Математика 2.1

Лекция 2. Неопределенный интеграл. Интегрирование рациональных дробей.

§2. Интегрирование рациональных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Рациональной дробью*** *называется отношение 2-х многочленов*, т.е. функция вида $\dfrac{P_m(x)}{P_n(x)}$,

где $P_m(x)$, $P_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

Если $m < n$, то рациональная дробь называется ***правильной***. В противном случае (т.е. если $m \geq n$) дробь называется ***неправильной***.

Неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = Q(x) + \frac{P_r(x)}{P_n(x)},$$

где $Q(x)$ – некоторый многочлен степени $m - n$,

$P_r(x)$ – многочлен степени $r < n$.

(многочлены $Q(x)$ и $P_r(x)$ получаются в результате деления с остатком $P_m(x)$ на $P_n(x)$ (в столбик))

1. Интегрирование простейших рациональных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Простейшими рациональными дробями*** I, II, III, IV *типа называются соответственно правильные дроби вида* $\dfrac{A}{x+a}$, $\dfrac{A}{(x+a)^m}$, $\dfrac{Ax+B}{x^2+bx+c}$, $\dfrac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^m}$,

где $D = b^2 - 4c < 0$, m *– натуральное число* $(m > 1)$.

1) Интегрирование простейших дробей I типа:

$$\int \frac{A}{x+a}dx = A\int \frac{dx}{x+a} = A\int \frac{d(x+a)}{x+a} = A\ln|x+a| + C.$$

2) Интегрирование простейших дробей II типа:

$$\int \frac{A}{(x+a)^m}dx = A\int \frac{d(x+a)}{(x+a)^m} = A\frac{(x+a)^{-m+1}}{-m+1} + C.$$

3) Интегрирование простейших дробей III типа:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx$$

$$D=b^2-4c<0$$

а) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$(x^2+bx)+c=\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}\right)-\frac{b^2}{4}+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c,$$

$$-\frac{b^2}{4}+c=\frac{-b^2+4c}{4}=-\frac{D}{4}>0,$$

$$\Rightarrow\quad x^2+bx+c=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+q^2.$$

б) Сделаем замену: $t = x + \frac{b}{2}$.

В результате интеграл будет приведен к виду $\int \frac{At + M}{t^2 + q^2} dt$.

в) Представим получившийся интеграл в виде суммы 2-х интегралов:

$$\int \frac{At + M}{t^2 + q^2} dt = \int \frac{At}{t^2 + q^2} dt + \int \frac{M}{t^2 + q^2} dt.$$

В первом – внесем под знак дифференциала знаменатель,

$$\int \frac{At}{t^2 + q^2} dt = A \int \frac{t}{t^2 + q^2} \cdot \frac{d(t^2 + q^2)}{2t} = \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2 + q^2)}{t^2 + q^2} =$$

$$= \frac{A}{2} \ln(t^2 + q^2) + C;$$

Второй интеграл – табличный:

$$\int \frac{M}{t^2 + q^2} dt = \frac{M}{q} \operatorname{arctg} \frac{t}{q} + C.$$

г) Вернемся к исходной переменной x.

4) Интегрирование простейших дробей IV типа:

а) Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$x^2+bx+c=\left(x+b/2\right)^2+q^2.$$

б) Сделаем замену: $t=x+b/2$

В результате интеграл будет приведен к виду $\displaystyle\int\frac{At+M}{(t^2+q^2)^m}dt.$

в) Представим получившийся интеграл в виде суммы 2-х интегралов:

$$\int\frac{At+M}{(t^2+q^2)^m}dt=A\int\frac{tdt}{(t^2+q^2)^m}+M\int\frac{dt}{(t^2+q^2)^m}.$$

Первый из этих интегралов найдем, внеся t^2+q^2 под знак дифференциала:

$$\int\frac{tdt}{(t^2+q^2)^m}=\int\frac{t}{(t^2+q^2)^m}\cdot\frac{d(t^2+q^2)}{2t}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+q^2)}{(t^2+q^2)^m}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(t^2+q^2)^{-m+1}}{-m+1}+C.$$

Для интеграла $J_m = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^m}$ справедлива рекуррентная формула:

$$J_m = -\frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{2(1-m)} \cdot \frac{t}{(t^2+q^2)^{m-1}} + \frac{3-2m}{2q^2(1-m)} J_{m-1}, \quad (1)$$

где $J_{m-1} = \int \frac{dt}{(t^2+q^2)^{m-1}}$.

Применив формулу (1) последовательно $(m-1)$ интеграл J_m сведется к табличному интегралу

$$J_1 = \int \frac{dt}{t^2+q^2} = \frac{1}{q} \operatorname{arctg} \frac{t}{q} + C$$

г) Вернемся к исходной переменной x.

2. Интегрирование правильных рациональных дробей

Пусть $\dfrac{P_r(x)}{P_n(x)}$ – правильная рациональная дробь.

Запишем $P_\text{n}(x)$ в виде произведения линейных и квадратичных множителей:

$$P_n(x) = \alpha(x-a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_i)^{k_i} \cdot (x^2+b_1x+c_1)^{t_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+b_sx+c_s)^{t_s}, \quad (2)$$

где $D_j = b_j^2 - 4c_j < 0, \quad j = 1,2,\ldots,s$

ТЕОРЕМА 1.

Любая правильная рациональная дробь единственным образом представима в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей.

При этом между слагаемыми этой суммы и множителями в разложении (2) *имеет место следующее соответствие:*

1) *каждому множителю вида* $(x-a)^k$ *соответствует сумма из* k *простейших дробей вида*

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *– некоторые числа;*

2) *каждому множителю вида* $(x^2+bx+c)^t$ *соответствует сумма из* t *простейших дробей вида*

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{B_tx+C_t}{(x^2+bx+c)^t}$$

где $B_1, B_2, \ldots, B_t, C_1, C_2, \ldots, C_t$ *– некоторые числа.*

ПРИМЕРЫ.

1) $$\frac{x^3+2x-1}{(x-2)\cdot(x+1)^3} = \frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{(x+1)^2}+\frac{A_4}{(x+1)^3};$$

2) $$\frac{x+1}{x^2(x^2-2x+1)} = \frac{x+1}{x^2(x-1)^2} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{(x-1)^2};$$

3) $$\frac{x+1}{x^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2};$$

4) $$\frac{x^4+1}{(x+2)(x^2+x+3)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+3}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+3)^2}.$$

Разложение конкретной правильной рациональной дроби в сумму простейших обычно производят ***методом неопределенных коэффициентов***, который представляет собой следующую последовательность действий:

1) записываем знаменатель $P_n(x)$ в виде произведения линейных и неразложимых квадратичных множителей;
2) записываем разложение дроби в сумму простейших с неопределенными коэффициентами в числителях (по теореме 1);
3) складываем простейшие дроби и приравниваем многочлен $Q_r(x)$, получившийся в числителе, числителю исходной дроби $P_r(x)$;
4) из равенства $Q_r(x) = P_r(x)$, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов $Q_r(x)$ и $P_r(x)$, получим систему r линейных уравнений для нахождения r неизвестных коэффициентов.

Г. Методы нахождения неопределённых коэффициентов

Метод задания частных значений	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение подставляют вещественные корни знаменателя или другие любые значения.

Метод неопределённых коэффициентов	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. Из полученного уравнения получают систему линейных уравнений, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x в правой и левой частях уравнения.

Метод комбинированный	1. Сумму простых дробей приводят к общему знаменателю. 2. Приравнивают числители данной дроби и дроби с неопределёнными коэффициентами. 3. В полученное уравнение последовательно подставляют все вещественные корни знаменателя, остальные коэффициенты находят методом неопределённых коэффициентов.

.1. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{x^2-3x+4}$;

а) в квадратном трёхчлене выделим полный квадрат:

$$x^2-3x+4=x^2-2\cdot x\cdot\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4};$$

б) введём новую переменная $u=x-1{,}5$, откуда $x=u+1{,}5$ и $dx=du$;

в) в исходном интеграле переходим к новой переменной:

$$\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-3x+4}=\int\frac{2(u+1{,}5)-1}{u^2+1{,}75}du=\int\frac{2u+3-1}{u^2+1{,}75}du=\int\frac{2u+2}{u^2+1{,}75}du;$$

$$\int \frac{2u+2}{u^2+1,75}du = \int \frac{2udu}{u^2+1,75} + \int \frac{2du}{u^2+1,75} = \int \frac{2u}{u^2+1,75} \cdot \frac{d\left(u^2+1,75\right)}{2u} +$$

$$+2\int \frac{du}{u^2+\left(\sqrt{1,75}\right)^2} = \int \frac{d(u^2+1,75)}{u^2+1,75} + \frac{2}{\sqrt{1,75}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1,75}} + C =$$

$$= 2\ln\left|u^2+1,75\right| + \frac{2}{\sqrt{1,75}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1,75}} + C;$$

д) возвращаемся к старой переменной:

$$2\ln\left|u^2+1,75\right| + \frac{2}{\sqrt{1,75}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{1,75}} + C =$$

$$= 2\ln\left|\left(x-1,5\right)^2+1,75\right| + \frac{2}{\sqrt{1,75}}\operatorname{arctg}\frac{x-1,5}{\sqrt{1,75}} + C.$$

2. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x(x+4)^2}$;

3.2. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{x+3}{x(x+4)^2}$ является правильной рациональной дробью. Для интегрирования такой дроби её необходимо разложить на сумму простых дробей:

$$\frac{x+3}{x(x+4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{(x+4)^2}. \qquad (*)$$

Найдем теперь неопределённые коэффициенты A, B и C. Для этого приводим дроби, стоящие в правой части равенства $(*)$ к общему знаменателю:

$$\frac{x+3}{x(x+4)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+4}+\frac{C}{(x+4)^2}=\frac{A(x+4)^2+Bx(x+4)+Cx}{x(x+4)^2}.$$

Из равенства двух дробей с одинаковыми знаменателями следует и равенство их числителей

$$x+3=A(x+4)^2+Bx(x+4)+Cx.$$

Это равенство справедливо для любых значений x

Возьмём $x=0$, $x=-4$ и $x=-3$.

$$x=0: \quad 3=16A \Rightarrow A=\frac{3}{16};$$

$$x=-4: \; -1=-4C \Rightarrow C=\frac{1}{4};$$

$$x=-3: \; 0=A-3B-3C \Rightarrow \frac{3}{16}-3B-\frac{3}{4}=0 \Rightarrow B=-\frac{3}{16}.$$

Найденные коэффициенты подставим в разложение дроби и находим интегралы:

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{x(x+4)^2} = \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x} - \frac{3}{16}\int \frac{dx}{x+4} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(x+4)^2}dx =$$

$$= \frac{3}{16}\ln|x| - \frac{3}{16}\ln|x+4| - \frac{1}{4(x+4)} + C.$$

.3. $\int \frac{\left(2x^2+3\right)dx}{(x+4)\left(x^2+5\right)}$;

3.3. Подынтегральная функция $f(x)=\frac{2x^2+3}{(x+4)\left(x^2+5\right)}$ является правильной рациональной дробью, поэтому находим интеграл по той же схеме, что и в п. 3.2.

$$\frac{2x^2+3}{(x+4)\left(x^2+5\right)}=\frac{A}{x+4}+\frac{Bx+C}{x^2+5}=\frac{A\left(x^2+5\right)+(Bx+C)(x+4)}{(x+4)\left(x^2+5\right)}\Rightarrow$$

$$2x^2+3=A\left(x^2+5\right)+(Bx+C)(x+4)\Rightarrow$$

$$x=-4: \quad 35=20A\Rightarrow A=\frac{7}{4};$$

$$x=0: \quad 3=5A+4C\Rightarrow 3=5\cdot\frac{7}{4}+4C\Rightarrow C=-\frac{13}{16};$$

$$x=-3: \quad 21=14A-3B+C\Rightarrow 14\cdot\frac{7}{4}-3B-\frac{13}{16}=21\Rightarrow B=\frac{43}{48}.$$

В результате получаем:

$$\int \frac{\left(2x^2+3\right)dx}{\left(x+4\right)\left(x^2+5\right)} = \int \frac{\frac{7}{4}}{x+4}dx + \int \frac{\frac{43x}{48}-\frac{13}{16}}{x^2+5}dx = \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x} + \frac{43}{48}\int \frac{xdx}{x^2+5} -$$

$$-\frac{13}{16}\int \frac{dx}{x^2+5} = \frac{7}{4}\ln|x| + \frac{43}{48}\int \frac{x}{x^2+5}\cdot\frac{d\left(x^2+5\right)}{2x} - \frac{13}{16}\int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{5})^2} + C =$$

$$= \frac{7}{4}\ln|x| + \frac{43}{98}\ln\left|x^2+5\right| - \frac{13}{16\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$