд Дини на интервале  $(0, 1)$  при  $\nu = 2$ .

13. Разложить в ряд Фурье–Лежандра функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ -1, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

14. В полуполосе  $0 < x < l, t > 0$  решить смешанную задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}; \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = 0 \quad u_t(x, 0) = 1.$$

15. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + x; \quad 0 < x < 1, \quad u|_{x=0} = 0; \\ u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 1.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} = 1; u|_{x=3} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u|_{y=1} = x.$$

17. Решить задачу Дирихле  $\Delta u = 0$  с граничными условиями  $u(1, \varphi) = 19 \cos 7\varphi$  в круге  $0 \leq r < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi$ .

18. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра  $u(r, z)$  с радиусом основания  $b$  и высотой  $h$ , если основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности есть  $z$ .

19. В однородной прямоугольной мембране  $0 \leq x \leq p; 0 \leq y \leq q$  часть границы  $x = 0; 0 \leq y < q$  свободна, а остальная часть закреплена. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные начальным отклонением  $u(x, y, 0) = \cos(\pi x/2p) \sin(\pi y/q)$ , начальные скорости отсутствуют.

20. Решить задачу о колебаниях однородной струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами под действием непрерывно распределенной силы с плотностью  $p(x, t) = A \rho \sin \omega t, \omega \neq k\pi a/l (k = \overline{1, \infty})$ . Начальные условия нулевые.

21. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня  $x = 0, x = l$  с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня происходит конвективный теплообмен со средами заданной температуры.



### Вариант 9

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)$

2. Вычислить

$$\int_{-1}^1 (1+x)^{10}(1-x)^{20} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(4^x - 2^{x+2} + 3) dx.$$

4. Вычислить  $(e^{-|x+a|} \sin x)''$ .

5. Найти собственные значения и собственные функции задачи

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(1/2) = y(3/2) = 0;$

b)  $(xy')' + \frac{4}{x}y' + \lambda xy = 0, \quad y(0) < \infty, \quad y(1) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(x-z)u_x + (y-z)u_y + 2zu_z = 0.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - u = 0, \quad u|_{x=1} = \sin y.$$

8. Найти общее решение уравнения:

a)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x - 4u_y = 0;$

б)  $\frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

9. Записать общие решения уравнений

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)y = 0; \quad x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0.$$

10. Найти изображение функции  $J_3(t)/t$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t \sin(t-\tau) J_1(\tau) d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = 1$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, \pi/2)$  при  $\nu = 0$ .

13. Найти изображение функции  $x^\alpha L_n^\alpha(x)$ .

14. Решить задачу о колебаниях струны  $0 < x < l$  с закрепленными концами, если в начальном положении струна находится в покое, а

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} G_0, & x \in [\alpha, \beta]; \\ 0, & x \notin [\alpha, \beta], \end{cases} \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq l.$$

15. В полуполосе  $0 < x < l, t > 0$  решить смешанную задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + x + 1; \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = t; \quad u(x, 0) = \sin(\pi x/2l).$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} = 1; u|_{x=3} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u_y|_{y=1} = 0. \end{aligned}$$

17. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  и такую, что  $u_r|_{r=R} = A \cos 2\varphi$ .

18. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра с радиусом  $b$  и высотой  $h$ , если к нижнему основанию  $z = 0$  подводится постоянный тепловой поток  $Q$ , верхнее основание и боковая поверхность поддерживается при нулевой температуре .

19. В однородной прямоугольной мембране  $0 \leq x \leq p$ ;  $0 \leq y \leq q$  часть границы  $x = 0$ ,  $0 \leq y < q$  свободна, а остальная часть закреплена. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные начальным распределением скоростей  $u_t(x, y, 0) = A(p - x) \sin(\pi y/q)$ .

20. Определить температуру в однородном прямоугольном бесконечном стержне  $0 \leq x \leq p$ ;  $0 \leq y \leq q$ ,  $-\infty < z < \infty$ , если температура поверхности стержня поддерживается равной нулю. Начальная температура стержня – произвольная функция  $f(x, y)$ .

21. Сформулировать задачу о продольных колебаниях однородного упругого стержня постоянного сечения  $S$  длины  $l$  при заданных начальном отклонении и скорости, если концы стержня закреплены упруго, т.е. испытывают сопротивление, пропорциональное их отклонению.

Вариант 10

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)$
2. Вычислить интеграл

$$\int \int_D x^2 y^2 dx dy,$$

где  $D$  — треугольник, ограниченный полуосями и прямой  $x + y = 1$ .

3. Вычислить

$$\int_{-1}^8 \sin x \delta(x^2 - 5x) dx.$$

4. Вычислить

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi \varepsilon x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}.$$

5. Найти собственные значения и собственные функции задачи

$$a) y'' + \lambda y = 0, \quad y'(\pi) = y(3\pi/2) = 0;$$

$$b) y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad 3y'(3/2) + 2y(3/2) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$yu_x + xu_y = x - y.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$y^2 u_x + xy u_y = x, \quad u|_{x=0} = y^2.$$

8. Найти общее решение уравнения:

$$a) 4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 8u_x + 4u_y = 0;$$

$$б) (x - y)u_{xy} + u_x - u_y = 0.$$

9. Показать, что

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sh} x, \quad K_{1/2}(x) = \sqrt{2\pi x} e^{-x}.$$

10. Найти изображение функции  $e^{-t} J_0(t)$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t J_0(a\tau) J_0(a(t - \tau)) d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = 2x^5$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, 2)$  при  $\nu = 3$ .

13. Разложить функцию  $f(x) = |x|$  в ряд Фурье–Лежандра.

14. В полуполосе  $0 < x < l, t > 0$  решить смешанную задачу

$$u_t = a^2 u_{xx}; \quad u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = Ax.$$

15. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} - 3x - t; \quad 0 < x < \pi;$$
$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = \pi t; \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = x.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1;$$
$$u_x|_{x=0} = 0; u_x|_{x=1} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u|_{y=1} = x.$$

17. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  и такую, что  $u_r|_{r=R} = A \cos 4\varphi$ .

18. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра с радиусом  $r$  и высотой  $h$ , если к верхнему основанию подводится постоянный тепловой поток  $Q$ , нижнее основание и боковая поверхность поддерживается при нулевой температуре.

19. В однородной прямоугольной мембране  $0 \leq x \leq p$ ;  $0 \leq y \leq q$  часть границы  $x = 0, 0 \leq y \leq q$  свободна, а остальная часть закреплена. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные распределенной по мембране поперечной силой с плотностью  $f(x, y, t) = B(p - x) \sin(\pi y/q) \sin t$ .

20. В однородном шаре радиуса  $b$  начиная с момента  $t = 0$  действуют источники тепла постоянной мощности  $Q$ . Начальная температура шара равна  $T$ . Найти распределение температуры в шаре при  $t > 0$ , если на его поверхности поддерживается постоянная температура  $u_0$ .

21. Поставить задачу об определении температуры в бесконечном теплоизолированном стержне, по которому с момента  $t > 0$  в положительном направлении со скоростью  $v$  начинает двигаться точечный тепловой источник, дающий  $q$  единиц тепла в единицу времени.

Вариант 11

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-9}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)$

2. Показать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi/8}{\sqrt{2}}.$$

3. Вычислить

$$\int_{-1}^8 x \delta(x^2 - 5x + 6) dx.$$

4. Показать, что

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x).$$

5. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(3/4) = y(5/4) = 0;$

b)  $y'' + \frac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi/3, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(\pi/3) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$2xu_x + (y - x)u_y = x^2.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - u = 0, \quad u|_{x=1} = y.$$

8. Найти общее решение уравнения:

a)  $u_{xx} - 10u_{xy} + 25u_{yy} + 2u_x - 10u_y = 0;$

б)  $u_{xy} + yu_x + xu_y + xyu = 0.$

9. Найти общее решение уравнения  $xy'' + 7y' + xy = 0$ .

10. Найти изображение функции  $J_1(t) \operatorname{sh} t$ .

11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t \frac{J_1(\tau) J_3(t - \tau)}{\tau(t - \tau)} d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = x^2$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, \pi)$  при  $\nu = 0$ .

13. Из формулы Родрига получить представление полиномов Лагерра

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)(-x)^k}{\Gamma(k + \alpha + 1)k!(n - k)!}.$$

14. Дан тонкий однородный стержень  $0 < x < l$ , боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры в стержне, если концы стержня имеют постоянную температуру  $u(0, t) = u(l, t) = u_1$ , а начальная температура задается формулой  $u(x, 0) = Ax(l - x)$ , где  $A = \text{const}$ . Найти  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ .

15. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + x - 4t + 1;$$

$$0 < x < 1, \quad u|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = 2t; \quad u|_{t=0} = 0.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u|_{x=0} = 0; u|_{x=3} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u_y|_{y=1} = x.$$

17. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  и такую, что  $u|_{r=R} = A$ .

18. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра с радиусом  $r$  и высотой  $h$ , если к верхнему основанию подводится постоянный тепловой поток  $Q$ , температура нижнего основания  $T$ , а боковая поверхность поддерживается при нулевой температуре.

19. В однородной прямоугольной мембране  $0 \leq x \leq p$ ;  $0 \leq y \leq q$  часть границы  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq q$  свободна, а остальная часть закреплена. Найти поперечные колебания мембраны, вызванные распределенной по мембране поперечной силой с плотностью  $f(x, y, t) = B(p - x) \sin(\pi y/q) \sin t$ .

20. Решить задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса  $b$ , закрепленной по краю, если начальное отклонение имеет форму параболоида вращения, начальная скорость равна нулю.

21. Поставить краевую задачу об остывании тонкого однородного кольца радиуса  $b$ , на поверхности которого происходит конвективный теплообмен со средой, имеющей заданную температуру. Неравномерностью распределения температуры по толщине кольца пренебречь.

Вариант 12

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-8}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)$
2. Используя гамма-функцию, найти

$$\int_0^{\infty} x^8 e^{-x^2} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^0 e^x \delta(\sin 2x) dx.$$

4. Показать, что  $\rho(x)\delta'(x) = \rho'(0)\delta(x) + \rho(0)\delta'(x)$ , где  $\rho(x)$ ,  $\rho'(x)$  — гладкие функции.

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y'(3/4) = y(5/4) = 0$ ;

b)  $y'' + 2\frac{y'}{x} + \lambda y = 0$ ,  $0 < x < \pi/2$ ,  $|y(0)| < \infty$ ,  $y'(\pi/2) = 0$ .

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xyu_x - x^2u_y = yx.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - 2yu_y = x^2 + y^2, \quad u|_{y=1} = x^2.$$

8. Найти общее решение уравнения:

a)  $u_{xx} + 28u_{xy} + 147u_{yy} = 0$ ;

б)  $yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} = 0$ ,  $x > -y$ .

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(\frac{1}{x} - 2 \operatorname{ch} x\right)y' + \left(1 - \frac{2}{x^2} + \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh} x - \frac{\operatorname{ch} x}{x}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = e^{\operatorname{sh} x}$ .

10. Найти изображение функции  $J_0(t) \sin t$ .
11. Используя теорему умножения, вычислить интеграл

$$\int_0^t \frac{J_0(\tau)J_1(t - \tau)}{\tau(t - \tau)} d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = x^2$  разложить в ряд Дини на интервале  $(0, 1)$  при  $\nu = 0$ .



13. Вычислить

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sqrt{\pi} - |x|) P_n(x/\pi) dx.$$

14. Стержень длиной  $l$ , один конец которого  $x = 0$  закреплен, находится в состоянии покоя. В момент времени  $t = 0$  к его свободному концу  $x = l$  приложена сила  $Q = \text{const}$ , действующая вдоль стержня. Найти смещение  $u(x, t)$  стержня.

15. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx} + 6u + x^2 \\ 0 < x < 1, \quad u_x|_{x=0} = 1, \quad u_x|_{x=1} = 2\pi t + 1; \quad u|_{t=0} = x.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} = 0; u_x|_{x=3} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u|_{y=1} = 1.$$

17. Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = 2\varphi$ ,  $u|_{r=2} = 1\varphi$ .

18. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра с радиусом  $b$  и высотой  $h$ , если к нижнему основанию  $z = 0$  подводится постоянный тепловой поток  $Q$ , верхнее основание поддерживается при нулевой температуре, а на боковой поверхности происходит теплообмен со средой нулевой температуры.

19. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения  $u_{tt} = \Delta u$  в прямоугольнике  $0 < x < 5$ ,  $0 < y < 3$ ,  $t > 0$ , если

$$u_{t=0} = xy(5-x)(3-y), \\ u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=5} = u|_{y=3} = 0.$$

20. Дан тонкий однородный стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры  $u(x, t)$  в стержне, если концы стержня теплоизолированы, а начальная температура задается формулой

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & 0 < x < l/2, \\ 0, & l/2 < x < l, \end{cases} \quad A = \text{const.}$$

21. Сформулировать краевую задачу о малых продольных колебаниях упругого однородного стержня переменного сечения  $S = S(x)$  длины  $l$  при произвольных начальных условиях, если стержень имеет форму усеченного конуса с радиусами оснований  $r$  и  $b$ ,  $r < b$ , которые закреплены.

Вариант 13

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$

2. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-ax^2} dx, \quad a > 0.$$

3. Вычислить

$$\int_{-1}^1 e^{2x} \delta(x^2 - 9) dx.$$

4. Показать, что  $x\delta^{(m)}(x) = -m\delta^{(m-1)}(x)$ ,  $m = 1, 2, \dots$

5. Найти собственные значения и собственные функции задачи

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(1/4) = y(1/2) = 0;$

b)  $(xy')' + \frac{n^2}{x}y' + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < 1, \quad |y(0)| < \infty, \quad y(1) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x + 2yu_y = x^2y + u.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - u = 0, \quad u|_{x=1} = y.$$

8. Найти общее решение уравнения:

a)  $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0;$

б)  $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0.$

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(2 + \frac{1}{x}\right)y' - \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = e^{-x}z$ .

10. Найти изображение функции  $J_0(t) \cos t$ .

11. Используя формулу Парсеваля, вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{J_0(t) - \cos t}{t} dt.$$

12. Функцию  $f(x) = x^\nu$  разложить в ряд Фурье на интервале  $(0, 1)$  по системе  $(J_\nu(\gamma_n x))$ , если  $\gamma_n$  — нули  $J'_\nu(x)$ .

13. Вычислить

$$\int_0^\pi x P_n(x/\pi) dx.$$

14. Решить задачу о свободных колебаниях однородной струны, один конец которой  $x = 0$  закреплен, а другой  $x = l$  свободен, если

$$u(x, 0) = \sin \frac{5\pi}{2l}x, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l}x.$$

15. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + 2t - 6x; \quad 0 < x < \pi/2;$$
$$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi/2} = t^2 + \pi/2, \quad u|_{t=0} = x.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 1;$$
$$u|_{x=0} = y; u|_{x=3} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u_y|_{y=1} = 0.$$

17. Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = 1$ ,  $u|_{r=2} = 0$ .

18. Круговой цилиндр, радиус основания которого  $R$ , а высота  $h$ , имеет температуру обеих оснований, равную нулю, а температура боковой поверхности равна  $T$ . Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра.

19. Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны  $0 < x, y < p$ , закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{p}; \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

20. Начальная температура однородного бесконечного прямоугольного стержня  $0 \leq x \leq p$ ;  $0 \leq y \leq q$ ,  $-\infty < z < \infty$  является произвольной функцией  $f(x, y)$ . Определить температуру в стержне при  $t > 0$ , если часть поверхности стержня  $x = 0$ ,  $0 < y < q$  теплоизолирована, а остальная поддерживается при нулевой температуре.

21. Пренебрегая реакцией окружающей среды, поставить краевую задачу о поперечных колебаниях однородной прямоугольной мембраны  $0 < x < p$ ;  $0 < y < q$  с закрепленным краем, если в начальный момент времени  $t = 0$  мембрана получает поперечный сосредоточенный импульс  $I$  в точке  $(x_0, y_0)$ ,  $0 < x_0 < p$ ,  $0 < y_0 < q$ , а начальное положение произвольно.

Вариант 14

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{-1}{3}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x^5}}{(1+x)^2} dx.$$

Сделать замену переменных  $x = t/(1-t)$ .

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + x^3)\delta(x^3 - x)dx.$$

4. Показать, что  $x^m\delta^{(m)}(x) = (-1)^m m! \delta(x)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y'(\pi/2) = y(3\pi/4) = 0$ ;

b)  $y'' + \operatorname{ctg} x y' + \lambda y = 0$ ,  $|y(0)| < \infty$ ,  $|y(\pi)| < \infty$ .

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y + u^2 = 0.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x + yu_y = u - xy, \quad u|_{x=2} = y^2 + 1.$$

8. Найти общее решение уравнения:

a)  $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 12u_x - 4u_y = 0$ ;

б)  $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$   $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ .

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' - \left(4 + \frac{1}{x}\right)y' + \left(3 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = e^{-2x}z$ .

10. Найти изображение функции  $I_0(t)$ .

11. Используя формулу Парсеваля, вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} t^{-3/2} J_{1/2}(t) dt.$$

12. Вычислить

$$\int_0^5 x^2 P_n(x/5) dx.$$

13. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 < x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

разложить в ряд Фурье на интервале  $(-1, 1)$  по полиномам Лежандра.

14. В полуполосе  $0 < x < l, t > 0$  для уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_x(0, t) = u(l, t) = 0; \quad u(x, 0) &= \cos \frac{\pi x}{2l}; \\ u_t(x, 0) &= \cos \frac{3\pi x}{2l} + \cos \frac{5\pi x}{2l}. \end{aligned}$$

15. Решить смешанную задачу

$$u_t = u_{xx}; \quad 0 < x < 1; \quad u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=1} = 0, \quad u|_{t=0} = 0.$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} = 1; u|_{x=3} = 2; \quad u_y|_{y=0} = 0; u_y|_{y=1} = 0. \end{aligned}$$

17. В круговом секторе  $0 < r < b, 0 < \varphi < \alpha$  найти гармоническую функцию, удовлетворяющую краевым условиям  $u(r, 0) = u(r, \alpha) = 0, u(b, \varphi) = \varphi$ .

18. Круговой цилиндр, радиус основания которого  $R$ , а высота  $h$ , имеет температуру обеих оснований, равную нулю, а температура боковой поверхности равна  $z$ . Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра.

19. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} - 9u = 4 \sin^2 x - 2; \quad 0 < x < \pi; \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 2\pi, \quad u|_{t=0} = x^2 + 2. \end{aligned}$$

20. Решить задачу о колебаниях однородной круглой мембраны радиуса  $b$ , закрепленной по краю, если эти колебания вызваны равномерно распределенным давлением  $p = p_0 \sin \omega t$ , приложенным к одной стороне мембраны. Предполагается, что среда не оказывает сопротивления и что  $\omega \neq a\alpha_n^0/b$ , где  $\alpha_n^0$  ( $n = \overline{1, \infty}$ ) – положительные корни уравнения  $J_0(\alpha) = 0$  (нет резонанса).

21. Внутри однородного и изотропного тела  $V$  происходит свободный теплообмен. Между телом и окружающей средой, температура которой равна  $\Psi(t)$ , также происходит свободный теплообмен. Какому уравнению и каким начальным и граничным условиям удовлетворяет температура тела  $u(\vec{r}, t)$ , если в начальный момент оно имело температуру  $f(\vec{r})$ ?

Вариант 15

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$

2. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \delta(x^2 - x) dx.$$

4. Показать, что  $x^k \delta^{(m)}(x) = 0$ ,  $m = 0, k - 1$ .

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y'(3/4) = y(1) = 0$ ;

b)  $y'' + 2\frac{y'}{x} + \lambda y = 0$ ,  $0 < x < \pi/6$ ,  $|y(0)| < \infty$ ,  
 $\pi y'(\pi/6) + 6y(\pi/6) = 0$ .

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$2y^4 u_x - xy u_y = x\sqrt{u^2 + 1}.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$xu_x - u = 0, \quad u|_{x=1} = y + 1.$$

8. Найти общее решение уравнения:

a)  $16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 16u_x - 4u_y = 0$ ;

б)  $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} - 3y^2 u_{yy} - 2xu_x = 0$ .

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' - \left(\frac{1}{x} + 2 \operatorname{ctg} x\right) y' + \left(\frac{\nu^2}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right) y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = z/\sin x$ .

10. Найти изображение функции  $I_1(t)$ .

11. Используя формулу Парсеваля, вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} t^{-3/2} J_{-1/2}(t) dt.$$

12. Функцию  $f(x) = 1$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, e)$  при  $\nu = 0$ .

13. Вычислить

$$\int_0^1 (1-x^2)[P'_n(x)]^2 dx.$$

14. В полуполосе  $0 < x < l, t > 0$  для уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  решить смешанную задачу

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = x; \quad u_t(x, 0) = 1.$$

15. Решить смешанную задачу

$$u_t - u_{xx} - u = xt; \quad 0 < x < \pi; \\ u_x|_{x=0} = t^2, \quad u_x|_{x=\pi} = t^2, \quad u|_{t=0} = 1.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} = 1; u|_{x=3} = 0; \quad u_y|_{y=0} = 0; u|_{y=1} = x.$$

17. Вне круга  $0 \leq r < b$  найти гармоническую функцию, удовлетворяющую граничным условиям

$$u_r(b, \varphi) = \sin 2\varphi.$$

18. Боковая поверхность цилиндра, радиус основания которого  $b$  и высота  $h$ , покрыта непроницаемым для тепла чехлом. Температура нижнего основания поддерживается равной нулю, а температура верхнего основания есть функция  $T$ . Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

19. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения  $u_{tt} = 25\Delta u$  в прямоугольнике

$$u|_{t=0} = xy(4-x)(2-y), \quad u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=4} = u|_{y=2} = 0.$$

20. Дан тонкий однородный стержень длины  $l = 3$ , поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры  $u(x, t)$  в стержне, если  $a = 4$ , концы стержня поддерживаются при нулевой температуре, а начальная температура равна

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^3/3, & 0 \leq x \leq 3/2; \\ 3-x, & 3/2 < x \leq 3. \end{cases}$$

21. Доказать, что уравнение продольных колебаний конического стержня имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где  $u$  есть перемещение сечения стержня с абсциссой  $x$ , а  $h$  – высота конуса.

Вариант 16

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{x^6 dx}{1+x}.$$

Сделать замену переменных  $x = t/(1-t)$ .

3. Вычислить

$$\int_{-6}^6 x \delta(\cos(x)) dx.$$

4. Показать, что  $(\rho(x)\theta(x))' = \rho(0)\delta(x) + \rho'(x)\theta(x)$ , где  $\rho(x)$ ,  $\rho'(x)$  — гладкие функции.

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y'(\pi/4) = y(\pi/2) = 0$ ;

b)  $y'' + 2\frac{y'}{x} + \lambda y = 0$ ,  $0 < x < \pi/6$ ,  $|y(0)| < \infty$ ,  $y(\pi/6) = 0$ .

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$x^2 u u_x + y^2 u u_y = x + y.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$\operatorname{tg} x u_x + y u_y = u, \quad u|_{y=x} = x^3.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

a)  $u_{xx} + 10u_{xy} + 25u_{yy} + u_x + 5u_y = 0$ ;

б)  $75u_{xx} + 20u_{xy} + u_{yy} = 0$ .

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + x^6 y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = z\sqrt{x}$ ,  $x^4 = t$ .

10. Найти изображение функции  $I_2(t)$ .

11. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл

$$\int_0^t J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) \cos \tau d\tau.$$

12. Вычислить

$$\int_0^2 x^2 P_n(x/2) dx.$$



13. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 2\pi] \\ \pi & x \in [-2\pi, 0[ \end{cases}$$

разложить в ряд Фурье на интервале  $(-2\pi, 2\pi)$  по полиномам Лежандра.

14. В полуполосе  $0 < x < l, t > 0$  для уравнения  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$  решить смешанную задачу

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = 1; \quad u_t(x, 0) = 0.$$

15. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t = 9u_{xx}; \quad u(x, 0) &= 8 \sin(3\pi x) + 6 - 2x; \\ u(0, t) = 6, \quad u(4, t) &= -2. \end{aligned}$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} = 1; u_x|_{x=3} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u|_{y=1} = 1. \end{aligned}$$

17. Вне круга  $0 \leq r < 1$  найти гармоническую функцию, удовлетворяющую граничным условиям

$$u_r(1, \varphi) = \sin 4\varphi.$$

18. Боковая поверхность цилиндра, радиус основания которого  $b$  и высота  $h$ , покрыта непроницаемым для тепла чехлом. Температура нижнего основания поддерживается равной нулю, а температура верхнего основания есть функция  $A(r^2 - 2rb)$ . Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

19. Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны  $0 < x, y < p$ , закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{p}; \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

20. Однородная круглая мембрана радиуса  $R$  с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебания мембраны, вызванные постоянной начальной скоростью  $v$  точек мембраны.

21. Поставить краевую задачу о малых продольных колебаниях однородного упругого стержня, один конец которого закреплен, а другой испытывает сопротивление, пропорциональное скорости. Сопротивлением среды пренебречь.

Вариант 17

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-7}{6}\right)\Gamma\left(\frac{25}{6}\right)$

2. Вычислить интеграл

$$\int_0^3 x^6 \sqrt{9-x^2} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_0^6 e^{2x} \delta(\sin 2x) dx.$$

4. Вычислить  $(\theta(-x))'$ .

5. Найти собственные значения и собственные функции задачи

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(3/2) = y(1/2) = 0;$

b)  $y'' + \frac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 2\pi, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(2\pi) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$y u u_x - x u u_y = e^u.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$x u_x - y u_y = u^2(x - 3y), \quad u|_{x=1} = -\frac{1}{y}.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

a)  $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 3u_y = 0;$

б)  $3u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} = 0.$

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(6 - \frac{2}{x^2}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = z\sqrt{x}$ .

10. Найти изображение функции  $I_3(t)$ .

11. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл

$$\int_0^\infty \tau J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)}) d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = 1$  разложить в ряд Фурье на интервале  $(0, 2)$  по ортогональной системе

$$\left\{ \frac{1}{x} \sin\left(\frac{\lambda_n x}{2}\right), n = 1, 2, 3, \dots \right\},$$

где  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  — все положительные корни уравнения  $\operatorname{tg} \lambda = -\lambda/2$ .

13. Вычислить

$$\int_0^{\pi} (\cos^3 \theta - \sin^2 \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

14. Решить задачу о колебаниях струны, закрепленной на концах  $x = 0$ ,  $x = l$ , если в начальный момент времени центру струны сообщается ударный импульс величины  $P$ . Начальное отклонение равно нулю.

15. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{16} u_{xx} + 37 \sin 6t \sin 4x;$$
$$u(x, 0) = 9 \sin 8x + 5\pi - 4x, \quad u(0, t) = 5\pi, \quad u(\pi, t) = \pi.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1;$$
$$u|_{x=0} = 1; u|_{x=1} = 0; \quad u_y|_{y=0} = 0; u|_{y=1} = 1.$$

17. Найти функцию, гармоническую внутри круга радиуса  $R$  и такую, что  $u_r|_{r=R} = A$ .

18. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра с радиусом основания  $b$  и высотой  $h$ , если температура его нижнего основания равна нулю, боковая поверхность свободно охлаждается в воздухе нулевой температуры, а температура верхнего основания постоянна и равна  $u_0$ .

19. Решить задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны  $0 < x, y < p$ , закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{p}; \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

20. Однородная круглая мембрана радиуса  $b$  с центром в начале координат и закрепленным краем совершает поперечные колебания в среде без сопротивления. Определить колебания мембраны, вызванные начальным отклонением  $f(r) = A(b^2 - r^2)$ .

21. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня  $0 \leq x \leq l$  с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная (при  $t = 0$ ) температура равна  $\varphi(x)$ , а концы стержня теплоизолированы.

Вариант 18

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{4+x^3} dx.$$

Сделать замену переменных  $x^3 = 47/(1-t)$ .

3. Вычислить

$$\int_{-3}^3 \delta(\cos x \sin x) dx.$$

4. Вычислить  $(x^3 \operatorname{sign} x)'$ .

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(3\pi/4) = y'(5\pi/2) = 0;$

b)  $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad 1 < x < 2, \quad y(1) = y(2) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(u-y)^2 u_x + x u u_y = xy.$$

7. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$x u u_x + x u u_y = xy$$

и проходящую через заданную кривую  $x^2 + y^2 = 1$ , на которой  $u = 1$ .

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

a)  $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 9u_x - 3u_y = 0;$

б)  $147u_{xx} + 28u_{xy} + u_{yy} = 0.$

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 9xy = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = z\sqrt{x}, x^{3/2} = t$ .

10. Найти изображение функции  $e^{-t} I_0(t)$ .

11. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} \tau J_1(t) \sqrt{t} dt.$$

12. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1, \\ -1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

в ряд по ортогональной системе функций  $\{J_0(\gamma_k^0 \frac{x}{2})\}$ , где  $\gamma_k^0$  — нули функции  $J_0'(\gamma) = 0$ .

13. Вычислить

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\pi + |x|) P_n(x/\pi) dx.$$

14. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned} u_t &= 5u_{xx}; & u(x, 0) &= 19 \sin(3\pi x); \\ u(0, t) &= 0, & u_x(1/2, t) &= 0. \end{aligned}$$

15. Найти решение смешанной задачи

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{4}u_{xx} + 17 \sin 2t \sin 6x; \\ u(x, 0) &= 22 \sin 8x - 5\pi + 4x, & u(0, t) &= -5\pi, & u(\pi, t) &= -\pi. \end{aligned}$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0; & 0 \leq x \leq 2; & & 0 \leq y \leq 1; \\ u|_{x=0} &= 1; & u_x|_{x=2} &= 0; & u|_{y=0} &= 0; & u|_{y=1} &= 2. \end{aligned}$$

17. Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = 2$ ,  $u|_{r=2} = 1$ .

18. Найти стационарную температуру  $u(r, z)$  внутренних точек цилиндра с радиусом основания  $b$  и высотой  $h$ , если его основания теплоизолированы, а температура боковой поверхности есть заданная функция от  $z$ .

19. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра  $0 \leq r \leq b$ , если его начальная температура равна  $u = u_0(1 - r^2/b^2)$ , а на поверхности поддерживается нулевая температура.

20. Найти свободные колебания круглой мембраны радиуса  $b$ , закрепленной вдоль контура, если

$$u|_{t=0} = b(1 - r^2/b^2), \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

21. Внутри однородного и изотропного тела  $V$  происходит свободный теплообмен. Поверхность тела теплоизолирована. Какому уравнению и каким граничным условиям удовлетворяет температура  $u(x, y, z, t)$  точек этого тела.

Вариант 19

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-7}{5}\right)\Gamma\left(\frac{17}{5}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg}^3 x \, dx.$$

Сделать замену переменных  $\operatorname{tg}^2 x = t/(1+t)$ .

3. Вычислить

$$\int_0^{+\infty} (x \sin x) \delta(x^2 + x) dx.$$

4. Вычислить  $(|x|)^{(m)}$ ,  $m = \overline{2, \infty}$ .

5. Найти собственные значения и собственные функции задачи

a)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(\pi/2) = y'(5\pi/4) = 0$ ;

b)  $[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0$ ,  $|y(-1)| < \infty$ ,  $|y(1)| < \infty$ .

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xyu_x + (x - 2u)u_y = yu.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$yu_x - xyu_y = 2xu, \quad u|_{x+y=2} = \frac{1}{y}.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

a)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 2u_x - 2u_y = 0$ ;

б)  $27u_{xx} + 12u_{xy} + u_{yy} = 0$ .

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(\frac{2}{x} - 2 \operatorname{tg} x\right)y' - \left(\frac{2}{x^2} + \frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = z/\cos x$ .

10. Найти изображение функции  $I_1(t) \operatorname{sh} t$ .

11. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл

$$\int_0^t e^{2\tau} J_0(2\sqrt{\tau(t-\tau)}) d\tau.$$

12. Функцию  $f(x) = x^\nu$  разложить в ряд Фурье на интервале  $(0, 1)$  по системе  $(J_\nu(\gamma_n^\nu x))$ , если  $\gamma_n^\nu$  — нули функции  $J_\nu'(x)$ .

13. Показать, что на интервале  $[-1, 1]$  полином  $P_n(x)$  ортогонален любому полиному степени меньше  $n$ .

14. Решить смешанную задачу

$$\begin{aligned}u_t &= 3u_{xx}; & u(x, 0) &= 3 \sin(5\pi x); \\u(0, t) &= 0, & u_x(1, t) &= 0.\end{aligned}$$

15. Найти решение смешанной задачи

$$\begin{aligned}u_t &= \frac{1}{25}u_{xx} + 37 \cos 6t \sin 5x; \\u(x, 0) &= 10 \sin 10x - 5\pi + 4x, & u(0, t) &= -5\pi, & u(\pi, t) &= -\pi.\end{aligned}$$

16. Решить задачу

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0; & 0 \leq x \leq 3; & & 0 \leq y \leq 1; \\u_x|_{x=0} &= 1; & u_x|_{x=3} &= 0; & u|_{y=0} &= 0; & u|_{y=1} &= x.\end{aligned}$$

17. Найти функцию, гармоническую в кольце  $2 < r < 3$  и такую, что  $u|_{r=2} = 1$ ,  $u|_{r=3} = 0$ .

18. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра с радиусом  $b$  и высотой  $h$ , если к нижнему основанию  $z = 0$  подводится постоянный тепловой поток  $Q$ , верхнее основание поддерживается при нулевой температуре, а боковая поверхность теплоизолирована.

19. Найти вынужденные колебания струны с закрепленными концами  $x = 0$ ,  $x = l$ , находящейся под воздействием силы тяжести при отсутствии начальных возбуждений.

20. Найти стационарное распределение температуры внутри бесконечного кругового цилиндра радиуса  $b$ , если на его поверхности поддерживается температура  $A \sin \varphi$  ( $A = \text{const}$ ).

21. Поставить краевую задачу для определения малых отклонений точек струны при  $t = 0$ , если струна натянута с силой  $F_0$  и находится в прямолинейном положении равновесия, а ее концы неподвижно закреплены. В момент  $t = 0$  точкам струны сообщаются начальные отклонения и скорости.

Вариант 20

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{10}{3}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^0 e^x \delta(\sin 3x) dx.$$

4. Вычислить  $(\theta(x) \sin x)'$ .

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

$$a) \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y(-1) = 0 = y(1);$$

$$b) \quad y'' + 2y'/x + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad 2y'(2) + y(2) = 0.$$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$yu_x + uu_y = \frac{y}{x}.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$uu_x + (u^2 - x^2)u_y + x = 0, \quad u|_{y=x^2} = 2x.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

$$a) \quad u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 5u_x + 5u_y = 0;$$

$$б) \quad 12u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

9. Найти изображение функции  $I_0(t) \sin t$ .

10. Пользуясь частным случаем теоремы Эфроса, вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} J_{1/2}(\tau) d\tau.$$

11. Вычислить

$$\int (x^3 + x) J_0(x) dx.$$

12. Функцию  $f(x) = x^3$  разложить в ряд Фурье–Бесселя на интервале  $(0, 2)$  при  $\nu = 3$ .

13. Разложить в ряд Фурье–Лежандра функцию

$$f(x) = 1 + x^5.$$

14. Решить смешанную задачу



$$u_t = 7u_{xx}; \quad u(x, 0) = 12 \cos \pi x; \quad u(0, t) = u_x(7, t) = 0.$$

15. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 26 \cos 5t \sin 4x;$$

$$u(x, 0) = 24 \sin 16x - 4\pi + 5x, \quad u(0, t) = -4\pi, \quad u(\pi, t) = \pi.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 3; \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u|_{x=0} = 0; u|_{x=3} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u_y|_{y=1} = 1.$$

17. Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 2$  и такую, что  $u|_{r=1} = 0$ ,  $u|_{r=2} = 1$ .

18. Цилиндр, радиус основания которого  $b$  и высота  $h$ , имеет температуру нижнего основания, равную нулю. Температура верхнего основания задана функцией  $r^2 - 2b - b^2$ . Боковая поверхность охлаждается в воздухе нулевой температуры. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

19. Найти колебания закрепленной вдоль контура однородной круглой мембраны радиуса  $b$  с центром в начале координат, вызванные постоянной начальной скоростью  $v_0$  точек мембраны.

20. Найти распределение температуры в бесконечном однородном круглом цилиндре радиуса  $b$ , если начальная температура равна  $Ar^2$ ,  $A = \text{const}$ , а на поверхности цилиндра происходит теплообмен со средой, имеющей нулевую температуру.

21. Поставить краевую задачу об определении температуры стержня  $0 \leq x \leq l$  с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах  $x = 0$  и  $x = l$  стержня начиная с момента  $t = 0$  поддерживаются тепловые потоки  $q(t)$  и  $Q(t)$  соответственно.

Вариант 21

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^1 x^3(1-x^3)^{1/3} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \delta(x^2 - 4x) dx.$$

4. Вычислить  $(\theta(x) \cos x)'$ .

5. Найти собственные значения и собственные функции задачи

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(3/4) = y'(5/4) = 0;$

b)  $[(1-x^2)y']' + \lambda y = 0, \quad |y(-1)| < \infty, \quad |y(1)| < \infty.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$\sin^2 u u_x + \operatorname{tg} u u_y = \cos^2 u.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$yu_x - 4xu_y = 0, \quad u|_{y=-x} = -x.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

a)  $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 6u_x - 6u_y = 0;$

б)  $3u_{xx} + 32u_{xy} + 64u_{yy} = 0.$

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(\frac{1}{x} - 2x^2\right)y' - \left(1 - \frac{2}{x^2} - 3x\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = e^{x^{2/3}}z$ .

10. Выразить функции Бесселя  $J_{5/2}(x)$ ,  $N_{5/2}(x)$  через элементарные функции.

11. Найти изображение функции  $I_0(t) \cos t$ .

12. Функцию  $f(x) = x^3$  разложить в ряд Дини на интервале  $(0, 2)$  при  $\nu = 3$ .

13. Разложить функцию  $f(x) = |x| - 2$  в ряд Фурье–Лежандра.

14. Решить смешанную краевую задачу  $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ,  $0 < x < l$ ,

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = x; \quad u_t(x, 0) = 0.$$

15. Найти решение смешанной задачи

$$u_{tt} = \frac{1}{25}u_{xx} + 3 \cos 2t \sin 5x;$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u_x|_{x=0} = 1; u_x|_{x=1} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u|_{y=1} = x.$$

17. Найти функцию, гармоническую в кольце  $1 < r < 3$  и такую, что  $u|_{r=1} = 2 + \cos^2 \varphi$ ,  $u|_{r=3} = \sin^2 \varphi$ .

18. Найти стационарную температуру  $u(r, z)$  внутренних точек цилиндра с радиусом основания  $b$  и высотой  $h$ , если температура нижнего основания равна нулю, боковая поверхность покрыта непроницаемым для тепла чехлом, а температура верхнего основания есть функция от  $r$ .

19. Решить задачу:  $u_{tt} = \Delta u$ ,  $0 < x < \pi$ ,  $0 < y < \pi$ , если

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, \quad u_{t=0} = 3 \sin x \sin 2y, \quad u_t|_{t=0} = 0.$$

20. Найти закон остывания бесконечного цилиндра радиуса  $b$ , если температура в начальный момент равна  $u_0 = J_0(\alpha_1^0 r/b)$ , где  $\alpha_1^0$  – первый положительный корень бесселевой функции  $J_0(\alpha)$ . На поверхности цилиндра поддерживается все время температура, равная нулю.

21. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях прямоугольного однородного упругого стержня в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, при наличии непрерывно распределенной вынуждающей поперечной силы. Концы стержня закреплены.

Вариант 22

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx.$$

Сделать замену переменных  $x^3 = t/(1-t)$ .

3. Вычислить

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \delta(\cos x) dx.$$

4. Вычислить  $(|x| \cos x)''$ .

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + 2y' + (\lambda + 1)y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0;$

b)  $y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad 4y'(4) + y(4) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(x+u)u_x + (y+u)u_y = x+y.$$

7. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$xu_x + (xu+y)u_y = u$$

и проходящую через заданную кривую  $x+y=2u, xy=1$ .

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

a)  $u_{xx} + 14u_{xy} + 49u_{yy} + 2u_x + 14u_y = 0;$

б)  $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0.$

9. Найти общее решение уравнения

$$y'' + \left(b^2 - \frac{3}{4x^2}\right)y = 0.$$

Сделать замену переменных  $y = z\sqrt{x}$ .

10. Показать, что

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad J''_0(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)].$$

11. Найти изображение функции  $I_0(2\sqrt{t})$ .

12. Функцию  $y = x^2$  разложить в ряд Дини на интервале  $(0, \pi)$  при  $\nu = 2$ .

13. Функцию  $f(x) = x^5$  разложить в ряд Фурье по полиномам Эрмита на интервале  $(-\infty, \infty)$ .

14. Решить смешанную задачу для волнового уравнения  $u_{tt} = u_{xx}$  в полуполосе  $0 < x < 3/2, 0 < t < \infty$ , если

$$u(x, 0) = x(x - 3/2), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(3/2, t) = 0.$$

15. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{16}u_{xx} + 50e^{-7t} \sin 4x;$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1;$$
$$u|_{x=0} = 1; u|_{x=1} = 0; \quad u_y|_{y=0} = 0; u_y|_{y=1} = 0.$$

17. Найти гармоническую функцию внутри кольца  $a < r < b$ , удовлетворяющую условиям  $u(a, \varphi) = 0$ ,  $u(b, \varphi) = \cos \varphi$ .

18. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра с радиусом основания  $b$  и высотой  $h$ , если температура его нижнего основания равна нулю, боковая поверхность свободно охлаждается в воздухе нулевой температуры, а температура верхнего основания равна  $z$ .

19. Решить первую смешанную задачу  $u_{tt} = 4\Delta u$ , если

$$u_{t=0} = xy(2-x)(4-y), \quad u_t|_{t=0} = 0,$$
$$u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=2} = u|_{y=4} = 0.$$

20. Найти закон выравнивания заданного осесимметричного начального распределения температуры  $u|_{t=0} = r^2$  в бесконечном цилиндре радиуса  $b$ , боковая поверхность которого теплоизолирована.

21. Поставить краевую задачу о малых поперечных колебаниях прямоугольного однородного упругого стержня, один конец которого закреплен, а к другому приложена поперечная сила, меняющаяся со временем по заданному закону.

Вариант 23

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-5}{3}\right)\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[5]{1-x^5}} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2^x \delta(x^4 - 10x^2 + 9) dx.$$

4. Вычислить  $(|x| \cos x)'''$ .

5. Найти собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(1/4) = y'(1/2) = 0.$

b)  $y'' + \frac{y'}{x} + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 3, \quad |y(0)| < \infty, \quad y'(3) = 0.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(xu + y)u_x + (x + uy)u_y = 1 - u^2.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$y^2 u_x + y u u_y + u^2 = 0, \quad u|_{x=y} = \frac{x-1}{x}.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

a)  $u_{xx} + 12u_{xy} + 36u_{yy} + u_x + 6u_y = 0;$

б)  $3u_{xx} + 20u_{xy} + 25u_{yy} = 0.$

9. Доказать, что

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_{\nu}(x).$$

10. Найти изображение функции  $\sqrt{t} I_1(2\sqrt{t})$ .

11. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-2t} J_0(t) dt.$$

12. Функцию  $f(x) = x^3$  разложить в ряд Дини на интервале  $(0, 2)$  при  $\nu = 3$ .

13. Функцию  $f(x) = e^{-x^2}$  разложить в ряд Фурье на интервале  $(-\infty, \infty)$  по полиномам Эрмита.

14. Решить смешанную задачу

$$u_t = 4u_{xx}; \quad u(x, 0) = 12 \sin(3\pi x) + 5 \sin(4\pi x);$$

$$u(0, t) = u(6, t) = 0.$$

15. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{4}u_{xx} + 24 \sin 5t \sin 2x;$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 2; \quad 0 \leq y \leq 1;$$

$$u|_{x=0} = 1; u_x|_{x=2} = 0; \quad u|_{y=0} = 0; u|_{y=1} = x.$$

17. Найти решение уравнения Лапласа в круговом секторе  $0 < r < 1$ ,  $0 < \varphi < \pi/2$ , на границе которого  $u(1, \varphi) = 8 \sin 7\varphi$ ,  $u(r, 0) = u_\varphi(r, \pi/2) = 0$ .

18. Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра  $u(r, z)$  с радиусом основания  $a$  и высотой  $h$ , если основания цилиндра теплоизолированы, а температура боковой поверхности есть  $z^3$ .

19. Определить температуру шара радиуса  $b$  с центром в начале координат, если на поверхности шара происходит теплообмен с внешней средой, а начальная температура зависит только от расстояния точки до центра шара.

20. Решить первую смешанную задачу  $u_{tt} = 25\Delta u$ , если

$$u_{t=0} = xy(5-x)(2-y), \quad u_t|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{x=0} = u|_{y=0} = u|_{x=5} = u|_{y=2} = 0.$$

21. Найти функцию, удовлетворяющую внутри шара  $0 \leq r < \pi$  уравнению Гельмгольца  $\Delta u + 4u = 0$  и принимающую на границе заданное значение  $u_r|_{r=\pi} = \cos \theta$ .

Вариант 24

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{-11}{3}\right)\Gamma\left(\frac{-2}{3}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-\infty}^{-\infty} x \delta(x^4 - 5x^2 + 4) dx.$$

4. Вычислить  $(|x|)^{(m)}$ ,  $m = \overline{2, \infty}$ .

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(\pi/2) = y'(3\pi/4) = 0$ ;

b)  $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$ ,  $1 < x < 3$ ,  $y(1) = y(3) = 0$ .

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$(y+z)u_x + (z+x)u_y + (x+y)u_z = u.$$

7. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$xu_x + yu_y = y$$

и проходящую через заданную кривую  $y = 2u$ ,  $x + 2y = u$ .

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

a)  $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_x - 2u_y = 0$ ;

б)  $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ .

9. Показать, что

$$J'_0(x) = -J_1(x), \quad J''_0(x) = \frac{1}{2}[J_2(x) - J_0(x)].$$

10. Найти изображение функции  $I_0(2\sqrt{at})$ .

11. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-3t} J_0(2t) dt.$$

12. Функцию  $y = x^2$  разложить в ряд Дини на интервале  $(0, \pi)$  при  $\nu = 0$ .

13. Функцию  $f(x) = x^3$  разложить в ряд Фурье по полиномам Эрмита на интервале  $(-\infty, \infty)$ .

14. Решить смешанную задачу



$$u_t = 16u_{xx}; \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad u(0, t) = u(2, t) = 0.$$

15. Решить смешанную задачу для волнового уравнения  $u_{tt} = 9u_{xx}$  на отрезке, если

$$u(0, t) = -6, \quad u(3, t) = 6, \quad u(x, 0) = 3 \sin(3\pi x) - 6 + 4x, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 2; \quad 0 \leq y \leq 2;$$

$$u_x|_{x=0} = 0; u_x|_{x=2} = 0; \quad u_y|_{y=0} = 0; u|_{y=2} = 1.$$

17. Решить задачу Дирихле  $\Delta u = 0$  с граничными условиями  $u(1, \varphi) = 11 \cos 3\varphi$ ,  $u_\varphi(r, 0) = u(r, \pi) = 0$  в круговом секторе  $0 \leq r < 1$ ,  $0 < \varphi < \pi$ .

18. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра с радиусом  $r$  и высотой  $h$ , если к верхнему основанию подводится постоянный тепловой поток  $Q$ , нижнее основание теплоизолировано, боковая поверхность поддерживается при нулевой температуре.

19. Решить задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u = xz, \quad u|_{r=2} = 0, \quad u|_{r=3} = 0$$

в шаровом слое  $2 < r < 3$ .

20. Начальная температура в однородном цилиндре радиуса  $b$  и высоты  $h$ ,  $r \leq b$ , ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq h$ ) равна  $A(b^2 - r^2)z$ . Определить распределение температуры в этом цилиндре в любой момент времени  $t > 0$ , если боковая поверхность и нижнее основание цилиндра поддерживаются при нулевой температуре, а верхнее основание теплоизолировано.

21. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = u_{xx} + 26e^{-5t} \sin x;$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

Вариант 25

1. Вычислить  $\Gamma\left(\frac{7}{5}\right)\Gamma\left(\frac{27}{5}\right)$

2. Вычислить

$$\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt[7]{1-x^7}} dx.$$

3. Вычислить

$$\int_{-6}^{-6} x^2 \delta(\sin x - 1) dx.$$

4. Вычислить  $(\theta(x) \sin x)''$ .

5. Решить задачу Штурма–Лиувилля

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(3/4) = y'(1) = 0;$

b)  $y'' + y' \operatorname{ctg} x + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad |y(\pi)| < \infty.$

Записать соотношение ортогональности, ортонормировать собственные функции задачи и разложить по ним функцию  $f(x) = 1$ .

6. Найти общее решение уравнения в частных производных первого порядка

$$xu_x + yu_y + (z + u)u_z = xy.$$

7. Найти решение задачи Коши

$$(y + 2u^2)u_x - 2x^2uu_y = x^2, \quad u|_{y=x^2} = x.$$

8. Найти общее решение уравнения, приведя его к каноническому виду:

a)  $16u_{xx} + 8u_{xy} + u_{yy} - 8u_x - 2u_y = 0;$

б)  $3u_{xx} + 16u_{xy} + 16u_{yy} = 0.$

9. Выразить функции Бесселя  $N_{1/2}(x), N_{-1/2}(x), K_{1/2}(x), K_{-1/2}(x)$  через элементарные функции.

10. Найти изображение функции  $\sqrt{t}I_1(2\sqrt{at})$ .

11. Вычислить интеграл

$$\int_0^{\infty} J_0(2t) \sin t dt.$$

12. Функцию  $y = x^2$  разложить в ряд Дини на интервале  $(0, \pi)$  при  $\nu = 2$ .

13. Функцию  $f(x) = x^6$  разложить в ряд Фурье на интервале  $(0, \infty)$  по полиномам Лагерра.

14. Решить смешанную задачу

$$u_t = 9u_{xx}; \quad 0 < x < 4, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} x^2/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 4 - x, & 2 < x \leq 4; \end{cases} \quad u(0, t) = u(4, t) = 0.$$

15. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = \frac{1}{49}u_{xx} + 37e^{-6t} \sin 7x;$$
$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0.$$

16. Решить задачу

$$\Delta u = 0; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq 1;$$
$$u|_{x=0} = 1; u|_{x=1} = 2; \quad u|_{y=0} = 3; u|_{y=1} = 4.$$

17. Решить задачу Дирихле  $\Delta u = 0$  с граничными условиями  $u(1, \varphi) = 19 \cos 7\varphi$  в круге  $0 \leq r < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi$ .

18. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра с радиусом  $r$  и высотой  $h$ , если к верхнему основанию подводится постоянный тепловой поток  $Q$ , температура нижнего основания 0, а боковая поверхность поддерживается при температуре  $T$ .

19. Решить первую смешанную задачу  $u_{tt} = 11\Delta u, 0 < r < 15, 0 < t < \infty$ , если

$$u(r, 0) = \frac{1}{8} \left[ 1 - \left( \frac{r}{15} \right)^2 \right], \quad u_t(r, 0) = u(15, t) = 0.$$

20. Дан однородный шар радиуса  $b$  с центром в начале координат. Найти распределение температуры внутри шара, если внешняя поверхность шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура зависит только от расстояния от центра шара, т.е.  $u|_{t=0} = f(r)$ .

21. Поставить краевую задачу о движении слоя вязкой жидкости между двумя параллельными плоскостями, если одна из них в момент  $t = 0$  начинает двигаться параллельно другой с заданной скоростью, имеющей постоянное направление. Действием силы тяжести пренебречь.