Математика 2.1

Лекция 1. Неопределенный интеграл.

Преподаватель:

Болтовский Дмитрий Владимирович доцент кафедры

Высшей математики и математической физики ТПУ

Первообразная функция

$\Rrightarrow$ Пусть функция $f(x)$ определена на некотором (конечном или бесконечном) интервале (a, b). Тогда функция $F(x)$ называется *первообра́зной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (a, b)$[3].

Если $F(x)$ — первообразная функция для функции $f(x)$, то функция $F(x) + C$, где C — некоторая постоянная, также первообразная для функции $f(x)$. Кроме того, если $F(x)$ и $G(x)$ — две первообразные для функции $f(x)$, то они отличаются на некоторую постоянную, т. е. существует такое число $C \in R$, что $F(x) - G(x) = C$.

Таким образом, зная только одну первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, мы без труда находим и множество всех первообразных для этой функции, которое совпадает с множеством функций вида $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Если функция $f(x)$ непрерывна на данном интервале, то у нее существует первообразная на этом интервале.

Неопределенный интеграл

$\Rrightarrow$ Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$.

Обозначения: $\int f(x)\,dx$ (читается так: «интеграл эф от икс дэ икс»).

Таким образом, если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

(в правой части последнего равенства более правильно было бы написать $\{F(x) + C\}$, поскольку речь идет о множестве всех первообразных, но фигурные скобки, обозначающие множество, обычно не пишут).

Знак $\int$ называется *интегралом*, функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, а $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*.

$\Rrightarrow$ Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции называется *интегрированием* этой функции.

Интегрирование — операция, обратная операции дифференцирования (т. е. операции, заключающейся в нахождении производной от данной функции). У всякой непрерывной на данном интервале функции существует неопределенный интеграл.

Основные свойства неопределенного интеграла

Везде далее предлагается, что все рассматриваемые неопределенные интегралы существуют.

1. $\int dF(x) = F(x) + C.$

2. $d \int f(x)\, dx = f(x)\, dx.$

3. $\int \alpha f(x)\, dx = \alpha \int f(x)\, dx$, где $\alpha \neq 0$,

т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.*

4. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$,

т. е. *неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций.*

Таблица простейших интегралов

Следующие интегралы обычно называются *табличными интегралами*:

1. $\int 0 \cdot dx = C$.
2. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $(\alpha \neq -1)$.

В частности, $\int 1 \cdot dx = x + C$, $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + C$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

В частности, $\int e^x\, dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \ (a \neq 0).$

В частности, $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \ (a > 0).$

В частности, $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \ (a > 0).$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right| + C.$

13. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C.$

14. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$

Используя таблицу, найти следующие интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x^3}$; **2)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$;

3) $\int 2^x\,dx$; **4)** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$;

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$.

○ 1) Воспользуемся табличным интегралом 2 ($\alpha = -3$):

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C.$$

2) Аналогично находим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} = \int x^{-\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

3) Используя табличный интеграл 4 ($a = 2$), находим:

$$\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

4) Подставляя $a = \sqrt{5}$ в табличный интеграл 10, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

5) Воспользуемся табличным интегралом 12 ($\alpha = -7$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 7}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 7}\right| + C.$$

Используя таблицу и основные свойства неопределенного интеграла, найти интеграл:

1) $\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7\right) dx$; **2)** $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx$.

1) Воспользуемся свойствами 3 и 4 неопределенного интеграла:

$$\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7\right) dx = \int 3 \cdot 5^x \, dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \, dx + \int 7 \, dx =$$

$$= 3 \int 5^x \, dx - 2 \int x^{-\frac{1}{3}} \, dx + 7 \int dx = \frac{3 \cdot 5^x}{\ln a} - 2 \cdot \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 7x + C =$$

$$= \frac{3 \cdot 5^x}{\ln a} - 3 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 7x + C.$$

$$2)\ \int \frac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}}\,dx.$$

2) Почленно поделим числитель подынтегральной дроби на знаменатель: $\frac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}$. Отсюда

$$\int \frac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}}\right) dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 5\cdot\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 10x^{\frac{1}{2}} + C.$$

§ 2. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод подстановки (замена переменной)

$\Rrightarrow$ Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx$, при этом функции $\varphi'(x)$ и $f(x)$ непрерывны на заданном интервале. Тогда этот интеграл можно упростить с помощью подстановки $t = \varphi(x)$, используя равенство

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt. \tag{2.1}$$

Эта формула называется формулой *замены переменной* в неопределенном интеграле.

Иногда удобнее делать подстановку не $t = \varphi(x)$, а $x = \psi(t)$, где $\psi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную (т. е. непрерывно дифференцируема). Применяя такую подстановку к интегралу $\int f(x)\,dx$, получим еще одну формулу замены переменной

$$\int f(x)\,dx = \int f(\psi(t))\psi'(t)dt. \tag{2.2}$$

Не существует общего «рецепта», следуя которому можно всегда понять, какую подстановку надо применить к данному интегралу. Однако следует иметь в виду следующие полезные подсказки:

1) если под знаком интеграла стоит сложная функция $f(\varphi(x))$, то, как правило, используется подстановка $t = \varphi(x)$ (к примеру, если в подынтегральном выражении встречается функция $\sin\frac{1}{x}$, то стоит попробовать подстановку $t = \frac{1}{x}$, а если e^{x^2} — то $t = x^2$ и т. д.);

2) если в подынтегральном выражении есть готовый дифференциал функции $\varphi(x)$, т. е. выражение $\varphi'(x)\,dx$, то имеет смысл попробовать подстановку $t = \varphi(x)$. Поэтому целесообразно запомнить следующие формулы для наиболее часто встречающихся дифференциалов:

$$\cos x\,dx = d(\sin x), \qquad \sin x\,dx = -d(\cos x),$$

$$e^x\,dx = d(e^x), \qquad x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2),$$

$$\frac{1}{x}\,dx = d(\ln x), \qquad \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2d(\sqrt{x}),$$

$$\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right), \qquad dx = \frac{1}{a}d(ax+b),$$

$$\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = d(\operatorname{tg} x), \qquad \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -d(\operatorname{ctg} x) \text{ и т. д.}$$

Подведение под знак дифференциала – это внесение под знак дифференциала либо постоянного слагаемого, либо постоянного множителя, либо функции, либо и того и другого вместе.

Напомним, что дифференциал функции равен произведению производной функции на дифференциал независимой переменной

$$d\,f(x) = f'(x)\,dx,$$

а также, что свойства дифференциалов аналогичны свойствам производных функций.

Внесение под знак дифференциала постоянного множителя

Так как $d(Cx) = (Cx)'\,dx = C \cdot dx$, то $dx = \dfrac{1}{C} \cdot d(Cx)$.

Это значит, что, *при введении под знак дифференциала множителя C перед знаком интеграла необходимо поставить поправочный коэффициент* $\dfrac{1}{C}$. Итак:

$$dx = \frac{1}{3}d(3x) = -d(-x) = 2d\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{5}{4}d\left(-\frac{4x}{5}\right) = \ldots.$$

$$d(Cx+a) = C\,dx \implies dx = \frac{1}{C}\cdot d(Cx+a)$$

$$1)\ \int \frac{dx}{6x-1} = \frac{1}{6}\int \frac{d(6x)}{6x-1} = \frac{1}{6}\int \frac{d(6x-1)}{6x-1} = \frac{1}{6}\ln|6x-1| + C,$$

$$2)\ \int (3-7x)^8\,dx = -\frac{1}{7}\int (3-7x)^8\,d\,(-7x) =$$

$$= -\frac{1}{7}\int (3-7x)^8\,d\,(3-7x) = -\frac{1}{7}\frac{(3-7x)^9}{9} = -\frac{(3-7x)^9}{63} + C.$$

3. Интегрирование по частям

ТЕОРЕМА 3.

Пусть $U(x)$ и $V(x)$ две дифференцируемые функции

Тогда $$\int U dV = UV - \int V dU$$

I.

$$\int p_n(x) a^x dx$$

$$\int p_n(x)\cos x dx$$

$$\int p_n(x)\sin x dx$$

$$\int \underbrace{p_n(x)}_{U}\underbrace{e^x dx}_{dV}$$

II.

$$\int \ln x \cdot P_n(x) dx$$

$$\int arctgx \cdot P_n(x) dx$$

$$\int \underbrace{\arcsin x}_{U} \cdot \underbrace{P_n(x) dx}_{dV}$$

III. (циклический)

$$\int a^{mx}\cos nx\, dx$$

$$\int \underbrace{a^{mx}}\ \underbrace{\sin nx\, dx}$$

$U=a^{mx}$

$U=sin(nx)$

2.3. $\int x\operatorname{arctg}2x\,dx=\left|\begin{array}{l} u=\operatorname{arctg}2x\Rightarrow du=\dfrac{2dx}{1+4x^2} \\ dv=x\,dx\Rightarrow v=\int x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\end{array}\right|=\operatorname{arctg}2x\cdot\dfrac{x^2}{2}-$

$-\int\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{2dx}{1+4x^2}=\operatorname{arctg}2x\cdot\dfrac{x^2}{2}-\int\dfrac{x^2dx}{1+4x^2}=\operatorname{arctg}2x\cdot\dfrac{x^2}{2}-$

$-\dfrac{1}{4}\int\dfrac{4x^2+1-1}{1+4x^2}dx=\operatorname{arctg}2x\cdot\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}\int\left(1-\dfrac{1}{1+4x^2}\right)dx=$

$=\operatorname{arctg}2x\cdot\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}\int dx+\dfrac{1}{4}\int\dfrac{1}{1+4x^2}dx=\operatorname{arctg}2x\cdot\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}x+$

$+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d(2x)}{1+(2x)^2}=\operatorname{arctg}2x\cdot\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{8}\operatorname{arctg}2x+C.$

Найти интеграл, используя подходящую подстановку:

1) $\int (7x-1)^{23}dx$;

2) $\int x^2 \cdot \sin(x^3+1)dx$;

3) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

1) Данный интеграл — почти табличный и поэтому легко вычисляется с помощью свойства 5 интеграла из предыдущего параграфа. Однако такие интегралы можно находить и с помощью замены переменной.

В нашем случае применим подстановку $t = 7x - 1$. Тогда $dt = 7dx$, откуда $dx = \frac{1}{7}dt$. Поэтому

$$\int (7x-1)^{23}dx = \int t^{23} \cdot \frac{1}{7}dt = \frac{1}{7}\int t^{23}dt = \frac{1}{7} \cdot \frac{t^{24}}{24} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим окончательно:

$$\int (7x-1)^{23}dx = \frac{(7x-1)^{24}}{168} + C.$$

2) $\displaystyle\int x^2 \cdot \sin(x^3+1)dx$; **3)** $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

2) Подынтегральное выражение содержит сложную функцию $\sin(x^3+1)$, поэтому стоит попробовать подстановку $t = x^3+1$. Тогда $dt = d(x^3+1) = 3x^2dx$, откуда $x^2dx = \frac{1}{3}dt$. Таким образом,

$$\int x^2\sin(x^3+1)\,dx = \int \sin(x^3+1)\cdot x^2dx = \int \sin t\cdot\frac{1}{3}dt =$$
$$= \frac{1}{3}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(x^3+1) + C.$$

3) Поскольку $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2) = \frac{1}{2}d(x^2+1)$, а выражение x^2+1 стоит в знаменателе подынтегральной дроби, то целесообразно

3) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$.

сделать замену $t = x^2 + 1$. Тогда

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+1} = \int \frac{\frac{1}{2}\,dt}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.$$

Мы избавились от знака модуля в последнем выражении, так как $x^2 + 1 > 0,\ \forall x$. ●

Найти интеграл с помощью подстановки, предварительно преобразовав подынтегральное выражение:

1) $\int \frac{x - \sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$; **2)** $\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

1) Представим исходный интеграл в виде разности двух интегралов:

$$\int \frac{x - \sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \int \left(\frac{x}{x^2} - \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx.$$

Первый из двух последних интегралов — табличный, а во втором надо сделать подстановку $t = \frac{1}{x}$. Тогда $dt = -\frac{dx}{x^2}$, откуда $\frac{dx}{x^2} = -dt$. Следовательно,

$$\int \frac{x - \sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx = \ln|x| - \int \sin t \cdot (-dt) = \ln|x| + \int \sin t\,dt =$$

$$= \ln|x| - \cos t + C = \ln|x| - \cos\frac{1}{x} + C.$$

2) Запишем данный интеграл как разность двух интегралов:

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int\left(\frac{5x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx =$$

$$= 5\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Второй из двух полученных интегралов — табличный, а в первом сделаем подстановку $t = 4 - x^2$. При этом условимся писать все вспомогательные выкладки и обозначения, относящиеся к данной подстановке, в квадратных скобках под соответствующим интегралом. В частности,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[\begin{array}{l} t = 4 - x^2 \Rightarrow dt = -2x\,dx \\ \Rightarrow x\,dx = -\frac{1}{2}dt \end{array}\right] = \int \frac{-\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{4-x^2} + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{5x-1}{\sqrt{4-x^2}}dx = -5\sqrt{4-x^2} - \arcsin\frac{x}{2} + C. \quad \bullet$$

Спасибо за внимание