МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

И.И. Фикс

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Специальные функции
Основные уравнения

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 53:51(076)
ББК 22·311я75
Ф48

Фикс И.И.

Ф48 Прикладные задачи математической физики. Специальные функции. Основные уравнения: учебное пособие / И.И. Фикс; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 100 с.

Данное издание представляет собой справочное пособие по уравнениям математической физики. Главы пособия содержат краткие теоретические сведения, таблицы, графики, необходимые для понимания и реализации схем решения основных типовых задач, а также методически разобранные примеры, позволяющие студентам приобрести необходимые навыки в их решении. В начале каждой главы и параграфа указана литература, в которой излагаемые вопросы более глубоко рассмотрены теоретически.

Предназначено для студентов 2-го и 3-го курса технических специальностей ТПУ.

УДК 53:51(076)
ББК 22·311я75

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ
А.В. Шаповалов

Доктор физико-математических наук, профессор СибГМУ
В.В. Свищенко

Г л а в а 1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Цилиндрические функции

[2], ч.3, гл 2, стр. 32 – 108 [4], гл. 6, стр. 234 – 275

1.1. Функции Бесселя 1-го и 2-го рода

Уравнением Бесселя индекса ν называется уравнение

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

или

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \ .$$

Нетривиальные решения этого уравнения называются цилиндрическими функциями. Примерами цилиндрических функций являются функции Бесселя 1-го рода индекса ν, которые выражаются суммой сходящегося степенного ряда

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\ \Gamma(\nu+k+1)}(\frac{x}{2})^{2k+\nu} \ .$$

Поскольку уравнение Бесселя не меняется при замене ν на $-\nu$, то функции $J_{-\nu}$ также являются решениями уравнения Бесселя.

Для нецелых значений ν функции $J_\nu(x)$, $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы и общее решение уравнения (1) может быть записано

$$y(x) = C_1J_\nu(x) + C_2J_{-\nu}(x), \qquad \nu \neq n \ .$$

Функции Бесселя 1-го рода целых индексов линейно зависимы, т.к.

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Для построения фундаментальной системы решений для любых ν вводятся функция Бесселя 2-го рода, или функции Неймана $N_\nu(x)$)

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}.$$

Функции $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ линейно независимы при любых ν и, в силу этого, общее решение уравнения Бесселя произвольного индекса имеет вид

$$y(x) = C_1J_\nu(x) + C_2N_\nu(x) \ .$$

Функции Бесселя полуцелого аргумента выражаются через элементарные функции

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right), \qquad J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\sin x - \frac{\cos x}{x}\right) \ .$$

$$N_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \qquad N_{-1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$$

1.2. Функции Бесселя 3-го рода

Функции

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \qquad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

называются, соответственно, первой и второй функциями Ханкеля или функциями Бесселя третьего рода.

1.3. Модифицированные функции Бесселя

Модифицированным уравнением Бесселя, или уравнением Бесселя мнимого аргумента, называется уравнение

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \ .$$

Нетривиальные решения уравнения называются модифицированными функциями Бесселя 1-го рода

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \ \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

и 2-го рода $K_\nu(x)$ (функция Макдональда)

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \pi\nu} \ .$$

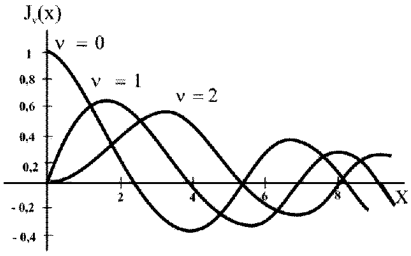
Функции $I_\nu(x)$ и $J_\nu(x)$ связаны соотношением

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ix) \ .$$

Функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ являются линейно независимыми и общее решение модифицированного уравнения Бесселя записывается

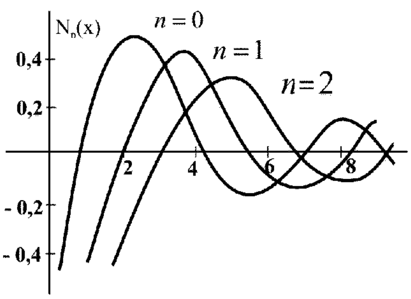
$$y(x) = C_1 I_\nu(x) + C_2 K_\nu(x).$$

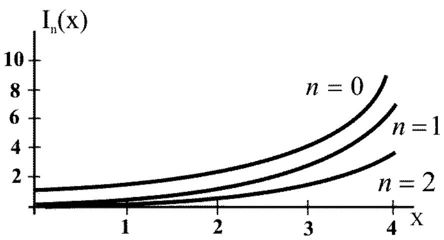
Графики функций Бесселя

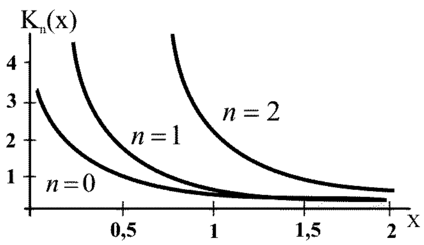


Так как $J_{-n} = (-1)^n J_n$
то графики J_{-n} и J_n совпадают для четных и противоположны для нечетных n
Для нецелых индексов
$J_\nu(0) = 0, \quad J_{-\nu}(0) = \pm\infty$

Т.к. $\lim\limits_{x\to 0} N_\nu(x) = -\infty$,
то функции Неймана не могут быть использованы в качестве решений задачи Штурма–Лиувиля для уравнения Бесселя для областей, которые содержат начало координат







1.4. Примеры записи решений уравнений Бесселя

Записать общие решения следующих уравнений:

1) $x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$

Это уравнение Бесселя индекса $\nu = 0$ и его общее решение

$$y(x) = C_1J_0(x) + C_2N_0(x).$$

2) $x^2y'' + xy' + (x^2 - \dfrac{1}{9})y = 0.$

Это уравнение Бесселя индекса $\nu = 1/3$ и его общее решение

$$y(x) = C_1J_{1/3}(x) + C_2N_{1/3}(x).$$

3) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 3)y = 0.$

Это уравнение Бесселя индекса $\nu = \sqrt{3}$ и его общее решение

$$y(x) = C_1J_{\sqrt{3}}(x) + C_2N_{\sqrt{3}}(x).$$

4) $x^2y'' + xy' + (a^2x^2 - \nu^2)y = 0.$

Замена $ax = t$ приводит к уравнению Бесселя для функции $y(t)$

$$t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0.$$

Его общее решение

$$y(t) = C_1J_\nu(t) + C_2N_\nu(t),$$

т.е. решение исходного уравнения

$$y(x) = C_1J_\nu(ax) + C_2N_\nu(ax).$$

5) $x^2y'' + xy' - x^2y = 0.$

Это модифицированное уравнение Бесселя индекса $\nu = 0$ и его общее решение

$$y(x) = C_1I_0(x) + C_2K_0(x).$$

6) $y'' + \dfrac{2}{x}\, y' + y = 0.$

Замена $y(x) = \dfrac{z(x)}{\sqrt{x}}$ приводит к уравнению Бесселя для функции $z(x)$

$$x^2 z'' + x z' + (x^2 - 1/4) z = 0.$$

Его общее решение

$$z(x) = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 N_{1/2}(x),$$

т.е. решение исходного уравнения

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (C_1 J_{1/2}(x) + C_2 N_{1/2}(x)).$$

Отметим, что замена $y(x) = \dfrac{z(x)}{x}$ привела бы к уравнению для $z(x)$

$$z'' + z = 0 \quad \Longrightarrow \quad z(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

т.е. решение исходного уравнения

$$y(x) = \frac{1}{x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Полученные, разные на первый взгляд, решения на самом деле совпадают с точностью до постоянного множителя т.к.

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \qquad N_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

7) $y'' + \dfrac{k}{x}\, y' + y = 0.$

Замена $y(x) = z(x)\ x^{(1-k)/2}$ приводит к уравнению Бесселя для функции $z(x)$

$$x^2 z'' + x z' + \left(x^2 - \frac{k^2 - 2k + 1}{4} \right) z = 0.$$

Его общее решение

$$z(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x), \quad \nu = \frac{\sqrt{k^2 - 2k + 1}}{2},$$

т.е. решение исходного уравнения

$$y(x) = x^{(1-k)/2} (C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x)), \quad \nu = \frac{\sqrt{k^2 - 2k + 1}}{2}.$$

8) $y'' + x^k y = 0.$

Двумя заменами $x^{(k+2)/2} = t, \quad y(t) = z(t)t^{1/(k+2)}$ приводится к уравнению Бесселя для функции $z(t)$

$$t^2 z'' + tz' + \left(\frac{4}{(2+k)^2}t^2 - \frac{1}{(2+k)^2}\right) z = 0.$$

Его общее решение

$$z(t) = C_1 J_\nu(at) + C_2 N_\nu(at), \quad \nu = \frac{1}{k+2}, \quad a = \frac{2}{2+k},$$

т.е. решение исходного уравнения

$$y(x) = \sqrt{x}\left[C_1\ J_{\frac{1}{2+k}}\left(\frac{2}{2+k}\ x\right) + C_2\ N_{\frac{1}{2+k}}\left(\frac{2}{2+k}\ x\right)\right].$$

1.5. Производящие функции функций Бесселя

Функции Бесселя были определены выше как нетривиальные решения уравнения Бесселя. Однако функции Бесселя можно определить посредством так называемых производящих функций.

Функция

$$\Phi(t,x) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right], \quad x \le 1$$

является производящей функцией Бесселя целого индекса в том смысле, что функции $J_n(x)$ являются коэффициентами разложения этой функции в ряд Тейлора по степеням t, т.е

$$\Phi(t,x) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n. \tag{12}$$

Функция

$$G(t,x) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right], \quad x \le 1$$

является производящей функцией для модифицированных функций Бесселя целого индекса I_n в том смысле, что функции $I_n(x)$ являются коэффициентами разложения этой функции в ряд Тейлора по степеням t, т.е

$$G(t,x) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x)t^n\ . \tag{13}$$

1.6. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя

При вычислениях, связанных с функциями Бесселя, удобно пользоваться так называемыми рекуррентными соотношениями

1) $\left(\dfrac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)' = -\dfrac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu},$ 2) $(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x),$

3) $xJ'_\nu(x) = \nu J_\nu(x) - xJ_{\nu+1}(x),$ 4) $xJ'_\nu(x) = -\nu J_\nu(x) + xJ_{\nu-1}(x),$

5) $2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x),$ 6) $\dfrac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x),$

7) $\displaystyle\int \frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu} dx = -\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} + C,$ 8) $\displaystyle\int x^\nu J_{\nu-1}(x) dx = x^\nu J_\nu(x) + C,$

$$9)\quad \int_0^x J_\nu(x)\, dx = 2[J_{\nu+1}(x) + J_{\nu+3}(x) + J_{\nu+5}(x) + \ldots].$$

Примеры:

1) $\displaystyle\int J_0(x)\, dx = 2[J_1(x) + J_3(x) + J_5(x) + \ldots] + C.$

2) $\displaystyle\int x\ J_0(x)\, dx = x\ J_1(x) + C$

3) $$\int x^2 J_0(x)\, dx = \left| \begin{array}{cc} U = x, & dU = dx \\ dV = xJ_0(x)dx, & V = xJ_1(x) \end{array} \right| =$$

$$= x^2 J_1(x) - \int xJ_1(x) dx = \left| \begin{array}{cc} U = \dfrac{1}{x}, & dU = -\dfrac{1}{x^2}dx \\ & \\ x^2 J_1(x)dx = dV, & V = x^2 J_2(x) \end{array} \right| =$$

$$= x^2 J_1(x) - xJ_2(x) - \int J_2(x) dx =$$

$$= x^2 J_1(x) - xJ_2(x) - 2[J_3(x) + J_5(x) + \ldots] + C.$$

4) $$\int x^4 J_1(x)\, dx = \left| \begin{array}{cc} U = x^2, & dU = 2xdx \\ dV = x^2 J_1(x)dx, & V = x^2 J_2(x) \end{array} \right| =$$

$$= x^2 x^2 J_2(x) - 2\int x^3 J_2(x) dx = x^4 J_2(x) - 2x^3 J_3(x) + C.$$

1.7. Интеграл Пуассона

Для функций Бесселя 1-го рода справедливо интегральное представление

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int\limits_0^\pi \sin^{2\nu}\Theta\cos(x\cos\Theta)\,d\Theta$$

Этот интеграл называют интегралом Пуассона.

Например: $J_{1/2}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2+1/2)}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{1/2} \int\limits_0^\pi \sin\Theta\cos(x\cos\Theta)\,d\Theta =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(1)x}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} \int\limits_0^\pi \cos(x\cos\Theta)d(\cos\Theta) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2} \sin(x\cos\Theta)\Big|_0^\pi = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

1.8. Ряды Фурье–Бесселя и Дини

Если функция $f(x)$ удовлетворяет на интервале $(0,\ 1)$ условиям *Дирихле* и $\int\limits_0^1 x^{1/2}|f(x)|\,dx < \infty$, то ее можно разложить в $[0,\ 1]$ в ряд Фурье по функциям Бесселя индекса $\nu > -1/2$.

Напомним, что функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a,\ b]$ *условиям Дирихле*, если она:

1) равномерно ограничена на $[a,\ b]$;

2) имеет на отрезке $[a,\ b]$ конечное число экстремумов;

3) непрерывна на $[a,\ b]$ за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода.

1) Если α_k, $k = \overline{0,\infty}$– положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$, то ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(\alpha_k \frac{x}{l}), \quad \nu > -1,$$

где

$$a_k = \frac{2}{l^2\left[J'_\nu(\alpha_k)\right]^2}\int\limits_0^l x\ f(x)\ J_\nu\left(\alpha_k\frac{x}{l}\right)\ dx$$

называется рядом *Фурье – Бесселя* функции $f(x)$ на отрезке $[0,\ l]$.

2) Если γ_k— положительные корни уравнения
$x\ J'_\nu(x)+HJ_\nu(x)=0, \quad H=const>0,$ то ряд

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k J_\nu(\gamma_k \frac{x}{l}),$$

где $\quad b_k=\dfrac{2}{l^2\left\{[1-\dfrac{\nu^2}{(\gamma_n)^2}]J_\nu^2(\gamma_n)+[J'_\nu(\gamma_n)]^2\right\}}\int\limits_0^l xf(x)J_\nu(\gamma_k\frac{x}{l})dx$

называется рядом *Д и н и* функции $f(x)$ на отрезке $[0,\ l]$.
В частности, если γ_k— положительные корни уравнения $J'_\nu(x)=0$, что следует из общего случая при $xJ'_\nu(x)+HJ_\nu(x)=0$ при $H=0$, то коэффициенты b_k находятся по формуле

$$b_k=\frac{2}{l^2\left\{[1-\dfrac{\nu^2}{(\gamma_n)^2}]J_\nu^2(\gamma_n)\right\}}\int\limits_0^l xf(x)J_\nu(\gamma_k\frac{x}{l})dx.$$

Рассмотрим примеры.
1. Разложить функцию $f(x)=x^2-1$ в ряд Фурье–Бесселя в интервале $[0;1]$ по функциям Бесселя $J_0(\alpha_k x)$, где α_k— положительные корни уравнения $J_0(x)=0$.

Р е ш е н и е. Квадрат нормы системы функций $J_0(\alpha_k x)$ при условии, что α_k— корни уравнения $J_0(x)=0$, равен

$$||J_0(\alpha_k x)||^2=\frac{1}{2}J_1^2(\alpha_k).$$

Коэффициенты ряда Фурье–Бесселя c_k вычислятся
$a_k=\dfrac{2}{J_1^2(\alpha_k)}(\int\limits_0^1 x^3J_0(\alpha_k x)dx-$
$-\int\limits_0^1 xJ_0(\alpha_k x)dx)=\dfrac{2}{(\alpha_k)^3}\ \dfrac{(\alpha_k)^2J_1(\alpha_k)-2\alpha_kJ_2(\alpha_k)-J_1(\alpha_k)}{J_1^2(\alpha_k)}.$

И ряд Бесселя функции $f)x)=x^2-1$ в интервале $[0;1]$ по функциям Бесселя $J_0(\alpha_k x)$, где α_k— положительные корни уравнения $J_0(x)=0$ имеет вид

$$x^2-1=\sum_{k=0}^{\infty} a_kJ_0(\alpha_k x),$$

где $\quad a_k=\dfrac{2}{(\alpha_k)^3}\ \dfrac{(\alpha_k)^2J_1(\alpha_k)-2\alpha_kJ_2(\alpha_k)-J_1(\alpha_k)}{J_1^2(\alpha_k)}.$

2. Разложить функцию $f(x) = x$ в ряд Фурье–Дини в интервале $[0;1]$ по функциям Бесселя $J_1(\gamma_k x)$, где γ_k- положительные корни уравнения $J_1'(x) = 0$.

Р е ш е н и е. Квадрат нормы системы функций $J_1(\gamma_k x)$ при условии, что γ_k- корни уравнения $J_1'(x) = 0$ равен

$$||J_1(\gamma_k x)||^2 = \frac{1}{2}\left\{[1 - \frac{1}{(\gamma_k)^2}]J_1^2(\gamma_k)\right\} = \frac{[(\gamma_k)^2 - 1]J_1^2(\gamma_k)}{2(\gamma_k)^2}.$$

Коэффициенты ряда Дини b_k вычислятся

$$b_k = \frac{1}{||J_1(\gamma_k x)||^2}\int\limits_0^1 x \cdot xJ_1(\gamma_k x)dx = \frac{1}{||J_1(\gamma_k x)||^2}\frac{1}{\gamma_k}\ J_2(\gamma_k).$$

Здесь при вычислении интеграла мы сделали замену $\gamma_k x = t$ и воспользовались рекуррентным соотношением.

Окончательно ряд Дини

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} b_k J_1(\gamma_k x), \qquad \text{где} \qquad b_k = \frac{2\gamma_k J_2(\gamma_k)}{[(\gamma_k)^2 - 1]\ J_1^2(\gamma_k)}.$$

3. Разложить функцию $f(x) = x^2 - 1$ в ряд Фурье–Дини в интервале $[0;2]$ по функциям Бесселя $J_0(\gamma_k \frac{x}{2})$, где γ_k- положительные корни уравнения $xJ_0'(x) + HJ_0(x) = 0$.

Р е ш е н и е. Квадрат нормы системы функций $J_0(\gamma_k x/2)$ при условии, что γ_k- корни уравнения $xJ_0'(x) + HJ_0(x) = 0$, равен

$$||J_0(\gamma_k x/2)||^2 = \frac{4}{2}\left\{J_0^2(\gamma_k) + J_1^2(\gamma_k)\right\}.$$

Коэффициенты ряда Дини b_k вычислятся

$$b_k = \frac{1}{||J_0(\gamma_k x/2)||^2}\int\limits_0^2 x \cdot x^2 J_0(\gamma_k x/2)dx = \frac{8}{(\gamma_k)^2}\ \frac{\gamma_k J_1(\gamma_k) - 2J_2(\gamma_k)}{J_0^2(\gamma_k) + J_1^2(\gamma_k)}.$$

Ряд Дини функции $f(x) = x^2$ в интервале $[0;2]$ по функциям Бесселя $J_0(\gamma_k \frac{x}{2})$, где γ_k- положительные корни уравнения
$xJ_0'(x) + HJ_0(x) = 0$, имеет вид

$$x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k J_0(\gamma_k \frac{x}{2}), \qquad \text{где} \qquad b_k = \frac{8}{(\gamma_k)^2}\ \frac{\gamma_k J_1(\gamma_k) - 2J_2(\gamma_k)}{J_0^2(\gamma_k) + J_1^2(\gamma_k)}.$$

2. Сферические функции

[2], ч.3, гл 3, стр. 109 – 239
[4], гл. 7 – 8, стр. 280 – 315

2.1. Полиномы Лежандра

Простейшим классом сферических функций являются полиномы Лежандра, которые можно определить либо посредством производящей функции, либо как нетривиальные решения уравнения Лежандра. Возможны и другие варианты определения полиномов Лежандра. Рассмотрим некоторые варианты определения полиномов Лежандра.

1. О п р е д е л е н и е. Производящей функцией полиномов Лежандра называется функция

$$\Psi(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}},\qquad |t|<1,\quad -1\le x\le 1,$$

в том смысле, что полиномы Лежандра $P_n(x)$ являются коэффициентами разложения этой функции в ряд Тейлора по степеням t, т.е

$$\Psi(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n.$$

Так как коэффициенты ряда Тейлора выражаются через значения производных производящей функции, а последние как производные аналитической функции по формулам Коши, имеем

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}|_{t=0}=\frac{1}{n!}\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_{(\gamma)}\frac{\Psi(x;\xi)}{\xi^{n+1}}d\xi,$$

где $\gamma-$ произвольный контур, охватывающий точку $z=0$.

Замена $|\sqrt{1-2x\xi+\xi^2}=1-\xi z$ приводит к интегралу

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i\;2^n}\oint\limits_{(\overline{\gamma})}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}dz.$$

Здесь $\overline{\gamma}-$ произвольный контур, охватывающий точку $z=x$.
Этот интеграл называется интегралом *Ш л е ф л и.*
Из полученного интеграл найдем по формуле Коши

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

Это выражение называется формулой *Р о д р и г а* для полиномов Лежандра.

2. Полиномы Лежандра можно ввести как решения задачи Штурма–Лиувилля для уравнения Лежандра

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad |y(x)| < \infty.$$

Далее мы отметим, что нетривиальные решения уравнение Лежандра имеет только для $\lambda = n(n+1)$. Полиномы Лежандра представляются сходящимся равномерно в интервале $(-1;\ 1)$ рядом

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^k k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

3. Для полиномов Лежандра справедливо интегральное представление, называемое интегралом Лапласа

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [x + (x^2-1)^{1/2} \cos\varphi]^n d\varphi.$$

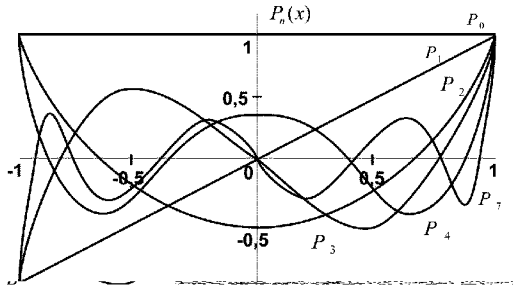
Интеграл Шлефли также есть интегральное представление полиномов Лежандра.

С помощью формулы Родрига удобно получать явный вид полиномов Лежандра

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x).$$

Так, $\quad 2x - 5 = 2P_1(x) - 5P_0(x), \quad x^2 = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x).$



Справедливо: $\quad P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \quad P_n(1) = 1,\ P_n(-1) = (-1)^n.$

Имеют место рекуррентные соотношения:

1) $(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$

2) $nP_n(x) - xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) = 0.$

3) $(n+1)P_n(x) - P_{n+1}'(x) + xP_n'(x) = 0.$

4) $P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) - (2n+1)P_n(x) = 0.$

5) $\int P_n(x)dx = \frac{1}{2n+1}[P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)] + C.$

6) $(1-x^2)P_n'(x) = \frac{n(n+1)}{2n+1}[P_{n-1}(x) - P_{n+1}(x)].$

Соотношене ортогональности для полиномов Лежандра (весовая функция $\rho(x)=1$):

$$\int_{-1}^{1} C_nP_n(x)C_kP_k(x)dx = C_n^2\frac{2}{2n+1}\delta_{nk}.$$

Квадрат нормы полиномов Лежандра $||P_n(x)||^2 = \dfrac{2n+1}{2}$.

Согласно соотношению ортогональности полиномы Лежандра ортогональны в интервале $(-1,\ 1)$ с весом $\rho(x)=1$

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_k(x)dx = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1}, & k=n, \\ 0, & k\neq n. \end{cases}$$

Так, например: $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2P_n(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{3}P_2(x)+\frac{1}{3}P_0(x)\right)P_n(x)dx =$

$$= \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} P_0(x)P_n(x)dx + \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} P_2(x)P_n(x)dx + \begin{cases} 2/3, & n=0, \\ 4/15, & n=2, \\ 0,\ n\neq 0,\ n\neq 2. \end{cases}$$

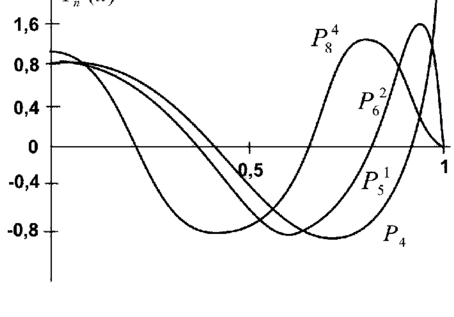
2.2. Присоединенные функции Лежандра

Присоединенные функции Лежандра $P_n^k(x) = (1-x^2)^{k/2}P_n^{(k)}(x)$ где $P_n^{(k)}(x)-$ $k-$ я производная от $P_n(x)$ являются частными решениями уравнения

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \Big(n(n+1) - \frac{k^2}{1-x^2}\Big)y = 0.$$

При $k>n$ функции Лежандра тождественно равны нулю, а при $k=0$ они совпадают с полиномами Лежандра.

В частности: $P_1^1(x)=\sqrt{1-x^2}$, $\qquad P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2}$.



2.3. Сферические функции

Решая уравнение Лапласса $\Delta u = 0$ в сферических координатах $r;\theta;\varphi$

$$\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} = 0$$

методом разделения переменных

$$u(r;\theta;\varphi) = R(r)Y(\theta;\varphi),$$

получаем уравнения на функции $R(r)$, $Y(\theta;\varphi)$

$$\begin{aligned}
&(r^2u_r)_r - \lambda R = 0\\
&\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta Y_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi} + \lambda Y = 0.
\end{aligned}$$

При $\lambda = n(n+1)$ первое уравнение имеет решения

$$R_1 = r^n, \quad R_2 = \frac{1}{r^{n-1}},$$

а второе– решения, которые называются фундаментальными сферическими функциями $n-$го порядка.

$$\begin{aligned}
&Y_n^k(\theta;\varphi) = P_n^k(\cos\theta)\sin k\varphi,\\
&Y_n^{-k}(\theta;\varphi) = P_n^k(\cos\theta)\cos k\varphi,\\
&Y_n^0(\theta;\varphi) = P_n^0(\cos\theta) = P_n(\cos\theta).
\end{aligned}$$

Функции $P_n^k(\cos\theta)-$присоединенные функции Лежандра,
а $P_n(\cos\theta)-$полиномы Лежандра относительно $\cos\theta$.

Очевидно, что функции

$$Y_n(\theta;\varphi) = \sum_{k=-n}^{n} C_nY_n^k(\theta;\varphi)$$

также являются сферическими функциями и называются *сферическими* функциями $n-$го порядка.

Соответствующее решение уравнения Лапласса, т.е. искомыми гармоническими функциями будут

$$\begin{aligned}
&u_1(r;\theta;\varphi) = r^nY_n(\theta;\varphi) \quad \text{внутри сферы},\\
&u_2(r;\theta;\varphi) = \frac{1}{r^{n+1}}Y_n(\theta;\varphi) \quad \text{вне сферы}
\end{aligned}$$

Эти функции называют *шаровыми* функциями.

Таким образом, сферические функции $Y_n(\theta;\varphi)$ являются значениями шаровых функций на единичной сфере.

2.4. Ряды Фурье по полиномам Лежандра

В силу ортогональности полиномов Лежандра $P_n(x)$ с весом $\rho(x) = 1$ на отрезке $[-1,1]$, их можно использовать в качестве базиса при разложении функции $f(x)$ в функциональный ряд.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле (п. 4.6.) на отрезке $[-1,\ 1]$, то ее можно разложить в ряд по полиномам Лежандра

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \quad \text{где} \quad a_k = \frac{2k+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx$$

Задача 1. Разложить функцию $f(x) = 2x^2 + 3$ на отрезке $[-1,1]$ в ряд Фурье по полиномам Лежандра.

Р е ш е н и е: Отметим, что в силу четности функции и то, что она является многочленом второй степени, ее ряд Фурье будет содержать только полиномы с четными индексами, причем $k \leq 2$.

Задачу можно решить двумя способами:

1) Непосредственно раскладываем функцию в ряд Фурье–Лежандра по формулам

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(x), \qquad a_k = \frac{2k+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx,$$

используя явное представление полиномов Лежандра

$$a_0 = \frac{2 \cdot 0 + 1}{2} \int\limits_{-1}^{1} (2x^2+3) P_0(x) dx = |P_0(x) = 1| = \frac{1}{2} \int\limits_{-1}^{1} (2x^2+3) dx = \frac{11}{3}.$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} \int\limits_{-1}^{1} (2x^2+3) P_2(x) dx = |P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}| = \frac{5}{2} \int\limits_{-1}^{1} (2x^2+3) \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{4}{3}.$$

$a_3 = a_4 = \ldots = 0.$

Таким образом: $$2x^2 + 3 = \frac{11}{3} P_0(x) + \frac{4}{3} P_2(x).$$

2) Опять же из явного представления полиномов Лежандра

$$P_0(x) = 1, \quad P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3}(2P_2(x) + 1) = \frac{2}{3}P_2(x) + \frac{1}{3}P_0(x).$$

Получим $2x^2 + 3 = \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{2}{3}P_0(x) + 3P_0(x) = \frac{4}{3}P_2(x) + \frac{11}{3}P_0(x).$

Последний способ конечно проще, но им можно воспользоваться только в случае, когда функция $f(x)$ является полиномом на всем отрезке $[-1, 1]$. Если функция $f(x)$ не является полиномом, или кусочно гладкая на отрезке, то коэффициенты ряда ищутся непосредственно по формулам. При интегрировании, при этом, полезно использовать рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра.

Задача 2. Разложить функцию $f(x) = \{\ 0, \quad -1 < x < 0, x, \quad 0 < x < 1$ на отрезке $[-1, 1]$ в ряд Фурье по полиномам Лежандра.

Р е ш е н и е: Здесь коэффициенты ряда следует искать только непосредственно
$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_k(x) dx = \frac{2k+1}{2} \int\limits_{0}^{1} x P_k(x) dx = \ldots \quad \text{см. [2]}$$
Здесь необходимо воспользоваться

1) интегрированием по частям,

2) дважды соотношением $\int p_k(x)dx = \frac{1}{2k+1}[P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)] + C$

3) значениями $P_k(1) = 1, \quad P_{2k+1}(0) = 0, \quad P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$

Разложение функций в ряды Фурье по полиномам Эрмита и Лагерра с учетом весовых функций производится аналогичным образом.

Примеры разложения функций в ряды Фурье по ортогональным полиномам достаточно подробно разобраны в [2].

2.5. Полиномы Эрмита

Полиномы Эрмита, как и полиномы Лежандра, можно определить посредством производящей функции.

Функция $H(x,t) = e^{2xt-t^2}$ для $\infty < t < \infty$ является производящей функцией полиномов Эрмита в том смысле, что полиномы $H_n(x)$ являются коэффициентами разложения этой функции в ряд Тейлора по степеням t, т.е

$$H(x,t) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

Формула Родрига для полиномов Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

Так, например, явный вид полиномов Эрмита:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

Примеры разложения многочленов по полиномам Эрмита

1) $2 = 2H_0(x)$, 2) $3x - 5 = 1,5H_1(x) - 5H_0(x)$,

3) $x^2 = 0,25H_2(x) + 0,5H_0(x)$. 4) $4x^3 - 1 = 0,5H_3(x) + 3H_1(x) - H_0(x)$.

Полиномы Эрмита $H_n(x)$ являются решениями $y_n(x) = H_n(x)$ задачи Штурма–Лиувиля для уравнения Эрмита

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

при условии непрерывности и квадратичной интегрируемости на $(-\infty, \infty)$ функций $y_n(x)$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ и собственными значениями $\lambda_n = 2n$.

Полиномы Эрмита представляются сходящимся равномерно в интервале $(-\infty;\ \infty)$ рядом

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^{[n/2]} (-1)^l \frac{n!}{(n-2l)! \cdot l!}(2x)^{n-2l}\ .$$

Соотношение ортогональности для собственных функций задачи (весовая функция $\rho(x) = e^{-x^2}$):

$$\int_{-\infty}^{\infty} C_n H_n(x) C_k H_k(x) e^{-x^2} dx = C_n^2 2^n n! \sqrt{\pi}\ \delta_{nk}.$$

При $C_n = \sqrt{\dfrac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}}$ собственные функции задачи $y_n = \sqrt{\dfrac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)$ ортонормированы.

Квадрат нормы полиномов Эрмита $\quad ||H_n(x)||^2 = \dfrac{1}{2^n n!\sqrt{\pi}}.$

Справедливы рекуррентные соотношения

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1} = 0, \qquad H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

Согласно соотношению ортогональности полиномы Эрмита ортогональны в интервале $(-\infty,\ \infty)$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_k(x)e^{-x^2}dx = \begin{cases} 2^n n!\sqrt{\pi}, & k = n, \\ \quad 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Так, например:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} H_n(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}H_0(x) + \frac{1}{4}H_2(x)\right) e^{-x^2} H_n(x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0(x)H_n(x)dx + \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_2(x)H_n(x)dx =$$

$$= \begin{cases} 1/2\sqrt{\pi}, & n = 0, \\ 2\sqrt{\pi}, & n = 2, \\ 0,\ n \neq 0,\ n \neq 2. \end{cases}$$

2.6. Функции Эрмита

Функции Эрмита

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

являются собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля

$$y'' + (\lambda - x^2)y = 0, \quad \lim_{|x|\to 0} y(x) = 0,$$

соответствующим собственным значениям $\lambda_n = 2n + 1$.

2.7. Ряд Фурье по полиномам Эрмита

Полиномы Эрмита $H_n(x)$ с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ на интервале $(-\infty, \infty)$ ортогональны.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле (п. 4.6.) на интервале, лежащем внутри $(-\infty, \infty)$ и квадратично интегрируема в $(-\infty, \infty)$ с весом e^{-x^2}, то ее можно разложить в ряд по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k H_n(x), \quad \text{где} \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi} k! 2^k} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} H_k(x) dx$$

2.8. Полиномы Лагерра

Функция $L^\alpha(x,t) = \dfrac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \cdot e^{-\dfrac{xt}{1-t}}, \qquad \alpha > -1,$ является производящей функцией полиномов Лагерра в том смысле, что полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ являются коэффициентами разложения функции $L^\alpha(x,t)$ в ряд Тейлора по степеням t

$$L^\alpha(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n.$$

Полиномы Лагерра нулевого индекса $L_n^0(x)$ обозначаются $L_n(x)$.

Формула Родрига для полиномов Лагерра

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x}{x^\alpha n!} \frac{d^n}{dx^n} \Big[x^{n+\alpha} e^{-x} \Big], \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \Big[x^n e^{-x} \Big].$$

Так, например, явный вид некоторых полиномов $L_n(x)$:

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = \frac{1}{2} x^2 - 2x + 1.$$

Примеры разложения многочленов по полиномам Лагерра $L_n(x)$
1) $2 = 2L_0(x)$, 2) $3x - 5 = -2 - 3(1-x) = -2L_0(x) - 3L_1(x)$,
3) $x^2 = 2L_2(x) - 4(1-x) + 2 = 2L_0(x) - 4L_1(x) + 2L_2(x)$.
Полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ являются решениями $y_n(x) = L_n^\alpha(x)$ задачи Штурма–Лиувиля для уравнения Лагерра

$$xy'' + (\alpha + 1 - x) y' + \lambda y = 0, \quad \alpha > -1, \quad x \in [0, \infty)$$

при условии непрерывности, ограниченности при $x = 0$ и квадратичной интегрируемости на $[0, \infty)$ функций $y_n(x)$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ и собственными значениями $\lambda_n = n$.

Полиномы Лагерра представляются сходящимся равномерно в интервале $[0;\ \infty)$ рядом

$$L_n^\alpha(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+k+1)k!(n-k)!}\,x^k.$$

Полиномы Лагерра и полиномы Эрмита связаны соотношениями $H_{2n}(x)=(-1)^n 2^{2n}L_n^{-1/2}(x^2),\quad H_{2n+1}(x)=(-1)^n 2^{2n+1}\sqrt{x}L_n^{1/2}(x^2)$.
Для полиномов Лагерра справедливы рекуррентные соотношения:

1) $nL_n^{\alpha-1}(x)=(n+\alpha-1)L_{n-1}^{\alpha-1}(x)-xL_{n-1}^{\alpha}(x)$.
2) $L_n^{\alpha+1}(x)=L_{n-1}^{\alpha+1}(x)+L_n^{\alpha}(x)$.
3) $(n+1)L_{n+1}^{\alpha}(x)-(2n+1+\alpha-x)L_n^{\alpha}(x)+(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x)=0$.
4) $\dfrac{d}{dx}L_n^{\alpha}(x)=-L_{n-1}^{\alpha+1}(x)=\dfrac{nL_n^{\alpha}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{\alpha}(x)}{x}$.

Соотношение ортогональности для собственных функций задачи (весовая функция $\rho(x)=x^\alpha e^{-x}$):

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}C_nL_n^\alpha(x)C_kL_k^\alpha(x)dx=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}\delta_{kn}.$$

Собственные функции $y_n=\sqrt{\dfrac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}}L_n^\alpha(x)$ ортонормированы.

Согласно соотношению ортогональности $L_n^0(x)$ ортогональны в интервале $(0,\ \infty)$ с весом $\rho(x)=e^{-x}$:

$$\int_0^\infty L_n(x)L_k(x)e^{-x}dx=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n.\end{cases}$$

Так, например:

$$\int_0^\infty x^2e^{-x}L_n(x)dx=\int_0^\infty\left(2L_0(x)-4L_1(x)+2L_2(x)\right)e^{-x}L_n(x)dx=$$

$=2,\quad n=0,-4,\ n=1,=2,\ n=2,\ =0$ для всех других n..

2.9. Ряд Фурье по полиномам Лагерра

Полиномы Лагерра ортогональны $L_n^\alpha(x)$ с весом $\rho(x)=x^\alpha e^{-x}$ на интервале $[0,\infty)$.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле (п. 4.6.) на интервале, лежащем внутри $[0,\infty)$ и квадратично интегрируема в $[0,\infty)$ с весом $x^\alpha e^{-x}$, то ее можно разложить в ряд по полиномам Лагерра

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kL_k^\alpha(x),\quad \text{где}\ \ c_k=\frac{k!}{\Gamma(k+\alpha+1)}\int_0^\infty f(x)\,x^\alpha e^{-x}L_k^\alpha(x)\,dx$$

3. Задача Штурма-Лиувилля

[2], Ч.3, гл 1, стр. 3 – 30

3.1. Собственные числа и собственные функции.

Пусть требуется найти решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с параметром λ на интервале $[a;b]$

$$y'' + p(x) \cdot y' + (\lambda \cdot q(x) - r(x))\ y = 0 \qquad (1)$$

при однородных граничных условиях

$$\begin{aligned} \alpha_1\ y'(a) + \alpha_2\ y(a) = 0, \\ \beta_1\ y'(b) + \beta_2\ y(b) = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где α_1, α_2, β_1, β_2– заданные числовые коэффициенты.

Уравнение (1) всегда имеет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$ при любом значении λ. Но основной интерес представляют ненулевые решения уравнения, которые имеют место при определенных значениях λ и удовлетворяют при этом граничным условиям (2).

Задачей Штурма-Лиувилля для уравнения (1) называется задача о нахождении значений параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения, удовлетворяющие заданным граничным условиям, и нахождении этих решений. Такие значения параметра λ называются собственными значениями задачи, а совокупность всех собственных значений - спектром задачи. Соответствующие нетривиальные решения называют собственными функциями задачи.

Свойства собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

1. Существует последовательность собственных значений $\{\lambda_n\}$, $n = \overline{1, \infty}$ и соответствующая им последовательность $\{y_n\}$ собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

2. Каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция.

О п р е д е л е н и е . Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, определенные и интегрируемые на интервале $(a;b)$, называются ортогональными на этом интервале с весом $\rho(x)$, если

$$< y_1(x)|\ y_2(x) >_\rho = \int\limits_a^b y_1(x)\ y_2(x)\ \rho(x)\ dx = 0.$$

О п р е д е л е н и е Нормой функции $y(x)$ называется величина

$$||y(x)|| = \sqrt{< y_1(x)|\ y_2(x) >_\rho} = \sqrt{\int\limits_a^b y^2(x)\ \rho(x)\ dx}\ .$$

3. Собственные функции задачи Штурма-Лиувилля, соответствующие различным собственным значениям, попарно ортогональны на интервале (a,b) с весом $\rho(x)$, т.е.

$$< y_k(x)|\ y_n(x) >_\rho = \int\limits_a^b y_k(x)\ y_n(x)\ \rho(x)\ dx = 0 \quad \text{при} \quad k \neq n.$$

О п р е д е л е н и е. Система функций $\{y_n(x)\}$ называется ортонормированной на $(a;b)$ с весом $\rho(x)$, если она ортогональна и норма функций $y_n(x)$ равна 1 для всех n, т.е. выполнено условие нормировки

$$||y_n(x)|| = \int\limits_a^b y_n^2(x)\ \rho(x)\ dx = 1, \qquad n = \overline{1,\infty}.$$

4. Т е о р е м а разложения Стеклова В.А.

Если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $[a;b]$ и удовлетворяет граничным условиям

$$\alpha_1\ f'(a) + \alpha_2\ f(a) = 0, \qquad \beta_1\ y'(b) + \beta_2\ y(b) = 0,$$
$$|\alpha_1| + |\alpha_2| \neq 0, \qquad |\beta_1| + |\beta_2| \neq 0,$$

то она разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся на интервале $[a;b]$ ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\ y_n(x), \ \text{где}\ C_n = \frac{\int\limits_a^b f(x)\ y_n(x)\ \rho(x)\ dx}{||y_n(x)||^2}\ .$$

Этот ряд называют рядом Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе $\{y_n(x)\}$ собственных функций задачи Штурма-Лиувилля.

3.2. Самосопряженная форма записи уравнения. Весовая функция

В свойствах собственных функций задачи Штурма–Лиувилля упоминается некая функция $\rho(x)$, называемая весом системы функций, или весовой функцией уравнения. Эта функция может быть явно выделена, если данное в обычной форме линейное уравнение

$$y'' + p(x)y' - q(x)y + \lambda\ r(x)\ y = 0 \qquad (1)$$

представить в, так называемой, самосопряженной форме

$$(\varphi(x)y')' - g(x)y + \lambda\ \rho(x)\ y = 0\ . \qquad (2)$$

После дифференцирования в уравнении (2) и деления обеих его частей на $\varphi(x)$ получим

$$y'' + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, y' - \frac{g(x)}{\varphi(x)}\, y + \lambda\ \frac{\rho(x)}{\varphi(x)}\, y = 0\ . \qquad (3)$$

Сравнивя уравнения (1) и (3), можем заключить

$$\begin{cases} \dfrac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = p(x) \\[2ex] \dfrac{g(x)}{\varphi(x)} = q(x) \\[2ex] \dfrac{\rho(x)}{\varphi(x)} = r(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = e^{\int p(x)dx} \\[2ex] g(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \\[2ex] \rho(x) = r(x)e^{\int p(x)dx} \end{cases}.$$

Итак, если исходная форма записи уравнения

$$y'' + p(x)y' - q(x)y + \lambda\ r(x)\ y = 0,$$

то весовая функция

$$\rho(x) = r(x)e^{\int p(x)dx}\ .$$

Ниже в таблице приведены примеры некоторых линейных однородных уравнений, их сопряженная форма и весовая функция.

Так, весовые функции для уравнений

1) $y' + \lambda y = 0, \qquad \rho(x) = 1 \cdot e^{\int 0 dx} = 1$

2) $y' - 2xy' + \lambda y = 0, \qquad \rho(x) = 1 \cdot e^{\int -2x dx} = e^{-x^2}$

3) $y'' + \frac{\lambda}{x^2} y = 0, \qquad \rho(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\int 0 dx} = \frac{1}{x^2}$

Уравнение	Самосопряженная форма	Весовая функция
$y'' + \lambda y = 0$	$(y')' + \lambda y = 0$	$\rho(x) = 1$
$y'' + 2ky' + \lambda y = 0$	$(e^{kx} y')' + \lambda e^{kx} y = 0$	$\rho(x) = e^{kx}$
$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$ Уравнение Эйлера	$(xy')' + \lambda \frac{1}{x} y = 0$	$\rho(x) = \frac{1}{x}$
$x^2 y'' + \lambda y = 0$ Уравнение Эйлера	$(y')' + \lambda \frac{1}{x^2} y = 0$	$\rho(x) = \frac{1}{x^2}$
$x^2 y'' + xy' + \lambda x^2 y = 0$ Уравнение Бесселя ($\nu = 0$)	$(xy')' + \lambda\ x\ y = 0$	$\rho(x) = x$
$y'' + \frac{1}{x} y' + (\lambda - \frac{\nu^2}{x^2}) y = 0$ Уравнение Бесселя ($\nu \neq 0$)	$(xy')' - \frac{\nu^2}{x} y + \lambda\ x\ y = 0$	$\rho(x) = x$
$(1 - x^2) y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ Уравнение Лежандра	$((1 - x^2) y')' + \lambda y = 0$	$\rho(x) = 1$
$y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ Уравнение Эрмита	$(e^{-x^2} y')' + \lambda e^{-x^2} y = 0$	$\rho(x) = e^{-x^2}$
$xy'' + (1 - x) y' + \lambda y = 0$ Уравнение Лагерра ($\alpha = 0$)	$(xe^{-x} y')' + \lambda e^{-x} y = 0$	$\rho(x) = e^{-x}$
$xy'' + (\alpha + 1 - x) y' + \lambda y = 0$ Уравнение Лагерра ($\alpha \neq 0$)	$(x^{\alpha+1} e^{-x} y')' + \lambda x^{\alpha} e^{-x} y = 0$	$\rho(x) = x^{\alpha} e^{-x}$

3.3. Примеры решения задачи Штурма–Лиувилля

• **1.** Найти собственные функции и собственные числа задачи

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(l) = 0.$$

Рассмотрим три случая значений параметра λ.

1) $\underline{\lambda = 0}$

Имеем уравнение $y'' = 0$. Его общее решение

$$y(x) = C_0 + C_1 x \quad \Longrightarrow y'(x) = C_1 .$$

Согласно граничным условиям задачи $y(0) = y(l) = 0$ имеем

$$C_0 + C_1 0 = 0, \text{ и } C_1 = 0- \implies C_0 = C_1 = 0$$

Уравнение имеет чисто нулевое решение $y(x) = 0$.

2) $\underline{\lambda < 0 = -\omega^2}$

Имеем уравнение $y'' - \omega^2 y = 0$. Его общее решение

$$y(x) = C_1 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x}$$

Согласно граничным условиям

$$\begin{cases} y(0) = 0 \implies C_1 + C_2 = 0, \\ y(l) = 0 \implies C_1 e^{-\omega l} + C_2 e^{\omega l} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} C_2 = -C_1, \\ C_1(e^{\omega l} - e^{-\omega l}) = 0 \end{cases},$$

или $2C_1 \mathrm{sh}\,\omega l = 0 \quad \Longrightarrow C_2 = 0$ т.к. $\mathrm{sh}\,\omega l \neq 0$ для $\omega \neq 0$

Таким образом, $C_1 = C_2 = 0$ и решение задачи тривиальное $y(x) = 0$.

3) $\underline{\lambda = \omega^2 > 0}$.

Имеем уравнение $y'' + \omega^2 y = 0$.

Его общее решение $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$.

Согласно граничным условиям

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Longrightarrow C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \Longrightarrow C_1 = 0, \\ y(l) = 0 \Longrightarrow C_1 \cos \omega l + C_2 \sin \omega l = 0 \Longrightarrow C_2 \sin \omega l = 0 \end{cases}$$

$$\sin \omega l = 0 \quad \Longrightarrow \omega = \frac{n\pi}{l} = \sqrt{\lambda}.$$

Нетривиальные решения задачи с учетом, что

$C_1 = 0$, C_2-любое $C_2 = C_n$.

$$y_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Итак, собственные числа (спектр) и собственные функции задачи

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad y_n = C_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Весовая функция для уравнения

$$\rho(x) = 1 \cdot e^{\int 0\ dx} = e^0 = 1.$$

Квадрат нормы системы собственных функций

$$||y_n||^2 = C_n^2 \int\limits_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\ dx = C_n^2 \int\limits_0^l (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2n\pi}{l}x)dx =$$

$$= C_n^2(\frac{x}{2} - \frac{l}{4n\pi}\sin\frac{2n\pi}{l}x)|_0^l = C_n^2\frac{l}{2}.$$

Соотношение ортогональности для системы собственных функций

$$\int\limits_0^l 1 \cdot y_n(x) y_k(x)\ d = \int\limits_0^l C_n C_k \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}\ dx = \frac{l}{2}\delta_{nk}.$$

• **2.** Решить задачу Штурма-Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = y'(l) = 0.$$

Рассмотрим три случая значений параметра λ.

1) $\underline{\lambda = 0}$

Имеем уравнение $y'' = 0$. Его общее решение

$$y(x) = C_0 + C_1 x \quad \Longrightarrow y'(x) = C_1\ .$$

Согласно граничным условиям задачи $y'(0) = y'(l) = 0$ имеем $C_1 = 0$, а C_0- любое. Нетривиальные решения в этом случае $y(x) = C_0$.

2) $\underline{\lambda < 0 = -\omega^2}$

Имеем уравнение $y'' - \omega^2 y = 0$. Его общее решение

$$y(x) = C_2 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x},$$

тогда $y'(x) = \omega(-C_2 e^{-\omega x} + C_2 e^{\omega x})$.

Согласно граничным условиям

$$\begin{cases} -C_1 + C_2 = 0, \\ -C_1 e^{-\omega l} + C_2 e^{\omega l} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = C_2, \\ C_1(e^{\omega l} - e^{-\omega l}) = 0 \end{cases},$$

или $2C_1 \text{sh}\ \omega l = 0 \quad \Longrightarrow C_2 = 0$ т.к. $\text{sh}\ \omega l \neq 0$. Таким образом, $C_1 = C_2 = 0$ и решение задачи тривиальное $y(x) = 0$.

3) $\underline{\lambda = \omega^2 > 0}$.

Имеем уравнение $y'' + \omega^2 y = 0$.
Его общее решение $\quad y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$.
$y'(x) = \omega(-C_1 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x)$.

Согласно граничным условиям

$$\begin{cases} -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 0, \\ -C_1 \sin \omega l + C_2 \cos \omega l = 0 \end{cases} \to \begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 \sin \omega l = 0 \end{cases},$$

$$\sin \omega l = 0 \quad \Longrightarrow \omega = \frac{n\pi}{l} = \sqrt{\lambda}.$$

Нетривиальные решения задачи с учетом, что $C_2 = 0$, C_1- любое.

$$y_n(x) = C_n \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

Итак, собственные числа и собственные функции задачи

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad y_n = C_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Весовая функция для уравнения

$$\rho(x) = 1 \cdot e^{\int 0\ dx} = e^0 = 1.$$

Квадрат нормы системы собственных функций

$$||y_n||^2 = C_n^2 \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l}\ dx = C_n^2 \int_0^l (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{2n\pi}{l} x) dx =$$

$$= C_n^2 (\frac{x}{2} + \frac{l}{4n\pi} \sin \frac{2n\pi}{l} x)|_0^l = C_n^2 \frac{l}{2}.$$

Соотношение ортогональности для системы собственных функций

$$\int_0^l 1 \cdot y_n(x) y_k(x)\ d = \int_0^l C_n C_k \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{k\pi x}{l}\ dx = \frac{l}{2} \delta_{nk}.$$

• **3.** Решение задачи $\quad y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y'(l) = 0.$

приводит к нахождению собственных чисел из уравнения
$\cos \omega l = 0 \Longrightarrow \omega l = \frac{\pi}{2} + n\pi \Longrightarrow \omega = \frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2} + n\right)$
Спектр и собственные функции задачи
$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2} + n\right)\right)^2, \quad y_n = C_n \sin \left(\left(\frac{1}{2} + n\right) \frac{\pi x}{l}\right), \quad n = \overline{0, \infty}.$

• **4** Для задачи $\quad y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = y(l) = 0.$

получим спектр и собственные функции

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{l}\left(\frac{1}{2}+n\right)\right)^2, \qquad y_n = C_n \cos\left(\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{\pi x}{l}\right), \quad n = \overline{0,\infty}.$$

Если задача решается в интервале $[l_1; l_2]$, то для упрощения решения следует сделать сдвиг интервала выбором новой переменной $t = x - l_1$.

• **5** Решить задачу Штурма-Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(\pi/4) = y(3\pi/4) = 0.$$

Замена $t = x - \pi/4$ приводит к задаче

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y(0) = y(\pi/2) = 0.$$

Решение задачи для функции $y(t)$ (см. пример 1.)
$\lambda_n = (2n)^2, \quad y_n(t) = C_n \sin 2nt \Longrightarrow y_n(x) = C_n \sin(2n(x-\pi/4)), \quad n = \overline{1,\infty}.$

• **6.** Найти собственные числа и собственные функции задачи

$$y'' + \frac{2}{x}\, y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad y(l) = 0.$$

Сделаем замену

$$y(x) = \frac{z(x)}{x}, \;\; y' = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2}, \;\; y'' = \frac{z''(x)}{x} - 2\frac{z'(x)}{x^2} + \frac{2}{x^3}z(x).$$

После подстановки в исходное уравнение получим задачу Штурма-Лиувилля

$$z" + \lambda z = 0, \qquad z(0) = z(l) = 0,$$

нетривиальные решения которой (см. пример 1)

$$z_n = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = \overline{1,\infty}.$$

Т.о. собственные функции и собственные числа исходной задачи

$$y_n(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{n\pi x}{l}, \;\; \lambda_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Т.к. весовая функция исходного уравнения

$$\rho(x) = 1 \cdot e^{\int \frac{2}{x}\, dx} = e^{2\ln x} = x^2,$$

то квадрат нормы системы собственных функций

$$||y_n||^2 = C_n^2 \int\limits_0^l x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)^2 \; dx = C_n^2 \int\limits_0^l (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2n\pi}{l}x)dx =$$

$$= C_n^2(\frac{x}{2} - \frac{l}{4n\pi}\sin\frac{2n\pi}{l}x)\Big|_0^1 = C_n^2\frac{l}{2}.$$

Соотношение ортогональности для системы собственных функций
$$\int_0^l x^2 y_n(x) y_k(x) dx = C_n C_k \int_0^1 \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x \, dx = C_n^2 \frac{l}{2}\delta_{nk}.$$

7. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения
$$y'' + \frac{2}{x}\, y' + \lambda y = 0, \quad |y(0)| < \infty, \quad y(l) = 0.$$
Сделаем замену
$$y(x) = \frac{z(x)}{x}, \;\; y' = \frac{z'(x)}{x} - \frac{z(x)}{x^2}, \;\; y'' = \frac{z''(x)}{x} - 2\frac{z'(x)}{x^2} + \frac{2}{x^3}z(x).$$
После подстановки в исходное уравнение получим задачу Штурма-Лиувилля
$$z" + \lambda z = 0, \qquad z(0) = z(l) = 0,$$
нетривиальные решения которой (см. пример 1)
$$z_n = C_n \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = \overline{1,\infty}.$$
Т.о. собственные функции и собственные числа исходной задачи
$$y_n(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad \lambda_n \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \qquad n = \overline{1,\infty}.$$
Т.к. весовая функция исходного уравнения
$$\rho(x) = 1 \cdot e^{\int \frac{2}{x}\, dx} = e^{2\ln x} = x^2,$$
то квадрат нормы системы собственных функций
$$||y_n||^2 = C_n^2 \int_0^l x^2 \cdot \left(\frac{1}{x}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)^2 \; dx = C_n^2 \int_0^l (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{2n\pi}{l}x) dx =$$
$$= C_n^2 (\frac{x}{2} - \frac{l}{4n\pi}\sin\frac{2n\pi}{l}x)\Big|_0^1 = C_n^2 \frac{l}{2}.$$
Соотношение ортогональности для системы собственных функций задачи
$$\int_0^l x^2 y_n(x) y_k(x) dx = C_n C_k \int_0^1 \sin\frac{n\pi}{l}x \cdot \sin\frac{k\pi}{l}x \, dx = C_n^2 \frac{l}{2}\delta_{nk}.$$

3.4. Задача Штурма-Лиувилля для уравнения Бесселя

- 8. Найти собственные функции и собственные числа задачи
$x^2 y'' + x y' + \lambda x^2 \, y = 0, \qquad x \in [0;\; b],$
$$|y(0)| < \infty, \;\; y(b) = 0.$$

Рассмотрим случаи:

1) $\underline{\lambda = 0.}$
Имеем уравнение Эйлера
$$x^2y'' + xy' = 0,$$
общее решение которого
$$y(x) = C_1 \ln x + C_2.$$
Из граничных условий $|y(0)| < \infty, \quad y(b) = 0.$ следует, что $C_1 = C_2 = 0$. Решение тривиальное $(y = 0)$ и интереса не представляет.
2) $\underline{\lambda = -\omega^2 < 0}$
Имеем уравнение Бесселя мнимого аргумента
$$x^2y'' + xy' - \omega^2x^2y = 0,$$
общее решение которого
$$y(x) = C_1I_0(\omega\ x) + C_2K_0(\omega\ x).$$
Так как $\lim\limits_{x\to 0} K(x) = \infty$, а решение в нуле должно быть ограничено, принимаем $C_2 = 0$.

Тогда, согласно условию при $x = b$, получим
$$C_1I_0(\omega b) = 0.$$
По виду функции $I_\nu(x) > 0$ делаем вывод, что последнее равенство может иметь место только при $C_1 = 0$.
Итак: при $\lambda < 0$ задача имеет только тривиальное решение $y(x) = 0$.

3) $\underline{\lambda = \omega^2 > 0.}$
Имеем уравнение Бесселя
$$x^2y'' + xy' + \omega^2x^2y = 0,$$
общее решение которого
$$y(x) = C_1J_0(\omega\ x) + C_2N_0(\omega\ x).$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} N_\nu(x) = -\infty$, то в силу ограниченности решения полагаем $C_2 = 0$. В соответствии со вторым граничным условием
$$C_1J_0(\omega\ b) = 0.$$
Решением этого уравнения является $\omega\ b = \alpha_n^0$, где α_n^0- положительный корень уравнения $J_0(x) = 0$.

Таким образом, для $\lambda > 0$ уравнение имеет ненулевые решения в виде собственных функций и собственных чисел
$$y_n = C_nJ_0\left(\alpha_n^0\frac{x}{b}\right), \qquad \lambda_n = \left(\frac{\alpha_n^0}{b}\right)^2, \qquad n = \overline{0;\ \infty}.$$

С учетом того, что исходное уравнение после деления на x^2 перепишется
$$y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda y = 0,$$
весовая функция уравнения $\rho(x) = e^{\int 1/x\ dx} = e^{\ln x} = x.$

Квадрат нормы системы собственных функций $J_0\left(\alpha_n^0 \frac{x}{b}\right)$
$$||y_n||^2 = \int_0^b x\ y_n^2(x)\ dx = C_n^2 \int_0^b x J_0^2\left(\alpha_n^0 \frac{x}{b}\right)\ dx = C_n^2 \frac{b^2}{2} (J_1^2(\alpha_n^0)^2.$$
Соотношение ортогональности для собственных функций
$$\int_0^l x C_k C_n J_\nu(\gamma_k^\nu \frac{x}{l}) J_\nu(\gamma_n^\nu \frac{x}{l}) dx = \frac{1}{||y_n||^2}\ \delta_{nk}.$$

- 9. Найти собственные функции и собственные числа задачи
$$x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - \nu^2)\ y = 0, \quad y = y(x), \ \ x \in [0;\ l],$$
$$|y(0)| < \infty, \ \ ly'(l) + Hy(l) = 0, \ H > 0.$$

Рассмотрим случаи:

1) $\underline{\lambda = 0.}$

Имеем уравнение Эйлера
$$x^2 y'' + xy' - \nu^2 y = 0,$$
общее решение которого
$$y(x) = C_1 x^\nu + C_2 x^{-\nu}.$$
Так как согласно граничному условию $|y(0)| < \infty$ (решение при $x = 0$ ограничено), сами зануляем коэффициент $C_2 = 0$, т.е. считаем общим решением уравнения набор функций вида $y(x) = C_1 x^\nu, \ \ \nu > 0.$

В соответствии со вторым граничным условием при $x = l$ имеем
$$lC_1(\nu l^{\nu-1} + Hl^\nu) = 0,$$
которое имеет место только при $C_1 = 0.$

Итак: при $\lambda = 0$ имеем только тривиальное решение $y(x) = 0.$

2) $\underline{\lambda = -\omega^2 < 0}$

Имеем уравнение Бесселя мнимого аргумента
$$x^2 y'' + xy' - (\omega^2 x^2 + \nu^2) y = 0,$$
общее решение которого
$$y(x) = C_1 I_\nu(\omega\ x) + C_2 K_\nu(\omega\ x).$$
Так как $\lim\limits_{x \to 0} K(x) = \infty$, а решение в нуле должно быть ограничено, принимаем $C_2 = 0.$

Тогда, согласно условию при $x = l$, получим
$$lC_1(\omega I'_\nu(\omega l) + HI_\nu(\omega l)) = 0.$$
По виду функции $I_\nu(x)$, $\quad I'_\nu(x) > 0$ делаем вывод, что последнее равенство может иметь место только при $C_1 = 0$.
Итак: при $\lambda < 0$ задача имеет только тривиальное решение $y(x) = 0$.

3) $\underline{\lambda = \omega^2 > 0.}$
Имеем уравнение Бесселя
$$x^2y'' + xy' + (\omega^2x^2 - \nu^2)y = 0,$$
общее решение которого
$$y(x) = C_1J_\nu(\omega\ x) + C_2N_\nu(\omega\ x).$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} N_\nu(x) = -\infty$, то в силу ограниченности решения полагаем $C_2 = 0$. В соответствии со вторым граничным условием
$$C_1(l\omega\ J'_\nu(\omega\ l) + HJ_\nu(\omega\ l)) = 0.$$
Решением этого уравнения является $\omega\ l = \gamma_n^\nu$, где $\gamma_n^\nu-$ положительный корень уравнения $x\ J'_\nu(x) + HJ_\nu(x) = 0$.

Таким образом, для $\lambda > 0$ уравнение имеет ненулевые решения в виде собственных функций и собственных чисел
$$y_n = C_nJ_\nu\left(\gamma_n^\nu\frac{x}{l}\right), \qquad \lambda_n = \left(\frac{\gamma_n^\nu}{l}\right)^2, \qquad n = \overline{0;\ \infty}.$$
С учетом того, что исходное уравнение после деления на x^2 перепишется
$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(\lambda - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0,$$
весовая функция уравнения $\quad \rho(x) = e^{\int 1/x\ dx} = e^{\ln x} = x.$
Квадрат нормы системы собственных функций
$$||y_n||^2 = \int\limits_0^l x\ y_n^2(x)\ dx = C_n^2\int\limits_0^l xJ_\nu^2\left(\gamma_n^\nu\frac{x}{l}\right)\ dx =$$
$$= C_n^2\frac{l^2}{2}\left\{\left[1 - \frac{\nu^2}{(\gamma_n^\nu)^2}\right]J_\nu^2(\gamma_n^\nu) + [J'_\nu(\gamma_n^\nu)]^2\right\}.$$
Соотношение ортогональности для собственных функций
$$\int\limits_0^l xC_kC_nJ_\nu(\gamma_k^\nu\frac{x}{l})J_\nu(\gamma_n^\nu\frac{x}{l})dx = ||y_n||^2\ \delta_{nk}.$$

Г л а в а 2.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Линейные уравнения в частных производных 1-го порядка

Рассмотрим уравнение

$$P(x;y;z)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x;y;z)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x;y;z) \qquad (*)$$

Решением уравнения служит любая функция $z=z(x;y)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Общее решение уравнения в частных производных в отличие от общего решения обыкновенного уравнения 1-го порядка содержит не произвольную константу, а произвольную функцию. Чтобы выделить из общего решения конкретное (частное) решение, задают начальное условие в виде $z\big|_{y=y(x)}=z(x)$

Соответствующая задача поиска частного решения называют задачей Коши.

Геометрический смысл уравнения (*) и его решения.

Пусть функции $P(x;y;z)$; $Q(x;y;z)$; $R(x;y;z)$ - есть координаты векторного поля $\vec{A}=\{P;Q;R\}$. Решение уравнения $z=z(x;y)$ в геометрическом смысле определяет поверхность с вектором нормали в каждой точке $\vec{N}=\{z'_x;z'_y,-1\}$. Уравнение (*) при этом представляет собой равенство нулю скалярного произведения векторов $(\vec{A},\vec{N})=0$, что означает их взаимную перпендикулярность. Найти общее решение уравнения означает, что необходимо определить все множество поверхностей, в каждой точке которых вектор нормали к поверхности перпендикулярен вектору поля в этой точке. Задание начального условия $z\big|_{y=y(x)}=z(x)$ соответствует заданию линии в пространстве, через которую должна проходить искомая поверхность (решение задачи Коши).

Решение уравнения (*), первые интегралы уравнения, характеристики.

Решение уравнения (*) сводится к решению
х а р а к т е р и с т и ч е с к о й с и с т е м ы

$$\frac{dx}{P(x;y;z)} = \frac{dy}{Q(x;y;z)} = \frac{dz}{R(x;y;z)}, \qquad (1)$$

которая в параметрической форме эквивалентна системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x;y;z) \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x;y;z) \\ \dfrac{dz}{dt} = R(x;y;z) \end{cases} \qquad (2)$$

Линейно-независимые решения характеристической системы (1) или (2): $\varphi_1(x;y;z) = C_1$, $\varphi_2(x;y;z) = C_2$, где φ_1 и φ_2– произвольные функции своих аргументов, называют п е р в ы м и и н т е г р а л а м и системы. В геометрическом смысле это два семейства поверхностей, которые в пересечении дают кривые, которые называют

– векторные линии поля $\vec{A}\{P;Q;R\}$;
– интегральные кривые уравнения (*);
– характеристические линии, определяемые уравнением (*);
– х а р а к т е р и с т и к и уравнения.

После получения первых интегралов характеристической системы общее решение уравнения (*) в неявной форме записывается

$$\Phi(\varphi_1(x;y;z); \varphi_2(x;y;z)) = 0,$$

где Φ– произвольная дифференцируемая функция своих аргументов.

Если искомая функция z содержится только в одном из первых интегралов, например, в $\varphi_2(x;y;z)$, то решение можно записать в виде

$$\varphi_2(x;y;z) = f(\varphi_1(x;y;z))$$

где f– произвольная дифференцируемая функция своего аргумента.

Если удается разрешить полученное выражение относительно z, то получим общее решение уравнения (*) в явной форме.

При решении задачи Коши, т.е. поиска решения уравнения (*) при заданном начальном условии (поиска поверхности, проходящей через заданную линию), отмеченные произвольные функции приобретают конкретную форму.

Линейные уравнения для функций 3-х и более независимых переменных решаются по аналогичной схеме. Частные производные далее будем обозначать только индексом $z_x,\ z_y,\ u_x,\ u_y,\ u_z, \ldots$

Рассмотрим примеры.

• 1. Найти общее решение уравнения

$$xy\, z_x - x^2\, z_y = yz$$

Характеристическая система

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-x^2} = \frac{dz}{yz}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{xy} = \dfrac{dy}{-x^2} \\ \dfrac{dx}{xy} = \dfrac{dz}{yz} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\,dx = -y\,dy \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{z} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{C_1}{2} \\ \ln x = \ln z - \ln C_2 \end{array}$$

Первые интегралы характеристической системы

$$x^2 + y^2 = C_1, \qquad \frac{z}{x} = C_2$$

Общее решение уравнения

$$\frac{z}{x} = f(x^2 + y^2) \quad \text{или} \quad z = x \cdot f(x^2 + y^2)$$

• 2. Найти общее решение уравнения

$$(x + z)\, z_x + (y + z)\, z_y = x - 2y - z$$

Характеристическая система $\quad \dfrac{dx}{x+z} = \dfrac{dy}{y+z} = \dfrac{dz}{x-2y-z}$

Ни одно из уравнений системы решить порознь не удастся, т.к оба они содержат одновременно по 3 переменных. Перепишем систему в параметрической форме.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z \\ \dfrac{dy}{dt} = y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - 2y - z \end{cases}$$

Из 1-го уравнения вычтем 2-е, а 2-е и 3-е уравнения сложим

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = x - y \implies \frac{d(x-y)}{dt} = x - y \Longrightarrow \frac{d(x-y)}{x-y} = dt \Longrightarrow$$

$$\ln(x-y) = t + \ln C_1 \Longrightarrow x - y = C_1 e^t$$

$$\frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = x - y, \quad \text{но получено, что } \; x - y = C_1 e^t$$

$$\frac{d(y+z)}{dt} = C_1 e^t \implies y + z = C_1 e^t + C_2, \text{ но } \; C_1 e^t = x - y \implies$$

$$y + z = x - y + C_2$$

Запишем третье уравнение системы в виде

$$\frac{dz}{dt} = (x - y) - (y + z)$$

и подставим найденные в предыдущих действиях выражения для $(x-y)$ и $(y+z)$. Получим

$$\frac{dz}{dt} = C_1 e^t - (C_1 e^t + C_2), \text{ или } \qquad \frac{dz}{dt} = -C_2$$

Интегрируя, получим $\quad z = -C_2 t + C_3$

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} x - y = C_1 e^t \\ y + z = C_1 e^t + C_2 \\ z = -C_2 t + C_3 \end{cases}$$

Из этой системы исключаем t. Из первого уравнения

$$t = \ln \frac{x-y}{C_1},$$

тогда из третьего:

$$z = -C_2 \cdot \ln \frac{x-y}{C_1} + C_3 = -C_2 \ln(x-y) + C_2 \ln C_1 + C_3 = -C_2 \ln(x-y) + \overline{C_1}$$

Из второго уравнения системы

$$y + z = C_1 e^t + C_2, \qquad y + z = x - y + C_2, \qquad C_2 = -x + 2y + z$$

Тогда

$$z = -(-x + 2y + z) \ln(x-y) + \overline{C_1}, \quad z = (x - 2y - z) \ln(x-y) + \overline{C_1}$$

Итак, $\overline{C_1} = z - (x - 2y - z)\ln(x - y), \qquad C_2 = -x + 2y + z.$
Общее решение уравнения

$$\Phi(\overline{C_1};\ C_2) = 0, \qquad \Phi(z - (x - 2y - z)\ln(x - y); -x + 2y + z) = 0$$

• 3. Найти общее решение уравнения

$$(y + z)\, u_x + (z + x)\, u_y + (x + y)u_z = u$$

Характеристическая система $\dfrac{dx}{y + z} = \dfrac{dy}{x + z} = \dfrac{dz}{x + y} = \dfrac{du}{u}$

Перепишем систему в параметрической форме.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y \\ \dfrac{du}{dt} = u \end{cases}$$

Суммируем первые три уравнения

$$\frac{d(x + y + z)}{dt} = 2(x + y + z) \Longrightarrow \sqrt{x + y + z} = C_1 e^t$$

Вычитая из 1-го 2-е, $\dfrac{d(x - y)}{dt} = -(x - y) \Longrightarrow \dfrac{1}{x - y} = C_2 e^{-t}$

Вычитая из 2-го 3-е, $\dfrac{d(y - z)}{dt} = -(y - z) \Longrightarrow \dfrac{1}{y - z} = C_3 e^{-t}$

Из последнего уравнения $\quad u = C_4 e^t$

Исключая параметр t, например из 1-го уравнения

$$e^t = \frac{\sqrt{x + y + z}}{C_1}$$

и подставляя в следующие соотношения, имеем 3 первых интеграла системы

$$\frac{\sqrt{x + y + z}}{(x - y)} = \overline{C_1}, \qquad \frac{\sqrt{x + y + z}}{(y - z)} = \overline{C_2}, \qquad \frac{u}{\sqrt{x + y + z}} = \overline{C_3},$$

где $\overline{C_1} = C_1 \cdot C_2, \qquad \overline{C_2} = C_1 \cdot C_3, \qquad \overline{C_3} = \dfrac{C_4}{C_1}$

Общее решение системы

$$u = \sqrt{x+y+z} \cdot f\left(\frac{\sqrt{x+y+z}}{(x-y)}; \frac{\sqrt{x+y+z}}{(y-z)}\right)$$

• 4. Решить задачу Коши

$$(x^2+1)u_x + 2u_y = 0, \quad u|_{x=1} = y$$

Характеристическая система и ее решение

$$\frac{dx}{x^2+1} = \frac{dy}{2} = \frac{du}{0} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{x^2+1} = \dfrac{dy}{2} \\ \dfrac{dy}{2} = \dfrac{du}{0} \end{cases} \Longrightarrow \begin{array}{c} \operatorname{arctg} x - 2y = C_1 \\ u = C_2 \end{array}$$

Общий интеграл уравнения: $\Phi(\operatorname{arctg}\ x - 2y;\ u) = 0,$
или общее решение: $u(x;y) = \varphi(\operatorname{arctg}\ x - 2y)$

Находим частное решение:

$$u|_{x=1} = y \quad \Longrightarrow y = \varphi(\pi/4 - 2y) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(t) = 1/2(\pi/4 - t) \Longrightarrow$$

$$\varphi(\operatorname{arctg} x - 2y) = 1/2(\pi/4 - \operatorname{arctg}\ x + 2y)$$

Решение задачи Коши: $u = 1/2(\pi/4 - \operatorname{arctg}\ x + 2y)$

• 5. Решить задачу Коши

$$2yu_x - xu_y = u - 1, \quad u|_{x=0} = y^2$$

Характеристическая система и ее решение

$$\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-x} = \frac{du}{u-1} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{2y} = \dfrac{dy}{-x} \\ \dfrac{dx}{2y} = \dfrac{du}{u-1} \end{cases}$$

Из первого уравнения системы:

$$xdx = -2y\ dy \longrightarrow x^2/2 = -y^2 + C_1 \Longrightarrow y = \sqrt{C_1 - x^2/2},$$

$$\underline{C_1 = x^2/2 + y^2}$$

Тогда второе уравнение с учетом $y = \sqrt{C_1 - x^2/2}$

$$\frac{dx}{\sqrt{4C_1 - 2x^2}} = \frac{du}{u-1} \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2C_1}} = \ln|u-1| + C_2,$$

или, учитывая, что $C_1 = x^2/2 + y^2$ получим вторую характеристику

$$\underline{C_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} - \ln|u-1|}$$

Общий интеграл уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} - \ln|u-1| = \varphi(x^2/2 + y^2)$$

Находим частное решение:

$$u|_{x=0} = y^2 \Longrightarrow -\ln|y^2-1| = \varphi(y^2) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(t) = -\ln|t-1| \Longrightarrow$$
$$\varphi(x^2/2+y^2) = -\ln|x^2/2+y^2-1|$$

Частный интеграл уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^2}} = \ln\frac{u-1}{x^2/2+y^2-1}$$

• 6. Решить задачу Коши

$$(x-1)u_x - yu_y + uzu_z = u, \qquad u|_{z=y} = \frac{x}{y}$$

$$\frac{dx}{x-1} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{uz} = \frac{du}{u} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{x-1} = \dfrac{dy}{-y} \\ \dfrac{dy}{-y} = \dfrac{dz}{uz} \\ \dfrac{dz}{uz} = \dfrac{du}{u} \end{cases}$$

Из первого равенства: $\ln|x-1| = -\ln y + \ln C_1, \Longrightarrow \underline{y(x-1) = C_1}$

Из третьего:

$$\frac{dz}{uz} = \frac{du}{u} \Longrightarrow \frac{dz}{z} = \frac{du}{1} \Longrightarrow \ln z = u + \ln C_2 \Longrightarrow u = \ln(z/C_2) \quad \Longrightarrow \quad \underline{ze^{-u} = C_2}$$

$$\frac{dy}{-y} = \frac{dz}{uz} \Longrightarrow \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z(\ln(z/C_2))} \Longrightarrow -\ln|y| = \ln\ln(z/C_2) - \ln C_3 \Longrightarrow$$
$$y \cdot \ln(z/C_2) = C_3 \Longrightarrow \qquad \underline{y \cdot u = C_3}$$

Общий интеграл: $\qquad \Phi\left(y\cdot u;\ y(x-1);\ ze^{-u}\right) = 0$

Находим частное решение. Запишем полученное решение в виде

$$ze^{-u} = \varphi\left(y \cdot u;\ y(x-1)\right)$$

и подставим начальное условие

$$u\big|_{z=y} = \frac{x}{y} \Longrightarrow y \cdot e^{-\frac{x}{y}} = \varphi\left(x;\quad y(x-1)\right)$$

введем новые переменные:

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y(x-1) = t_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = t_1 \\ y = \dfrac{t_2}{t_1 - 1} \end{cases}$$

Таким образом: $\varphi(t_1; t_2) = \dfrac{t_2}{t_1 - 1} e^{-t_1}$

Тогда частный интеграл уравнения: $\quad z \cdot e^{-u} = \dfrac{y(x-1)}{uy - 1} \cdot e^{-uy}$

• 7. Найти общее решение $u = u(x; y; z)$ уравнения

$$xu_x - u + z = 0$$

Характеристическая система

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{0} = \frac{du}{u - z} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{0} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{dz}{0} \\ \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{u - z} \end{cases}$$

Из первого равенства: $\qquad dy = 0, \Longrightarrow y = C_1$

Из второго равенства: $\qquad dz = 0, \Longrightarrow z = C_2$

Тогда из третьего $\quad \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{u - C_2} \Longrightarrow \ln x + C_3 = \ln(u - C_2)$

Общее решение $c_3 = f(C_1; C_2) \Longrightarrow \ln(u - C_2) - \ln x = f(y; z) \Longrightarrow \ln(u - z) = \ln x + f(y; z) \Longrightarrow u = z + x\varphi(y; z)$

где $\varphi(y; z) = e^{f(y;z)}$-произвольная функция своих аргументов.

Ответ: $\quad u = z + x\varphi(y; z)$

Нетрудно проверить, что полученная функция действительно является решением уравнения,

так как из $u = z + x\varphi(y; z) \Longrightarrow u_x = \varphi(y; z)$. Подставим в уравнение

$$xu_x - u + z = 0 \Longrightarrow x\varphi(y; z) - (z + x\varphi(y; z)) - z = 0 \Longrightarrow 0 = 0.$$

2. Линейные уравнения 2-го порядка в частных производных. Канонические формы

[3], Ч.4, гл 2, стр. 55 – 73
[4], гл. 1, стр. 7 – 17

2.1. Классификация линейных уравнений 2-го порядка в частных производных и приведение их к каноническому виду.

Общий вид линейного дифференциального уравнения 2-го порядка в частных производных относительно функции $u(x, y)$

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Eu_x + Fu_y + cu = f(x; y),$$

где A, B, C, E, $F-$ либо постоянные, либо функции от x, y.
Тип уравнения определяется по "дискриминанту" группы старших производных уравнения $D = B^2 - AC$, а именно:

$D = B^2 - AC > 0-$ гиперболический тип,
$D = B^2 - AC < 0-$ эллиптический тип,
$D = B^2 - AC = 0-$ параболический тип.

Приведение уравнения к каноническому виду производится по следующей схеме;

1. Находим дискриминант уравнения $D = B^2 - AC$ и попутно делаем вывод о типе уравнения.

2. Составляем дифференциальные уравнения характеристик

$$1)\ \frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{D}}{A} \qquad 2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{D}}{A}.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2.$$

Для уравнения параболического типа $D = 0$, характеристическое уравнение только одно и поэтому вторую характеристику выбираем произвольно, например $C_2 = \psi(x, y) = x$, или $C_2 = \psi(x, y) = y$.
Для уравнения эллиптического типа $D < 0$ и $\sqrt{D}$ является мнимым выражением. Этот факт при дальнейших преобразованиях никак не сказывается.

3. Делаем замену переменных $\alpha = \varphi(x, y)$, $\beta = \psi(x, y)$ и находим производные α_x, α_y, β_x, β_y, α_{xx}, α_{xy}, α_{yy}, β_{xx}, β_{xy}, β_{yy}.

4. Определяем новые коэффициенты уравнения

$$\begin{aligned}
A_1 &= A\alpha_x^2 + 2B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2\\
B_1 &= A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + C\alpha_y\beta_y\\
C_1 &= A\beta_x^2 + 2B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2\\
E_1 &= A\alpha_{xx} + 2B\alpha_{xy} + C\alpha_{yy} + E\alpha_x + F\alpha_y\\
F_1 &= A\beta_{xx} + 2B\beta_{xy} + C\beta_{yy} + E\beta_x + F\beta_y
\end{aligned}$$

Имеем уравнение в новых переменных

$$A_1u_{\alpha\alpha} + 2B_1u_{\alpha\beta} + C_1u_{\beta\beta} + E_1u_\alpha + F_1u_\beta = 0.$$

В соответствии с типом уравнения будет обязательно:

для гиперболического и эллиптического типов

$$A_1 = C_1 = 0, \quad B_1 \neq 0,$$

для параболического типов,

$$\text{если} \quad \beta = x \qquad A_1 = B_1 = 0, \quad C_1 \neq 0,$$

$$\text{если} \quad \beta = y \qquad A_1 \neq 0, \quad C_1 = B_1 = 0.$$

5. Записываем каноническую форму уравнения.

Для гиперболического и эллиптического типов

$$2B_1u_{\alpha\beta} + E_1u_\alpha + F_1u_\beta + cu = f(\alpha;\beta).$$

Для параболического типа

$$C_1u_{\beta\beta} + E_1u_\alpha + F_1u_\beta + cu = f(\alpha;\beta).$$

2.2. Канонические формы уравнений 2-го порядка

Уравнение гиперболического типа $(D > 0)$.

После приведения к каноническому виду по методике (п. 2.1) уравнение приобретает вид

$$2B_1u_{\alpha\beta} + E_1u_\alpha + F_1u_\beta + cu = f(\alpha;\beta).$$

или $\quad u_{\alpha\beta} + \Phi(\alpha;\beta;u;u_\alpha;u_\beta) = 0.$

Этот вид уравнения называют **первой** канонической формой уравнения гиперболического типа.

Если сделать еще одну замену переменных

$$\alpha = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - \eta}{2}, \Longrightarrow \xi = \alpha + \beta \quad \eta = \alpha - \beta,$$

уравнение получит вид $\quad u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + \Psi(\xi; \eta; u; u_\xi; u_\eta) = 0,$
который называют **второй** канонической формой уравнения гиперболического типа. Простейшим примером такого уравнения является уравнение малых поперечных колебаний упругого стержня **(одномерное уравнение Даламбера)**

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

Уравнение эллиптического типа $(D < 0)$.

После приведения к каноническому виду по методике (п. 2.1) уравнение для $(D < 0)$ приобретет тот же вид, что и для $(D > 0)$.

$$2B_1 u_{\alpha\beta} + E_1 u_\alpha + F_1 u_\beta + cu = f(\alpha; \beta).$$

или $\qquad u_{\alpha\beta} + \Phi(\alpha; \beta; u; u_\alpha; u_\beta) = 0$

При последующей замене переменных

$$\alpha = \frac{\xi + i\eta}{2}, \quad \beta = \frac{\xi - i\eta}{2}, \Longrightarrow \xi = \alpha + \beta \quad \eta = i(\beta - \alpha)$$

уравнение получит вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \Psi(\xi; \eta; u; u_\xi; u_\eta) = 0,$$

который называют канонической формой уравнения эллиптического типа. Простейшим примером такого уравнения является **уравнение Лапласа** (условие гармоничности функции $u(x; y)$)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Уравнение параболического типа $(D = 0)$.

После приведения к каноническому виду по методике (п. 2.1) уравнение приобретет вид

$$C_1 u_{\beta\beta} + E_1 u_\alpha + F_1 u_\beta + cu = f(\alpha; \beta).$$

или

$$u_{\beta\beta} + \Phi(\alpha;\beta;u;u_\alpha;u_\beta) = 0,$$

который называют канонической формой уравнения параболического типа.

Простейшим примером такого уравнения является уравнение свободного распространения тепла в тонком стержне **(однородное одномерное уравнение теплопроводности)**

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

Найти общие решения следующих уравнений

- 1. $u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 9u_y = 0$

Здесь $A = 1,\ B = 5,\ C = 9,\ E = 1,\ F = 9,$

$D = B^2 - AC = 25 - 9 = 16 > 0 --$ тип гиперболический.

Уравнения характеристик

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B+\sqrt{D}}{A} = \dfrac{5+4}{1} = 9 \\ dy = 9dx \\ y - 9x = c_1 \end{array}\right| \begin{array}{c} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B-\sqrt{D}}{A} = \dfrac{5-4}{1} = 1 \\ dy = dx \\ y - x = c_2 \end{array}$$

Переходим к новым переменным и находим производные

$$\left.\begin{array}{c} \alpha = y - 9x \\ \alpha_x = -9,\ \alpha_y = 1 \\ \alpha_{xx} = \alpha_{xy} = \alpha_{yy} = 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} \beta = y - x \\ \beta_x = -1, \beta_y = 1 \\ \beta_{xx} = \beta_{xy} = \beta_{yy} = 0 \end{array}$$

Новые коэффициенты, вычисленные по приведенным выше формулам

$A_1 = C_1 = 0,\ \ B_1 = -32,\ E_1 = 0,\ F_1 = 8$

Новое уравнение $-64u_{\alpha\beta} + 8u_\beta = 0 \Longrightarrow$ $\underline{u_{\alpha\beta} - \dfrac{1}{8}\, u_\beta = 0}$

Имеем первую каноническую форму уравнения. Получим вторую Сделаем замену $\xi = \alpha + \beta,\ \eta = \alpha - \beta$

$$u_\alpha = u_\xi \xi_\alpha + u_\eta \eta_\alpha = u_\xi + u_\eta, \quad u_\beta = u_\xi \xi_\beta + u_\eta \eta_\beta = u_\xi - u_\eta,$$
$$u_{\alpha\beta} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\xi} - u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta}$$

Имеем вторую каноническую форму $\qquad \underline{u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} - \frac{1}{8}(u_\xi - u_\eta) = 0}$

Для получения общего решения используем первую форму

$$u_{\alpha\beta} - \frac{1}{8}\, u_\beta = 0$$

Понизим порядок уравнения

$u_\beta = z \to z_\alpha - 0,125\ z = 0 \to z = \varphi(\beta)e^{0,125\alpha} \to u_\beta = \varphi(\beta)e^{0,125\alpha} \to$

$$u(\alpha;\beta) = \varphi_1(\beta)e^{0,125\alpha} + \phi(\alpha)$$

Функции φ_1, ϕ– произвольные функции своих аргументов.

Окончательно, общее решение уравнения

$$\underline{u(x;y) = \varphi_1(y-x)e^{0,125(y-9x)} + \phi(y-9x)}$$

- 2. $\quad 2u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$

Здесь $\ A = 2,\ B = -2,\ C = 4,\ E = F = 0,$

$D = B^2 - AC = 4 - 8 = -4 < 0 --$ тип эллиптический.

Уравнения характеристик

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B+\sqrt{D}}{A} = \frac{-2+2i}{2} = -1+i \;\Bigg|\; \frac{dy}{dx} = \frac{B-\sqrt{D}}{A} = \frac{-2-2i}{2} = -1-i$$

$$dy = (-1+i)dx \;\Big|\; dy = (-1-i)dx$$

$$y + (1-i)x = c_1 \;\Big|\; y + (1+i)x = c_2$$

Переходим к новым переменным и находим производные

$$\begin{array}{r|l} \alpha = y + (1-i)x & \beta = y + (1+i)x \\ \alpha_x = 1-i,\ \alpha_y = 1 & \beta_x = 1+i, \beta_y = 1 \\ \alpha_{xx} = \alpha_{xy} = \alpha_{yy} = 0 & \beta_{xx} = \beta_{xy} = \beta_{yy} = 0 \end{array}$$

Новые коэффициенты, вычисленные по приведенным выше формулам

$A_1 = C_1 = 0,\ \ B_1 = 4,\ E_1 = F_1 = 0$

Новое уравнение $\ 8u_{\alpha\beta} = 0 \Longrightarrow \qquad \underline{u_{\alpha\beta} = 0}$

Сделаем замену $\quad \xi = \alpha + \beta,\ \eta = i(\beta - \alpha)$

$u_\alpha = u_\xi \xi_\alpha + u_\eta \eta_\alpha = u_\xi - i u_\eta,$

$u_{\alpha\beta} = u_{\xi\xi} - i u_{\eta\xi} + i u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$

Имеем каноническую форму уравнения эллиптического типа

$$\underline{u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0}$$

Общее решения легко получаем из

$u_{\alpha\beta} = 0 \Longrightarrow u(\alpha;\beta) = \varphi(\alpha) + \phi(\beta)$

$$\underline{u(x;y) = \varphi(y + (1-i)x) + \phi(y + (1+i)x)}$$

- 3. $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} + 3u_x - 6u_y = 0$

Здесь $A = 1,\ B = -2,\ C = 4,\ E = 3,\ F = -6,$

$D = B^2 - AC = 4 - 4 = 0 --$ тип параболический.

Уравнения характеристик

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B+\sqrt{D}}{A} = \dfrac{-2+0}{1} = -2 \\ dy = -2dx \\ y + 2x = c_1 \end{array}\right| x = c_2$$

Переходим к новым переменным и находим производные

$$\begin{array}{c|c} \alpha = y + 2x & \beta = x \\ \alpha_x = 2,\ \alpha_y = 1 & \beta_x = 1, \beta_y = 0 \\ \alpha_{xx} = \alpha_{xy} = \alpha_{yy} = 0 & \beta_{xx} = \beta_{xy} = \beta_{yy} = 0 \end{array}$$

Новые коэффициенты: $A_1 = B_1 = 0,\ \ C_1 = 1,\ E_1 = 0,\ F_1 = 3$

Каноническое уравнение $\underline{u_{\beta\beta} + 3u_\beta = 0}$

Общее решения, используя понижение порядка уравнения,

$u(\alpha;\beta) = \varphi(\alpha)e^{-3\beta} + \phi(\alpha)$

$$\underline{u(x;y) = \varphi(y + 2x)e^{-3x} + \phi(y + 2x)}$$

- 4. $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$

Здесь $A = x^2,\ B = 0,\ C = -4y^2,\ E = 0,\ F = -2y,$

$D = B^2 - AC = 4x^2y^2 > 0 --$ тип гиперболический.

Уравнения характеристик

$$\begin{array}{c|c} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B+\sqrt{D}}{A} = \dfrac{0+2xy}{x^2} = \dfrac{2y}{x} & \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B-\sqrt{D}}{A} = \dfrac{0-2xy}{x^2} = -\dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{dy}{y} = \dfrac{2dx}{x} & \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{2dx}{x} \\ \ln y = 2\ln x + \ln C_1 & \ln y = -2\ln x + \ln C_2 \\ \dfrac{y}{x^2} = C_1 & x^2y = C_2 \end{array}$$

Переходим к новым переменным и находим производные

$$\begin{array}{c|c} \alpha = \dfrac{y}{x^2} & \beta = x^2 y \\ \alpha_x = -\dfrac{2y}{x^3},\ \alpha_y = \dfrac{1}{x^2} & \beta_x = 2xy,\ \beta_y = x^2 \\ \alpha_{xx} = \dfrac{6y}{x^4},\ \alpha_{xy} = -\dfrac{2}{x^3} & \beta_{xx} = 2y,\ \beta_{xy} = 2x \\ \alpha_{yy} = 0 & \beta_{yy} = 0 \end{array}$$

Новые коэффициенты, вычисленные по приведенным выше формулам

$$A_1 = C_1 = 0, \quad B_1 = -8y^2,\ E_1 = \frac{4y}{x^2},\ F_1 = 0$$

Новое уравнение $\quad -16y^2 u_{\alpha\beta} + \dfrac{4y}{x^2} u_\beta = 0 \Longrightarrow u_{\alpha\beta} - \dfrac{1}{4x^2 y} u_\alpha = 0$

$$u_{\alpha\beta} - \frac{1}{4\beta} u_\alpha = 0$$

Общее решение полученного уравнения

$$u(\alpha;\beta) = \sqrt[4]{\beta}\ \varphi(\alpha) + \phi(\beta) \qquad \underline{u(x;y) = \sqrt[4]{x^2 y}\ \varphi(y/x^2) + \phi(x^2 y)}$$

Пример: Решить задачу Коши

$$u_{xx} + 2u_x = 0, \qquad u\Big|_{y=\sqrt{x}} = x, \quad u_x\Big|_{y=\sqrt{x}} = 0$$

Общее решение уравнения $\quad u(x;y) = \varphi(y)e^{-2x} + \psi(y).$

Тогда $\quad u_x = -2\varphi(y)e^{-2x} + \psi(y).$

$$\begin{cases} u|_{y=\sqrt{x}} = x \\ u_x|_{y=\sqrt{x}} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi(\sqrt{x})e^{-2x} + \psi(\sqrt{x}) = x \\ -2\varphi(\sqrt{x})e^{-2x} + \psi(\sqrt{x}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{3}\ x e^{2x} \\ \psi(\sqrt{x}) = \dfrac{2}{3}\ x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi(y) = \dfrac{1}{3}\ y^2\ e^{2y^2} \\ \psi(y) = \dfrac{2}{3}\ y^2. \end{cases}$$

Искомое решение задачи Коши: $\qquad u(x;y) = \dfrac{1}{3} y^2 e^{2y^2} e^{-2x} + \dfrac{2}{3} y^2$

или $u(x;y) = \dfrac{1}{3} y^2 \left(e^{2(y^2-x)} + 2\right).$

2.3. Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных

[3], Ч.4, гл 3, стр. 74 – 127
[4], гл. 2, стр. 18 – 37

2.3.1. Уравнения малых продольных и поперечных колебаний

Уравнение поперечных колебаний струны

$$\rho u_{tt} = T u_{xx} + F(x;t),$$

$u(x;t)$—амплитуда малых поперечных колебаний струны;
T—сила натяжения струны;
ρ—линейная плотность;
$F(x;t)$—линейная плотность внешних сил.
После деления обеих частей уравнения на ρ получим

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x;t),$$

$a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$— скорость распространения поперечных колебаний (волн сдвига).

Уравнение продольных колебаний тонкого стержня

$$\rho u_{tt} = E u_{xx} + F(x;t),$$

$u(x;t)$—амплитуда продольных колебаний стержня;
E—модуль упругости (модуль Юнга) стержня;
ρ—линейная плотность;
$F(x;t)$—плотность внешних сил, действующих в поперечных сечениях стержня ($x = const$) вдоль стержня.

После деления обеих частей уравнения на ρ получим

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x;t),$$

$a = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$— скорость распространения продольных колебаний (волн сжатия).

Поперечные колебания прямоугольной мембраны

Уравнение малых поперечных колебаний мембраны при наличии распределенной внешней нагрузки с плотностью $F(x;y;t)$

$$\rho u_{tt} = T\Delta u + F(x;y;t),$$

$u(x;y;t)$−амплитуда поперечных колебаний мембраны;

T−сила натяжения (считаем, что сила натяжения одинакова в обоих направлениях);

ρ− поверхностная плотность.

После деления обеих частей уравнения на ρ получим

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(x;y;t), \qquad \Delta u = u_{xx} + u_{yy},$$

$a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$− скорость распространения поперечных волн.

Поперечные колебания круглой мембраны

Уравнение малых поперечных колебаний круглой мембраны при наличии распределенной внешней нагрузки с плотностью $F(r;\varphi;t)$ аналогично предыдущему

$$\rho u_{tt} = T\Delta u + F(r;\varphi;t),$$

$u(r;\varphi;t)$−амплитуда поперечных колебаний мембраны;

T−сила натяжения (считаем, что сила натяжения одинакова во всех радиальных направлениях);

ρ−поверхностная плотность.

После деления обеих частей уравнения на ρ получим

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(r;\varphi;t), \qquad \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\varphi\varphi},$$

$a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$− скорость распространения поперечных волн.

Продольные колебания в цилиндре

В примере 2) приведено одномерное уравнение продольных колебаний цилиндрического стержня. Считается, что все точки каждого поперечного сечения стержня совершают синхронные колебания одинаковой амплитуды.

Если же амплитуды колебаний зависят не только от продольной координаты и времени, но и от радиальной и угловой координат, то задача, в общем случае, становится трехмерной.

Уравнение малых продольных колебаний в цилиндре при наличии распределенных в направлении оси внешних сил, имеющих в каждом поперечном сечении плотность $F(r;\varphi;z;t)$, имеет вид

$$\rho u_{tt} = E\Delta u + F(r;\varphi;z;t),$$

$u(r;\varphi;z;t)$–амплитуда продольных колебаний стержня,
(волн сжатия);
E–модуль упругости;
ρ–объемная плотность.
После деления обеих частей уравнения на ρ получим

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(r;\varphi;z;t), \qquad \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}\,u_r + \frac{1}{r^2}\,u_{\varphi\varphi} + u_{zz},$$

$a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$– скорость распространения волн сжатия в теле.

Колебания в шаре. Сферические волны.

Уравнение малых колебаний точек шара при наличии внешних сил, распределенных по объему с плотностью $F(r;\varphi;\theta;t)$, имеет вид

$$u_{tt} = a^2\Delta u + f(r;\varphi;\theta;t),$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} r^2 u_r)_r + \frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta\; u_\theta)_\theta + + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,u_{\varphi\varphi}$$

$a = \sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$– скорость распространения волн сжатия.

К примеру, уравнение распространения сферических волн в однородной среде при точечном взрыве является одномерным

$$u_{tt} = a^2\Delta u, \quad \Rightarrow \quad u_{tt} = a^2\left(u_{rr} + \frac{2}{r}\,u_r\right).$$

2.3.2. Уравнения теплопроводности и диффузии

Если:

$u(M;t)$—температура тела (среды) в точке M в момент t,

k—коэффициент теплопроводности,

c—коэффициент теплоемкости,

$F(M;t)$—плотность внещних источников тепла,

ρ—плотность среды,

то уравнение теплопроводности в общем имеет вид

$$\nabla(k\ \nabla\ u) + F(M;t) = c\ \rho\ u_t.$$

В случае постоянного k получим

$$k\Delta u + F(M;t) = c\ \rho\ u_t,\ \Rightarrow\quad a^2\Delta u + f(M;t) = u_t.$$

Здесь $a = \sqrt{\dfrac{k}{c\rho}}$— скорость теплопередачи.

Для различных случаев конфигурации тел (среды), в которых изучается закон распространения тепла, оператор Лапласа Δ записывается в соответствующих координатах.

Если:

$u(M;t)$—концентрация вещества в точке M к моменту t,

D—коэффициент диффузии,

c—коэффициент пористости вещества,

$F(M;t)$—плотность внешних источников или поглотителей вещества,

то уравнение диффузии в общем имеет вид

$$\nabla(D\ \nabla\ u) + F(M;t) = c\ u_t.$$

В случае постоянного D получим

$$D\Delta u + F(M;t) = c\ u_t,\ \Rightarrow\quad a^2\Delta u + f(M;t) = u_t.$$

Здесь $a = \sqrt{\dfrac{D}{c}}$— скорость диффундирования.

При установившемся процессе $u_t = 0$ задача об отыскании стационарной температуры, или концентрации вещества $u = u(M)$ сводится к решению уравнения эллиптического типа

$$a^2\Delta\ u = -f(M;t).$$

2.4. Типы краевых условий. Постановка краевых задач

При математической постановке физических, химических и т.д. задач необходимо:

а) записать уравнение или систему уравнений, которым удовлетворяет искомая функция, описывающая исследуемое явление.

б) Записать дополнительные условия, которым должна удовлетворять функция на границах области, в которой решается задачи.

Пусть функция $u = u(x;\ t)$ ищется в интервале $x \in [0;\ l]$. Различают три типа краевых условий.

Краевые условия I–го типа – задание значений искомой функции на концах интервала

Неоднородные

$$\begin{cases} u(0;\ t) = \mu_1(t), \\ u(l;\ t) = \mu_2(t). \end{cases}$$

Однородные

$$\begin{cases} u(0;\ t) = 0, \\ u(l;\ t) = 0. \end{cases}$$

Краевые условия II–го типа – задание значений производной функции по координате x на концах интервала

Неоднородные

$$\begin{cases} u_x(0;\ t) = \nu_1(t), \\ u_x(l;\ t) = \nu_2(t). \end{cases}$$

Однородные

$$\begin{cases} u_x(0;\ t) = 0, \\ u_x(l;\ t) = 0. \end{cases}$$

Краевые условия III–го типа – задание комбинации значений функции и ее производной по координате x на концах интервала

Неоднородные

$$\begin{cases} u_x(0;\ t) + h\, u(0;\ t) = \beta_1(t), \\ u_x(l;\ t) + h\, u(l;\ t) = \beta_2(t). \end{cases}$$

Однородные

$$\begin{cases} u_x(0;\ t) + h\, u(0;\ t) = 0, \\ u_x(l;\ t) + h\, u(l;\ t) = 0. \end{cases}$$

В соответствии с типом краевых условий различают и типы краевых задач.

Задачу на отыскание функции с граничными условиями отмеченных типов соответственно называют

1. Краевая задача I –го типа – **Задача Дирихле**.
2. Краевая задача II –го типа – **Задача Неймана**.
3. Краевая задача III –го типа – **Смешанная краевая задача**.

Проиллюстрируем смысл краевых условий на примерах задач о колебании струны и теплопроводности.

1. Задача о поперечных колебаниях струны длины l, или продольных колебаниях стержня

1) Краевые условия I – типа

неоднородные
$\begin{cases} u(0;\ t)=\mu_1(t), \\ u(l;\ t)=\mu_2(t) \end{cases}$ – задан закон движения концов струны.

Однородные
$\begin{cases} u(0;\ t)=0, \\ u(l;\ t)=0 \end{cases}$ концы струны закреплены.

2) Краевые условия II – типа

неоднородные $\begin{cases} u_x(0;\ t)=\nu_1(t), \\ u_x(l;\ t)=\nu_2(t) \end{cases}$ – задан закон изменения сил, приложенных к концам струны и действующих в направлении колебаний.

В этом случае режим на концах

для продольных колебаний стержня $\begin{cases} Eu_x(0;\ t)=f_1(t), \\ Eu_x(l;\ t)=f_2(t). \end{cases}$

Для поперечных колебаний струны $\begin{cases} Gu_x(0;\ t)=f_1(t), \\ Gu_x(l;\ t)=f_2(t) \end{cases}$,

где $E,\ G-$ модули упругости при сжатии и изгибе соответственно, а $f_1(t),\ f_2(t)-$ действующие силы.

Однородные условия $-\begin{cases} u_x(0;\ t)=0, \\ u_x(l;\ t)=0 \end{cases}$ означают отсутствие сил на концах струны, или стержня (концы струны свободны).

3) Краевые условия III – типа

Пусть к концу стержня $x=l$ прикреплена пружина. Тогда сила натяжения Eu_x на конце стержня будет уравновешиваться силой упругости пружины, которая пропорциональна величине перемещения конца стержня, т.е имеем условие равновесия

$$Eu_x(l;t)=-ku(l;t) \quad\Longrightarrow\quad u_x(l;t)+Hu(l;t)=0.$$

2. Задача теплопроводности для стержня длиной l

Если $u(x;t)$– температура точек стержня, то смысл граничных условий различного типа состоит в следующем

1) Краевые условия I – типа

неоднородные $\begin{cases} u(0;\ t) = T_1(t), \\ u(l;\ t) = T_2(t) \end{cases}$ – на концах стержня поддерживается постоянная температура.

Однородные $\begin{cases} u(0;\ t) = 0, \\ u(l;\ t) = 0 \end{cases}$ – на концах стержня поддерживается нулевая температура.

2) Краевые условия II – типа

неоднородные $\begin{cases} u_x(0;\ t) = \nu_1(t), \\ u_x(l;\ t) = \nu_2(t) \end{cases}$ – задан тепловой поток (количество отдаваемого в единицу времени тепла) из концов стержня в окружающую среду.

Однородные $\begin{cases} u_x(0;\ t) = 0, \\ u_x(l;\ t) = 0 \end{cases}$ – тепловой поток из концов стержня в окружающую среду отсутствует, т.е. теплообмена не происходит – концы стержня теплоизолированы.

Если решается задача теплопроводности для некоторого тела, то граничные условия II – типа записывают $\frac{\partial u}{\partial n}|_s = 0$, означающие отсутствие градиента температуры по нормали к поверхности тела, или, что тоже самое, теплоизоляцию поверхности тела.

3) Краевые условия III – типа

Пусть на одном из концов стержня или на поверхности тела происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей температуру $T(t)$, по закону Ньютона (тепловой поток с границы тела в окружающую среду пропорционален разности температур тела и среды). В этом случае мы имеем граничные условия III типа

$$[u_x + H(u - T(t))]_{x=l} = 0.$$

3. Методы решения задач математической физики

3.1. Метод характеристик

Метод характеристик позволяет достаточно эффективно строить решения задачи Коши, как для одномерного, так и для многомерного волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(\overline{x}; t)$$

Рассмотрим примеры.

3.1.1. Свободные колебания невесомой бесконечной струны. Формула Даламбера

Решение задачи Коши о свободных поперечных колебаниях бесконечной невесомой струны сводится к решению однородного одномерного волнового уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad x \in (-\infty, \infty)$$

при начальных условиях

$u(x, 0) = \varphi(x)-$ дана начальная форма струны,

$u_t(x, 0) = \phi(x)-$ задана начальная скорость точек струны.

Решение ищется по формуле Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)) + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \phi(z) dz.$$

Формула Даламбера дает решение задачи в виде суперпозиции прямой и обратной бегуших вдоль струны волн. Этот метод называют методом характеристик, или методом бегущих волн.

3.1.2. Колебания бесконечной струны с нагрузкой

Если $F(x, t)-$ плотность распределенной вдоль струны нагрузки, то имеем неоднородную задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \text{ где } f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$$

при начальных условиях $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \phi(x).$

Решение задачи находится в виде суммы решений

$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$ однородной

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \phi(x)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \phi(z)dz$$

и неоднородной задач

$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t), \qquad w(x,0) = w_t(x,0) = 0$$

$$w(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-at}^{x+at} f(z,\tau)dzd\tau.$$

3.1.3. Колебания полубесконечной струны

Данная задача является смешанной начально–краевой. Решение задачи строится на основании формулы Даламбера. Предварительно, в зависимости от краевого условия, необходимо переделать начальные условия и свести задачу о колебаниях полубесконечной струны к задаче о колебании бесконечной.

З а д а ч а: Найти амплитуду свободных поперечных колебаний полубесконечной струны $(0 \le x \le \infty. \ t \ge 0)$ при известных начальных условиях, если край струны $(x = 0)$ закреплен.

Т.о. требуется решить смешанную задачу:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, \infty)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \phi(x), \quad u(0;t) = 0$$

Продолжим начальные условия нечетным образом для $x < 0$

$$u(x;0) = \varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \ge 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$u_t(x;0) = \phi_1(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \ge 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Решение этой задачи

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x-at) + \varphi_1(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \phi_1(z)dz.$$

Для решения задачи о колебании полубесконечной струны со свободным краем, т.е. задачи

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, \infty)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \phi(x), \quad u_x(0;t) = 0$$

продолжим начальные условия четным образом для $x < 0$

$$u(x;0) = \varphi_2(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$u_t(x;0) = \phi_2(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ \phi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Решение этой задачи

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi_2(x-at) + \varphi_2(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \phi_2(z)dz.$$

3.1.4. Колебания полубесконечной струны с источником возмущения на краю

Покажем решение неоднородной задачи о колебании полубесконечной струны с источником возмущения при $x = 0$).

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in [0, \infty)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \phi(x), \quad u(0;t) = \mu(t)$$

Задачу разбиваем на две

1) однородная краевая задача

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad x \in [0, \infty)$$
$$v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \phi(x), \quad v(0;t) = 0$$

2) задача о распространении краевого режима

$$w_{tt} = a^2 w_{xx}, \quad x \in [0, \infty)$$
$$w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0, \quad w(0;t) = \mu(t)$$

Решение однородной задачи приведено в п. 3.1.3. Решение неоднородной задачи о распространении краевого режима при нулевых начальных условиях повторяет форму краевого режима

$$w(x;t) = \begin{cases} 0, & t < \dfrac{x}{a} \\ \mu\left(t - \dfrac{x}{a}\right), & t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

Решение задачи будет суммой $\quad u(x;t) = v(x;t) + w(x;t).$

3.2. Метод функции источника (функция Грина)

3.2.1. Функции Грина для бесконечной прямой

Функцией Грина $G(x-x_0,t)$ для простейшего уравнения теплопроводности на бесконечной прямой $x \in (-\infty;+\infty)$ называется фундаментальное решение задачи Коши

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad u(x,0) = \delta(x-x_0),$$

каковым является $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sqrt{4a^2 t}}}$,

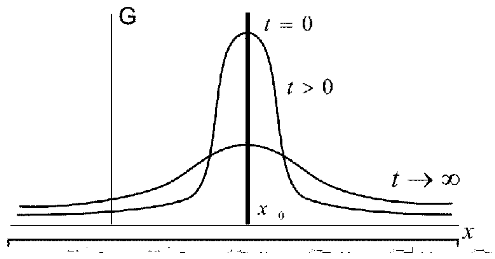
т.е. $$G(x-x_0,t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sqrt{4a^2 t}}}.$$

Отметим, что при $t=0$ функция Грина является δ–функцией

$$G(x-x_0,0) = \delta(x-x_0).$$

Функцию Грина еще часто называют функцией влияния мгновенного точечного теплового источника (функцией источника).

На рис. показан процесс рассасывания температуры во времени, сосредоточенной вначале в точке x_0 в виде δ– функции.



Функция Грина для простейшего уравнения теплопроводности на полупрямой $x \in [0;\infty)$ строится в зависимости от краевого условия при $x=0$.

Так, функция Грина для задачи

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad u(x;0) = \delta(x-x_0), \qquad u(0;t) = 0$$

(на торце прямой поддерживется постоянная нулевая температура) имеет вид

$$G^*(x-x_0,t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sqrt{4a^2 t}}} - e^{-\frac{(x+x_0)^2}{\sqrt{4a^2 t}}} \right).$$

Решение получено сложением влиянием двух δ–источников; одного реального в точке x_0, а другого той же интенсивности, но противоположного знака, в точке $-x_0$.

Функция Грина для задачи

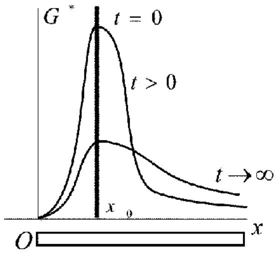
$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad u(x;0) = \delta(x-x_0), \qquad u_x(0;t) = 0$$

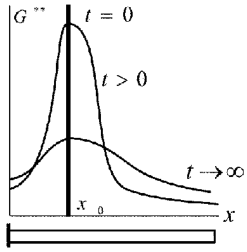
(на торце прямой отсутствует поток тепла, т.е. торец теплоизолирован) имеет вид

$$G^{**}(x-x_0,t)=\frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}}\left(e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sqrt{4a^2t}}}+e^{-\frac{(x+x_0)^2}{\sqrt{4a^2t}}}\right).$$

Решение получено сложением влияния двух $\delta-$источников: одного реального в точке x_0, а другого той же интенсивности и знака, в точке $-x_0$.

На рис. показана качественная картина изменения температуры во времени для обоих случаев.





3.2.2. Распространение тепла в бесконечном стержне при отсутствии дополнительных источников

Как было показано выше, функции Грина являются решениями задачи Коши для уравнения теплопроводности при начальном распределении температуры в виде точечного импульса единичной мощности $u(x,0)=\delta(x-x_0)$. С помощью функций Грина можно получить решения для произвольного распределения начальной температуры. Запишем эти решения.

1) Задача теплопроводности для бесконечного стержня

$$u_t=a^2u_{xx},\quad x\in(-\infty;+\infty),\quad u(x;0)=\varphi(x).$$

Решение: $$u(x;t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)G(x-\xi,t)\,d\xi.$$

2) Задача теплопроводности для полубесконечного стержня при поддержке нулевой температуры на торце

$$u_t=a^2u_{xx},\quad x\in(0;+\infty),\quad u(x;0)=\varphi(x),\quad u(0,t)=0.$$

Решение: $$u(x;t)=\int\limits_{0}^{\infty}\varphi(\xi)G^{*}(x-\xi,t)\,d\xi.$$

3) Задача теплопроводности для полубесконечного стержня с теплоизолированным торцом

$$u_t=a^2u_{xx},\quad x\in(0;+\infty),\quad u(x;0)=\varphi(x),\quad u_x(0,t)=0.$$

Решение: $$u(x;t)=\int_0^\infty \varphi(\xi)G^{**}(x-\xi,t)\,d\xi.$$

Пример 1. Решение задачи

$$u_t=a^2u_{xx},\quad x\in(-\infty;+\infty),\ \ u(x;0)=\begin{cases}0, & x<0,\\ T_0, & X\geq 0.\end{cases}$$

$$u(x;t)=T_0\int_0^\infty G(x-\xi,t)d\xi=\frac{T_0}{2}\left(1+\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{4a^2t}}\right)\right),$$

где $\Phi(z)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-y^2}dy-$ интеграл ошибок.

Пример 2. Решение задачи

$$u_t=a^2u_{xx},\quad x\in(-\infty;+\infty),\ \ u(x;0)=Ae^{-x^2}.$$

$$u(x,t)=\frac{A}{\sqrt{1+4a^2t}}\,e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}.$$

3.2.3. Распространение тепла в бесконечном стержне при наличии дополнительных источников

Задача теплопроводности для бесконечного стержня

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad x\in(-\infty;+\infty),\ \ u(x;0)=\varphi(x),$$

где $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{c\rho}$, $F(x,t)-$плотность тепловых источников в стержне.

Решение такой задачи находится в виде суммы $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$ решений однородной задачи

$$v_t=a^2v_{xx},\quad v(x;0)=\varphi(x),$$

$$v(x;t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)G(x-\xi,t)\,d\xi.$$

и неоднородной $$w_t=a^2w_{xx}+F(x,t),\quad w(x;0)=0,$$

$$w(x;t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)\,d\xi d\tau.$$

Итак, решение неоднородной задачи теплопроводности

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad x\in(-\infty;+\infty),\ \ u(x;0)=\varphi(x)$$

имеет вид

$$u(x;t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)G(x-\xi,t)\,d\xi+\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)\,d\xi d\tau.$$

3.3. Метод разделения переменных

Метод разделения переменных применяется к решению краевых задач математической физики. В таких задачах решение ищется в ограниченной области, на границах которой заданы краевые условия. Суть метода кратко рассмотрим на примерах одномерных задач гиперболического и параболического типов.

1. Требуется найти амплитуду $u(x;t)$ свободных поперечных колебаний струны длиной l, на концах которой заданы краевые условия какого либо типа при заданных начальных условиях. В общем виде

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad \begin{matrix} a_1 u_x(0;t) + b_1 u(0;t) = 0 \\ a_2 u_x(l;t) + b_2 u(l;t) = 0 \end{matrix}, \; u(x;0) = \varphi(x), \; u_t(x;0) = \psi(x)$$

Будем искать нетривиальные частные решения уравнения в виде произведения двух функций $u(x,t) = X(x)T(t)$, где $X(x)-$ непрерывна для $0 \le x \le l$, а $T(t)-$ непрерывна для $0 \le t < \infty$.

Подставляя функцию $XT, \Longrightarrow u_{tt} = T''X, \quad u_{xx} = X''T$ в исходное уравнение и деля его обе части на a^2XT, получаем

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X}.$$

Чтобы это равенство было тождественным для всех указанных значений x и t, необходимо и достаточно, чтобы обе дроби, из которых одна зависит только от x , а другая только от t, были равны одной и той же константе

$$\frac{T''}{a^2T} = -\lambda = \frac{X''}{X}.$$

Таким образом, должны выполняться тождества

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \quad X'' + \lambda X = 0.$$

Следовательно, поиск решения исходного уравнения сводится к поиску нетривиальных решений полученных уравнений. При этом на функцию $X(x)$ имеем однородные краевые условия.

Возникает вопрос, какое уравнение нужно решить вначале? Конечно второе, т.к. краевые условия есть только на функцию $X(x)$.

Однако уравнение на $T(t)$ позволяет сразу сузить круг поиска значений λ, т.к. ограниченные и незатухающие (струна совершает свободные колебания) решения уравнение на $T(t)$ имеет только при $\lambda > 0$.

Решаем задачу Штурма – Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad \begin{array}{l} a_1 X'(0) + b_1 X(0) = 0 \\ a_2 X'(l) + b_2 X(l) = 0 \end{array}$$

и находим собственные числа λ_n и собственные функции $X_n(x)$ задачи.

Находим решения уравнения на $T(t)$ при найденных значениях λ.

Перемножая полученные частные решения и суммируя, получим общее решение задачи. Неопределенные коэффициенты, которые входят в общее решение задачи, найдутся путем их подбора согласно начальным условиям.

Такова вкратце общая схема метода разделения переменных в простейшем одномерном волновом уравнении. Схема метода практически не меняется в решении краевых задач для уравнений параболического и эллиптического типов. При решении более сложных краевых задач, к примеру многомерных, конфигурация метода может усложняться, но суть его при этом не изменится.

Примеры на построение решений краевых задач математической физики для уравнений различных типов рассмотрены в последующих параграфах.

Кроме рассмотренных методов при решении задач используются и другие, более эффективные в решаемой задаче. К таким методам относятся: метод интегральных преобразований Лапласа и Фурье, метод потенциалов, метод конечных разностей, вариационный метод и др. В данном пособии они не рассматриваются.

4. Краевые задачи математической физики

4.1. Задачи на уравнения эллиптического типа

[3], Ч.4, гл 5, стр. 145 – 239

К уравнениям эллиптического типа относятся, к примеру,
уравнение Лапласа– $\Delta u = 0$,
уравнение Гельмгольца – $\Delta u + k^2 u = 0$,
уравнение Пуассона –$\Delta u = f(\vec{x})$.

Так, задача о нахождении гармонической в области функции или задача о распределении стационарной температуры и т.п., сводятся к решению уравнения $\Delta u = 0$ в данной области.

Для функции 2-х переменных:

в прямоугольных координатах для функции $u = u(x,\ y)$

$$\Delta\, u = 0 \implies u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

в полярных координатах для функции $u = u(r,\ \varphi)$

$$\Delta\, u = 0 \implies \frac{1}{r}\left(r u_r\right)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

Для функции 3-х переменных:

в прямоугольных координатах для функции $u = u(x,\ y,\ z)$

$$\Delta\, u = 0 \implies u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

в цилиндрических координатах для функции $u = u(r,\ \varphi,\ z)$

$$\Delta\, u = 0 \implies \frac{1}{r}\left(r u_r\right)_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0,$$

в сферических координатах для функции $u = u(r,\ \varphi,\ \theta)$

$$\Delta\, u = 0 \implies \frac{1}{r^2}\left(r^2 u_r\right)_r + \frac{1}{r^2 \sin\theta}(\sin\theta\, u_\theta)_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

4.1.1. Решение уравнения Лапласа в прямоугольной области

Задача 1. Найти гармоническую в области $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$ функцию $u(x;y)$, если на границе области:

$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=a} = 0,\ \ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=b} = \varphi(x).$

Решаем уравнение Лапласа в прямоугольных координатах

$$\Delta u = 0 \implies u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Разделяем переменные

$u(x;y) = X(x)Y(y) \implies u_{xx} = X''Y,\ \ u_{yy} = XY''.$

После подстановки в уравнение и деления на XY, имеем

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0 \implies \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=\lambda \implies \begin{array}{l} X''-\lambda X=0, \\ Y''+\lambda Y=0. \end{array}$$

Так как граничные условия являются однородными на границах $x=0$, $x=a$, то решаем задачу Штурма - Лиувилля на функцию $X(x)$

$$X''-\lambda X=0, \quad X(0)=X(a)=0,$$

$$X_n=C_n\sin\frac{n\pi}{a}x, \quad \lambda_n=-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \ n=\overline{1;\infty}$$

Тогда уравнение на функцию $Y(y)$ при найденном $\lambda=\lambda_n$

$$Y''-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 Y=0 \implies Y_n=A_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+B_n e^{-\frac{n\pi}{a}y}.$$

Общее решение: $$u(x;y)=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{\frac{n\pi}{a}y}+d_n e^{-\frac{n\pi}{a}y})\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

Согласно граничным условиям $u(x;0)=0$, $u(x;b)=\varphi(x)$, получаем:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n+d_n)\sin\frac{n\pi}{a}x=0 \Rightarrow c_n=-d_n \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n e^{\frac{n\pi b}{a}}+d_n e^{-\frac{n\pi b}{a}})\sin\frac{n\pi}{a}x=\varphi(x) \end{array}\right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}2c_n\mathrm{sh}\frac{n\pi b}{a}\sin\frac{n\pi}{a}x=\varphi(x).$$

Откуда коэффициент $2c_n\mathrm{sh}\frac{n\pi b}{a}$ находим разложением в ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по собственным функциям задачи $\sin\frac{n\pi}{a}x$, т.е.

$$2c_n\mathrm{sh}\frac{n\pi b}{a}=\frac{2}{a}\int_0^a\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx \implies c_n=\frac{1}{a\mathrm{sh}\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx.$$

Окончательный ответ задачи $\quad u(x;y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\dfrac{\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{a}y}{\mathrm{sh}\,\frac{n\pi}{a}b}\sin\dfrac{n\pi}{a}x$, где c_n найдено выше.

В случае ненулевых граничных условий и на другой паре границ следует задачу изначально разбить на две, подобные рассмотреной выше. Так, если к примеру

$$u|_{x=0}=0, \ u|_{x=a}=\psi(y), \quad u|_{y=0}=0, \ u|_{y=b}=\varphi(x),$$

разбиваем задачу на две.

1) $\Delta u_1=0$, $\ u_1|_{x=0}=0$, $u_1|_{x=a}=0$, $\quad u_1|_{y=0}=0$, $u_1|_{y=b}=\varphi(x)$,

2) $\Delta u_2=0$, $\ u_2|_{x=0}=0$, $u_2|_{x=a}=\psi(y)$, $\quad u_2|_{y=0}=0$, $u_2|_{y=b}=0$,

Находим решение каждой из задач по разобранной выше схеме. Окончательное решение будет суммой решений каждой из задач.

4.1.2. Решение уравнения Лапласа в круге и кольце

Задача 2. Найти функцию $u(r;\varphi)$, гармоническую в круге радиуса b и принимающую на границе круга заданное значение $u(b;\varphi) = g(\varphi)$.

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в полярных координатах r, φ имеет вид

$$\frac{1}{r}(r\ u_r)_r + \frac{1}{r^2}\ u_{\varphi\varphi} = 0.$$

Метод разделения переменных $u(r;\varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \ldots$ и т.д., приводит к системе

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \\ \Phi'' + \lambda\Phi = 0. \end{cases}$$

Функция $u(r;\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)-$ гармоническая, и поэтому она достигает своего наибольшего значения на границе области, для чего должно быть $|R(r)| < \infty$, $|\Phi(\varphi)| < \infty$. Кроме того, решение уравнения Лапласа в полярных координатах должно быть периодическим по углу, т.е.

$$u(r;\varphi) = u(r;\varphi + 2\pi) \implies \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

В результате решение задачи Штурма-Лиувилля для $\Phi(\varphi)$ дает

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\ \cos n\varphi + B_n\ \sin n\varphi, \quad \lambda_n = n^2.$$

Функция $R(r)$ из первого уравнения, которое является уравнением Эйлера, найдется:

$$\begin{aligned} R_n(r) &= C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad && n \neq 0, \\ R_n(r) &= C_0 + D_0 \ln r, && n = 0. \end{aligned}$$

Так как $|R(r)| < \infty$, то для внутренней задачи $r < b$ следует $D_0 = D_n = 0$, а для внешней $r > b$ имеем $C_n = D_0 = 0$. Таким образом, общее решение задачи:

<u>внутри круга</u> $(r \leq b)$ $\qquad u(r;\varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$

<u>вне круга</u> $(r \geq b)$ $\qquad u(r;\varphi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{r^n}\ (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$

<u>Для кольца</u> $(a \leq r \leq b)$ условия ограниченности выполняются автоматически и решением задачи для кольца будет сумма

$$u(r;\varphi) = a_0 + b_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n r^n + \frac{b_n}{r^n}\right) \cos n\varphi + \left(c_n r^n + \frac{d_n}{r^n}\right) \sin n\varphi.$$

Коэффициенты A_n, B_n определяются сопоставлением двух рядов: – общего решения задачи и ряда Фурье для граничного значения функции $u(b;\varphi) = g(\varphi)$.

$$g(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin\varphi, \text{ где } \quad \alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\,d\varphi,$$
$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi, \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi.$$

4.1.3. Решение уравнения Лапласа в круговом секторе

Задача 3. Найти гармоническую в круговом секторе $(0 \le r \le b, \quad 0 \le \varphi \le \pi/3)$ функцию $u(r;\varphi)$, если ее граничные значения:

$$u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi/3} = 0, \qquad u\Big|_{r=b} = 1 - \varphi.$$

Решаем задачу $\Delta u = 0, \implies \dfrac{1}{r}(r\,u_r)_r + \dfrac{1}{r^2}\,u_{\varphi\varphi} = 0$ при указаннных граничных условиях. Метод разделения переменных приводит к системе

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda R = 0, \\ \Phi'' + \lambda\Phi = 0. \end{cases}$$

Решение задачи Штурма - Лиувилля на функцию $\Phi(\varphi)$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(\pi/3) = 0,$$
$$\phi_n = C_n \sin 3n\varphi, \qquad \lambda_n = (3n)^2.$$

Обшее решение задачи $$u(r;\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, r^n \sin 3n\varphi.$$

Так как при $r = b$, $\quad u = 1 - \varphi$, имеем

$$1 - \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, b^n \sin 3n\varphi.$$

Раскладывая левую часть уравнения в ряд Фурье по синусам в $(0;\pi/3)$, имеем

$$a_n b^n = \frac{2}{\pi/3}\int_0^{\pi/3} (1-\varphi)\sin 3n\varphi\,d\varphi = \frac{2}{n\pi}\left(1 + \left(\frac{\pi}{3} - 1\right)\cos n\pi\right),$$
$$a_n = \frac{1}{b^n}\,\frac{2}{n\pi}\left(1 + \left(\frac{\pi}{3} - 1\right)\cos n\pi\right).$$

Ответ: $$u(r;\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{b}\right)^n \frac{2}{n\pi}\left(1 + \left(\frac{\pi}{3} - 1\right)\cos n\pi\right)\sin 3n\varphi.$$

4.1.4. Решение уравнения Лапласа в цилиндре

Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в цилиндрических координатах r, φ, z

$$\frac{1}{r}(r\ u_r)_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0.$$

1) $u = u(r;\varphi)$ Искомая функция не зависит от осевой координаты z.

В этом случае задача нахождения гармонической функции в цилиндре аналогична задаче об определении гармонической функции в круге.

2) $u = u(r;\ z)$ Искомая функция не зависит от угловой координаты φ.

Задача 4. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра радиуса b и высотой h, если его боковая поверхность теплоизолирована, на нижнем торце поддерживается нулевая температура, а на верхнем торце температура постоянна и равна $J_0\left(\frac{\gamma_k^0}{b}r\right)$, где γ_k^0- $k-$ ый корень уравнения $J_0'(x) = 0$.

Р е ш е н и е. Граничные условия задачи не содержат зависимости от угла φ и математическая постановка задачи выглядит так:

$$\Delta u = 0 \implies \frac{1}{r}(r\ u_r)_r + u_{zz} = 0,$$

$$|u(0;z)| < \infty, \quad u_r(b;z) = 0, \quad u(r;0) = 0, \quad u(r;h) = J_0\left(\frac{\gamma_k^0}{b}r\right).$$

Метод разделения переменных $u(r;z) = R(r)Z(z)), ...$ и т.д., приводит к системе

$$\begin{cases} r^2R'' + rR' - \lambda r^2 R = 0, \\ Z'' + \lambda Z = 0. \end{cases}$$

Так как граничные условия являются однородными по r, то решаем сначала задачу Штурма - Лиувилля на функцию $R(r)$, уравнение на которую является уравнением Бесселя

$$r^2R'' + rR' - \lambda r^2 R = 0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(b) = 0.$$

Собственные функции и спектр задачи

$$R_n(r) = C_n J_0\left(\frac{\gamma_n^0}{b}r\right), \quad \lambda_n = -\left(\frac{\gamma_n^0}{b}\right)^2,$$

где γ_n^0- решения уравнения $J_0'(x) = 0$.

Тогда $Z'' - \left(\frac{\gamma_n^0}{b}\right)^2 Z = 0 \implies Z_n = A_n e^{\frac{\gamma_n^0}{b} z} + B_n e^{-\frac{\gamma_n^0}{b} z}$

Из условия $u(r;0) = 0$ следует

$$Z(0) = 0 \Longrightarrow A_n = -B_n, \quad \text{т.е.} \quad Z_n = 2A_n \mathrm{sh}\,\left(\frac{\gamma_n^0}{b} z\right).$$

Тогда, решение задачи $$u(r;z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{sh}\,\left(\frac{\gamma_n^0}{b} z\right)\ J_0\left(\frac{\gamma_n^0}{b} r\right).$$

Учитывая граничное условие $u(r;h) = J_0\left(\frac{\gamma_k^0}{b} r\right)$,

имеем $a_k \mathrm{sh}\,\left(\frac{\gamma_k^0}{b} h\right) = 1, \quad a_n = 0 \quad$ при $\quad n \neq k$.

Окончательный ответ задачи $$u(r;z) = \frac{\mathrm{sh}\,\left(\frac{\gamma_k^0}{b} z\right)}{\mathrm{sh}\,\left(\frac{\gamma_k^0}{b} h\right)}\ J_0\left(\frac{\gamma_k^0}{b} r\right).$$

Рассмотрим другие граничные условия задачи. Пусть торцы цилиндра теплоизолированы, а на боковой поверхности поддерживается температура $u(b;z) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right)$.

Задача 5. Найти стационарное распределение температуры внутри цилиндра радиуса b и высотой h, если на его нижнем и верхнем основаниях поддерживается нулевая температура, а на боковой поверхности температура распределена по закону $u(b;z) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{h} z\right)$.

Р е ш е н и е: Имеем задачу

$$\Delta u = 0 \implies \frac{1}{r}(r\ u_r)_r + u_{zz} = 0,$$

$$|u(0;z)| < \infty, \quad u(b;z) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{h} z\right), \quad u_z(r;0) = u_z(r;h) = 0.$$

Так как граничные условия на функцию однородные $Z(z)$

$$Z'' + \lambda Z = 0, \qquad Z_z(0) = Z_z(h) = 0,$$

то решение задачи $$Z_n(z) = C_n \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2.$$

Тогда уравнение Бесселя на $R(r)$

$$r^2 R'' + rR' - \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 r^2 R = 0 \quad \implies \quad R_n = A_n I_0\left(\frac{n\pi}{h} r\right).$$

Таким образом:

$$u(r;z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0\left(\frac{n\pi}{h} r\right)\ \cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right).$$

С учетом условия $u(b;z) = \frac{3}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{h} z\right)$ имеем

$$\frac{3}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{h}z\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n I_0\left(\frac{n\pi}{h}b\right)\,\cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right).$$

Откуда получаем $\quad a_2 I_0\left(\frac{2\pi}{h}b\right) = \frac{3}{2}.$

Ответ задачи:
$$u(r;z) = \frac{3}{2}\frac{I_0\left(\frac{2\pi}{h}r\right)}{I_0\left(\frac{2\pi}{h}b\right)}\cos\left(\frac{2\pi}{h}z\right).$$

3) Общий случай : $u = u(r;\ \varphi;\ z)$

Задача 6. Найти функцию, гармоническую внутри цилиндра радиуса основания b и высотой h, если на боковой поверхности и нижнем основании цилиндра функция равна 0, а на верхнем основании она равна функции $f(r;\ \varphi)$.

Р е ш е н и е. Требуется найти решение уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \implies \frac{1}{r}(r\ u_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0,$$

$$|u| < \infty, \qquad u\big|_{r=b} = u\big|_{z=0} = 0, \qquad u\big|_{z=h} = f(r;\ \varphi).$$

Метод разделения переменных $u = F(r;\ \varphi)Z(z)$ после подстановки в уравнение, последующего деления на FZ и введения параметра, приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{1}{r}(r\ F_r)_r + \frac{1}{r^2}F_{\varphi\varphi} + \lambda F = 0, \\ Z'' - \lambda Z = 0. \end{cases}$$

Применяя опять метод разделения переменных к первому уравнению $F(r;\varphi) = R(r)\Psi(\varphi)$, получим его общее решение

$$F(r;\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk}\cos n\varphi + b_{nk}\sin n\varphi)J_n\left(\alpha_n^k\frac{r}{b}\right).$$

$\lambda_k = \alpha_n^k,$
где α_n^k– положительные корни уравнений $J_n(x) = 0, \quad n = \overline{1;\infty}.$

Для $Z(z)$ с учетом нулевого значения функции на нижнем основании цилиндра, получим

$$Z_k(z) = c_k\frac{\mathrm{sh}\ (\alpha_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}}\mathrm{z/h})}{\mathrm{sh}\ (\alpha_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}})}.$$

Общее решение задачи

$$u(r;\varphi;z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{sh}(\alpha_n^k z/h)}{\mathrm{sh}(\alpha_n^k)}(c_{nk}\cos n\varphi+d_{nk}\sin n\varphi)J_n\left(\alpha_n^k\frac{r}{b}\right).$$

Коэффициенты c_{nk}, d_{nk} найдутся как коэффициенты разложения в двойной ряд Фурье по функциям

$$\cos(n\varphi)J_n\left(\alpha_n^k\frac{r}{b}\right)\quad \text{и} \qquad \sin(n\varphi)J_n\left(\alpha_n^k\tfrac{r}{b}\right).$$

Значения функции на верхнем основании $u\big|_{z=h}=f(r;\varphi)$.

4.1.5. Решение уравнения Лапласа для сферы

Уравнение Лапласа $\Delta u=0$ в сферических координатах r,φ,θ

$$\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r+\frac{1}{r^2\sin\theta}(\sin\theta\, u_\theta)_\theta+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi}=0.$$

Рассмотрим отдельно случаи:

1) $u(r;\varphi;\theta)=u(r)$

Задача 7. Найти гармоническую внутри сферы радиуса b функцию $u=u(r)$, если на поверхности сферы $u\big|_{r=b}=U_0$.

Искомая гармоническая функция зависит только от расстояния до центра сферы.

В этом случае задача сводится к решению уравнения

$$\Delta u=0 \implies \frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r=0 \longrightarrow u_{rr}+\frac{2}{r}u_r=0.$$

Общее решение этого уравнения $u(r)=C_1+C_2r^{-1}$. В силу ограниченности искомой функции внутри сферы $C_2=0$. Таким образом, решение задачи :

$$u(r=0)=\mathrm{const}=u\big|_{r=b}=U_0.$$

2) $u(r;\varphi;\theta)=u(r;\theta))$.

Задача 8. Найти гармоническую внутри сферы радиуса b функцию $u=u(r;\theta)$, если на поверхности сферы $u\big|_{r=b}=f(\theta)$.

Соответственно, уравнение Лапласа после умножения на r^2 примет вид:

$$(r^2u_r)_r+\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\, u_\theta)_\theta=0 \quad \text{или}$$

$$r^2u_{rr}+2ru_r+u_{\theta\theta}+\mathrm{ctg}\,\theta\, u_\theta=0.$$

Метод разделения переменных $u(r;\theta) = R(r)\Theta(\theta), ...$ и т.д., приводит уравнение к системе
$$\begin{cases} r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0, \\ \Theta'' + \operatorname{ctg}\theta\,\Theta' + \lambda\Theta = 0. \end{cases}$$
Второе уравнение заменой $\cos\theta = t$ приводится к уравнению Лежандра для функции $\Theta(t)$
$$(1-t^2)\Theta'' - 2t\Theta' + \lambda\Theta = 0,$$

которое при $0 \le \theta \le \pi$, т.е. для $t \in (-1;1)$ и $|\Theta(-1)| < \infty$,

$|\Theta(1)| < \infty$, при $\lambda_n = n(n+1)$ имеет нетривиальные решения в виде полиномов Лежандра
$$\Theta_n(t) = C_nP_n(t) \implies \Theta_n(\theta) = A_nP_n(\cos\theta), \qquad \lambda_n = n(n+1).$$

Первое уравнение системы тогда $r^2R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0$ является уравнением Эйлера и имеет решение для $0 < r < b$ в виде
$$R_n(r) = B_nr^{-1/2+\sqrt{1/4+n(n+1)}}.$$
Общее решение задачи для сферы будет
$$u(r;\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, P_n(\cos\theta)\, r^{-1/2+\sqrt{1/4+n(n+1)}}.$$

Коэффициенты C_n найдутся разложением в ряд Фурье по полиномам Лежандра $p_n(\cos\theta)$ функции $f(\theta)$, которая задает значения искомой функции на поверхности шара
$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta)P_n9\cos\theta)d\theta.$$

3) Общий случай $u = u(r;\varphi;\theta)$

Задача 9. Найти гармоническую внутри сферы радиуса b функцию $u = u(r;\varphi;\theta)$, если на поверхности сферы $u|_{r=b} = f(\varphi;\theta)$.

Соответственно, уравнение Лапласа после умножения на r^2 примет вид:
$$(r^2u_r)_r + \frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\, u_\theta)_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} = 0.$$
Поиск решения этого уравнения в виде произведения $u(r;\varphi;\theta) =$

$R(r)Y(\varphi;\theta)$ приводит к двум уравнениям на функции $R(r)$ и $Y(\varphi;\theta)$

$$\begin{array}{l} r^2R'' - \lambda R = 0, \\ \dfrac{1}{\sin\theta}(\sin\theta\, Y_\theta)_\theta + \dfrac{1}{\sin^2\theta}Y_{\varphi\varphi} + \lambda Y = 0. \end{array}$$

Ограниченные решения 2-го уравнения называются сферическими функциями

$$\begin{array}{l} Y_n^k(\varphi;\theta) = P_n^k(\cos\theta)\sin k\varphi, \\ Y_n^{-k}(\varphi;\theta) = P_n^k(\cos\theta)\cos k\varphi, \\ Y_n^0(\varphi;\theta) = P_n(\cos\theta). \end{array}$$

Функции $Y_n(\varphi;\theta) = \sum\limits_{k=-n}^{n} C_k Y_n^k(\varphi;\theta)$ также являются сферическими функциями.

При $\lambda = n(n+1)$ первое уравнение имеет решения $R_n(r) = A_n r^n$.

Таким образом, гармоническими функциями в шаре в этом случае будут

$$u(r;\varphi;\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nk} r^n Y_n(\varphi;\theta).$$

Коэффициенты a_{nk} найдутся разложением в двойной ряд Фурье по сферическим функциям граничных значений функции.

4.1.6. Решение уравнения Гельмгольца

Задача 10. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца

$$\Delta u + \pi^2 u = 0$$

в прямоугольной области $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2)$,

если $u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0,\ \ u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=2} = \varphi(x)$.

Разделяем переменные

$u(x;y) = X(x)Y(y) \implies u_{xx} = X''Y,\ \ u_{yy} = XY''$.

После подстановки в уравнение и деления на XY, имеем

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \pi^2 = 0 \implies \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \pi^2 = -\lambda \implies \begin{array}{l} X'' + \lambda X = 0, \\ Y'' - (\lambda - \pi^2)Y = 0. \end{array}$$

Так как граничные условия являются однородными на границах $x = 0, \;\; x = a$, то решаем задачу Штурма - Лиувилля на функцию $X(x)$

$$X'' + \lambda X = 0, \;\; X(0) = X(1) = 0,$$

$$X_n = C_n \sin n\pi x, \;\; \lambda_n = (n\pi)^2, \; n = \overline{1;\infty}$$

Тогда уравнение на функцию $Y(y)$ при найденном $\lambda = \lambda_n$

$$Y'' - (n^2\pi^2 - \pi^2)Y = 0 \implies Y_n = \begin{cases} A_n e^{\pi\sqrt{n^2-1}y} + B_n e^{-\pi\sqrt{n^2-1}y}, & n > 1 \\ A_n \cos \pi y, \quad n = 1 \end{cases}$$

Общее решение:

$$u(x;y) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{\pi\sqrt{n^2-1}y} + d_n e^{-\pi\sqrt{n^2-1}y}) \sin n\pi x. \quad \text{для } n > 1$$

$$u(x;y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \pi y \sin \pi x. \quad \text{для } n = 1$$

Так как $\;\; u(x;0) = 0, \;\; u(x;2) = \varphi(x)$, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + d_n) \sin n\pi x = 0 \Rightarrow c_n = -d_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{2\pi\sqrt{n^2-1}} + d_n e^{-2\pi\sqrt{n^2-1}}) \sin n\pi x = \varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2c_n \mathrm{sh} 2\pi\sqrt{n^2-1} \sin n\pi x = \varphi(x).$$

Откуда коэффициент $2c_n \mathrm{sh} 2\pi\sqrt{n^2-1}$ находим разложением в ряд Фурье функции $\varphi(x)$ по собственным функциям задачи $\sin n\pi x$, т.е.

$$2c_n \mathrm{sh} 2\pi\sqrt{n^2-1} = 2\int_0^1 \varphi(x) \sin n\pi x \, dx$$

$$c_n = \frac{1}{\mathrm{sh} 2\pi\sqrt{n^2-1}} \int_0^1 \varphi(x) \sin n\pi x \, dx.$$

Окончательный ответ задачи $\quad u(x;y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \dfrac{\mathrm{sh}\; \pi\sqrt{n^2-1}y}{\mathrm{sh}\; 2\pi\sqrt{n^2-1}} \sin n\pi x,$

4.1.7. Решение уравнения Пуассона

Задача 11. Решить краевую задачу для уравнения Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} = 3 \sin x e^{-2y}$$

в полосе $\;\; (0 \le x \le \pi, \; 0 \le y < \infty)$,

если $\;\; u|_{y=0} = \sin x + x, \; u|_{x=0} = 0, \;\; u|_{x=\pi} = 0.$

Общее решение уравнения Пуассона ищется в виде

$$u(x;y) = v(x;y) + u^*(x;y),$$

где $v(x;y)-$ общее решение однородной задачи $u_{xx} + u_{yy} = 0$, а $u^*(x;y)-$ какое-либо частное решение неоднородной.
Нетрудно заметить, что в качестве частного рншения можно принять функцию $u^* = \sin xe^{-2y}$

Для поиска функции $v(x;y) = u(x;y) - u^*(x;y)$ имеем задачу
$v_{xx} + v_{yy} = 0, |_{y=0} = x,\ v|_{x=0} = 0,\ \ v|_{x=\pi} = 0.$

Разделяем переменные

$$v(x;y) = X(x)Y(y) \implies v_{xx} = X''Y,\ \ v_{yy} = XY''.$$

После подстановки в уравнение и деления на XY, имеем

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y} = 0 \implies \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \implies X'' + \lambda X = 0, Y'' - \lambda Y = 0.$$

Так как граничные условия являются однородными на границах $x = 0$, $x = a$, то решаем задачу Штурма - Лиувилля на функцию $X(x)$

$$X'' + \lambda X = 0,\ \ X(0) = X(\pi) = 0,$$

$$X_n = C_n \sin nx,\ \ \lambda_n = n^2,\ n = \overline{1;\infty}$$

Тогда уравнение на функцию $Y(y)$ при найденном $\lambda = \lambda_n - n^2$

$$Y'' - n^2 Y = 0 \to Y_n = a_n e^{-ny}.$$

Решение $Y = e^{ny}$ опускаем, т.к. при $y \to \infty$ оно является неограниченными. Имеем:

$$v(x;y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-ny} \sin nx.$$

Так как

$$v\Big|_{y=0} = x \to c_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx\, dx = -\frac{2\cos n\pi}{n},$$

Ответ: $$u(x;y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2\cos n\pi}{n} e^{-ny} \sin nx. + \sin xe^{-2y}$$

4.2. Краевые задачи на уравнения параболического типа

[3], Ч.4, гл 8, стр. 422 – 460

4.2.1. Задача теплопроводности для стержня

Задача 1. Найти распределение температуры в стержне длины l, боковая поверхность которого теплоизолирована, если на торцах поддерживается нулевая температура, а температура стержня в начальный момент времени подчинялась закону $u(x;0) = \varphi(x)$.

Р е ш е н и е: Требуется решить смешанную однородную задачу теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0;t) = u(l;t) = 0, \quad u(x;0) = \varphi(x).$$

Решаем задачу метом разделения переменных (метод Фурье). Ищем решение уравнения в виде

$$u(x;t) = X(x)T(t) \Longrightarrow u_t = X(x)T'(t), \quad u_{xx} = X''(x)T(t).$$

Подставляем найденное в уравнение $\quad X(x)T'(t) = a^2X''(x)T(t).$

Делим обе части уравнения на $\quad a^2XT, \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{T'}{a^2T} = \dfrac{X''}{X}.$

Так как левая часть уравнения зависит только от t, а правая только от x, то равенство отношений возможно только при условии равенства каждого отношения некоторой постоянной λ. Таким образом, имеем систему

$$T' - a^2\lambda T = 0, \quad X'' - \lambda X = 0$$

для нахождения функций $X(x)$ и $T(t)$. При этом граничные условия задачи $u(0;t) = u(l;t) = 0$ в силу того, что $u(x;t) = X(x)T(t)$, соответствуют $X(0) = X(l) = 0$.

1) Решение задачи Штурма-Лиувилля $X''-\lambda X = 0, \ X(0) = X(l) = 0$ имеет вид $\qquad X_n(x) = C_n \sin\dfrac{n\pi}{l}x, \quad \lambda_n = -\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = \overline{0;\infty}.$

2) Первое уравнение системы $T' - a^2\lambda T = 0$ для найденных значений параметра λ : $\quad T' + \left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 T = 0$ имеет решение

$$T_n(t) = B_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

Таким образом, общее решение задачи:

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$$

здесь обозначено $a_n = C_nB_n$.

Теперь находим частное решение задачи, которое соответствует начальному условию $u(x;0) = \varphi(x)$. Имеем при $t = 0$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Раскладывая функцию $\varphi(x)$ в интервале $(0;l)$ в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x,\quad n=\overline{1,\infty}\right\}$, имеем

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Окончательное решение смешанной задачи имеет вид:

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

где a_n найдено выше.
Заметим, что при $t\to\infty,\quad u(x;t)\to 0$.

Задача 2. Найти распределение температуры в стержне длины l, боковая поверхность и торцы которого теплоизолированы, а температура стержня в начальный момент времени подчинялась закону $u(x;0) = \varphi(x)$.

Р е ш е н и е. Требуется решить смешанную однородную задачу теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx},\quad u_x(0;t) = u_x(l;t) = 0,\quad u(x;0) = \varphi(x).$$

Начало решения задачи аналогично предыдущей. Различие начинается с решения задачи Штурма–Лиувилля (концы стержня теплоизолированы)

$$X'' - \lambda X = 0,\quad X'(0) = X'(l) = 0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$X_n(x) = C_n\cos\frac{n\pi}{l}x,\quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=\overline{0;\infty}.$$

Окончательное решение данной задачи

$$u(x;t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

где $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\,dx,\quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$

Заметим, что при $t\to\infty,\quad u(x;t)\to\frac{a_0}{2} = \frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\,dx,$
что является средним значением начальной температуры в стержне.

Задача 3. Найти распределение температуры в стержне длины l, боковая поверхность которого теплоизолирована, температура левого конца стержня поддерживается на уровне $0^0 C$, на правом торце происходит свободный теплообмен с окружающей средой нулевой температуры по закону Ньютона. Начальная температура стержня $u(x;0) = \varphi(x)$.

Р е ш е н и е: Требуется решить смешанную однородную задачу теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0;t) = 0, \quad u_x(l;t) + ku(x;t) = 0, \quad u(x;0) = \varphi(x).$$

Начало решения задачи аналогично предыдущей. Различие начинается с решения задачи Штурма–Лиувилля

$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(l) + kX(l) = 0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$X_n(x) = C_n \sin\left(\alpha_n \frac{x}{l}\right), \quad \lambda_n = -(\alpha_n)^2, \quad n = \overline{1;\infty},$$

где α_n- положительные корни уравнения $y \cos y + kl \sin y = 0$.

Окончательное решение данной задачи

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\alpha_n a/l^2 t} \sin\left(\alpha_n \frac{x}{l}\right),$$

где $a_0 = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\,dx, \quad a_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x) \sin\dfrac{n\pi}{l}x\,dx.$

Заметим, что при $t \to \infty, \quad u(x;t) \to 0.$

Уравнения вида $\quad u_t = a^2 u_{xx} + ku$
заменой $\quad u(x;t) = v(x;t)e^{kt}$ сводится к уравнению
$v_t = a^2 v_{xx}$, решение которого рассмотрено выше. Таким образом, к примеру, решение смешаной задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + ku, \quad u(0;t) = u(l;t) = 0, \quad u(x;0) = \varphi(x)$$

будет иметь вид:

$$u(x;t) = e^{kt} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \text{где} \quad a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

4.2.2. Задача теплопроводности для цилиндра

Уравнение теплопроводности $u_t = a^2\Delta u$ в цилиндрических координатах $r; \varphi; z$ имеет вид

$$\frac{1}{a^2}u_t = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + u_{zz}.$$

Рассмотрим частные случаи.

Задача 1. Найти распределение температуры внутри бесконечного цилиндра радиуса b, если его боковая поверхность теплоизолирована, а начальная температура точек цилиндра $u|_{t=0} = f(r)$.

Р е ш е н и е Согласно условию искомая функция температуры зависит только от $t; r$ и соответствующая задача имеет вид:

$$\frac{1}{a^2}u_t = \frac{1}{r}(ru_r)_r, \quad |u(0;t)| < \infty, \quad u_r|_{r=b} = 0, \quad u|_{t=0} = f(r).$$

Метод разделения переменных $u(r;t) = R(r)T(t)$ после подстановки в уравнение и последующего деления на RT и введения параметра λ приводит к системе

$$T'' + a^2\lambda T = 0, \qquad\qquad R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0.$$

На функцию $R(r)$ имеем задачу Штурма-Лиувилля

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R'(b) = 0.$$

Решения задачи $\qquad R_n(r) = C_n J_0\left(\gamma_n^0 \frac{r}{b}\right),$

где γ_n^0– положительные корни уравнений $J_0'(x) = 0$.

Решение для $T(t)$ тогда будет $T_k(t) = B_n e^{-\gamma_n^0 a\, t}$.

Общее решение задачи

$$u(t;r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\gamma_n^0 a\, t} J_0\left(\gamma_n^0 \frac{r}{b}\right).$$

Коэффициенты a_n найдутся как коэффициенты ряда Дини начального условия $u|_{t=0} = f(r)$ по функциям $J_0\left(\gamma_n^0 \frac{r}{b}\right)$ в интервале $[0; b]$.

$$a_n = \frac{2}{b^2\left[\left(J_0(\gamma_n^0)\right)^2 + \left(J_0'(\gamma_n^0)\right)^2\right]} \int_0^b f(r)\, r\, J_0\left(\gamma_n^0 \frac{r}{b}\right) dr.$$

Задача 2. Решить задачу теплопроводности для бесконечного круглого цилиндра радиуса b, если на его поверхности поддерживается температура $u|_{r=b} = 0$, а начальная температура точек цилиндра $u|_{t=0} = f(r;\varphi)$.

Р е ш е н и е. Согласно условию имеем одномерную задачу

$$\frac{1}{a^2}u_t = \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}, \quad |u(0;t)| < \infty, \quad u|_{r=b} = 0, \quad u|_{t=0} = f(r;\varphi).$$

Метод разделения переменных $u(r;t) = R(r)T(t)\Psi(\varphi)$ после подстановки в уравнение и последующего деления на $RT\Psi$ приводит к системе

$$T'' + a^2\lambda T = 0,$$

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2R'' + rR'}{R} + \frac{\Psi''}{\Psi}\right) = -\lambda.$$

Обозначая отношение $\dfrac{\Psi''}{\Psi} = \mu \implies \Psi'' - \mu\Psi = 0.$

Ненулевые, периодические и ограниченные решения этого уравнения

$$\Psi_n(\varphi) = C_1\cos n\varphi + C_2\sin n\varphi, \quad \mu_n = -n^2.$$

На функцию $R(r)$ имеем тогда задачу Штурма–Лиувиля для уравнения Бесселя

$$r^2R'' + rR' + (\lambda r^2 - n^2)R = 0.$$

Его нетривиальные решения с учетом, что $R(b) = 0, \quad |R(0)| < \infty$

$$R_n(r) = A_n J_n\left(\alpha_k^n\frac{r}{b}\right),$$

где α_k^n– положительные корни уравнений $J_n(x) = 0$.

Решение для $T(t)$ тогда будет

$$T_k(t) = B_k e^{-\alpha_k^n a\, t}.$$

Общее решение задачи

$$u(t;r;\varphi) = \sum_{n,k=1}^{\infty} e^{-\alpha_k^n a\, t}(a_k^n\cos n\varphi + b_k^n\sin n\varphi)J_n\left(\alpha_k^n\frac{r}{b}\right).$$

Коэффициенты найдутся как коэффициенты двойного ряда Фурье начального условия по функциям $u|_{t=0} = f(r;\varphi)$.

$$J_n\left(\alpha_k^n\frac{r}{b}\right)\cos n\varphi, \qquad J_n\left(\alpha_k^n\frac{r}{b}\right)\sin n\varphi.$$

Задача 3. Решить задачу теплопроводности для круглого цилиндра радиуса b, и длиной h, если на его боковой поверхности и на торцах поддерживается температура 0^oC, а начальная температура точек цилиндра $\psi(r;z)$.

Р е ш е н и е. Согласно условию мы имеем двумерную задачу $u = u(r;z;t)$

$$\frac{1}{a^2}u_t = \frac{1}{r}(ru_r)_r + u_{zz}, \quad |u(0;z;t)| < \infty,$$
$$u(b;z;t) = u(r;0;t) = u(r;h;t) = 0, \quad u(r;z;0) = \psi(r;z).$$

Метод разделения переменных $u(r;t) = R(r)Z(z)T(t)$ после подстановки в в уравнение и деления обе части на RZT приводит к уравнению

$$6\frac{T'}{a^2T} = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{Z''}{Z}.$$

В силу того, что отношения в последнем уравнении зависят соответственно только от $t;r;z$, обозначим

$$\frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -\lambda, \quad \frac{Z''}{Z} = -\mu, \quad \Longrightarrow \quad \frac{T'}{a^2T} = -(\lambda+\mu).$$

Согласно граничным условиям решения задач Штурма – Лиувилля на функции $R(r)$ и $Z(z)$

a) $R'' + \dfrac{1}{r}R' + \lambda R = 0, \quad |R(0)| < \infty, \ R(b) = 0,$

$$R_n(r) = C_n J_0\left(\alpha_n^0 \tfrac{r}{b}\right), \quad \lambda_n = (\alpha_n^0)^2, \quad n = \overline{1;\infty},$$

где α_n^0–положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

b) $Z''_\mu Z = 0, \quad Z(0) = Z(h) = 0,$

$$Z_k(z) = B_k \sin\left(\tfrac{k\pi}{h}z\right), \quad \mu_k = \left(\tfrac{k\pi}{h}\right)^2, \quad k = \overline{1;\infty}.$$

Решение уравнения $T' + \beta_{nk}^2 T = 0$, где $\beta_{nk}^2 = (\alpha_n^0)^2 + \left(\dfrac{k\pi}{h}\right)^2$ имеет вид $T_{nk}(t) = A_{nk}e^{\beta_{nk}^2 a^2 t}$.

Общее решение задачи

$$u(r;z;t) = \sum_{n,k=1}^{\infty} a_{nk}e^{\beta_{nk}^2 a^2 t} J_0\left(\alpha_n^o \frac{r}{b}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{h}z\right).$$

Для нахождения коэффициентов a_{nk} необходимо разложить функцию, $\psi(r;z)$, определяющую начальную температуру, в двойной ряд Фурье по функциям $J_0\left(\alpha_n^o \dfrac{r}{b}\right)\sin\left(\dfrac{k\pi}{h}z\right)$.

4.3. Краевые задачи на уравнения гиперболического типа

[3], Ч.4, гл 7, стр. 290 – 423

4.3.1. Свободные колебания струны длины l

Задача 1.. Найти амплитуду поперечных колебаний струны длиной l с закрепленными концами, если начальная форма струны $u = \varphi(x)$, а начальная скорость ее точек равна 0.

Р е ш е н и е; Необходимо найти решение смешанной задачи

$u_{tt} = a^2\, u_{xx}, \quad u(0;t) = u(l;t) = 0, \;\; u(x;0 = \varphi(x), \;\; u_t(x;0) = 0.$

Метод разделения переменных $u(x;t) = X(x)T(t)$,
$u_{tt} = T''X, \;\; u_{xx} = X''T, ...$ приводит к системе

$$T'' - a^2\lambda T = 0,$$
$$X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0.$$

Решение задачи Штурма - Лиувилля на функцию $X(x)$ дает

$$X_n = C_n\, \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

Для найденного λ_n уравнение на $T(t)$ будет иметь вид

$$T'' + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T = 0, \quad \Longrightarrow \quad T_n = A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)$$

Общее решение краевой задачи:

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Находим коэффициенты $a_n, \;\; b_n$ пользуясь начальными условиями:

$$u(x;0) = \varphi(x) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = \varphi(x), \; a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx$$

$$u_t(x;0) = 0 \;\Longrightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) = 0, \qquad b_n = 0.$$

Ответ задачи:

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

По аналогии можно показать, что если бы начальные отклонения точек струны были равны 0: $u(x;0) = 0$, а начальные скорости $u_t(x;0) = \psi(x)$, то решение задачи

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \; b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

4.3.2. Колебания тяжелой струны

Задача 2. Найти амплитуду поперечных колебаний струны длиной $l = 1$ с закрепленными концами под действием силы тяжести $f(x;t) = \rho g$ при отсутствии начальных возмущений.
Р е ш е н и е: Математическая постановка: решить смешанную задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g, \quad u(0;t) = u(1;t) = 0, \quad u(x;0) = u_t(x;0) = 0.$$

Решение данной неоднородной задачи ищем в виде суммы (редукция задачи) $u(x;t) = L(x;t) + M(x;t)$.

1) $M(x;t)-$ решение однородной задачи

$$L_{tt} = a^2 L_{xx}, \quad L(0;t) = L(1;t) = 0, \quad L(x;0 = L_t(x;0) = 0.$$

Решение однородной краевой задачи

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n\pi a t + b_n \sin n\pi a t] \sin n\pi x.$$

Отсутствие начальных возмущений дает $a_n = b_n = 0, \quad L(x;t) = 0.$

2) Решение неоднородной задачи

$$M_{tt} = a^2 M_{xx} + g, \quad M(0;t) = M(1;t) = 0, \quad M(x;0 = M_t(x;0) = 0$$

ищем в виде разложения по собственным функциям $\sin n\pi x$ однородной, т.е. $M(x;t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n(t) \sin n\pi x.$

Подставляем в уравнение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(S_n'' + (n\pi a)^2 S_n\right) \sin n\pi x = g.$

Раскладываем "g" в ряд Фурье в $(0;1)$ по синусам

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\pi x, \qquad c_n = 2\int_0^1 g \sin n\pi x \, dx = \frac{2g}{n\pi}(1 - \cos n\pi).$$

Получаем $S_n'' + (n\pi a)^2 S_n = \dfrac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi).$

Общее решение такого уравнения

$$S_n(t) = A_n \cos(n\pi a t) + B_n \sin(n\pi a t) + \frac{2g}{(n\pi)^3 a^2}(1 - \cos n\pi).$$

Так как $M(x;0 = M_t(x;0) = 0$, то $A_n = -\dfrac{2g}{(n\pi)^3 a^2}(1 - \cos n\pi), \ B_n = 0.$

Окончательный ответ задачи

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g}{(n\pi)^3 a^2}(1 - \cos n\pi)(1 - \cos n\pi a t) \sin n\pi x.$$

4.3.3. Колебания струны в среде с сопротивлением

Задача 3. Найти амплитуду поперечных колебаний струны длиной l с закрепленными концами, если сила сопротивления среды пропорци ональна первой степени скорости колебаний струны. В начальный момент времени струна оттянута в средней точке на величину p и отпущена без начальной скорости.

Р е ш е н и е: 1) Математическая постановка задачи:
решить смешанную задачу

$$u_{tt} + 2ku_t = a^2 u_{xx}, \quad u(0;t) = u(l;t) = 0,$$

$$u(x;0) = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{2p}{l}\,x, & 0 \le x \le \dfrac{l}{2} \\ \dfrac{2p}{l}(l-x), & \dfrac{l}{2} \le x \le l \end{cases}, \quad u_t(x;0) = 0.$$

2) Используя метод разделения переменных

$$u(x,t) = X(x)T(t), \quad u_t = T'X,\ u_{tt} = T''X,\ u_{xx} = TX''$$

после подстановки в уравнение, деления на XT и введения параметра λ, приходим к системе

$$\begin{cases} T'' + 2kT + a^2\lambda T = 0, \\ X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Собственные функции и спектр задачи Штурма–Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(l) = 0,$$
$$X_n(x) = c_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\ n = \overline{1,\infty}.$$

Решение уравнения для $T(t)$ с учетом найденного λ

$$T'' + 2kT + a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T = 0$$

зависит от знака дискриминанта уравнения:

а) $k^2 - \left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2 = \omega_n^2 > 0,$

$$T_n(t) = e^{-kt}\left(A_n e^{\omega_n t} + B_n e^{-\omega_n t}\right).$$

Колебания во времени отсутствуют и этот случай мы рассматривать не будем.

b) Пусть $k^2 - \left(\dfrac{an\pi}{l}\right)^2 = -\omega_n^2 < 0.$

Решение уравнения в этом случае

$$T_n(t) = e^{-kt}\left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right).$$

Решение краевой задачи будет

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt}\left(a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

3) Приступаем к решению задачи Коши. Находим коэффициенты a_n, b_n, используя начальные условия задачи.

a) $u(x,0) = \varphi(x) \quad \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin\dfrac{n\pi x}{l} = \varphi(x).$

Находим коэффициенты a_n, раскладывая функцию $\varphi(x)$ по собственным функциям задачи, т.е.

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx =$$

$$= \frac{2}{l}\left\{\int_0^{l/2}\frac{2p}{l}x\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \int_{l/2}^{l}\frac{2p}{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right\} = \frac{4pl}{n^2\pi^2}(-1)^{n+1}.$$

Так как $\quad u_t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-kt}\left(-ka_n\cos\omega_n t - kb_n \sin\omega_n t - \omega_n a_n \sin\omega_n t + \right.$

$$\left. + \omega_n b_n \cos\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

то, согласно условию, $u_t(x,0) = 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-ka_n + \omega_n b_n)\sin\frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Откуда $\quad -ka_n + \omega_n b_n = 0, \quad b_n = \dfrac{k}{\omega_n}a_n.$

Окончательное решение задачи

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt}\left(a_n\cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где коэффициенты a_n, b_n найдены выше.

4.3.4. Свободные колебания круглой мембраны

Задача 4. Найти амплитуду поперечных колебаний круглой мембраны радиуса b, с закрепленным краем, если начальная форма мембраны $u = g(r)$, а начальная скорость ее точек равна 0.

Р е ш е н и е: В полярных координатах с учетом независимости от угла φ задача выглядит так:

$$u_{tt} = a^2\frac{1}{r}(ru_r)_r, \ |u(0;t)| < \infty, \ \ u(b;t) = 0, \ u(r;0) = g(r), \ \ u_t(r;0) = 0.$$

Метод разделения переменных приводит к системе

$$\begin{aligned} &T'' - \lambda a^2 T = 0, \\ &r^2 R'' + rR' - \lambda r^2 R = 0. \end{aligned}$$

Задача Штурма - Лиувилля

$$r^2 R'' + rR' - \lambda r^2 R = 0, \quad |R(0)| < \infty, \quad R(b) = 0$$

$$R_n(r) = C_n J_0\left(\frac{\alpha_n^0}{b}r\right), \quad \lambda_n = -\left(\frac{\alpha_n^0}{b}\right)^2.$$

Здесь α_n^0– корни уравнения $J_0(x) = 0$

Тогда имеем $T'' + \left(\frac{\alpha_n^0 a}{b}\right)^2 T = 0$

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\alpha_n^0 a}{b}t\right) + B_n \sin\left(\frac{\alpha_n^0 a}{b}t\right).$$

Решение краевой задачи

$$u(r;t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{\alpha_n^0 a}{b}t\right) + b_n \sin\left(\frac{\alpha_n^0 a}{b}t\right)\right] J_0\left(\frac{\alpha_n^0}{b}r\right).$$

С учетом начальных условий

$$u(r;0) = g(r) \quad \Longrightarrow \quad a_n = \frac{2}{b}\int_0^b r\ g(r)\ J_0\left(\frac{\alpha_n^0}{b}r\right) dr$$

$$u_t(r;0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b_n = 0.$$

Ответ задачи

$$u(r;t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{\alpha_n^0 a}{b}t\right) J_0\left(\frac{\alpha_n^0}{b}r\right).$$

4.3.5. Колебания прямоугольной мембраны

Задача 5. Найти амплитуду поперечных колебаний прямоугольной мембраны $0 < x < a, \quad 0 < y < b$, с закрепленным краем, если начальная форма мембраны $u = g(x; y)$, а начальная скорость ее точек равна 0.

Р е ш е н и е: Необходимо решить задачу: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, если $u|_{x=0} = u|_{x=a} = u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0$, $u(x; y; 0) = g(x; y)$, $u_t(x; y; 0) = 0$.
Метод разделения переменных

$u(x; y; t) = X(x)Y(y)T(t), \quad u''_{tt} = XYT'', ...,$

$\dfrac{T''}{a^2T} = \dfrac{X''}{X} + \dfrac{Y''}{Y} = \lambda$ приводит к системе

$$X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' - \mu Y = 0, \quad T'' - (\lambda + \mu)a^2T = 0.$$

Задача Штурма $\quad X'' - \lambda X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0$

$$X_n = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2.$$

Задача Штурма $\quad Y'' - \mu Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0$

$$Y_m = D_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right), \quad \mu_m = -\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2.$$

Тогда уравнение

$$T'' - (\lambda_n + \mu_m)a^2T = 0 \Longrightarrow T'' + \left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right] a^2T = 0.$$

Решение уравнения, где $\beta^2_{nm} = \left[\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{m\pi}{b}\right)^2\right] a^2$, имеет вид

$$T_{nm}(t) = A_{nm}\cos\beta_{nm}t + B_{nm}\sin\beta_{nm}t.$$

Таким образом:

$$u(x; y; t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} [a_{nm}\cos\beta_{nm}t + b_{nm}\sin\beta_{nm}t]\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right).$$

Коэффициенты получим по разложению в двойной ряд Фурье по собственным функциям задачи функции $g(x; y)$, которая определяет начальную форму мембраны. К примеру, если

$$u(x; y; 0) = 4\sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{3\pi}{b}y\right), \qquad u_t(x; y; 0) = 0,$$

получаем $\quad b_{nm} = 0, \quad a_{nm} = 4 \quad$ при $\quad n = 2, \quad m = 3.$
С учетом $\quad \beta^2_{23} = \left[\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{b}\right)^2\right] a^2, \quad$ получим окончательное решение: $\quad u(x; y; t) = 4\cos\beta_{23}t \, \sin\left(\dfrac{2\pi}{a}x\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{b}y\right).$

4.3.6. Радиальные колебания внутри шара

Задача 6. Найти амплитуду радиальных колебаний сферической полости радиуса b с жесткой оболочкой (отсутствие перемещений на границе), если начальные амплитуда и скорость колебаний

$$u(r;0)=\varphi(r)=\frac{25}{r}\sin\left(\frac{3\pi r}{b}\right),\quad u_t(r;0)=0.$$

Р е ш е н и е: Необходимо решить задачу на функцию $u=u(r;t)$:

$$u_{tt}=a^2\Delta u,\quad\longrightarrow\quad u_{tt}=a^2\frac{1}{r^2}(r^2u_r)_r,\quad\longrightarrow\quad u_{tt}=u_{rr}+\frac{2}{r}\,u_r,$$

если $|u(0;t)|<\infty,\quad u(b;t)=0,\ \ u(r;0)=\varphi(r),\ \ u_t(r;0)=0.$

Метод разделения переменных ...$u(r;t)=R(r)T(t)$, ... приводит к системе

$$r^2R''+2rR'-\lambda r^2R=0,\qquad\qquad T''-\lambda a^2T=0.$$

Уравнение $r^2R''+2rR'-\lambda r^2R=0$ заменой $R(r)=\dfrac{z(r)}{r}$ приводится к уравнению $z''-\lambda z=0$, и решение задачи Штурма

$$z''-\lambda z=0,\quad z(0)=z(b)=0,$$

$$z_n(r)=C_n\sin\left(\frac{n\pi}{b}r\right),\quad \lambda_n=-\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\Longrightarrow R_n(r)=\frac{C_n}{r}\sin\left(\frac{n\pi}{b}r\right).$$

Уравнение $T''-\lambda a^2T=0$ для найденных значений λ имеет вид

$$T_n(t)=A_n\cos\left(\frac{n\pi a}{b}t\right)+B_n\sin\left(\frac{n\pi a}{b}t\right).$$

Общее решение задачи:

$$u(r;t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi a}{b}t\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi a}{b}t\right)\right]\frac{1}{r}\sin\left(\frac{n\pi}{b}r\right).$$

С учетом начальных условий $u(r;0)=\dfrac{25}{r}\sin\left(\dfrac{3\pi r}{b}\right)$,
$u_t(r;0)=0$, получим: $b_n=0$, $a_3=25$ и $a_n=0$ для $n\neq 3$.

Ответ: $\quad u(r;t)=25\cos\left(\dfrac{3\pi a}{b}t\right)\dfrac{1}{r}\sin\left(\dfrac{3\pi}{b}r\right).$

Для начальных условий вида $u(r;0)=0$, $u_t(r;0)=A\delta(r)-$ (взрыв в центре сферы), имели бы $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{b}b_n\frac{1}{r}\sin\left(\frac{n\pi}{b}r\right)=A\delta(r),$

$$b_n=\frac{b}{n\pi a}\frac{2}{b}\int_0^b A\delta(r)\frac{1}{r}\sin\left(\frac{n\pi}{b}r\right)dr=\frac{2A}{n\pi a}\frac{n\pi}{b}=\frac{2A}{ab}.$$

Ответ: $\quad u(r;t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2A}{abr}\sin\left(\frac{n\pi a}{b}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}r\right).$

4.4. Неоднородная смешанная задача

Выше рассматривались, в основном, однородные смешанные задачи всех типов с однородными граничными условиями. Рассмотрим кратко схемы решения неоднородных смешанных задач. Такие задачи возникают либо при решении неоднородных уравнений, либо однородных, но с неоднородными граничными условиями, либо того и другого вместе. Рассмотрим общий случай.

Пусть требуется найти решение неоднородного уравнения параболического типа на функцию $u(x;t)$, $x \in (0;l)$ с неоднородными граничными условиями

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x;t), \quad \begin{array}{l} a_1 u_x(0;t) + a_2 u(0;t) = \mu_1(t), \\ b_1 u_x(l;t) + b_2 u(l;t) = \mu_2(t) \end{array}, \quad u(x;0) = \varphi(x).$$

1) Так как граничные условия неоднородны, будем искать решение уравнения в виде суммы (сводим граничные условия к однородным)

$$u(x;t) = v(x;t) + w(x;t),$$

где $w(x;t)$– вообще говоря, любая функция, вбирающая неоднородности граничных условий.

Ниже приведены некоторые рекомендации к выбору $w(x;t)$

a) граничные условия I-го типа:

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \qquad w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

b) граничные условия II-го типа:

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu_1(t), \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \qquad w(x,t) = x\mu_1(t) + \frac{x^2}{2l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

c) граничные условия III-го типа:

$$\begin{cases} u_x(0,t) = \mu_1(t), \\ u(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \qquad w(x,t) = x\mu_1(t) + \mu_2(t) - \frac{x^2}{l}\mu_1(t),$$

или

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t) \\ u_x(l,t) = \mu_2(t) \end{cases} \qquad w(x,t) = \mu_1(t) + x\mu_2(t).$$

2) Подобрав соответствующую функцию $w(x;t)$, и учитывая, что

$$u_t = v_t + w_t, \quad u_{xx} = v_{xx} + w_{xx},$$

имеем неоднородную задачу с однородными граничными и новыми начальными условиями

$$v_t = a^2 v_{xx} + f_1(x;t), \quad \text{где} \quad f_1(x;t) = f(x;t) - w_t + a^2 w_{xx}$$

$$\begin{matrix} a_1 v_x(0;t) + a_2 v(0;t) = 0, \\ b_1 v_x(l;t) + b_2 v(l;t) = 0 \end{matrix}, \quad v(x;0) = u(x;0) - w(x;0) = \varphi(x) - w(x;0).$$

3) Полученную неоднородную задачу решаем методом редукции, а именно, ищем решение уравнения в виде суммы

$$v(x;t) = L(x;t) + M(x;t), \text{ где}$$

$L(x;t)-$ общее решение однородной задачи с однородными граничными и полученным начальным условием, т.е. задачи

$$L_t = a^2 L_{xx}, \quad \begin{matrix} a_1 L_x(0;t) + a_2 L(0;t) = 0, \\ b_1 L_x(l;t) + b_2 L(l;t) = 0 \end{matrix}, \quad L(x;0) = \varphi(x) - w(x;0) = \varphi_1(x).$$

$M(x;t)-$ какое - либо частное решение неоднородной задачи с нулевым начальным условием

$$M_t = a^2 M_{xx} + f_1(x;t), \quad M(x;0) = 0.$$

Решение однородных смешанных задач рассматривалось ранее. Частное решение неоднородной задачи ищется в виде ряда Фурье по собственным функциям, полученным в ходе решения однородной задачи.

4) После получения решений однородной и неоднородной задач записываем решение исходной задачи

$$u(x;t) = L(x;t) + M(x;t) + w(x;t).$$

Рассмотрим примеры:

1. Решить смешанную задачу

$$u_t = \frac{1}{4}\, u_{xx} + 2u + 2tx(1-t) + 2\cos t \cos 3x,$$

$$u_x(0;t) = u_x(\pi;t) = t^2, \quad u(x;0) = \cos 2x.$$

1) Так как граничные условия неоднородны, будем искать решение уравнения в виде суммы (сводим граничные условия к однородным)

$$u(x;t) = v(x;t) + w(x;t), \quad \text{где} \quad w(x;t) = xt^2.$$

Тогда $u_t = v_t + 2xt$, $u_{xx} = v_{xx}$. Подставляя в уравнение, имеем задачу с однородными граничными условиями

$$v_t = \frac{1}{4}\, v_{xx} + 2v + 2\cos t \cos 3x,$$
$$v_x(0;t) = v_x(\pi;t) = 0, \quad v(x;0) = \cos 2x.$$

2) Редуцируем задачу. Решение полученной задачи ищем в виде суммы $v(x;t) = L(x;t) + M(x;t)$, где

$L(x;t)$– решение однородного уравнения с ненулевыми начальными условиями

$$L_t = \frac{1}{4}L_{xx} + 2L, \quad L_x(0;t) = L_x(\pi;t) = 0, \quad L(x;0) = \cos 2x,$$

$M(x;t)$– решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями

$$M_t = \frac{1}{4}M_{xx} + 2M + 2\cos t \cos 3x,$$
$$M_x(0;t) = M_x(\pi;t) = 0, \quad M(x;0) = 0.$$

3) Общее решение однородной задачи

$$L_t = \frac{1}{4}L_{xx} + 2L, \quad L_x(0;t) = L_x(\pi;t) = 0, \quad L(x;0) = \cos 2x$$

имеет вид $\quad L(x;t) = e^{2t} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n^2/4t} \cos nx.$

Согласно начальному условию

$$L(x;0) = \cos 2x, \implies \cos 2x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$$

имеем $a_n = 1$ при $n = 2$, и $a_n = 0$ при $n \neq 0$.

Таким образом, $\quad L(x;t) = e^{-t} \cos 2x.$

4) Решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$M(x;t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t) \cos nx.$$

Подставим функцию в уравнение

$$\sum_{n=0}^{\infty} S' \cos nx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2 - \frac{n^2}{4}\right) S \cos nx + 2\cos t \cos 3x.$$

При $n = 3$ имеем

$$S' + 1/4S = 2\cos t \;\longrightarrow\; S(t) = \frac{4}{17}(\cos t + 4\sin t - e^{1/4t})$$

$$M(x;t) = \frac{4}{17}(\cos t + 4\sin t - e^{1/4t})\cos 3x.$$

Ответ задачи: $u(x;t) = L(x;t) + M(x;t) + w(x;t)$

$$u(x;t) = e^{-14\,t}\cos 2x + \frac{4}{17}(\cos t + 4\sin t - e^{1/4t})\cos 3x + xt^2.$$

2. Решить смешанную задачу

$$u_{tt} = u_{xx} + tx - \frac{16x}{\pi}\sin 4t,$$

$$u(0;t) = 0 \quad u(\pi;t) = \sin 4t, \quad u(x;0) = u_t(x;0) = 0.$$

1) Ищем решение задачи в виде

$$u(x;t) = v(x;t) + w(x;t) = v(x;t) + \frac{x}{\pi}\sin 4t,$$

$$u_{tt} = v_{tt} + \frac{16x}{\pi}\sin 4t, \quad u_{xx} = v_{xx}.$$

Имеем неоднородную смешанную задачу

$$v_{tt} = v_{xx} + tx, \quad v(0;t) = v(\pi;t) = 0,$$

$$v(x;0) = u(x;0) - w(x;0) = 0, \quad v_t(x;0) = u_t(x;0) - w_t(x;0) = \frac{4x}{\pi}.$$

2) Решение неоднородной задачи ищем в виде

$$v(x;t) = L(x;t) + M(x;t).$$

Однородная задача

$$L_{tt} = L_{xx}, \quad L(0;t) = L(\pi;t) = 0, \quad L(x;0) = 0, \quad L_t(x;0) = \frac{4x}{\pi}.$$

Решение задачи с учетом краевых и начальных условий

$$L(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{n\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{4x}{\pi} \sin nx \; dx = (-1)^{n+1} \frac{8}{n^2 \pi}.$$

$$L(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8}{n^2 \pi} \sin nt \sin nx.$$

3) Решение неоднородной задачи

$$M_{tt} = M_{xx} + xt, \quad M(x;0) = M_t(x;0) = 0$$

ищем в виде суммы ряда Фурье по собственным функциям однородной задачи $\sin nx$.

$$M(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} F(t) \sin nx, \longrightarrow M_{tt} = F'' \sin nx, \; M_{xx} = -Fn^2 \sin nx.$$

После подстановки в уравнение имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (F'' + n^2 F) \sin nx = xt,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение на функцию $F(t)$

$$F'' + n^2 F = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} xt \; \sin nx \; dx, \quad F'' + n^2 F = \frac{(-1)^{n+1}}{n} t.$$

Решение уравнения при нулевых начальных условиях

$$F_n(t) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} (\sin nt + nt).$$

Таким образом:

$$M(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} (\sin nt + nt) \sin nx.$$

4) Окончательный ответ задачи:

$$u(x;t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{8}{n^2 \pi} \sin nt \sin nx +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} (\sin nt + nt) \sin nx + \frac{x}{\pi} \sin 4t.$$

Приложение

1. Производящая функция

a) функцией Бесселя целого индекса

$$\Phi(t,x) = \exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right], \qquad x \le 1$$

b) полиномов Лежандра

$$\Psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2tx}}, \qquad |t| < 1, \quad -1 \le x \le 1,$$

c) полиномов Эрмита

$$H(x,t) = e^{2xt-t^2} \quad \infty < t < \infty$$

d) полиномов Лагерра

$$L^{\alpha}(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} \cdot e^{-\dfrac{xt}{1-t}}, \qquad \alpha > -1,$$

2. Представление равномерно сходящимися рядами

a) функцией Бесселя первого рода

$$J_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\, \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} .$$

b) модифицированных функцией Бесселя

$$I_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\, \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

c) полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{2^k k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}.$$

d) полиномов Эрмита

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^{[n/2]} (-1)^l \frac{n!}{(n-2l)! \cdot l!} (2x)^{n-2l} .$$

e) полиномов Лагерра

$$L_n^{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+k+1)k!(n-k)!}\, x^k.$$

3. **Интегральное представление**

a) функцией Бесселя (Интеграл Пуассона)

$$J_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_0^\pi \sin^{2\nu}\Theta \cos(x\cos\Theta)\, d\Theta$$

b) Полиномов Лежандра

Интеграл Шлефли $P_n(x) = \frac{1}{2\pi i\, 2^n} \oint\limits_{(\overline{\gamma})} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz.$

Интеграл Лапласа $P_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi [x + (x^2-1)^{1/2}\cos\varphi]^n d\varphi.$

4. **Формулы Родрига**

a) для полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right].$$

b) для полиномов Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

. c) для полиномов Лагерра

$$L_n^\alpha(x) = \frac{e^x}{x^\alpha n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^{n+\alpha}e^{-x}\right], \qquad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right]$$

5. Корни α_k^ν **уравнения** $J_\nu(x) = 0$

	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6
ν=0	2,405	5,520	8,654	11,794	14,931	18,071
ν=1	3,832	7,016	10,173	13,324	16,471	19,616
ν=2	5,135	8,417	11,620	14,796	17,960	21,117
ν=3	6,380	9,761	11,015	16,223	19,409	22,583

СОДЕРЖАНИЕ

Г л а в а 1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Литература

1. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики-1.* Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций. -Томск. Изд-во НТЛ, 2002.
2. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики-2.* Ч.1. Специальные функции. -Томск. Изд-во НТЛ, 2002.
3. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики-2.* Ч.2. Уравнения математической физики. -Томск. Изд-во НТЛ, 2002.
4. Арсенин В.Я. *Математическая физика.* Основные уравнения и специальные функции. -М:, Наука, 1966.

Учебное издание

ФИКС Иван Иванович

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Специальные функции
Основные уравнения

Учебное пособие

Издано в авторской редакции

Научный редактор
доктор физико-математических наук,
профессор А.В. Галажинский

Дизайн обложки *Т.А. Фатеева*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати 26.11.2011. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл. печ. л. 5,82. Уч.-изд. л. 5,26.
Заказ 1328-11. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru