

В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

часть II

Аналитическая геометрия

Министерство образования и науки
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж,
А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
для технических университетов

Часть II. Аналитическая геометрия

3-е издание, исправленное

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я73

В937

Задорожный В.Н.

В937 Высшая математика для технических университетов. Часть II. Аналитическая геометрия: учебное пособие / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов; Томский политехнический университет. – 3-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 344 с.

Настоящее пособие представляет собой изложение второй части курса «Высшая математика» и содержит материал по разделу этого курса: «Аналитическая геометрия». Оно содержит теоретический материал в объеме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями для самостоятельного решения по каждому разделу.

Предлагаемое пособие может быть полезно студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

Пособие предназначено для студентов физических, инженерно-физических специальностей и студентов, обучающихся в системе элитного технического образования.

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я73

Работа частично поддержана Государственным заданием ВУЗам «Наука», регистрационный номер 1.676.2014/К.

Рецензенты

Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ

Осетрин К.Е.

Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ

Багров В.Г.

© Томский политехнический университет, 2010

© В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов, 2010

© Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2014

Содержание

| | |
|---|----|
| Введение | 7 |
| Глава 1. Векторная алгебра | 9 |
| 1. Скаляры и векторы | 9 |
| 1.1. Основные понятия и определения | 9 |
| 1.2. Линейные операции над векторами, их свойства | 11 |
| 1.3. Линейные зависимости между векторами | 19 |
| 1.4. Проекция вектора на ось | 25 |
| 1.5. Базис и координаты | 27 |
| 1.6. Аффинный репер и декартова система координат | 28 |
| 2. Простейшие задачи векторной алгебры | 30 |
| 2.1. Длина вектора и расстояние между точками | 30 |
| 2.2. Направляющие косинусы | 31 |
| 2.3. Деление отрезка в данном отношении | 32 |
| 3. Преобразование аффинных систем координат | 35 |
| 3.1. Переход от одного базиса к другому | 35 |
| 3.2. Преобразование координат вектора при изменении базиса | 37 |
| 3.3. Переход от одной аффинной системы координат к другой | 39 |
| 3.4. Ортогональные матрицы | 41 |
| 3.5. Преобразование прямоугольных координат на плоскости | 42 |
| 3.6. Ориентация прямой, плоскости и пространства | 45 |
| 4. Произведение двух векторов | 53 |
| 4.1. Скалярное произведение двух векторов | 53 |
| 4.2. Скалярное произведение в косоугольном базисе | 57 |
| 4.3. Метод ортогонализации Грама–Шмидта | 60 |
| 4.4. Преобразование прямоугольных координат в пространстве | 64 |
| 4.5. Векторное произведение двух векторов и его свойства | 65 |
| 4.6. Векторное произведение векторов, заданных декартовыми координатами | 71 |
| 4.7. Скалярное и векторное произведение. Определитель Грама | 73 |
| 5. Произведение трех векторов | 75 |
| 5.1. Смешанное произведение векторов и его свойства | 75 |
| 5.2. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей | 77 |
| 5.3. Смешанное произведение векторов и определитель Грама | 78 |
| 5.4. Двойное векторное произведение | 79 |
| 6. Определение основных характеристик треугольника методами векторной алгебры | 81 |
| 7. Основные задачи векторной алгебры | 85 |
| 7.1. Определение вектора по известному скалярному произведению с заданным вектором | 85 |
| 7.2. Определение вектора по известному векторному произведению с заданным вектором | 86 |
| 7.3. Определение вектора по известным векторному и скалярному произведениям с заданными векторами | 87 |
| 7.4. Определение вектора по трём скалярным произведениям | 88 |
| 7.5. Линейное векторное уравнение | 88 |
| 7.6. Разложение заданного вектора по трём некопланарным векторам | 89 |
| 7.7. Определение основных характеристик тетраэдра методами векторной алгебры | 90 |
| 8. Произведение четырёх векторов | 93 |
| 9. Произведение пяти и шести векторов | 96 |

| | |
|---|-----|
| Глава 2. Прямая линия на плоскости | 98 |
| 10. Уравнения линий в декартовой и полярной системах координат | 98 |
| 11. Прямая линия на плоскости | 99 |
| 11.1. Параметрические и канонические уравнения прямой | 99 |
| 11.2. Уравнение прямой линии, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору | 100 |
| 11.3. Общее уравнение прямой и уравнение прямой в отрезках | 101 |
| 11.4. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом | 102 |
| 11.5. Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку | 102 |
| 11.6. Уравнение прямой, проходящей через две точки | 104 |
| 11.7. Уравнение прямой в нормальном виде | 104 |
| 12. Простейшие задачи на прямую на плоскости | 105 |
| 12.1. Расстояние от точки до прямой | 105 |
| 12.2. Угол между прямыми | 106 |
| 12.3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и составляющей заданный угол с данной прямой | 109 |
| 12.4. Уравнение биссектрисы углов, образованных данными прямыми . | 109 |
| Глава 3. Кривые линии на плоскости | 113 |
| 13. Кривые второго порядка на плоскости. Окружность | 113 |
| 14. Эллипс | 118 |
| 15. Гипербола | 133 |
| 16. Парабола | 142 |
| 17. Директориальные свойства кривых второго порядка | 148 |
| 18. Фокальные (оптические) свойства кривых второго порядка | 150 |
| 19. Кривые в полярной системе координат | 152 |
| 19.1. Прямая в полярных координатах | 154 |
| 19.2. Канонические уравнения кривых второго порядка в полярной системе координат | 155 |
| 19.3. Уравнения кривых второго порядка в полярной системе координат, полюс которой совпадает с фокусом, а полярная ось сонаправлена с осью симметрии кривой | 157 |
| 20. Уравнения кривых второго порядка в параметрической форме | 163 |
| 20.1. Окружность | 163 |
| 20.2. Эллипс | 165 |
| 20.3. Гипербола | 167 |
| 20.4. Парабола | 169 |
| 21. Кривые высших порядков и трансцендентные кривые | 171 |
| 21.1. Классификация кривых третьего порядка | 171 |
| 21.2. Кривые третьего порядка. Каноническая форма A | 172 |
| 21.3. Кривые третьего порядка. Каноническая форма B | 174 |
| 21.4. Кривые третьего порядка. Каноническая форма C | 174 |
| 21.5. Алгебраические кривые высших порядков | 175 |
| 21.6. Трансцендентные кривые | 181 |
| 22. Уравнения кривых второго порядка в матричной форме | 189 |
| 23. Инварианты кривой второго порядка | 194 |
| 24. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду | 200 |
| 25. Каноническая система координат | 214 |
| 26. Пересечение кривой второго порядка с прямыми | 233 |
| Глава 4. Прямая и плоскость в пространстве | 237 |

| | |
|--|-----|
| 27. Плоскость | 237 |
| 27.1. Параметрические уравнения и общее уравнение плоскости | 237 |
| 27.2. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки . . . | 239 |
| 27.3. Нормированное уравнение плоскости | 240 |
| 27.4. Уравнение плоскости в отрезках | 240 |
| 27.5. Неполные уравнения плоскости | 241 |
| 27.6. Взаимное расположение двух плоскостей | 242 |
| 27.7. Взаимное расположение трёх плоскостей | 244 |
| 27.8. Пучок и связка плоскостей | 244 |
| 28. Прямая линия в пространстве | 248 |
| 28.1. Уравнение прямой в общем виде | 248 |
| 28.2. Параметрические и канонические уравнения прямой | 249 |
| 28.3. Переход от уравнения прямой общего вида к каноническим | 250 |
| 28.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки | 253 |
| 29. Основные задачи о плоскости и прямой в пространстве | 253 |
| 29.1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую и не лежащую на этой прямой точку | 253 |
| 29.2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку парал- лельно двум данным прямым | 255 |
| 29.3. Угол между плоскостями | 255 |
| 29.4. Угол между двумя прямыми в пространстве | 257 |
| 29.5. Угол между прямой и плоскостью | 258 |
| 29.6. Расстояние от точки до плоскости | 258 |
| 29.7. Расстояние от точки до прямой в пространстве | 260 |
| 29.8. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Пересечение пря- мых | 260 |
| 29.9. Пересечение прямой и плоскости | 262 |
| 29.10. Проекция точки на плоскость | 263 |
| 29.11. Уравнение перпендикуляра, опущенного из данной точки на дан- ную прямую | 264 |
| 29.12. Проекция точки на прямую | 265 |
| 29.13. Проекция прямой на плоскость | 266 |
| 30. Прямые и плоскости в аффинном пространстве произвольной размерно- сти | 268 |
| Глава 5. Поверхности и кривые в пространстве | 270 |
| 31. Поверхности и кривые в пространстве и их уравнения в декартовой си- стеме координат | 270 |
| 32. Основные задачи на поверхность и кривую | 271 |
| 33. Основная теорема о поверхности второго порядка | 277 |
| 34. Эллипсоид | 279 |
| 35. Гиперболоиды | 282 |
| 35.1. Двуполостный гиперболоид | 282 |
| 35.2. Однополостный гиперболоид | 286 |
| 36. Конусы второго порядка | 291 |
| 37. Параболоиды | 294 |
| 37.1. Эллиптический параболоид | 294 |
| 37.2. Гиперболический параболоид | 295 |
| 38. Цилиндры второго порядка | 298 |
| 39. Поверхности цилиндрические, конические и вращения | 299 |
| 39.1. Цилиндрические поверхности | 299 |
| 39.2. Поверхности вращения | 303 |
| 39.3. Конические поверхности | 308 |
| 39.4. Конические сечения | 316 |

| | |
|---|-----|
| 40. Приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду | 321 |
| 40.1. Матричная форма уравнений поверхностей второго порядка и приведение их к каноническому виду | 321 |
| 40.2. Инварианты уравнения поверхности второго порядка | 336 |
| 40.3. Линейчатые поверхности второго порядка | 340 |
| Задания для самоконтроля | 344 |
| Теоретические вопросы | 344 |
| Индивидуальные задания | 347 |
| Список литературы | 397 |

Введение

Фундамент математического образования в высшей школе составляют три основных раздела математики: линейная алгебра, аналитическая геометрия и математический анализ.

Аналитическая геометрия изучает простейшие геометрические объекты средствами элементарной алгебры на основе метода координат. Создание аналитической геометрии связывают с именами Рене Декарта (1506–1650) и Пьера Ферма (1601–1655). П. Ферма переписывался с Р. Декартом по вопросам аналитической геометрии (1629) и применил ее методы к трехмерному пространству. Р. Декарт изложил основы аналитической геометрии в последней главе своего трактата «Рассуждение о методе», озаглавленной «Геометрия» (1637). Аналитическая геометрия стала неопределимым подспорьем для математического анализа, изобретенного вскоре Ньютоном (1665–1666) и Лейбницем (1675–1676). Методы аналитической геометрии, развитые для изучения фигур на плоскости и поверхностей в трехмерном пространстве, допускают естественное обобщение и на пространства более высоких размерностей. Из курса элементарной физики известно, что все величины, характеризующие закономерности окружающего нас мира, можно разделить на два основных класса: *скалярные* и *векторные*. Скалярные величины — это такие величины, как площадь и объём тела, его масса, температура, электрический заряд и т.д., каждую из которых можно описать одним числом.

Каждое значение векторной величины можно задать набором чисел. К векторным величинам относятся скорость, сила, напряженность электрического поля и т.п. Векторная величина, для которой точка ее приложения не имеет значения, называется *свободной*. Так, например, все точки поступательно движущегося твёрдого тела имеют одинаковые по величине и направлению скорости. Эта скорость, называемая скоростью тела, и может рассматриваться как свободная векторная величина.

Если векторная величина определяется численной мерой, направлением и точкой приложения, то она называется *приложенной*, или *связанной*. Так, в движущейся жидкости скорость каждой её частицы является связанной векторной величиной.

Векторная величина, направление и точка приложения которой принадлежит некоторой прямой, называется *скользящей*, а сама прямая — *линией её приложения* или *линией её действия*. Примером такой величины является сила, приложенная к твёрдому телу. Точку приложения можно переносить вдоль линии её действия, но нельзя смещать с этой линии, так как действие силы на тело изменится.

Векторные величины в физике уже давно стали изображаться направленными отрезками, и для решения физических задач стали применяться геометрические построения. Так, уже в самом начале XVII века в механике использовалось изображение сил в виде направленных отрезков и употреблялось правило параллелограмма для определения равнодействующей силы.

В современном смысле исчисление векторных величин возникло гораздо позже: примерно в середине XIX века. Его основоположниками принято считать У. Гамильтона и Г. Грассмана, которые примерно в одно и то же время различными путями пришли к открытию векторных операций.

Именно Гамильтон ввел термины «скаляр» и «вектор», которые в переводе с латинского означают «ступенчатый» и «несущий» соответственно.

Позднее многие выдающиеся математики внесли свой вклад в развитие и усовершенствование векторного исчисления, превратив векторную алгебру в векторный анализ, а также в тензорный и функциональный анализы. Поэтому в настоящее время векторную алгебру можно рассматривать как одно из

элементарных геометрических представлений трехмерного евклидова пространства (см. разд. «Линейные пространства» [8]).

Именно этот элементарный раздел векторного исчисления, называемый векторной алгеброй, и является предметом рассмотрения данного курса, предваряющего изложение курса аналитической геометрии.

В соответствии с программой данного курса в пособии рассмотрены стандартные вопросы векторной алгебры, теории прямых и плоскостей, теории кривых и поверхностей второго порядка в пространстве.

В пособие включены некоторые дополнительные разделы с целью облегчить студентам технического университета освоение математического аппарата теоретической физики. Задачи, содержащиеся в каждом разделе, являются существенной частью курса.

Предполагается, что студент владеет основными понятиями курса элементарной геометрии.

ГЛАВА 1

Векторная алгебра

1. Скаляры и векторы

1.1. Основные понятия и определения

В школьном курсе геометрии мы познакомились с отображением плоскости на себя. Среди различных отображений были выделены отображения плоскости на себя, сохраняющие расстояния. Такими отображениями, которые называются *перемещениями*, являются, как известно из школьного курса математики, поворот, осевая и центральная симметрии, параллельный перенос.

◆ *Параллельным переносом* называется отображение плоскости на себя, при котором все точки перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

В школьном курсе было доказано, что параллельный перенос является перемещением.

◆ Отображение пространства на себя, при котором любые две точки имеют различные образы, называется *преобразованием пространства*.

◆ *Вектором* (*параллельным переносом*), определяемым парой (A, B) несовпадающих точек, называется преобразование пространства, при котором каждая точка A_1 отображается на точку B_1 так, что луч $[A_1B_1)$ сонаправлен с лучом $[AB)$ и расстояние $|A_1B_1|$ равно расстоянию $|AB|$. Этот вектор обозначается символом \overrightarrow{AB} или \vec{a} .

Направление, определяемое лучом $[AB)$, называется *направлением вектора* \overrightarrow{AB} , а расстояние $|AB|$ — *длиной вектора*.

◆ Вектор, задающий тождественное преобразование, называется *нулевым* и обозначается \overrightarrow{AA} , \overrightarrow{BB} или $\vec{0}$.

Тождественным называется преобразование, отображающее каждую точку пространства на эту же самую точку.

◆ Два вектора \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} называются *равными*, или *конгруэнтными*, если выполняются следующие три условия:

- 1) прямые AB и CD параллельны или совпадают;
- 2) векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} сонаправлены, т.е. $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$;
- 3) их длины равны, т.е. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

◆ Векторы, длина которых равна единице, называются *единичными векторами*, или *ортами* (от греческого слова «прямой»).

◆ Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой или расположены на одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Приведённых выше понятий достаточно для работы с векторами. Для полноты изложения сформулируем более строгий подход к определениям скалярных и векторных величин, абстрагируясь от их конкретного содержания.

◆ *Скаляром* называется величина, каждое значение которой может быть охарактеризовано одним число. Если это число является вещественным (комплексным), то скалярная величина называется *вещественной* (*комплексной*).

Если для отрезка AB одну точку, например A , считать началом, а другую — точку B — концом, то задание направления от A к B фиксирует ориентацию отрезка, превращая его тем самым в направленный отрезок, называемый

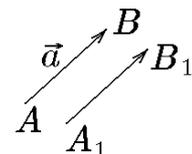


Рис. 1.

связанным вектором \overrightarrow{AB} (стрелка \overrightarrow{AB} на рис. 1).

Пусть X — некоторое множество.

◆ Множество всех упорядоченных пар (x, y) — элементов множества X — называется *декартовым произведением* множеств X , или *декартовым квадратом* множества X , и обозначается:

$$X^2 = X \times X = \{(x, y) | x \in X; y \in X\}.$$

◆ Правило, по которому выделяется подмножество

$$\Phi = \{(x, y) | x, y \in X\} \quad (1.1)$$

декартова квадрата множества X ($\Phi \subset X \times X$), называется *бинарным отношением* на множестве X .

◆ Бинарное отношение на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно является:

1. рефлексивным, т.е. $x \sim x$ для всех $x \in X$;
2. симметричным, т.е. если $x \sim y$, то $y \sim x$;
3. транзитивным, т.е. если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

Пример 1.1. Показать, что отношение сонаправленности ($\uparrow\uparrow$) двух связанных векторов в пространстве \mathbb{R}^3 является отношением эквивалентности, а отношение противоположнонаправленности ($\uparrow\downarrow$) таковым не является.

Решение. Пусть вектор \vec{a} сонаправлен вектору \vec{b} , а вектор \vec{b} сонаправлен вектору \vec{c} . Тогда очевидно, что

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}, \quad \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}, \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}.$$

Таким образом, отношение $\uparrow\uparrow$ является отношением эквивалентности.

Поскольку из соотношений $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ и $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$ следует, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то отношение $\uparrow\downarrow$ нетранзитивно, а потому не является отношением эквивалентности.

◆ Подмножество элементов множества X , эквивалентных данному, называется *классом эквивалентности*.

◆ Класс эквивалентности по признаку конгруэнтности на множестве всех связанных векторов называется *свободным вектором*.

◇ Если в этом определении вместо связанных векторов пространства выбрать множество связанных векторов, начало и конец которых лежат на одной прямой, то придём к понятию скользящих векторов. Скользящие векторы нашли широкое применение в механике. Простейший пример скользящего вектора — сила. Действительно, перенос этого вектора вдоль прямой, на которой он лежит, не меняет ни момент силы, ни равнодействующую всех сил, действующих на тело, в то время как перенос силы на другую (даже параллельную) прямую приведёт к изменению момента сил, действующих на тело.

Все векторы, как уже отмечалось, подразделяются на свободные, связанные и скользящие. Поскольку свободным вектором можно считать любой вектор из класса эквивалентности и, следовательно, положение точки A не имеет значения, то обозначение \overrightarrow{AB} зачастую заменяют обозначением \vec{a} .

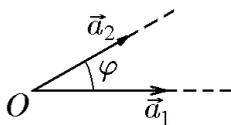


Рис. 2.

◇ Если из контекста ясно, о каком виде векторов (связанный, свободный, скользящий) идёт речь, то для их обозначения будем употреблять термин «вектор».

◆ *Углом между двумя векторами* $\varphi = \angle(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ (или $\varphi = \widehat{(\vec{a}_1, \vec{a}_2)}$) называется меньший ($\pi \geq \varphi \geq 0$) из двух углов между лучами, исходящими из одной точки и направленных одинаково с данными векторами (рис. 2). При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ векторы являются коллинеарными со- и противоположно направленными, соответственно.

1.2. Линейные операции над векторами, их свойства

В векторном исчислении скаляры и векторы рассматриваются как своего рода алгебраические величины, над которыми производятся алгебраические операции.

Определение операции сложения двух скаляров затруднений не вызывает, поскольку оно сводится к сумме двух действительных чисел, характеризующих эти величины.

Введённое выше понятие равенства векторов позволяет определить алгебраически основные операции над векторами.

Для определения суммы двух векторов воспользуемся известным из элементарной физики законом: действие двух сил \vec{a} и \vec{b} на точку O можно заменить действием одной силы — их равнодействующей \vec{c} , определяемой по правилу параллелограмма (рис. 3). Такая замена двух векторных величин \vec{a} и \vec{b} их равнодействующей \vec{c} , построенной по правилу параллелограмма, и составляет содержание операции сложения произвольных геометрических векторов: за сумму двух векторов \vec{a} и \vec{b} , отложенных из одной точки O , принимается вектор \vec{c} , исходящий из той же точки и лежащий на диагонали $\vec{OC} = \vec{c}$ параллелограмма $OACB$, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ (рис. 3).

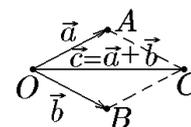


Рис. 3.

♦ Суммой двух векторов \vec{a} и \vec{b} , приведённых к общему началу, называется вектор \vec{c} , равный по модулю и направлению диагонали параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , и обозначается

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Начала свободных векторов всегда можно переместить в одну точку, однако, как следует из рис. 4, нет надобности строить для них весь параллелограмм $OACB$, достаточно построить треугольник OAC . Поэтому определённую выше операцию сложения векторов, называемую еще *правилом параллелограмма*, можно заменить более удобным, называемым *правилом треугольника*.

♦ Суммой двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется третий вектор \vec{c} , соединяющий начало первого слагаемого \vec{a} с концом второго \vec{b} при условии, что начало второго слагаемого совмещено с концом первого (рис. 4).

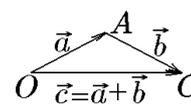
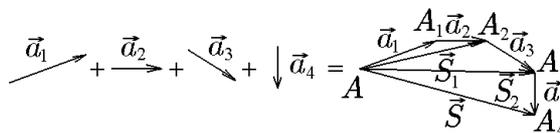


Рис. 4.

Для суммирования нескольких векторов правило треугольника легко обобщается, что приводит к правилу многоугольника.

Рис. 5. $\vec{S}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$; $\vec{S}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3$; $\vec{S} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$

♦ Суммой n векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется вектор \vec{S} , полученный следующим образом: от произвольной точки A откладывается первый вектор \vec{a}_1 , от конца A_1 получившегося вектора \vec{AA}_1 откладывается второй вектор \vec{a}_2 и т.д.; суммой \vec{S} является вектор \vec{AA}_n , соединяющий начальную точку A с концом A_n последнего вектора \vec{a}_n (рис. 5).

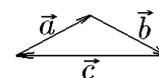


Рис. 6.

Очевидно, что сумма векторов, образующих замкнутый многоугольник, равна нулю. На рис. 6 сумма $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$.

Пример 1.2. На языке векторного исчисления сформулировать известное из элементарной геометрии утверждение о том, что длина отрезка прямой, соединяющей две точки, не превосходит длины ломаной, соединяющей эти же точки.

Решение. Рассмотрим треугольник OAC на рис. 4, в котором точки O и C соединяют прямолинейный отрезок OC и ломаная OAC , состоящая из двух отрезков: OA и AC . Если длины указанных отрезков обозначить как l_{OC} , l_{OA} и l_{AC} , то исходное утверждение можно записать в виде

$$l_{OC} \leq l_{OA} + l_{AC}.$$

Приняв во внимание, что $l_{OC} = |\vec{c}| = |\vec{a} + \vec{b}|$, $l_{OA} = |\vec{a}|$, $l_{AC} = |\vec{b}|$, имеем

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|. \quad (1.2)$$

На языке векторного исчисления это означает, что модуль суммы двух векторов не превосходит сумму модулей слагаемых.

Для суммы коллинеарных сонаправленных векторов из (1.2) получим равенство

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

Для суммы коллинеарных противоположно направленных векторов, соответственно

$$|\vec{a} + \vec{b}| = ||\vec{a}| - |\vec{b}||.$$

♦ Два коллинеарных противоположно направленных вектора \vec{a} и \vec{b} называются *противоположными*, если модуль их суммы равен нулю:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 0.$$

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1) свойство коммутативности:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}; \quad (1.3)$$

1) свойство ассоциативности:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}. \quad (1.4)$$

Доказательство этих соотношений очевидным образом вытекает из равенств сторон соответствующих треугольников на рис. 7.

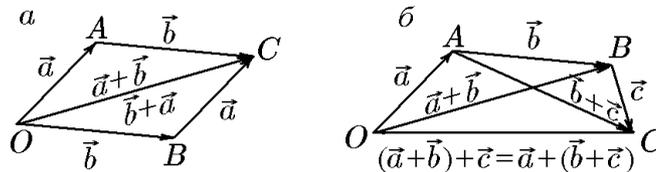


Рис. 7.

Применив в (1.4) свойство коммутативности к слагаемым в скобках и вне их, убеждаемся, что можно суммировать векторы в любом порядке. Попутно мы получили правило раскрытия скобок при суммировании векторов.

Рассмотрим теперь операцию умножения скалярных и векторных величин. Естественно считать, что умножение вектора \vec{a} на целое положительное число n сводится к последовательному сложению вектора \vec{a} с самим собой n раз. В

результате получается новый вектор (обозначим его $n\vec{a}$), имеющий то же направление, что и вектор \vec{a} , и в n раз больший модуль:

$$n\vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \dots + \vec{a}}_{n \text{ слагаемых}}. \quad (1.5)$$

Обобщение (1.5) приводит к следующему определению.

◆ Произведением вектора \vec{a} на скаляр α называется вектор \vec{b} , такой что

- 1) модуль вектора \vec{b} равен произведению модулей вектора $|\vec{a}|$ и скаляра $|\alpha|$;
- 2) направление вектора \vec{b} совпадает с направлением вектора \vec{a} , если скаляр положителен, и противоположно направлению вектора \vec{a} , если скаляр отрицателен.

Произведение вектора \vec{a} и скаляра α обозначается как $\vec{b} = \vec{a}\alpha$ или $\vec{b} = \alpha\vec{a}$.

◇ Нетрудно заметить, что $|\vec{a}\alpha| = |\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$. Произведение обращается в нуль, если один из сомножителей равен нулю: $\alpha\vec{0} = \vec{0}$, $0\vec{a} = \vec{0}$.

Операция умножения вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

- 1) ассоциативности:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}; \quad (1.6)$$

- 2) дистрибутивности относительно суммы скаляров:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}; \quad (1.7)$$

- 3) дистрибутивности относительно суммы векторов:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}. \quad (1.8)$$

Доказательство этих свойств достаточно очевидно.

Действительно, справедливость (1.6) вытекает из того, что векторы $\alpha(\beta\vec{a})$ и $(\alpha\beta)\vec{a}$ имеют равные модули:

$$\begin{aligned} |\alpha(\beta\vec{a})| &= |\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|, \\ |(\alpha\beta)\vec{a}| &= |\alpha\beta||\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}| \end{aligned}$$

и одинаковые направления: они сонаправлены с \vec{a} , если $\alpha\beta > 0$, и направлены противоположно \vec{a} в противном случае.

Справедливость соотношения (1.7) при $\alpha + \beta > 0$ вытекает из того, что векторы $(\alpha + \beta)\vec{a}$ и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ имеют равные модули:

$$\begin{aligned} |(\alpha + \beta)\vec{a}| &= |\alpha + \beta||\vec{a}| = (\alpha + \beta)|\vec{a}| = \alpha|\vec{a}| + \beta|\vec{a}|, \\ |\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}| &= \alpha|\vec{a}| + \beta|\vec{a}|, \end{aligned}$$

и сонаправлены с \vec{a} . Аналогично доказывается справедливость соотношения (1.7) для $\alpha + \beta < 0$.

Наконец, справедливость соотношения (1.8) вытекает из подобия треугольников OAB и $O'A'B'$ (рис. 8).

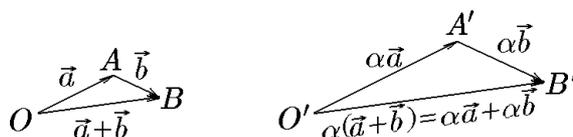


Рис. 8.

Заметим, что умножение вектора \vec{a} на $\alpha = 1$ не меняет его: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, а умножение \vec{a} на $\alpha = -1$ дает вектор $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$, который можно считать вектором, противоположным (см. определение) вектору \vec{a} , т.е.

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = 0. \quad (1.9)$$

Соотношение (1.9) позволяет ввести операцию разности векторов.

◆ Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор \vec{d}

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}), \quad (1.10)$$

который в сумме с вектором \vec{b} дает вектор \vec{a} , т.е. $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}$.

Нетрудно заметить, что разность векторов является суперпозицией двух операций: сложение двух векторов и предварительное умножение второго вектора на скаляр $\alpha = -1$. Первый вектор естественно называть *уменьшаемым*, а второй — *вычитаемым*.

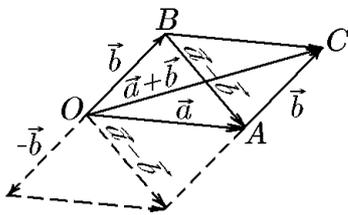


Рис. 9.

Рисунок 9 раскрывает геометрический смысл разности $\vec{a} - \vec{b}$. Вектор $\vec{a} - \vec{b}$ представляет собой вторую диагональ параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , направленную от конца вычитаемого вектора \vec{b} к уменьшаемому \vec{a} .

С учётом этого из треугольника OBA (рис. 9) имеем

$$\vec{b} + (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}. \quad (1.11)$$

Положив

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}, \quad (1.12)$$

из (1.11) получим

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}. \quad (1.13)$$

Из сравнения (1.12) и (1.13) заключаем, что слагаемый вектор из одной части векторного равенства можно переносить в другую с противоположным знаком. Это заключение замыкает перечень правил, позволяющих работать с формулами, содержащими введённые выше алгебраические операции.

Пример 1.3. Упростить выражение

$$4\left(\vec{a} + \frac{1}{20}\vec{b}\right) - \left(3\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}\right).$$

Решение. Упрощаем:

$$4\left(\vec{a} + \frac{1}{20}\vec{b}\right) - 3\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} = 4\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} - 3\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} = \vec{a}.$$

Пример 1.4. Найти выражение, определяющее вектор \vec{a} через его модуль $|\vec{a}|$ и орт \vec{a}_0 .

Решение. Если орт вектора \vec{a}_0 умножить на скаляр, которым является модуль $|\vec{a}|$, то мы получим сам вектор \vec{a} , т.е. всякий вектор равен произведению своего орта на свой модуль:

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}_0. \quad (1.14)$$

◇ Очевидно, что сам орт можно найти по формуле

$$\vec{a}_0 = \alpha \vec{a}, \quad \alpha = \frac{1}{|\vec{a}|}. \quad (1.15)$$

Операцию (1.15) зачастую называют *нормировкой* вектора \vec{a} .

Операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие свойствам (1.3)–(1.8), для объектов любой природы принято называть *линейными*. Это остается справедливым и для векторных величин, поэтому вектор

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}, \quad (1.16)$$

получаемый в результате этих операций, называется их *линейной комбинацией*.

Подводя итог вышесказанному, можно утверждать, что линейные операции над геометрическим векторами обладают в совокупности следующими свойствами:

- 1) коммутативность сложения: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) ассоциативность сложения: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- 3) существует нулевой вектор $\vec{0}$ такой, что $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для любого \vec{a} ;
- 4) для каждого вектора \vec{a} существует противоположный вектор $-\vec{a}$ такой, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
- 5) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ для любых чисел α и β и любого вектора \vec{a} ;
- 6) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ для любых чисел α и β и любого вектора \vec{a} ;
- 7) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ для любого числа α и любых векторов \vec{a}, \vec{b} ;
- 8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ для любого вектора \vec{a} .

В линейной алгебре множество \mathcal{L} , состоящее из элементов любой природы (называемых векторами), в котором определены операции сложения элементов и умножения элементов на числа, удовлетворяющие условиям 1–8, называется *линейным (векторным) пространством*.

Согласно этому определению, множество геометрических векторов является линейным (векторным) пространством (см., например, [8]).

Пример 1.5. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$, причём $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$. Выразить через \vec{a} и \vec{b} векторы \vec{CD} , \vec{DE} , \vec{EF} , \vec{FA} , \vec{AC} , \vec{AD} и \vec{AE} .

Решение. Пусть точка O — центр правильного шестиугольника (рис. 10). Согласно условиям задачи, $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{BC} = \vec{b}$. Тогда в силу свойств правильного шестиугольника, составленного из шести правильных треугольников, имеем

$$\begin{aligned} \vec{AC} &= \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{a} + \vec{b}, \\ \vec{BO} &= \vec{AO} - \vec{AB} = \vec{BC} - \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}. \end{aligned}$$

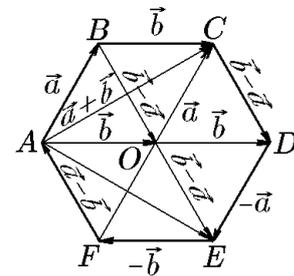


Рис. 10.

Отсюда

$$\vec{CD} = \vec{BO} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Далее

$$\vec{DE} = -\vec{AB} = -\vec{a};$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} &= -\overrightarrow{BC} = -\vec{b}; \\ \overrightarrow{FA} &= -\overrightarrow{CD} = -(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} - \vec{b}; \\ \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{BC} = 2\vec{b}; \\ \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO} = \vec{b} + (\vec{b} - \vec{a}) = 2\vec{b} - \vec{a}.\end{aligned}$$

Пример 1.6. Дан треугольник ABC с медианами \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BE} и \overrightarrow{CF} . Доказать равенство $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$.

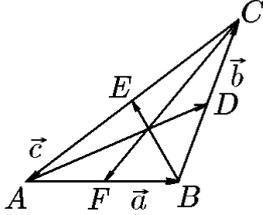


Рис. 11.

Решение. На сторонах AB , BC , CA треугольника и его медианах AD , BE , CF (рис. 11) построим векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{CF} , обозначив для удобства

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{c}. \quad (1.17)$$

Напомним, что, согласно правилу многоугольника, сумма векторов, образующих замкнутый многоугольник, равна нулю. Тогда сумма векторов \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} , представляющих стороны треугольника, равна нулю, т.е.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0. \quad (1.18)$$

Аналогично для треугольников ADC , BEA и CFB имеем

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} &= 0, \\ \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} &= 0, \\ \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC} &= 0.\end{aligned} \quad (1.19)$$

Приняв во внимание, что

$$\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}, \quad \overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

с учётом (1.17) равенство (1.19) можно записать в виде

$$\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = 0, \quad \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} = 0, \quad \overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = 0.$$

Отсюда находим выражения для векторов-медиан через векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} &= -\left(\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}\right), \\ \overrightarrow{BE} &= -\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right), \\ \overrightarrow{CF} &= -\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right).\end{aligned} \quad (1.20)$$

Просуммировав уравнения (1.20), согласно (1.18) получим

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = -\frac{3}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0. \quad (1.21)$$

◇ Выражения (1.20) можно было заменить равносильными:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}), \quad \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}), \quad \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}),$$

суммирование которых сразу дает требуемое равенство

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c} + \vec{b} - \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}) = 0.$$

Пример 1.7. Дан треугольник ABC , в котором точка M — точка пересечения медиан, а O — произвольная точка пространства. Доказать равенство

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \quad (1.22)$$

Решение. На сторонах треугольника и его медианах построим векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CA} и \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BE} , \overrightarrow{CF} (рис. 12). Из произвольной точки O пространства в вершины треугольника и точку M пересечения медиан проведём векторы \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} и \overrightarrow{OM} . Поскольку точка пересечения медиан отсекает от них отрезки AM , BM , CM , длины которых составляют $2/3$ длин медиан, это позволяет записать векторные равенства

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}, \quad \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}, \quad \overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}. \quad (1.23)$$

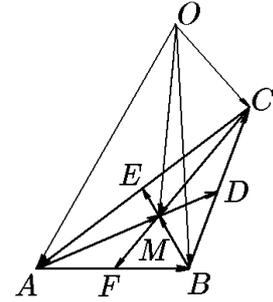


Рис. 12.

Из трех треугольников MOA , MOB , MOC для вектора \overrightarrow{OM} имеем три равенства

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}; \\ \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}; \\ \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}, \end{aligned}$$

которые с учётом (1.23) можно записать как

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}; \quad (1.24)$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}; \quad (1.25)$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}. \quad (1.26)$$

Просуммировав равенства (1.23), получим еще одно равенство

$$3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}). \quad (1.27)$$

В предыдущей задаче было показано, что сумма векторов — медиан треугольника равна нулю, т.е.

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0.$$

Тогда из (1.27) получим

$$3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

откуда и следует искомое равенство (1.22).

Пример 1.8. В пространстве заданы два произвольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Точки M и M_1 — точки пересечения их медиан. Доказать равенство

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}). \quad (1.28)$$

Решение. Для заданных треугольников построим векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{MM_1}$, соединяющие их вершины и точки пересечения их медиан (рис. 13).

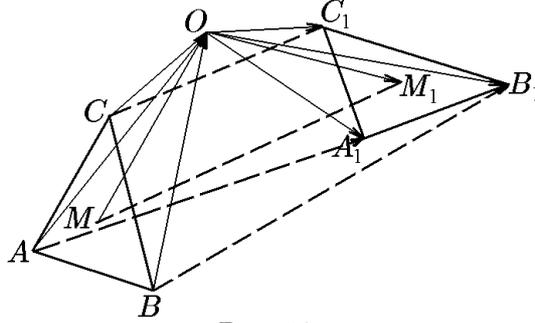


Рис. 13.

Далее выберем в пространстве произвольную точку O и построим две четвёрки вспомогательных векторов: \overrightarrow{AO} , \overrightarrow{BO} , \overrightarrow{CO} , \overrightarrow{MO} и $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OM_1}$. Согласно результатам предыдущей задачи, для первой четвёрки векторов имеем равенство

$$\overrightarrow{MO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO}) \quad (1.29)$$

и, соответственно, для второй четвёрки

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}). \quad (1.30)$$

Просуммировав (1.29) и (1.30), получим еще одно векторное равенство

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{3}[(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB_1}) + (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC_1})]. \quad (1.31)$$

Приняв во внимание, что

$$\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{MM_1}, \quad \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{AA_1}, \quad \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{BB_1}, \quad \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{CC_1},$$

из (1.31) получим требуемое равенство (1.28):

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}).$$

Пример 1.9. Точки E и F — середины сторон AD и BC произвольного четырёхугольника $ABCD$. Доказать, что

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}).$$

Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

Решение. Для заданного четырехугольника построим векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DC} и \overrightarrow{EF} (рис. 14,а) и вспомогательные векторы \overrightarrow{ED} , \overrightarrow{EA} ; \overrightarrow{CF} , \overrightarrow{BF} , которые, согласно условию задачи, связаны равенствами

$$\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{EA}, \quad \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{BF}. \quad (1.32)$$

Теперь для вектора \overrightarrow{EF} , согласно правилу многоугольника, можно записать два равенства

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}, \\ \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}, \end{aligned}$$

просуммировав которые, получим

$$2\overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BF}).$$

Отсюда с учётом (1.32) получим

$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

и, соответственно,

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}), \quad (1.33)$$

что и требовалось доказать.

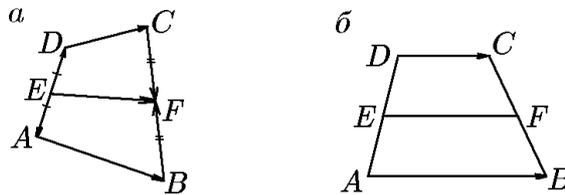


Рис. 14.

Перейдём теперь ко второй части задачи. Если четырехугольник $ABCD$ является трапецией, то векторы \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{DC} и \overrightarrow{EF} коллинеарны (рис. 14,б). Для коллинеарных векторов из векторного равенства (1.33) следует скалярное равенство для модулей

$$|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|),$$

эквивалентное теореме о средней линии трапеции.

1.3. Линейные зависимости между векторами

Выше выражением (1.16) мы ввели понятие линейной комбинации векторов. Оказывается, это понятие является основным для формулировки их линейной зависимости, которая, в свою очередь, является важной алгебраической характеристикой взаимного расположения векторов, входящих в линейную комбинацию.

◆ Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если их линейная комбинация обращается в нуль:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0, \quad (1.34)$$

при условии, что не все скалярные коэффициенты равны нулю, т.е. $\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$ (другими словами, если хотя бы один из них отличен от нуля). В противном случае система векторов называется *линейно зависимой*.

◇ Заметим, что если хотя бы один скаляр α_i отличен от нуля, то пропорциональный ему вектор можно выразить через другие векторы системы, что и определяет его зависимость от них. Если же все скаляры α_i равны нулю ($\alpha_i = 0$ для всех $i = \overline{1, n}$ или $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = 0$), то равенство (1.34) будет по-прежнему выполняться, но оно не позволит выразить какой-либо вектор системы через другие, что и составляет смысл линейной независимости векторов, входящих в линейную комбинацию.

Из определения линейной зависимости векторов вытекает несколько неожиданное, но легко объяснимое заключение: любая система векторов, содержащая нулевой вектор, является линейно зависимой. Действительно, для системы векторов $\vec{0}, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ всегда существует отличный от нуля скалярный коэффициент α_0 , при котором их линейная комбинация обращается в нуль:

$$\alpha_0 \vec{0} + \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0. \quad (1.35)$$

Перейдём теперь к геометрическим критериям линейной зависимости системы векторов, используя введённую выше их геометрическую классификацию. Действительно, из всего множества пространственных векторов мы выделили множество (точнее, подмножество) компланарных векторов. В свою очередь, из множества компланарных векторов было выделено множество коллинеарных векторов. С них мы и начнём.

Теорема 1.1. *Для линейной зависимости двух векторов \vec{a}_1 и \vec{a}_2 необходимо и достаточно, чтобы эти векторы были коллинеарными.*

Доказательство. Пусть \vec{a}_1 и \vec{a}_2 — два коллинеарных вектора, один из которых, например \vec{a}_1 , отличен от нуля. Тогда второй вектор \vec{a}_2 получится из него умножением на некоторый скаляр:

$$\vec{a}_2 = \alpha \vec{a}_1, \quad (1.36)$$

который равен

$$\alpha = \begin{cases} \frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|}, & \text{если } \vec{a}_1 \text{ и } \vec{a}_2 \text{ направлены одинаково;} \\ -\frac{|\vec{a}_2|}{|\vec{a}_1|}, & \text{если } \vec{a}_1 \text{ и } \vec{a}_2 \text{ направлены противоположно.} \end{cases}$$

Следовательно, \vec{a}_1 и \vec{a}_2 связаны линейной зависимостью:

$$1 \cdot \vec{a}_2 - \alpha \vec{a}_1 = 0. \quad (1.37)$$

Соотношение (1.37) остаётся справедливым, если один из векторов будет нулевым (например, $\vec{a}_1 = 0$).

Таким образом, два коллинеарных вектора всегда линейно зависимы.

Докажем обратное утверждение. Пусть теперь два вектора \vec{a}_1 и \vec{a}_2 линейно зависимы:

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = 0, \quad (1.38)$$

причём хотя бы один из скалярных коэффициентов, например α_2 , не равен нулю. Тогда мы получим

$$\vec{a}_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \vec{a}_1. \quad (1.39)$$

Это означает, что вектор \vec{a}_2 , являясь произведением вектора \vec{a}_1 на скаляр $-\alpha_1/\alpha_2$, коллинеарен вектору \vec{a}_1 . Таким образом, два линейно зависимых вектора всегда коллинеарны, т.е. теорема доказана.

Следствие 1.1.1. Система из двух компланарных, но не коллинеарных векторов является линейно независимой.

Действительно, линейная комбинация $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2$ может обращаться в нуль только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, что и означает линейную независимость векторов.

Теорема 1.2. Система трех векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

Доказательство. Пусть \vec{a}_1, \vec{a}_2 и \vec{a}_3 — три компланарных вектора, имеющих общее начало O , и векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 неколлинеарны (рис. 15). Через точку A_3 — конец третьего вектора \vec{a}_3 — проведём прямую, параллельную вектору \vec{a}_2 , до пересечения в точке A_1 с прямой, на которой лежит вектор \vec{a}_1 . Тогда

$$\vec{a}_3 = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_3}.$$

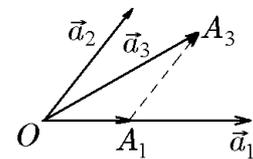


Рис. 15. (1.40)

Приняв во внимание, что векторы $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ коллинеарны векторам \vec{a}_1 и \vec{a}_2 соответственно, т.е.

$$\overrightarrow{OA_1} = \alpha_1\vec{a}_1, \quad \overrightarrow{A_1A_3} = \alpha_2\vec{a}_2,$$

из (1.40) получим соотношение линейной зависимости:

$$\vec{a}_3 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 \quad (1.41)$$

или

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + (-1)\vec{a}_3 = 0. \quad (1.41')$$

Три коллинеарных вектора также являются линейно зависимыми, тогда, не уменьшая общности, можно считать, что

$$\alpha_1\vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 + (-1)\vec{a}_3 = 0.$$

Таким образом, три компланарных вектора всегда линейно зависимы.

Докажем обратное утверждение. Пусть теперь три вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимы:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = 0, \quad (1.42)$$

причём хотя бы один скаляр, например α_3 , отличен от нуля. Тогда мы можем записать соотношение

$$\vec{a}_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\vec{a}_2, \quad (1.43)$$

из которого следует, что векторы $\vec{a}_3, -(\alpha_1/\alpha_3)\vec{a}_1$ и $-(\alpha_2/\alpha_3)\vec{a}_2$ образуют три стороны одного треугольника и, следовательно, лежат в одной плоскости.

Таким образом, три линейно зависимых вектора всегда компланарны.

Следствие 1.2.1. Система из трех пространственных, т.е. некопланарных, векторов является линейно независимой.

Действительно, в этом случае линейная комбинация трех векторов $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$ может обращаться в нуль только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, что и означает линейную независимость векторов.

Подводя итог, мы можем сказать, что установлена следующая закономерность.

Если задан один вектор \vec{a}_1 , то любой вектор \vec{a} , коллинеарный ему, может быть единственным образом представлен линейной комбинацией

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1. \quad (1.44)$$

Если заданы два неколлинеарных вектора \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , то они всегда компланарны и любой вектор \vec{a} , компланарный им, может быть единственным образом представлен линейной комбинацией

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2. \quad (1.45)$$

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. *Каждый геометрический вектор \vec{a} единственным образом представляется линейной комбинацией трех некопланарных векторов*

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3. \quad (1.46)$$

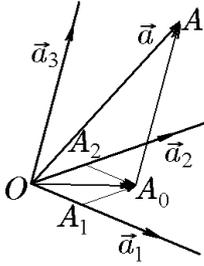


Рис. 16.

Доказательство. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ — система трех некопланарных векторов и \vec{a} — произвольный вектор. Поместим начала всех четырех векторов в точку O (рис. 16). Через точку A — конец вектора \vec{a} — проведём прямую, параллельную вектору \vec{a}_3 , до пересечения в точке A_0 с плоскостью векторов \vec{a}_1 и \vec{a}_2 . Полученный в результате вектор \vec{OA}_0 как компланарный векторам \vec{a}_1 и \vec{a}_2 можно представить линейной комбинацией

$$\vec{OA}_0 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2. \quad (1.47)$$

В свою очередь, вектор $\vec{A_0A}$ как вектор, компланарный \vec{a}_3 , можно записать

$$\vec{A_0A} = \alpha_3\vec{a}_3. \quad (1.48)$$

Теперь, приняв во внимание, что

$$\vec{a} = \vec{OA}_0 + \vec{A_0A},$$

с учётом (1.47) и (1.48) найдём выражение, совпадающее с (1.46):

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3.$$

Покажем теперь, что коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ определяются однозначно. Предположим противное, т.е. справедливо соотношение

$$\vec{a} = \beta_1\vec{a}_1 + \beta_2\vec{a}_2 + \beta_3\vec{a}_3, \quad (1.49)$$

где β_i отличаются от α_i . Тогда, вычтя (1.46) из (1.49), получим

$$0 = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{a}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{a}_2 + (\alpha_3 - \beta_3)\vec{a}_3. \quad (1.50)$$

Так как векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ не компланарны и, следовательно, линейно независимы, то все коэффициенты в (1.50) должны быть равны нулю, т.е. $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$, откуда и следует совпадение (1.49) с (1.46) и, следовательно, единственность коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

◆ Формулу (1.46):

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3$$

зачастую называют *разложением вектора \vec{a} по системе трех некопланарных* и, следовательно линейно независимых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

◇ Переписав формулу (1.46) в виде

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + (-1)\vec{a} = 0,$$

мы можем утверждать, что любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы. Ключевым в этом утверждении является слово «пространство». Под пространством здесь понимается трехмерное пространство, соответствующее нашим понятиям: длина ширина, высота.

Абстрагируясь от этого пространства и рассуждая формально, мы, вообще говоря, можем рассмотреть четырехмерную четвёрку линейно независимых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$, и тогда любой пятый вектор из этого пространства будет их линейной комбинацией:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 + \alpha_4 \vec{a}_4.$$

Дальнейшее обобщение этого процесса является предметом изучения уже не векторной алгебры, а линейной (см., например, [8]).

Пример 1.10. Доказать, что для любых заданных векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$ компланарны.

Решение. 1-й способ. В данном конкретном случае легко увидеть, что из тройки векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$ сумма первого и третьего дает второй:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{c} - \vec{a}) = (\vec{b} + \vec{c}).$$

Это означает, что эта тройка векторов представляет треугольник ABC и, следовательно, векторы компланарны.

2-й способ. Если векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} компланарны, то векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$, являясь их линейными комбинациями, также компланарны. Рассмотрим теперь случай, когда $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некопланарны. Для тройки векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$ составим их линейную комбинацию и приравняем ее к нулю:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta(\vec{b} + \vec{c}) + \gamma(\vec{c} - \vec{a}) = 0. \quad (1.51)$$

Если, согласно определению, существуют отличные от нуля коэффициенты α, β, γ , которые обращают линейную комбинацию в нуль, то эта тройка векторов является линейно зависимой и, следовательно, компланарной.

Чтобы найти α, β, γ , преобразуем (1.51) к виду

$$(\alpha - \gamma)\vec{a} + (\alpha + \beta)\vec{b} + (\beta + \gamma)\vec{c} = 0$$

и потребуем, в силу некопланарности векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, выполнения условий

$$\begin{aligned} \alpha - \gamma &= 0, \\ \alpha + \beta &= 0, \\ \beta + \gamma &= 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Поскольку определитель однородной системы (1.52) равен нулю:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

то она имеет нетривиальные решения

$$\alpha = -\beta, \quad \beta, \quad \gamma = -\beta$$

и, в частности

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 1. \quad (1.53)$$

Это и означает, что тройка векторов $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{c} - \vec{a}$ компланарна. Подставив в качестве проверки (1.53) в (1.51), найдём

$$(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{a} + \vec{b} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{c} - \vec{a} = 0.$$

Пример 1.11. Даны три некопланарных вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Вычислить значения λ , при которых векторы $\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \lambda\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}$ компланарны.

Решение. Для исследуемой тройки векторов составим линейную комбинацию и приравняем её к нулю:

$$\alpha(\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \beta(\vec{a} + \lambda\vec{b} + \vec{c}) + \gamma(\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}) = 0. \quad (1.54)$$

Если, согласно определению, существуют отличные от нуля коэффициенты α , β , γ , которые обращают (1.54) в нуль, то исследуемая тройка векторов является линейно зависимой и, следовательно, компланарной.

Чтобы найти α , β , γ , преобразуем (1.54) к виду

$$(\lambda\alpha + \beta + \gamma)\vec{a} + (\alpha + \lambda\beta + \gamma)\vec{b} + (\alpha + \beta + \lambda\gamma)\vec{c} = 0.$$

В силу некопланарности векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} полученное равенство может выполняться только при условии

$$\begin{aligned} \lambda\alpha + \beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + \lambda\beta + \gamma &= 0, \\ \alpha + \beta + \lambda\gamma &= 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Чтобы существовали нетривиальные решения α , β , γ однородной системы (1.55) мы должны потребовать равенства нулю её определителя:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} = 0. \quad (1.56)$$

Раскрыв (1.56), получим уравнение для λ :

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} &= \lambda(\lambda^2 - 1) - (\lambda - 1) + (1 - \lambda) = (\lambda - 1)[\lambda(\lambda + 1) - 2] = \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0, \end{aligned}$$

имеющее два решения: $\lambda = 1$ и $\lambda = -2$.

При $\lambda = 1$ исследуемая тройка имеет вид

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

т.е. вырождается в один вектор.

При $\lambda = -2$ имеем векторы

$$-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c},$$

сумма которых равна нулю:

$$(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) = 0,$$

что и подтверждает их компланарность.

Пример 1.12. Даны три некопланарных вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Вычислить значения λ и μ , при которых векторы $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \vec{c}$ и $\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ коллинеарны.

Решение. Для пары исследуемых векторов составим линейную комбинацию и приравняем ее к нулю:

$$\alpha(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \vec{c}) + \beta(\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}) = 0. \quad (1.57)$$

Если, согласно определению, существуют отличные от нуля коэффициенты α и β , обращающие (1.57) в нуль, то эта пара векторов является линейно зависимой и, следовательно, коллинеарной.

Чтобы найти α и β , преобразуем (1.57) к виду

$$(\lambda\alpha + \beta)\vec{a} + (\mu\alpha + \lambda\beta)\vec{b} + (\alpha + \mu\beta)\vec{c} = 0.$$

В силу некопланарности векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} полученное равенство может выполняться только при условиях

$$\begin{aligned} \lambda\alpha + \beta &= 0, \\ \mu\alpha + \lambda\beta &= 0, \\ \alpha + \mu\beta &= 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Для существования нетривиальных решений α и β однородной системы (1.58) ранг ее матрицы должен быть равен единице:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ \mu & \lambda \\ 1 & \mu \end{pmatrix} = 1.$$

Это возможно при $\lambda = 1$ и $\mu = 1$.

1.4. Проекция вектора на ось

♦ *Осью* S называется прямая с заданным на ней вектором \vec{s} . Направление, задаваемое вектором \vec{s} , называется направлением оси S . Орт \vec{s}^0 вектора \vec{s} называют также *орт*ом оси.

♦ *Проекцией* (от латинского — бросать вперед, выбрасывать) точки M на ось S называется точка $M_1 \in S$, являющаяся основанием перпендикуляра, опущенного из точки M на ось S .

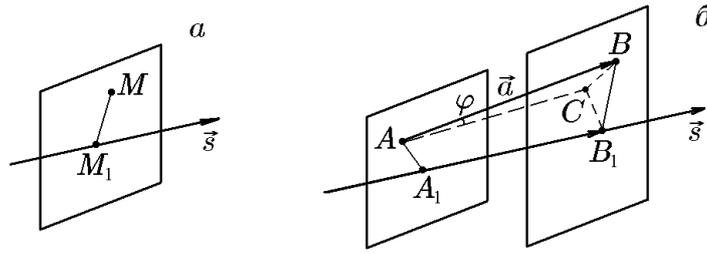


Рис. 17.

В некоторых приложениях удобнее использовать другую формулировку этого определения.

♦ *Проекцией* точки M на ось S называется точка M_1 пересечения оси S с проектирующей плоскостью, т.е. плоскостью, проходящей через заданную точку M перпендикулярно оси S (рис. 17,а).

♦ *Векторной проекцией* вектора \overrightarrow{AB} на ось S называется вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$, началом и концом которого являются точки A_1 и B_1 — проекции точек, соответственно, A и B на ось S (рис. 17,б). Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ коллинеарен вектору \vec{s} и обозначается

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}_S = \overrightarrow{\text{пр}}_S \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\text{пр}}_{\vec{s}} \overrightarrow{AB}. \quad (1.59)$$

♦ *Скалярной проекцией* (или просто проекцией) вектора \overrightarrow{AB} на ось S называется скаляр, абсолютная величина которого равна модулю векторной проекции того же вектора на ту же ось. Проекция считается положительной, если направление векторной проекции совпадает с направлением оси, и отрицательной в противном случае. Для скалярной проекции используется обозначение

$$\text{пр}_S \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|_S = \begin{cases} |\overrightarrow{A_1B_1}|, & \overrightarrow{A_1B_1} \uparrow \vec{s}; \\ -|\overrightarrow{A_1B_1}|, & \overrightarrow{A_1B_1} \downarrow \vec{s}. \end{cases} \quad (1.60)$$

Если \vec{s}^0 — орт оси S , то векторную проекцию вектора \overrightarrow{AB} можно записать через скалярную:

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{\text{пр}}_S \overrightarrow{AB} = \vec{s}^0 \text{пр}_S \overrightarrow{AB} = \vec{s}^0 |\overrightarrow{AB}|_S. \quad (1.61)$$

Проекции вектора \vec{a} на ось S обладают следующими свойствами.

Свойство 1. Проекция вектора \vec{a} на ось S равна

$$\text{пр}_S \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi, \quad (1.62)$$

где φ угол между вектором \vec{a} и осью S , т.е. $\varphi = \widehat{\vec{a}\vec{s}}$.

Доказательство этого свойства очевидно из простейших геометрических построений на рис. рис. 17,б. Из формулы (1.62) вытекают необходимые в дальнейшем следствия.

Следствие 1.1. Равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же ось.

Следствие 1.2. Проекции двух взаимно противоположных векторов на одну и ту же ось различаются только знаком:

$$\text{пр}_S(-\vec{a}) = -\text{пр}_S \vec{a}, \quad (1.63)$$

поскольку $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$.

Следствие 1.3. Векторная проекция вектора \vec{a} на ось S определяется соотношением

$$\vec{\text{пр}}_S \vec{a} = \vec{s}^0 |\vec{a}| \cos \varphi. \quad (1.64)$$

Свойство 2 (линейности). Проекция линейной комбинации векторов равна той же линейной комбинации их проекций:

$$\text{пр}_S(\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n) = \alpha_1 \text{пр}_S \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \text{пр}_S \vec{a}_n. \quad (1.65)$$

Доказательство этого свойства очевидным образом вытекает из свойства 1 и его следствий.

Формула (1.65) легко обобщается на линейную комбинацию векторных проекций:

$$\begin{aligned} \vec{\text{пр}}_S(\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n) &= \alpha_1 \vec{\text{пр}}_S \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{\text{пр}}_S \vec{a}_n = \\ &= \vec{s}^0 (\alpha_1 \text{пр}_S \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \text{пр}_S \vec{a}_n). \end{aligned} \quad (1.66)$$

1.5. Базис и координаты

Выше (см. теорему 1.3) мы определили формулу разложения любого пространственного вектора \vec{a} по трём некомпланарным, т.е. линейно независимым, векторам:

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2, \quad (1.67)$$

причём коэффициенты разложения x_1, x_2, x_3 определяются однозначно. Соотношение (1.68) устанавливает взаимно однозначное соответствие между упорядоченной тройкой чисел x_1, x_2, x_3 и вектором \vec{a} при фиксированной тройке векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Благодаря этому появляется возможность использовать в векторном исчислении аналитические методы, оперирующие не с векторами, а с заменяющими их тройками чисел.

Обратимся к более детальному рассмотрению этого вопроса.

◆ *Базисом* (от греческого — основание) в множестве геометрических векторов называется упорядоченная тройка линейно независимых (некомпланарных) векторов $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

◆ Числа x_1, x_2, x_3 называются *координатами* вектора \vec{a} в базисе $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, слагаемые $x_1 \vec{e}_1, x_2 \vec{e}_2, x_3 \vec{e}_3$ — *компонентами* вектора \vec{a} в этом базисе, а формула (1.67) — формулой разложения вектора \vec{a} в заданном базисе \mathcal{B} .

Аналогичные определения вводятся для компланарных и коллинеарных векторов.

◆ Упорядоченная пара \vec{e}_1, \vec{e}_2 неколлинеарных векторов называется *базисом* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ в множестве геометрических векторов, компланарных некоторой плоскости.

Каждый такой вектор характеризуется двумя координатами x_1 и x_2 , задающими разложение

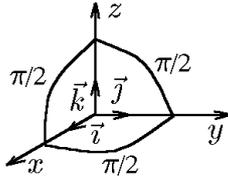
$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2. \quad (1.68)$$

◆ И, наконец, всякий ненулевой вектор \vec{e} образует базис $\mathcal{B} = (\vec{e})$ в множестве всех геометрических векторов, коллинеарных некоторому направлению. Каждый вектор из этого множества характеризуется одной координатой x , задающей его представление в базисе \mathcal{B} :

$$\vec{a} = x \vec{e}. \quad (1.69)$$

◆ Число базисных векторов в базисе \mathcal{B} принято называть его *размерностью*.

◆ Базис $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ называется *ортогональным* (*прямоугольным*), если базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ попарно перпендикулярны. Ортогональный базис называется *ортонормированным*, или *декартовым*, если его базисные векторы



имеют единичную длину. В этом случае приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 = \vec{i}, \quad \vec{e}_2 = \vec{j}, \quad \vec{e}_3 = \vec{k}; \\ |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \quad \widehat{\vec{i}, \vec{j}} = \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{\vec{i}, \vec{k}} = \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{\vec{j}, \vec{k}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Тогда произвольный вектор \vec{a} можно представить как

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты вектора \vec{a} .

1.6. Аффинный репер и декартова система координат

Как известно, элементарная геометрия рассматривает плоские и пространственные фигуры как геометрическое место точек. Геометрическое место точек может быть задано следующим образом.

Выделим в пространстве некоторую точку O и будем считать ее общим началом базисных векторов $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Такую совокупность принято называть *аффинным репером* пространства. Теперь положение точки M в пространстве можно определить связанным вектором \overrightarrow{OM} , начало которого всегда расположено в точке O , а конец — в точке M . Такой вектор получил название *радиус-вектора*, которое подчеркивает тот факт, что он является связанным. Радиус-вектор \overrightarrow{OM} , как и любой другой вектор пространства, может быть разложен по базису $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, который входит в состав репера:

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \quad (1.71)$$

Теперь координаты радиус-вектора x_1, x_2, x_3 можно считать и координатами точки M в заданном репере.

Таким образом, каждой точке пространства соответствует определенная тройка чисел — координат и, наоборот, каждой тройке чисел — координат соответствует определенная точка. В этом и заключается основной принцип аналитической геометрии.

Подводя итог, можно сказать, что в пространстве задана аффинная система координат, если в нём задан аффинный репер $\{O, \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\}$. Точка O при этом называется *началом аффинной системы координат*.

◇ Термин «аффинный» (от греческого — родственный) означает, что в пространстве присутствуют одновременно «родственные» объекты двух видов: векторы и точки. Этот термин для краткости зачастую просто опускают.

Для удобства геометрических построений через начало системы координат — точку O — в направлении базисных векторов проводят три оси. Эти оси называются *координатными осями* x, y, z системы координат $\{O, \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\} = Oxuz$. При необходимости через каждую пару координатных осей проводят плоскости, называемые *координатными* и обозначаемые xOy, xOz, yOz .

Если в системе координат ее базис является ортогональным, то ее называют *ортогональной* (*прямоугольной* или *декартовой*). Если векторы ортогонального базиса являются единичными, то для них, как уже упоминалось, вводятся специальные обозначения: $\vec{e}_1 = \vec{i}, \vec{e}_2 = \vec{j}, \vec{e}_3 = \vec{k}; |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$, а соответствующие им координатные оси называются: ось Ox — *осью абсцисс*, ось Oy — *осью ординат*, ось Oz — *осью аппликат*.

◇ Можно заметить, что перевод этих названий с латинского образно представляет нумерацию координатных осей. Так, абсцисса означает «отрезанная»,

т.е. «обычно первая». Ордината — это, по сути, «координата», лишённая приставки «ко», что в результате означает «расположенная в порядке», т.е. вторая. И, наконец, аппликата — буквально «приложенная» (к двум первым) — третья.

Поместим теперь начало произвольного вектора \vec{a} в начало системы координат O с ортонормированным базисом $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (рис. 18). Согласно (1.71), его разложение в этом базисе будет иметь вид

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad (1.72)$$

где a_x, a_y, a_z — соответствующие координаты.

Выясним их геометрический смысл в системе координат $\{O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})\}$. Как следует из рис. 18, вектор \vec{a} можно представить суммой следующих трех векторных проекций:

$$\vec{a} = \text{пр}_{\vec{i}} \vec{a} + \text{пр}_{\vec{j}} \vec{a} + \text{пр}_{\vec{k}} \vec{a}. \quad (1.73)$$

Но каждая векторная проекция, согласно (1.66), равна произведению орта соответствующей оси на скалярную проекцию вектора \vec{a} на эту ось. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{пр}_{\vec{i}} \vec{a} &= \vec{i} \text{пр}_{\vec{i}} \vec{a} = OM_x \vec{i}, \\ \text{пр}_{\vec{j}} \vec{a} &= \vec{j} \text{пр}_{\vec{j}} \vec{a} = OM_y \vec{j}, \\ \text{пр}_{\vec{k}} \vec{a} &= \vec{k} \text{пр}_{\vec{k}} \vec{a} = OM_z \vec{k} \end{aligned} \quad (1.74)$$

и соответственно

$$\vec{a} = \vec{i} \text{пр}_{\vec{i}} \vec{a} + \vec{j} \text{пр}_{\vec{j}} \vec{a} + \vec{k} \text{пр}_{\vec{k}} \vec{a}. \quad (1.75)$$

Из сравнения (1.74) и (1.75) можно заключить, что координаты вектора \vec{a} в декартовой системе координат совпадают с его проекциями на базисные орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$a_x = \text{пр}_{\vec{i}} \vec{a}, \quad a_y = \text{пр}_{\vec{j}} \vec{a}, \quad a_z = \text{пр}_{\vec{k}} \vec{a}. \quad (1.76)$$

Формула (1.76) позволяет найти модуль вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (1.77)$$

а также значения углов, которые вектор \vec{a} образует с координатными осями. Действительно, согласно (1.76) и (1.64), имеем

$$\begin{aligned} a_x &= |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{i}}) = |\vec{a}| \cos \alpha, \\ a_y &= |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{j}}) = |\vec{a}| \cos \beta, \\ a_z &= |\vec{a}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = |\vec{a}| \cos \gamma, \end{aligned} \quad (1.78)$$

откуда

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

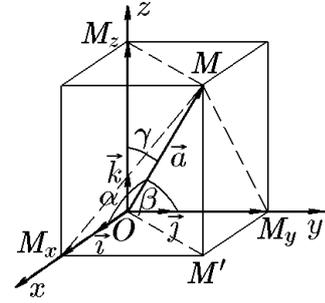


Рис. 18.

Косинусы, определяемые формулами (1.79), называются *направляющими косинусами* вектора \vec{a} . Легко проверить, что они связаны равенством

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = 1. \quad (1.80)$$

Таким образом, зная координаты вектора, по формулам (1.77) и (1.79) всегда можно найти его модуль и направление. Для удобства зачастую вместо полной записи (1.72) используется сокращенная запись в виде $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ или $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Имея координатное представление вектора и учитывая, что линейные операции над векторами сводятся к соответствующим операциям над проекциями этих векторов, можем записать

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = (\alpha a_x + \beta b_x) \vec{i} + (\alpha a_y + \beta b_y) \vec{j} + (\alpha a_z + \beta b_z) \vec{k} \quad (1.81)$$

или

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = (\alpha a_x + \beta b_x, \alpha a_y + \beta b_y, \alpha a_z + \beta b_z).$$

Формула (1.81) представляет собой координатную форму линейных операций над векторами.

Рассмотрим теперь другие объекты пространства — точки. Выберем произвольную точку M . Согласно определению, ее положение в заданной системе координат определяется координатами ее радиус-вектора \overrightarrow{OM} , который принято обозначать еще как \vec{r} , т.е. $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Если проекции радиус-вектора \vec{r} в декартовой системе координат $Oxyz$ обозначить через x, y, z , то его разложение будет иметь вид

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.82)$$

и, следовательно, тройка координат x, y, z будет представлять собой координаты точки M . Это обозначают как $M(x, y, z)$ или $M(\vec{r})$.

2. Простейшие задачи векторной алгебры

2.1. Длина вектора и расстояние между точками

Пример 2.1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, если известны координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Вычислить $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ и расстояние между точками M_1 и M_2 .

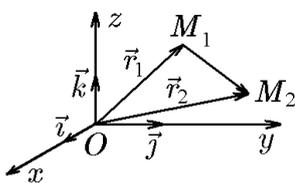


Рис. 19.

Решение. Обозначим через \vec{r}_1 и \vec{r}_2 радиус-векторы точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, соответственно. Тогда

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$

Из рис. 19 следует, что

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$

откуда с учётом (1.81) запишем

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}. \quad (2.1)$$

Определив из (2.1)

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \quad (2.2)$$

получим формулу для вычисления расстояния между точками M_1 и M_2 .

Пример 2.2. Векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} заданы координатами своих концов: $A(1, -3, -4)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(2, -4, -6)$, $D(1, 1, 1)$. Найти $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

Решение. Запишем векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} через проекции, учитывая, что вектор записывается через координаты точек, согласно (1.81):

$$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}, \quad \overrightarrow{CD} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Операции, осуществляемые над векторами, производятся и с их координатами, следовательно,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= -3\vec{i} + 8\vec{j} + 13\vec{k}; \\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} &= -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}. \end{aligned}$$

2.2. Направляющие косинусы

Направляющие косинусы вектора — это косинусы углов, которые он образует с осями координат. Если вектор \vec{a} задан своим разложением

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

то $a_x = \text{пр}_x \vec{a} = a \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{x}})$, т.е.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{x}}) = \frac{a_x}{a}; \\ \cos \beta &= \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{y}}) = \frac{a_y}{a}; \\ \cos \gamma &= \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{z}}) = \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Для направляющих косинусов справедливо соотношение

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Пример 2.3. Вектор \vec{a} задан координатами своих концов A и B : $A(2, 1, -4)$, $B(1, 3, 2)$. Найти длину вектора \vec{a} и его направляющие косинусы.

Решение. По формуле (2.1) найдём

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Поскольку $a_x = -1$, $a_y = 2$, $a_z = 6$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{41}.$$

Найдём направляющие косинусы по формулам (1.79):

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = -\frac{1}{\sqrt{41}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{41}}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{6}{\sqrt{41}}.$$

2.3. Деление отрезка в данном отношении

На прямой ℓ выберем две точки M_1 и M_2 , задающие направленный отрезок, т.е. вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. На этой же прямой выберем третью точку M и рассмотрим два направленных отрезка: $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ (рис. 20). В силу коллинеарности этих векторов найдётся действительное число λ , такое что

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{MM_2}. \quad (2.4)$$

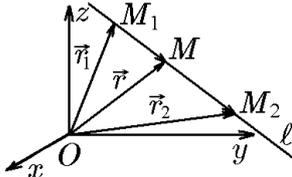


Рис. 20.

◆ Число λ называется *отношением*, в котором точка M делит направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$. Оно положительно, если точка M находится внутри отрезка M_1M_2 , и отрицательно, если точка M находится вне его.

◇ Очевидно, что отношение $\lambda = 0$ соответствует совпадению точки M с точкой M_1 , при этом при $\lambda \rightarrow +0$ точка M стремится к M_1 изнутри отрезка M_1M_2 , а при $\lambda \rightarrow -0$ — извне его (рис. 21).

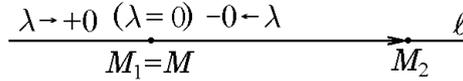


Рис. 21.

В свою очередь, отношение $|\lambda| = \infty$ соответствует совпадению точки M с точкой M_2 , при этом при $\lambda \rightarrow +\infty$ точка M стремится к M_2 изнутри отрезка M_1M_2 , а при $\lambda \rightarrow -\infty$ — извне его (рис. 22).

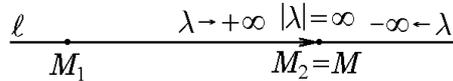


Рис. 22.

И, наконец, отношение $\lambda = -1$ ($\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ равны и разнонаправлены) соответствует бесконечно удаленной точке M , при этом в случае $\lambda \rightarrow -1 + 0$ точка M удаляется по прямой ℓ вне отрезка за точку M_1 , а при $\lambda \rightarrow -1 - 0$ — за точку M_2 (рис. 23).



Рис. 23.

Пример 2.4. На прямой ℓ , содержащей направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$, указать значения отношения λ , соответствующее положению точки M (не совпадающей с M_1 и M_2).

Решение. С учётом рис. 21–23, получим (см. рис. 24):

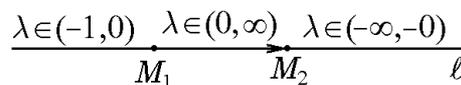


Рис. 24

Из соотношения (2.4) следует, что, зная координаты точек M_1 и M_2 , а также отношение λ , в котором точка M делит направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$, можно, исходя из рис. 20, найти координаты точки M .

Действительно, пусть точке M соответствует радиус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, аналогично точке M_1 радиус-вектор $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OM_1} = (x_1, y_1, z_1)$ и точке M_2 радиус-вектор $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OM_2} = (x_2, y_2, z_2)$. Тогда

$$\overrightarrow{M_1M} = \vec{r} - \vec{r}_1, \quad \overrightarrow{MM_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}$$

и, следовательно,

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}),$$

откуда

$$(1 + \lambda)\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2$$

и, стало быть,

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1 + \lambda}. \quad (2.5)$$

Формула (2.5) дает решение задачи в векторной форме. Переход от векторной формы к покоординатной определяет координаты точки $M(x, y, z)$:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (2.6)$$

◇ Из формулы (2.6) очевидным образом вытекает схема, изображенная на рис. 24.

Пример 2.5. Указать особенности взаимного расположения точек M_1, M_2, M_3 , соответствующих отношениям: а) $\lambda = 1$; б) $\lambda = -1/2$; в) $\lambda = -2$.

Решение. а) $\lambda = 1$. Из определения (2.5) (см. рис. 25) имеем $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{MM_2}$.

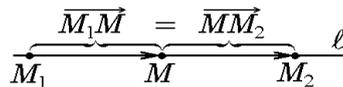


Рис. 25.

Отсюда следует, что точка M делит отрезок M_1M_2 пополам. В координатной форме (2.6) соответственно запишем

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \quad (2.7)$$

б) $\lambda = -1/2$. Из определения (2.5) (см. рис. 26) имеем $\overrightarrow{M_1M} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{MM_2}$. Отсюда следует, что точка M_1 находится посередине между точками M и M_2 .

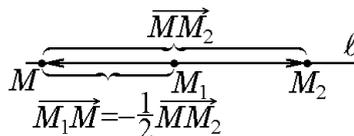


Рис. 26.

Координаты точки M определяются по формулам (2.6):

$$x = \frac{x_1 - x_2/2}{1 - 1/2} = 2x_1 - x_2, \quad y = 2y_1 - y_2, \quad z = 2z_1 - z_2.$$

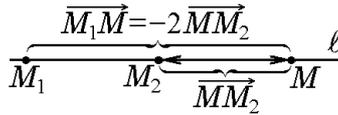


Рис. 27.

в) $\lambda = -2$. Аналогично двум предыдущим случаям (см. рис. 27) имеем $\overrightarrow{M_1M} = -2\overrightarrow{MM_2}$. Точка M_2 находится посередине между точками M и M_1 . Координаты точки M определяются по формулам (2.6):

$$x = \frac{x_1 - 2x_2}{1 - 2} = 2x_2 - x_1, \quad y = 2y_2 - y_1, \quad z = 2z_2 - z_1.$$

Таким образом, как следует из геометрических построений (и формул (2.5), (2.6)), во всех трех случаях точки M_1, M_2, M равноудалены друг от друга с той лишь разницей, что в первом случае в середине располагается точка M , во втором — точка M_1 и в третьем — точка M_2 .

Пример 2.6. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -1/2$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 3$. Выразить векторы $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

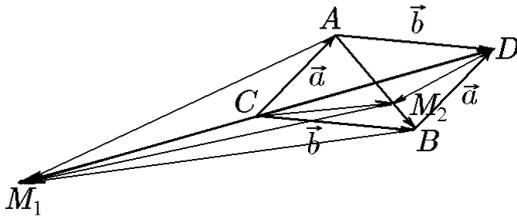


Рис. 28.

Решение. Диагонали \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{AB} (рис. 28), согласно определению суммы и разности векторов, находятся как

$$\overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Согласно условию задачи,

$$\overrightarrow{CM_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{M_1D}, \quad \overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{M_1D} = \overrightarrow{CD},$$

откуда

$$\overrightarrow{CM_1} - 2\overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{CM_1} = -(\vec{a} + \vec{b})$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM_1} &= \overrightarrow{CM_1} - \overrightarrow{CA} = -(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a} = -2\vec{a} - \vec{b}; \\ \overrightarrow{BM_1} &= \overrightarrow{CM_1} - \overrightarrow{CB} = -(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}. \end{aligned}$$

Далее, согласно условию задачи,

$$\overrightarrow{AM_2} = 3\overrightarrow{M_2B}, \quad \overrightarrow{AM_2} + \overrightarrow{M_2B} = \overrightarrow{AB},$$

откуда

$$3\overrightarrow{M_2B} + \overrightarrow{M_2B} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{M_2B} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a})$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM_2} &= \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{M_2B} = \vec{b} - \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}; \\ \overrightarrow{DM_2} &= -\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{M_2B} = -\vec{a} - \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b}. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{CM_1} + \overrightarrow{CM_2} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{5}{4}\vec{a} + \frac{7}{4}\vec{b}.$$

Пример 2.7. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором вершины A, B, C имеют координаты: $A(3, 4), C(2, 1), B(6, 2)$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -1/2$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 3$. Найти векторы $\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{BM_1}, \overrightarrow{CM_2}, \overrightarrow{DM_2}, \overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение. Условия задачи очень близки к условиям предыдущей задачи. Определив векторы

$$\overrightarrow{CA} = \vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}, \quad \overrightarrow{CB} = \vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j},$$

по формулам, полученным в предыдущей задаче, найдём искомые векторы. Можно, однако, поступить иначе. Найдём координаты четвёртой вершины параллелограмма — точки D , которые совпадают с координатами радиус-вектора \overrightarrow{OD} :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (2\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} + 3\vec{j}) + (4\vec{i} + \vec{j}) = 7\vec{i} + 5\vec{j}.$$

Таким образом, координаты точки $D(7, 5)$. Теперь по формулам (2.6) деления отрезка в данном соотношении, по координатам точек $C(2, 1)$ и $D(7, 5)$ найдём координаты точки $M_1(x_1, y_1)$:

$$x_1 = \frac{2 - \frac{1}{2} \cdot 7}{1/2} = -3, \quad y_1 = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot 5}{1/2} = -3,$$

т.е. $M_1(-3, -3)$.

По координатам точек $A(3, 4), B(6, 2)$ и формулам (2.6) найдём координаты точки $M_2(x_2, y_2)$:

$$x_2 = \frac{3 + 3 \cdot 6}{4} = \frac{21}{4} = 5,25, \quad y_2 = \frac{4 + 3 \cdot 2}{4} = \frac{10}{4} = 2,5,$$

т.е. $M_2(21/4; 5/2)$. Теперь без дополнительных геометрических построений найдём искомые векторы:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM_1} &= (-6, -7), & \overrightarrow{BM_1} &= (-9, -2), & \overrightarrow{CM_2} &= (13/4; 3/2), \\ \overrightarrow{DM_2} &= (-7/4; -5/2), & \overrightarrow{M_1M_2} &= (33/4; 11/2). \end{aligned}$$

3. Преобразование аффинных систем координат

3.1. Переход от одного базиса к другому

Согласно определению, задание аффинной системы координат связано с выбором ее репера: $(O, \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$. Изменяя положение точки O и переходя от одного базиса к другому, мы можем получить различные системы координат, выбрав из них ту, которая наиболее удобна для решения конкретной задачи.

Начнём с исследования зависимости между различными базисами пространства и между координатами векторов в различных базисах.

Пусть

$$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \quad \mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3) \quad (3.1)$$

— два базиса векторного пространства.

Представив каждый вектор базиса \mathcal{B}' в виде линейной комбинации векторов базиса \mathcal{B} , получим

$$\vec{e}'_1 = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3;$$

$$\begin{aligned}\vec{e}'_2 &= c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3; \\ \vec{e}'_3 &= c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Поскольку ранее мы определили операцию умножения вектора на число: $\alpha\vec{a} = \vec{a}\alpha$, то это позволяет распространить определение произведения двух матриц на случай, когда элементами одной из матриц являются векторы. Поэтому формулы (3.2) можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.\quad (3.3)$$

Транспонирование соотношения (3.3) дает

$$(\vec{e}'_1 \quad \vec{e}'_2 \quad \vec{e}'_3) = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}\quad (3.4)$$

или

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}C.\quad (3.5)$$

◆ Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей перехода от старого базиса $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ к новому базису $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$* .

Из формулы (3.5) вытекают следующие свойства преобразований базисов.

Свойство 1 (последовательные преобразования). Если C — матрица перехода от базиса \mathcal{B} к базису \mathcal{B}' , а D — матрица перехода от базиса \mathcal{B}' к базису \mathcal{B}'' , то матрица CD является матрицей перехода от базиса \mathcal{B} к базису \mathcal{B}'' .

Действительно, последовательное применение формулы (3.5) дает

$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B}'D = (\mathcal{B}C)D,$$

а свойство ассоциативности умножения матриц позволяет записать

$$\mathcal{B}'' = (\mathcal{B}C)D = \mathcal{B}(CD),\quad (3.6)$$

что и требовалось доказать.

Свойство 2. Если C — матрица перехода от базиса \mathcal{B} к базису \mathcal{B}' , то матрицей перехода от базиса \mathcal{B}' к базису \mathcal{B} является обратная матрица C^{-1} : $\mathcal{B} = \mathcal{B}'C^{-1}$.

Действительно, полагая в (3.6) $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}$, найдём $CD = \mathbb{I}$, откуда $D = C^{-1}$, т.е. $\mathcal{B} = \mathcal{B}'C^{-1}$.

Свойство 3. Соотношение (3.5) определяет переход от одного базиса к другому тогда и только тогда, когда матрица C не вырождена.

В самом деле, невырожденность матрицы перехода C вытекает из свойства 2, обуславливающего существование матрицы C^{-1} . Пусть теперь $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — базис и C — невырожденная матрица. Тогда векторы $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$, получаемые по формулам (3.5), линейно независимы, так как в противном случае были бы линейно зависимыми столбцы невырожденной матрицы C , что невозможно в силу $\det C \neq 0$.

Свойство 4. Диагональная матрица перехода

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

соответствует базису $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$, каждый вектор которого получен из базиса $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ умножением на число $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, соответственно.

Действительно, согласно (3.3) и (3.7), имеем

$$(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \vec{e}'_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) = (\lambda_1 \vec{e}_1 \ \lambda_2 \vec{e}_2 \ \lambda_3 \vec{e}_3). \quad (3.8)$$

◆ При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ матрица перехода (3.7) является единичной и называется *матрицей тождественного преобразования*.

◆ При $\lambda_1 = 1/|\vec{e}'_1|, \lambda_2 = 1/|\vec{e}'_2|, \lambda_3 = 1/|\vec{e}'_3|$ матрица перехода примет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1/|\vec{e}'_1| & 0 & 0 \\ 0 & 1/|\vec{e}'_2| & 0 \\ 0 & 0 & 1/|\vec{e}'_3| \end{pmatrix}$$

и называется *нормировочной*, поскольку базисные векторы становятся единичными:

$$(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \vec{e}'_3) = \begin{pmatrix} 1/|\vec{e}'_1| & 0 & 0 \\ 0 & 1/|\vec{e}'_2| & 0 \\ 0 & 0 & 1/|\vec{e}'_3| \end{pmatrix} (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) = (\vec{e}_1/|\vec{e}'_1| \ \vec{e}_2/|\vec{e}'_2| \ \vec{e}_3/|\vec{e}'_3|). \quad (3.9)$$

3.2. Преобразование координат вектора при изменении базиса

Пусть $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ — два базиса, связанные матрицей перехода C :

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}C, \quad (3.10)$$

и пусть вектор \vec{r} в базисе \mathcal{B} имеет координаты (x_1, x_2, x_3) , а в базисе \mathcal{B}' — координаты (x'_1, x'_2, x'_3) . В матричной форме это означает, что

$$\vec{r} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \vec{e}'_3) \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Равенство (3.11) с учётом (3.10) можно записать как

$$(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

Перейдя от равенства векторов к равенству их координат, получим

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

или

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Поскольку матрица, обратная к диагональной матрице (3.7), имеет вид

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{pmatrix},$$

то, согласно (3.13), имеем

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1/\lambda_1 \\ x_2/\lambda_2 \\ x_3/\lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Пример 3.1. Найти координаты вектора \vec{r} в базисе \mathcal{B}' :

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3; \\ \vec{e}'_2 &= 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2; \\ \vec{e}'_3 &= -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \end{aligned} \quad (3.15)$$

если в базисе $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ он имеет координаты $\vec{r} = (6, -1, 3)$. Выписать матрицу перехода от базиса \mathcal{B}' к базису \mathcal{B} .

Решение. Запишем (3.15) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Теперь координаты вектора $\vec{r} = (x'_1, x'_2, x'_3)$ в базисе \mathcal{B}' найдутся, согласно (3.13), как

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Поскольку

$$\det C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

а союзная матрица

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix},$$

то

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \tilde{C}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Подставив (3.18) в (3.17), получим

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти матрицу перехода от \mathcal{B}' к \mathcal{B} , воспользуемся свойством 2: $\mathcal{B} = \mathcal{B}'C^{-1}$, откуда

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = (C^{-1})^\top \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}'_1 - \vec{e}'_2 - 2\vec{e}'_3; \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2 - 4\vec{e}'_3; \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_2 + 3\vec{e}'_3. \end{aligned}$$

3.3. Переход от одной аффинной системы координат к другой

Пусть в пространстве заданы две аффинные системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$, определяемые реперами $(O, \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ и $(O', \mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3))$ с матрицей перехода C : $\mathcal{B}' = \mathcal{B}C$. Пусть также (x_0, y_0, z_0) — координаты нового начала O' в старом репере, а (x, y, z) и (x', y', z') — координаты точки M в старом и новом реперах, соответственно. Тогда радиус-векторы \overrightarrow{OM} и $\overrightarrow{O'M}$ связаны векторным равенством

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M},$$

которое в матричной форме запишется как

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 & \vec{e}'_2 & \vec{e}'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

а с помощью матрицы перехода ещё и как

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Перейдя от равенства векторов к равенству их координат, получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

◆ Матрица \overline{C} , составленная из матрицы C перехода от старого базиса к новому и столбца $(x_0 \ y_0 \ z_0)^\top$:

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & y_0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & z_0 \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

называется *матрицей перехода от старой системы координат $Oxyz$ к новой системе координат $O'x'y'z'$* .

Пусть теперь

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & x_1 \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & y_1 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & z_1 \end{pmatrix}$$

— матрица перехода от системы координат $O'x'y'z'$ к системе координат $O''x''y''z''$. Тогда при переходе от системы координат $Oxyz$ к системе координат $O''x''y''z''$ координаты вектора \vec{r} будут определяться соотношением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = C \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Раскрыв скобки, получим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + CD \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Преобразования координат, обратные (3.19) и (3.21), запишутся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

и

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = D^{-1}C^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} - D^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи матрицы \overline{C} перехода от одной системы координат к другой.

◆ Преобразование одной системы координат к другой, осуществляемое матрицей

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

называется *тождественным*.

При тождественном преобразовании (3.24) координаты точек, согласно (3.19), не изменяются:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix},$$

поскольку не изменяются их базисные векторы.

◆ Преобразование, осуществляемое матрицей

$$\overline{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & 0 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 & z_0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

называется *параллельным переносом системы координат* на вектор $\overrightarrow{OO'} = (x_0, y_0, z_0)$.

При параллельном переносе (3.25) базисные векторы не изменяются:

$$(\vec{e}'_1 \vec{e}'_2 \vec{e}'_3) = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)C = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)\mathbb{I} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3), \quad (3.26)$$

а координаты точек, согласно (3.19), связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \mathbb{I} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x_0 \\ y' + y_0 \\ z' + z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

◆ Преобразование пространства, при котором координаты вектора изменяются по закону (3.27), называется *параллельным переносом*. Соотношение (3.27) устанавливает взаимно однозначное соответствие между параллельным переносом и вектором $\overrightarrow{OO'} = (x_0, y_0, z_0)$, позволяя рассматривать множество пространственных векторов как множество соответствующих параллельных переносов.

Параллельный перенос (3.27), изменяя координаты точек, не изменяет координаты свободных векторов.

Действительно, пусть точки M_1 и M_2 в системе координат $Oxyz$ имеют координаты $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, а в системе координат $O'x'y'z'$, соответственно, $M'_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ и $M'_2(x'_2, y'_2, z'_2)$. Тогда координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ в этих системах запишутся, соответственно, как

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2 + (z_2 - z_1)\vec{e}_3, \\ \overrightarrow{M_1M_2} &= (x'_2 - x'_1)\vec{e}_1 + (y'_2 - y'_1)\vec{e}_2 + (z'_2 - z'_1)\vec{e}_3, \end{aligned}$$

что с учётом (3.27) для $\overrightarrow{M_1M_2}$ в $Oxyz$ приводит к выражению

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= [(x'_2 - x_0) - (x'_1 - x_0)]\vec{e}_1 + [(y'_2 - y_0) - (y'_1 - y_0)]\vec{e}_2 + \\ &+ [(z'_2 - z_0) - (z'_1 - z_0)]\vec{e}_3 = (x'_2 - x'_1)\vec{e}_1 + (y'_2 - y'_1)\vec{e}_2 + (z'_2 - z'_1)\vec{e}_3, \end{aligned}$$

откуда и следует равенство координат вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ в обеих системах координат.

Далее мы рассмотрим преобразования координатных систем, образованных ортонормированными базисами. В этом случае важную роль играют ортогональные матрицы перехода от одного базиса к другому. Коротко напомним определения и свойства ортогональных матриц (см. [8]).

3.4. Ортогональные матрицы

◆ Квадратная матрица C называется *ортогональной*, если транспонированная к ней матрица совпадает с обратной, т.е. $C^T = C^{-1}$ или, что то же самое, $CC^T = C^TC = \mathbb{I}$.

Пусть $C = \|c_{lk}\|$ — квадратная матрица n -го порядка, тогда из определения ортогональной матрицы следует

$$\sum_{k=1}^n c_{lk}c_{mk} = \delta_{lm} = \begin{cases} 1 & l = m; \\ 0 & l \neq m; \end{cases} \quad l, m = \overline{1, n}. \quad (3.28)$$

Нетрудно убедиться, что произведение двух ортогональных матриц также является ортогональной матрицей. Действительно, пусть C_1 и C_2 — ортогональные матрицы, следовательно,

$$C_1C_1^T = C_2C_2^T = \mathbb{I}, \quad (3.29)$$

но тогда для произведения справедливо

$$(C_1C_2)(C_1C_2)^T = C_1C_2C_2^TC_1^T,$$

а с учётом (3.29) —

$$(C_1C_2)(C_1C_2)^T = C_1\mathbb{I}C_1^T = C_1C_1^T = \mathbb{I}, \quad (3.30)$$

что и доказывает ортогональность произведения матриц C_1C_2 .

Остановимся подробнее на матрицах 2-го порядка. Покажем, что ортогональные матрицы 2-го порядка в зависимости от знака определителя имеют вид

$$C_+ = C_+(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \det C_+ = 1 > 0, \quad (3.31)$$

и

$$C_- = C_-(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \det C_- = -1 < 0. \quad (3.32)$$

Действительно, пусть

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

— ортогональная матрица 2-го порядка. Тогда для ее элементов должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{21}^2 &= 1, \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 &= 1, \\ c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Из первого уравнения (3.34) следует, что существует такой угол φ , для которого

$$c_{11} = \cos \varphi, \quad c_{21} = \sin \varphi. \quad (3.35)$$

Подставив (3.35) в третье уравнение (3.34), получим

$$c_{12} \cos \varphi + c_{22} \sin \varphi = 0,$$

откуда имеем возможность записать, что

$$c_{12} = -A \sin \varphi, \quad c_{22} = A \cos \varphi. \quad (3.36)$$

Теперь подставим (3.36) во второе уравнение (3.34):

$$A^2 \sin^2 \varphi + A^2 \cos^2 \varphi = A^2 = 1,$$

и, стало быть, $A = \pm 1$.

Таким образом, для ортогональных матриц 2-го порядка имеем

$$C_A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -A \sin \varphi \\ \sin \varphi & A \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad A = \pm 1. \quad (3.37)$$

При $A = +1$ из (3.37) получаем матрицу C_+ , $\det C_+ = 1 > 0$; при $A = -1$ из (3.37) получаем матрицу C_- , $\det C_- = -1 < 0$.

3.5. Преобразование прямоугольных координат на плоскости

Пусть $(O, \mathcal{B} = (\vec{i} \vec{j}))$ — ортонормированный репер, задающий на плоскости систему координат Oxy (рис. 29). Рассмотрим новый репер $(O, \mathcal{B}' = (\vec{i}' \vec{j}'))$, базис которого получается преобразованием старого базиса с помощью ортогональной матрицы 2-го порядка C_A

$$\mathcal{B}' = (\vec{i}' \vec{j}') = \mathcal{B}C_A = (\vec{i} \vec{j})C_A. \quad (3.38)$$

I. Выбор в (3.38) $C_A = C_+(\varphi)$ даёт

$$(\vec{i}' \vec{j}') = (\vec{i} \vec{j})C_+(\varphi) = (\vec{i} \vec{j}) \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = (\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi \quad -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi).$$

Это позволяет записать векторы нового базиса через орты старого:

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi, \\ \vec{j}' &= -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi.\end{aligned}\quad (3.39)$$

Вычисление модулей векторов \vec{i}', \vec{j}' из (3.39):

$$\begin{aligned}|\vec{i}'| &= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1; \\ |\vec{j}'| &= \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = 1\end{aligned}$$

показывает, что векторы \vec{i}', \vec{j}' являются единичными.

Из рис. 29, а, графически устанавливающей связь (3.39), посредством простых геометрических построений находим, что векторы \vec{i}' и \vec{j}' повернуты относительно векторов \vec{i} и \vec{j} на один и тот же угол φ против часовой стрелки. Вследствие этого векторы \vec{i}' и \vec{j}' , как и векторы \vec{i} и \vec{j} , являются ортогональными. Следовательно, новый базис $\mathcal{B}' = (\vec{i}' \vec{j}')$ также является ортонормированным, причём репер $(O, \mathcal{B}' = (\vec{i}' \vec{j}'))$ получается из репера $(O, \mathcal{B} = (\vec{i} \vec{j}))$, по сути дела, простым поворотом на угол φ .

Другими словами, преобразование системы координат xOy с помощью ортогональной матрицы C_+ приводит нас к новой прямоугольной системе координат $x'Oy'$, начало которой совпадает с точкой O , а оси повернуты вокруг точки O на угол φ . Координаты векторов в старой и новой системах координат связаны формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_+(\varphi) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi.\end{aligned}\quad (3.40)$$

II. Выбор в (3.38) $C_A = C_-(\varphi)$ даёт

$$(\vec{i}' \vec{j}') = (\vec{i} \vec{j}) C_-(\varphi) = (\vec{i} \vec{j}) \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} = (\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi \quad \vec{i} \sin \varphi - \vec{j} \cos \varphi).$$

Это позволяет записать векторы нового базиса через орты старого:

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi, \\ \vec{j}' &= \vec{i} \sin \varphi - \vec{j} \cos \varphi.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Как и в предыдущем случае, вычисление модулей:

$$\begin{aligned}|\vec{i}'| &= \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1; \\ |\vec{j}'| &= \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = 1\end{aligned}$$

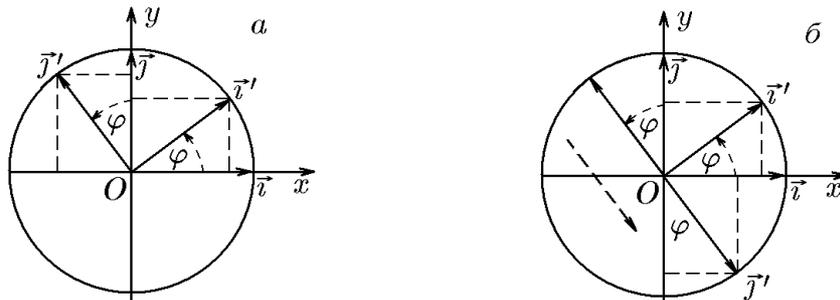


Рис. 29.

показывает, что векторы \vec{i}', \vec{j}' являются единичными.

Из рис. 29,б, графически устанавливающего связь (3.41), посредством простых геометрических построений находим, что базис $\mathcal{B}' = (\vec{i}' \vec{j}')$, как и в предыдущем случае, является ортонормированным. Отличие в данном случае состоит в том, что репер $(O, \mathcal{B}' = (\vec{i}' \vec{j}'))$ получается из репера $(O, \mathcal{B} = (\vec{i} \vec{j}))$ поворотом на угол φ с последующим зеркальным отражением базисного вектора \vec{j}' относительно базисного вектора \vec{i}' .

Таким образом, преобразование системы координат xOy с помощью ортогональной матрицы $C_-(\varphi)$ приводит нас к новой прямоугольной системе координат $x'Oy'$, начало которой совпадает с точкой O , а оси которой повернуты относительно Ox на угол φ с последующим зеркальным отражением оси Oy относительно оси Ox . Координаты векторов относительно этих систем, согласно (3.12), связаны формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_-(\varphi) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi + y' \sin \varphi, \\ y &= x' \sin \varphi - y' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.42)$$

В обоих случаях вращением в положительном направлении является вращение на угол φ от оси Ox к оси Oy против часовой стрелки.

Рассуждая в обратном порядке, мы можем убедиться в справедливости следующего утверждения.

Если $(O, \mathcal{B}' = (\vec{i}' \vec{j}'))$ и $(O, \mathcal{B} = (\vec{i} \vec{j}))$ — ортонормированные реперы двух прямоугольных систем координат $x'Oy'$ и xOy , базисы которых связаны матрицей C , то эта матрица ортогональна. Будет эта матрица матрицей C_+ или C_- , зависит от выбора направления (ориентации) координатных осей новой системы координат.

Поскольку параллельный перенос системы координат не меняет ее базиса, можно утверждать следующее.

Если равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

задает переход от прямоугольной системы координат xOy к прямоугольной системе координат $x'Oy'$, то матрица C ортогональна. Наоборот, если система координат xOy прямоугольна и матрица C ортогональна, то система координат $x'Oy'$ также прямоугольна.

◇ Это утверждение справедливо и для трехмерного пространства:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Его доказательство мы приведем позднее, сформулировав понятие скалярного произведения векторов.

Пример 3.2. Выписать явный вид матриц C_A , соответствующих повороту на угол $\varphi = 0$, и с их помощью найти связь между $C_+(\varphi)$ и $C_-(\varphi)$.

Решение. Согласно (3.31) и (3.32), имеем

$$C_+(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}, \quad C_-(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

Подставив (3.45) в (3.3), найдём

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{pmatrix}_+ &= C_+^T(0) \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \end{pmatrix}_- &= C_-^T(0) \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ -\vec{j} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Таким образом, две ортогональные матрицы частного вида (3.45) соответствуют тождественному преобразованию, осуществляемому матрицей $C_+(0)$, тогда как матрица $C_-(0)$ осуществляет преобразование, изменяющее знак второго базисного вектора: $\vec{j}' = -\vec{j}$. Такое преобразование называют еще *зеркальным отображением* или *отображением симметрии относительно оси Ox* . Именно этим преобразованием различаются $C_+(\varphi)$ и $C_-(\varphi)$, поскольку

$$C_-(\varphi) = C_+(\varphi)C_-(0), \quad (3.47)$$

а следовательно, и базисы \mathcal{B}_+ и \mathcal{B}_- :

$$\mathcal{B}_+ = \mathcal{B}C_+(\varphi) = \mathcal{B}, \quad \mathcal{B}_- = \mathcal{B}C_-(\varphi) = \mathcal{B}C_+(\varphi)C_-(0) = \mathcal{B}C_-(0). \quad (3.48)$$

3.6. Ориентация прямой, плоскости и пространства

Базис пространства определяется как упорядоченная тройка линейно независимых векторов. Поэтому изменения базиса будут происходить не только при изменении самих векторов, но и при изменении их направлений и, более того, порядка их следования, т.е. их нумерации.

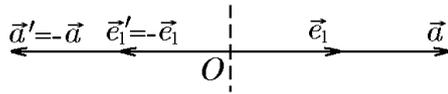


Рис. 30.

Остановимся на этом вопросе более подробно, опираясь на введённые уже понятия и определения. Так, например, введя понятие оси, мы уже определили ориентацию прямой, выбрав один из двух (рис. 30) классов одинаково направленных ненулевых векторов и объявив их направление положительным. Как известно, каждый ненулевой вектор на прямой образует базис и переход от одного базисного вектора к другому осуществляется путём его умножения на отличное от нуля число. При этом одинаково направленные векторы связаны только положительными множителями. Такое понятие ориентации можно распространить на пространства большего числа измерений.

Пусть в пространстве заданы две аффинные системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ с одним началом, базисы которых $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$ и $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1 \vec{e}'_2 \vec{e}'_3)$ связаны матрицей перехода C : $\mathcal{B}' = \mathcal{B}C$.

♦ Два базиса \mathcal{B} и \mathcal{B}' называются *одноимёнными*, если их матрица перехода имеет положительный определитель, т.е. $\det C > 0$.

Поскольку определитель матрицы C не может быть равен нулю, то он либо положителен ($\det C > 0$), либо отрицателен ($\det C < 0$). Рассмотрим следующие возможности преобразования базиса. Пусть $\det C > 0$, тогда базис $\mathcal{B}'_+ = \mathcal{B}C$ является одноимённым с начальным \mathcal{B} . Если же $\det C < 0$, то $\mathcal{B}'_- = \mathcal{B}C$ является разноимённым с исходным.

Пусть теперь D — матрица перехода от \mathcal{B}' к \mathcal{B}'' , т.е.

$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B}'D = \mathcal{B}(CD),$$

тогда в зависимости от знака $\det(CD) = \det C \det D$ базис \mathcal{B}'' будет одноимённым либо с \mathcal{B}'_+ и, следовательно, с \mathcal{B} , либо с базисом \mathcal{B}'_- . Это означает, что в пространстве (как и на прямой) существует ровно два класса одноимённых базисов.

♦ Выбор одного из двух возможных классов базисов называется *ориентацией пространства* (плоскости, прямой). Все базисы выбранной ориентации называются *положительными*.

◇ Выбор ориентации пространства означает задание направления поступательного движения по прямой, вращения на плоскости и поступательного движения винта при его вращении в пространстве.

♦ *Правая ориентация пространства* определяется таким базисом $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$, в котором вектор \vec{e}_1 совмещается с вектором \vec{e}_2 по кратчайшему пути при вращении против часовой стрелки, если смотреть на плоскость векторов $\vec{e}_1\vec{e}_2$ из конца вектора \vec{e}_3 . При вращении по часовой стрелке ориентация пространства называется *левой*.

Теорема 3.1. Два базиса $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$ и $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1 \vec{e}'_2 \vec{e}'_3)$, различающиеся третьим вектором, одноимённые тогда и только тогда, когда $\text{пр}_{\vec{e}_3} \vec{e}'_3 > 0$.

Доказательство. Пусть вектор \vec{e}'_3 в базисе $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$ имеет координаты x', y', z' . Тогда матрица

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x' \\ 0 & 1 & y' \\ 0 & 0 & z' \end{pmatrix}$$

является матрицей перехода от базиса \mathcal{B} к базису \mathcal{B}' с определителем $\det C = z'$. А поскольку $z' = \text{пр}_{\vec{e}_3} \vec{e}'_3$, то $\det C = z' = \text{пр}_{\vec{e}_3} \vec{e}'_3 > 0$ тогда и только тогда, когда $\text{пр}_{\vec{e}_3} \vec{e}'_3 > 0$.

Следствие 3.1.1. Базисы, получающиеся друг из друга перестановкой пары векторов, а также изменением одного из векторов на противоположный, разноимённые.

Справедливость этого утверждения следует из того, что при перестановке пары строк или умножении строки на (-1) определитель матрицы меняет знак.

Пример 3.3. Пусть базис $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$ определяет правую ориентацию пространства ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — правая тройка векторов). Определить ориентацию пространства с базисами $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_3 \vec{e}_1 \vec{e}_2)$, $\mathcal{B}_2 = (-\vec{e}_3 \vec{e}_1 \vec{e}_2)$, $\mathcal{B}_3 = (-\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$, $\mathcal{B}_4 = (-\vec{e}_1 \vec{e}_3 \vec{e}_2)$.

Решение. Базис \mathcal{B}_1 получается из базиса \mathcal{B} двойной перестановкой пары векторов: $(\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \rightarrow (\vec{e}_1 \vec{e}_3 \vec{e}_2) \rightarrow (\vec{e}_3 \vec{e}_1 \vec{e}_2)$. Поскольку чётное число перестановок не меняет ориентации, то базис \mathcal{B}_1 является одноимённым с базисом \mathcal{B} , т.е. правым. Базис \mathcal{B}_2 получается из \mathcal{B}_1 изменением знака одного из базисных векторов, вследствие чего он является разноимённым с \mathcal{B}_1 , т.е. левым. Базис \mathcal{B}_3 получается из \mathcal{B} изменением знака одного из базисных векторов, вследствие чего является разноимённым с ним, т.е. левым. Базис \mathcal{B}_4 получается из \mathcal{B} изменением знака одного из базисных векторов и одной перестановкой: $(\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \rightarrow (-\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \rightarrow (-\vec{e}_1 \vec{e}_3 \vec{e}_2)$. Следовательно, базис \mathcal{B}_4 является одноимённым с \mathcal{B} , т.е. правым. Этот же результат мы получим из сравнения \mathcal{B}_4 с \mathcal{B}_3 . Базис \mathcal{B}_4 отличается от левого \mathcal{B}_3 одной перестановкой пары векторов и, следовательно, является с ним разноимённым, т.е. правым.

Одноимённые базисы обладают еще одним замечательным свойством, важным для приложений векторного исчисления. Для его формулировки нам потребуется понятие непрерывной деформации.

◆ Будем говорить, что базис $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$ переходит в базис $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1 \vec{e}'_2 \vec{e}'_3)$ посредством *непрерывной деформации*, если для каждого значения t , принадлежащего некоторому отрезку $[a, b]$, задан базис

$$\mathcal{B}(t) = (\vec{e}_1(t) \vec{e}_2(t) \vec{e}_3(t)) = \mathcal{B}C(t) \quad (3.49)$$

так, что все координаты — элементы матрицы $C(t) = \|c_{lm}\|$ — являются непрерывными функциями от t на отрезке $[a, b]$, причём $\mathcal{B} = \mathcal{B}(t)|_{t=a}$ и $\mathcal{B}' = \mathcal{B}(t)|_{t=b}$. Другими словами, базисы \mathcal{B} и \mathcal{B}' представляют собой значения базиса $\mathcal{B}(t)$ на концах отрезка $[a, b]$.

Последнее требование применительно к самой матрице $C(t)$, согласно (3.49), имеет вид

$$\begin{aligned} C(t)|_{t=a} &= \mathbb{I}, & \mathcal{B}' &= \mathcal{B}C(t)|_{t=a} = \mathcal{B}, \\ C(t)|_{t=b} &= C(b), & \mathcal{B}' &= \mathcal{B}C(b). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Из определения непрерывной деформации вытекают два очевидных её свойства.

Свойство 1. Если базис \mathcal{B} переходит в базис \mathcal{B}' посредством непрерывной деформации $a \leq t \leq b$, то и базис \mathcal{B}' переходит в базис \mathcal{B} посредством непрерывной деформации.

Действительно, чтобы получить обратное преобразование, достаточно положить $t' = (a + b) - t$ и $\vec{e}_i^T(t) = \vec{e}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

Свойство 2. Если базис \mathcal{B} переходит в базис \mathcal{B}' посредством непрерывной деформации $a \leq t \leq b$, а базис \mathcal{B}' переходит в базис \mathcal{B}'' посредством последующей непрерывной деформации $b \leq t \leq c$, то и базис \mathcal{B} переходит в базис \mathcal{B}'' посредством непрерывной деформации $a \leq t \leq c$.

Теорема 3.2. Базис $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$ переходит в базис $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1 \vec{e}'_2 \vec{e}'_3)$ посредством непрерывной деформации тогда и только тогда, когда оба базиса одноимённы.

Доказательство. I. *Необходимость.* Пусть $C(t)$ — матрица перехода от \mathcal{B} к $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}C(t)$. Нужно доказать, что числа $\det C(a)$ и $\det C(b)$ имеют один знак. Но $\det C(t)$, будучи полиномом от своих элементов $c_{11}(t), c_{12}(t), \dots$, являющихся непрерывными функциями от t , есть непрерывная функция от t на всём отрезке $[a, b]$. Если бы её значения на концах этого отрезка имели разные знаки, то существовало бы промежуточное значение t_0 , $a < t_0 < b$, для которого $\det C(t_0) = 0$. Но этого не может быть, так как $\det C(t_0)$ как определитель матрицы перехода от базиса \mathcal{B} к базису $\mathcal{B}(t_0)$ всегда отличен от нуля.

II. *Достаточность.* Рассмотрим сначала переход одного базиса на плоскости в другой. Два двумерных одноимённых базиса $\mathcal{B} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2)$ и $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1 \vec{e}'_2)$ выбором точки O доопределим до двух одноимённых реперов (O, \mathcal{B}) и (O, \mathcal{B}') . Далее доказательство разобьём на три части. В первой части докажем, что репер (O, \mathcal{B}) непрерывной трансформацией можно перевести в одноимённый ортонормированный репер (O, \vec{i}, \vec{j}) , у которого направление вектора \vec{i} совпадает с направлением вектора \vec{e}_1 . Во второй части мы воспользуемся ортогональным преобразованием, позволяющим любой ортогональный репер повернуть на угол φ так, чтобы репер (O, \vec{i}, \vec{j}) перешёл в репер (O, \vec{i}', \vec{j}') , у которого направление вектора \vec{i}' совпадает с направлением вектора \vec{e}'_1 . В третьей части ортонормированный репер (O, \vec{i}', \vec{j}') переводится в заданный репер $(O, \vec{e}'_1 \vec{e}'_2)$.

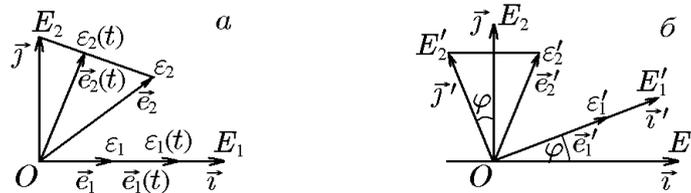


Рис. 31.

Докажем первую часть теоремы. Для этого из точки O в направлении вектора \vec{e}_1 отложим единичный вектор \vec{i} , а затем ортогональный ему единичный вектор \vec{j} так, чтобы полученный репер (O, \vec{i}, \vec{j}) был одноимённым с репером $(O, \mathcal{B} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2))$ (рис. 31, а). Через $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ обозначим точки, лежащие на направленных отрезках $\vec{\varepsilon}_1 \vec{E}_1$, $\vec{\varepsilon}_2 \vec{E}_2$ и делящие их в отношении $\lambda = t/(1 - t)$. Точки $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ при $t = 0$ ($\lambda = 0$) совпадают с точками ε_1 и ε_2 , а при $t = 1$ ($\lambda = \infty$) — с точками E_1 и E_2 , соответственно. Для векторов $\vec{e}_1(t) = \vec{\varepsilon}_1 \vec{\varepsilon}_1(t)$ и $\vec{e}_2(t) = \vec{\varepsilon}_2 \vec{\varepsilon}_2(t)$ это означает, что $\vec{e}_1(0) = \vec{e}_1$, $\vec{e}_2(0) = \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1(1) = \vec{i}$, $\vec{e}_2(1) = \vec{j}$. Принимая во внимание, что $\vec{e}_1(t)$ и $\vec{e}_2(t)$ при любом t неколлинеарны, т.е. образуют базис $\mathcal{B}(t) = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t))$, непрерывно изменяющийся при изменении t от 0 до 1 и осуществляющий непрерывную деформацию от базиса $\mathcal{B} = \mathcal{B}(0) = (\vec{e}_1(t), \vec{e}_2(t))$ к базису $\mathcal{B}(1) = (\vec{i}, \vec{j})$. Первая часть теоремы доказана.

Во второй части, как было уже указано, воспользуемся свойством ортогональных преобразований. Действительно, ортонормированный репер (O, \vec{i}, \vec{j}) с помощью ортонормированной матрицы C_+ можно непрерывной деформацией, а именно поворотом на угол φ , перевести в ортонормированный репер (O, \vec{i}', \vec{j}') , вектор \vec{i}' которого будет направлен по вектору \vec{e}'_1 репера $(O, \mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2))$. Теперь осталась третья часть доказательства: непрерывной деформацией ортонормированного репера (O, \vec{i}', \vec{j}') перевести его в заданный репер $(O, \mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2))$ с учётом того, что векторы \vec{i}' и \vec{e}'_1

однонаправлены. Такая задача является обратной к задаче, рассмотренной в первой части, и её доказательство обратило доказательству первой части.

Доказательство для пространственного случая проводится аналогичным образом. Следует лишь учитывать, что каждая часть доказательства будет использовать два последовательных преобразования. Покажем это на примере первой части.

Пусть $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и $(O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ — два одноимённых репера. В плоскости $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ проведём те же построения, как и в плоском случае. В результате получим репер $(O, \vec{j}, \vec{j}, \vec{e}_2)$. Повторив соответствующие преобразования в отношении вектора \vec{e}_3 , придём к ортонормированному реперу $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Далее действуем по изложенной выше схеме.

В заключение отметим, что для, например, линейных и некоторых других операций над векторами ориентация пространства значения не имеет. Однако для преобразований систем координат и нелинейных операций над векторами это понятие имеет очень важное значение. В связи с этим определение угла между векторами мы дополним определением угла от вектора до вектора.

Пусть на ориентированной плоскости выбран положительный ортонормированный базис $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и задана упорядоченная пара неколлинеарных векторов \vec{a}_1 и \vec{a}_2 .

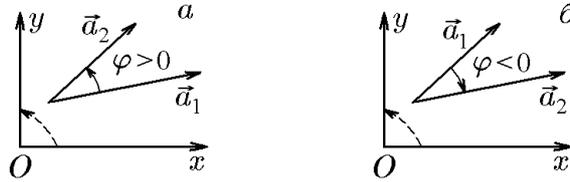


Рис. 32. $\varphi = \angle(\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2) > 0$ (а); $\varphi = \angle(\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2) < 0$ (б)

◆ Углом от вектора \vec{a}_1 до вектора \vec{a}_2 называется угол между векторами \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , взятый со знаком «плюс», если пара векторов \vec{a}_1, \vec{a}_2 положительна, и со знаком «минус» в противном случае (рис. 32). Определённый таким образом угол будем обозначать $\angle(\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2)$.

Является ли упорядоченная пара \vec{a}_1 и \vec{a}_2 векторов положительной или отрицательной, можно установить с помощью координат этих векторов. Пусть векторы \vec{a}_1 и \vec{a}_2 в ортонормированном базисе имеют координаты $\vec{a}_1 = (x_1, y_1)$ и $\vec{a}_2 = (x_2, y_2)$ (рис. 33) Паре векторов \vec{a}_1 и \vec{a}_2 поставим в соответствие матрицу

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

определитель которой имеет простой геометрический смысл.

Действительно, координаты векторов можно записать в виде

$$x_1 = |\vec{a}_1| \cos \varphi_1, \quad y_1 = |\vec{a}_1| \sin \varphi_1; \quad x_2 = |\vec{a}_2| \cos \varphi_2, \quad y_2 = |\vec{a}_2| \sin \varphi_2. \quad (3.52)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \det S &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = |\vec{a}_1| |\vec{a}_2| (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) = \\ &= |\vec{a}_1| |\vec{a}_2| \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \begin{cases} S_{\text{нап}} > 0, & \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0; \\ -S_{\text{нап}} < 0, & \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.53)$$

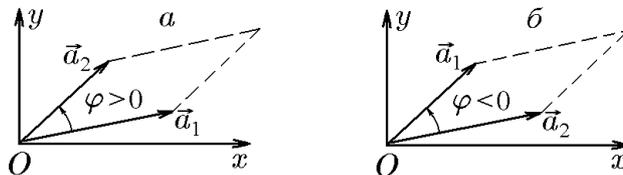


Рис. 33.

где $S_{\text{пар}}$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a}_1 и \vec{a}_2 (рис. 33).

Таким образом, $\det S$ равен площади параллелограмма для положительной пары векторов \vec{a}_1, \vec{a}_2 и площади параллелограмма со знаком минус в противном случае. Отсюда следует, что знак $\det S$ является индикатором ориентации упорядоченной пары векторов \vec{a}_1, \vec{a}_2 .

◆ Величина

$$\det S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

для упорядоченной пары векторов \vec{a}_1, \vec{a}_2 называется их *ориентированной площадью*.

С помощью ориентированной площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a}_1 и \vec{a}_2 , исходя из (3.53), можно не только выяснить их ориентацию, но и найти угол от вектора \vec{a}_1 до вектора \vec{a}_2 :

$$\sin[\angle(\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2)] = \frac{\det S}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}}. \quad (3.54)$$

Пример 3.4. Для векторов $\vec{a}_1 = (\sqrt{3}, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 2\sqrt{3})$, заданных в декартовой системе координат, найти площадь параллелограмма, построенного на этих векторах и угол от вектора \vec{a}_1 до вектора \vec{a}_2 .

Решение. Для заданных векторов матрица S имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det S = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 2 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Это означает, что $S_{\text{пар}} = 4$, а их ориентация положительна, причём

$$\sin[\angle(\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2)] = \frac{\det S}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|} = \frac{4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2},$$

т.е. $\angle(\vec{a}_1 \mapsto \vec{a}_2) = 30^\circ$.

Пример 3.5. Доказать, что при общем преобразовании (с переносом и поворотом осей) прежние оси могут быть совмещены с новыми путём поворота всей плоскости вокруг некоторой точки.

Решение. Пусть равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_+(\varphi) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

задаёт переход от прямоугольной системы координат xOy к прямоугольной системе координат $x'O'y'$, осуществляемый параллельным переносом на вектор $\vec{OO'} = (x_0, y_0)$ и поворотом базиса $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ на угол φ с помощью ортогональной матрицы $C_+(\varphi)$.

Предположим, что точка $M(x, y)$ в обеих системах имеет одни и те же координаты, т.е. $x' = x$, $y' = y$. В силу этого (3.55) примет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_+(\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$[\mathbb{I} - C_+(\varphi)] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [\mathbb{I} - C_+(\varphi)]^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Формула (3.56) задаёт координаты точки M , которые не изменяются при преобразовании (3.55). Следовательно, два последовательных преобразования, а именно: параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{OO'} = (x_0, y_0)$ и последующий поворот исходного базиса на угол φ , осуществляемый ортогональной матрицей $C_+(\varphi)$, можно заменить одним преобразованием: поворотом всей плоскости на угол φ относительно точки M . В отсутствие параллельного переноса, т.е. когда $x_0 = y_0 = 0$, точка M совпадает с точкой $O(0, 0)$ — началом координат xOy .

◇ Если упорядоченной паре чисел (x, y) сопоставить комплексное число $z = x + iy$, то возникает следующая аналогия. Поскольку комплексное число $z = x + iy$ изображается точкой (вектором) на плоскости xOy , то линейное отображение

$$w = az + b, \quad a = |a|e^{i\varphi}, \quad (3.57)$$

задаёт параллельный перенос начала координат (точки O) на вектор, соответствующий комплексному числу $b = x_0 + iy_0$, с последующим поворотом координатных осей на угол φ и преобразованием подобия с коэффициентом $|a|$. При $|a| = 1$ осуществляются только параллельный перенос и поворот аналогично преобразованию (3.55) (см., например, [7]).

Из формулы (3.57) очень легко найти координаты неподвижной точки. Действительно, положив в (3.57) $w = z$, получим формулу

$$z = \frac{b}{1 - a}, \quad |a| = 1, \quad (3.58)$$

эквивалентную формуле (3.56).

Пример 3.6. Начало новой системы координат находится в точке $(1, -2)$. Новая ось ординат составляет с прежней осью абсцисс острый угол, тангенс которого равен $3/4$. Найти точку, прежние координаты которой равны новым.

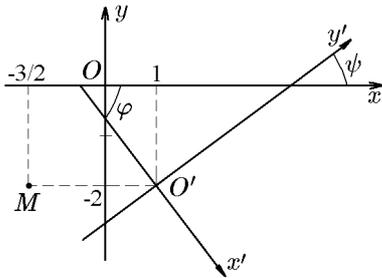


Рис. 34.

Решение. Согласно результатам предыдущей задачи, координаты этой точки определяются формулой (3.56), где $x_0 = 1$, $y_0 = -2$. Чтобы найти угол поворота координатных осей, учтём, что угол между старой осью абсцисс и новой осью ординат равен $\psi = \arctg 3/4$. Это означает, что угол от старой оси ординат к новой равен $\varphi = -\arctg 4/3$ (рис. 34). По найденному углу вычислим

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= -\sin \arctg \frac{4}{3} = -\frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{4}{5}, \\ \cos \varphi &= \cos \arctg \frac{4}{3} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в матрицу

$$C_+(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

получим

$$C_+ = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\mathbb{I} - C_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & -4/5 \\ 4/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Вычислив обратную матрицу:

$$(\mathbb{I} - C_+)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

и подставив ее в (3.56):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -12 \end{pmatrix},$$

найдем координаты точки $M(x, y)$: $x = -3/2$, $y = -2$ (рис. 34).

◇ Этот же результат можно очень просто получить из формулы (3.58). Действительно, положив $b = 1 - 2i$ и $a = e^{i\varphi} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$, найдем

$$z = x + iy = \frac{1 - 2i}{1 - (\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i)} = \frac{1 - 2i}{\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i} = \frac{5(1 - 2i)}{2 + 4i} = \frac{1}{2}(1 - 2i)^2 = -\frac{3}{2} - 2i,$$

т.е. $x = -3/2$, $y = -2$.

Пример 3.7. Записать матрицу перехода от репера $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ к реперу (O, \vec{i}, \vec{j}) , если $\vec{e}_1 = \vec{i}/2$, $\vec{e}_2 = -\vec{i} + 3\vec{j}$.

Решение. Поскольку, согласно условию задачи,

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

Так как $\det C = 3/2$ и

$$C^{-1} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

то из (3.59) найдем

$$\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} \vec{i} &= 2\vec{e}_1, \\ \vec{j} &= \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Пример 3.8. Для двух реперов из предыдущей задачи записать матрицу их непрерывной деформации.

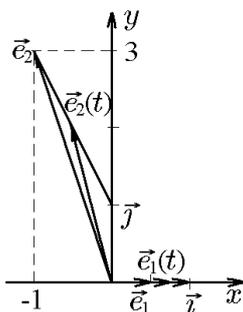


Рис. 35.

Решение. Поступим, как при доказательстве теоремы 3.1. Разделим направленный отрезок между концами векторов \vec{e}_1 и \vec{i} (рис. 35) концом вектора $\vec{e}_1(t)$ в отношении $\lambda = t/(1 - t)$, т.е.

$$\vec{e}_1(t) - \vec{e}_1 = \lambda[\vec{i} - \vec{e}_1(t)],$$

откуда

$$\vec{e}_1(t) = \frac{\vec{e}_1 + \lambda\vec{i}}{1 + \lambda} = \frac{1/2 + \lambda\vec{i}}{1 + \lambda} = \frac{1/2 + t/(1 - t)}{1 + t/(1 - t)}\vec{i} = \frac{1}{2}(1 + t)\vec{i}. \quad (3.61)$$

Аналогично направленный отрезок между концами векторов \vec{e}_2 и \vec{j} концом вектора $\vec{e}_2(t)$ разделим в том же отношении $\lambda = t/(1-t)$, т.е.

$$\vec{e}_2(t) - \vec{e}_2 = \lambda[\vec{j} - \vec{e}_2(t)],$$

откуда

$$\vec{e}_2(t) = \frac{\vec{e}_2 + \lambda\vec{j}}{1 + \lambda} = \frac{-\vec{i} + 3\vec{j} + [t/(1-t)]\vec{j}}{1 + t/(1-t)} = -(1-t)\vec{i} + (3-2t)\vec{j}. \quad (3.62)$$

Приняв во внимание (3.61), (3.62), получим

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1(t) \\ \vec{e}_2(t) \end{pmatrix} = C(t) \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)/2 & 0 \\ -(1-t) & 3-2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Поскольку

$$\det C(t) = \frac{1}{2}(1+t)(3-2t) > 0 \quad \forall t \in]0, 1[,$$

то матрица

$$C(t) = \begin{pmatrix} (1+t)/2 & 0 \\ -(1-t) & 3-2t \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

является матрицей непрерывной деформации, причём

$$\begin{aligned} C(0) &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \\ C(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Это означает, что базис

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1(0) \\ \vec{e}_2(0) \end{pmatrix} = C(0) \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i}/2 \\ -\vec{i} + 3\vec{j} \end{pmatrix}$$

совпадает с базисом $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, а базис

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1(1) \\ \vec{e}_2(1) \end{pmatrix} = C(1) \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

совпадает с базисом $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

Таким образом, матрица непрерывной деформации (3.64) позволяет по заданному произвольному базису построить ортонормированный базис. Ниже мы рассмотрим еще один способ построения ортонормированных базисов — метод ортогонализации Грама–Шмидта.

◇ При $t = 1/2$ найдём

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1(1/2) \\ \vec{e}_2(1/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 \\ -1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\vec{i}/2 \\ -\vec{i}/2 + 2\vec{j} \end{pmatrix}.$$

Пример 3.9. Может ли матрица

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1-t^2 & t \\ t & t^2 \end{pmatrix}$$

определять непрерывную деформацию от одного базиса к другому?

Решение. Поскольку $\det C(t) = (1-t^2)t^2 - t^2 = -t^4 < 0$ для любых t , то результатом преобразования с помощью этой матрицы будет базис, разноимённый с исходным, что говорит о невозможности с её помощью осуществить непрерывную деформацию.

4. Произведение двух векторов

Поскольку каждый вектор характеризуется модулем, т.е. скаляром, и направлением, то операция умножения векторов должна, вообще говоря, учитывать эту двойственную их природу. Оказывается, возможны две операции умножения векторов. Одна дает в результате скаляр и поэтому называется скалярным произведением (умножением). Другая дает в результате вектор и потому называется векторным произведением.

4.1. Скалярное произведение двух векторов

♦ *Скалярным произведением двух векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению их модулей (длин), умноженному на косинус угла между ними. и обозначается*

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi. \quad (4.1)$$

Здесь φ – угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

Если спроектировать вектор \vec{b} на вектор \vec{a} , будем иметь

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = b \cos \varphi. \quad (4.2)$$

Аналогично, спроектировав вектор \vec{a} на вектор \vec{b} , получим

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = a \cos \varphi. \quad (4.3)$$

Тогда скалярное произведение (4.1) можно записать как

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} \quad (4.4)$$

или

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = b \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}. \quad (4.5)$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из них на проекцию второго вектора на первый.

Из (4.4) имеем

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a}, \quad (4.6)$$

а из (4.5)

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b}. \quad (4.7)$$

Из определения (4.1) с учётом (4.4), (4.5) вытекают следующие свойства скалярного произведения:

1) коммутативность

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

2) однородность

$$\alpha\vec{a} \cdot \beta\vec{b} = \alpha\beta\vec{a} \cdot \vec{b};$$

3) линейность

$$(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) \cdot \vec{c} = \alpha\vec{a} \cdot \vec{c} + \beta\vec{b} \cdot \vec{c};$$

4) неравенство Коши–Буняковского

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 = a^2 b^2;$$

5) частные случаи

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

только при условии $\vec{a} \perp \vec{b}$ или если один из сомножителей является нулевым вектором;

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 = 0$$

только при условии $\vec{a} = 0$.

Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — орты декартова базиса, то их скалярные произведения удовлетворяют равенствам

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0. \quad (4.8)$$

Теорема 4.1 (о координатной форме скалярного произведения). Если векторы \vec{a} и \vec{b} заданы своими координатами в декартовом базисе $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (4.9)$$

Доказательство. По определению

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}, \\ \vec{b} &= b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}. \end{aligned}$$

Используя свойства скалярного произведения, с учётом (4.8) будем иметь

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k})(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}) = \\ &= a_1 b_1 (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_1 b_2 (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_1 b_3 (\vec{i} \cdot \vec{k}) + \\ &+ a_2 b_1 (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_2 b_2 (\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_2 b_3 (\vec{j} \cdot \vec{k}) + \\ &+ a_3 b_1 (\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_3 b_2 (\vec{k} \cdot \vec{j}) + a_3 b_3 (\vec{k} \cdot \vec{k}) = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Следствие 4.1.1. Координаты вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ определяются скалярными произведениями

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{i}, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{j}, \quad a_3 = \vec{a} \cdot \vec{k}. \quad (4.10)$$

Пример 4.1. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (2, -1, 1)$ и $\vec{b} = (3, -2, -1)$.

Решение. Здесь $x_1 = 2, y_1 = -1, z_1 = 1; x_2 = 3, y_2 = -2, z_2 = -1$. Согласно (4.9), имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + (-1)(-2) + 1(-1) = 7.$$

Пример 4.2. Даны два вектора: $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ (короче их можно записать как $\vec{a} = (2, -1, 1), \vec{b} = (1, -2, 3)$). Найти проекцию вектора \vec{a} на направление вектора \vec{b} .

Решение. Воспользуемся формулой (4.7), в которой

$$b = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14},$$

а

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 2 \cdot 1 + (-1)(-2) + 1 \cdot 3 = 7; \\ \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.\end{aligned}$$

Следствие 4.1.2. Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ является равенство

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0. \quad (4.11)$$

Доказательство. В самом деле, если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Согласно доказанной теореме, имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

Следовательно, если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то получим (4.11).

Следствие 4.1.3. Угол между векторами $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (4.12)$$

Доказательство. Действительно, скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} есть

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi,$$

где φ — угол между данными векторами, откуда

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}.$$

Учитывая (4.9), а также, что

$$\begin{aligned}a &= |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \\ b &= |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2},\end{aligned} \quad (4.13)$$

окончательно имеем формулу (4.12).

Пример 4.3. Даны три точки: $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 1)$, $C(2, 1, 2)$. Найти длины векторов $|\vec{AB}|$, $|\vec{AC}|$ и угол $\varphi = \angle BAC$.

Решение. По точкам A, B, C построим векторы \vec{AB} и \vec{AC} .

Угол φ есть угол между вектором \vec{AB} , проекции (координаты) которого есть $\vec{AB} = (2-1)\vec{i} + (2-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k}$ или $\vec{AB} = (1; 1; 0)$, и вектором \vec{AC} , проекции (координаты) которого есть $\vec{AC} = (2-1)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (2-1)\vec{k}$ или $\vec{AC} = (1; 0; 1)$.

Находим

$$|\vec{AB}| = AB = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2},$$

$$|\vec{AC}| = AC = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

По формуле (4.12) найдём

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

и угол $\varphi = 60^\circ$.

Скалярное произведение векторов часто используется в различных приложениях. Рассмотрим одно из них — работу постоянной силы.

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из точки A в точку B под действием постоянной силы \vec{F} , образующей угол φ с вектором перемещения $\vec{AB} = \vec{S}$. Из курса физики известно, что работа силы \vec{F} при перемещении \vec{S} равна

$$A = |\vec{F}| |\vec{S}| \cos \varphi.$$

Это означает, что работа постоянной силы \vec{F} при прямолинейном перемещении \vec{S} точки ее приложения равна скалярному произведению

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}.$$

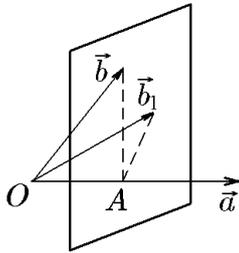


Рис. 36.

В заключение рассмотрим возможность введения операции, обратной скалярному произведению векторов, т.е. операции «деления скаляра на вектор». Пусть известны вектор \vec{b} и скалярное произведение (\vec{a}, \vec{b}) и требуется определить вектор \vec{a} . Поместим начало векторов \vec{a} и \vec{b} в одну точку O и через конец вектора \vec{b} проведём плоскость P , перпендикулярную \vec{a} . Плоскость P пересечёт луч с началом в точке O , на котором лежит вектор \vec{a} , в точке A (рис. 36), и мы получим отрезок OA .

Согласно определению скалярного произведения, с одной стороны,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \operatorname{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = a \cdot |OA|.$$

С другой стороны, для любого другого вектора \vec{b}_1 с началом в точке O и концом на плоскости P аналогично имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_1 = a \operatorname{пр}_{\vec{a}} \vec{b}_1 = a \cdot |OA| = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

◇ Таким образом, если известно скалярное произведение двух векторов и известен один из сомножителей, то существует бесконечное множество векторов, которые при умножении на данный сомножитель дадут заданное скалярное произведение. Отсюда следует, что операция, обратная скалярному произведению векторов («деление скаляра на вектор») возможна, но в силу своей неоднозначности является неустойчивой и не получила практического применения.

◇ Отбросив третье слагаемое в формулах (4.11), (4.12), (4.13), получим соответствующие выражения для векторов на плоскости.

4.2. Скалярное произведение в косоугольном базисе

В некоторых приложениях векторного исчисления сама постановка задачи диктует использование так называемой косоугольной системы координат вместо декартовой.

Пусть $(O, \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$ — некоторый репер пространства, тогда два любых вектора задаются своими координатами в его базисе \mathcal{B} :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3, \\ \vec{b} &= b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3.\end{aligned}$$

Скалярное произведение этих векторов в силу свойства линейности можно записать в виде суммы

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = \\ &= a_1[b_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + b_2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + b_3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3] + \\ &+ a_2[b_1\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + b_3\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3] + \\ &+ a_3[b_1\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + b_2\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3],\end{aligned}$$

которую ещё можно записать как произведение матриц:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \ a_2 \ a_3)G \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

где

$$G = G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{B}^T \mathcal{B} = \|g_{mn}\|. \quad (4.15)$$

◆ Матрица (4.15) называется *матрицей Грама*, элементы $g_{mn} = \vec{e}_m \cdot \vec{e}_n$ — *метрическими коэффициентами базиса* $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, а её определитель $\det G = \Gamma = \Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — *определителем Грама*.

Очевидно, что в силу коммутативности скалярного произведения ($g_{mn} = g_{nm}$) матрица Грама является симметричной, т.е.

$$G^T = G.$$

◆ Система координат называется *косоугольной*, если матрица Грама её базиса не является диагональной.

Равенства

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}, \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \quad \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}), \quad (4.16)$$

вытекающие из определения скалярного произведения, с помощью метрических коэффициентов можно записать в виде

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= \sqrt{\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_n g_{nm} a_m}, \\ \cos[\angle(\vec{a}, \vec{b})] &= \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_n g_{nm} b_m \left(\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 a_n g_{nm} a_m \right)^{-1/2} \left(\sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^3 b_n g_{nm} b_m \right)^{-1/2}.\end{aligned} \quad (4.17)$$

Если произвольный базис $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ заменить ортонормированным $\mathcal{B}_0 = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, для которого в силу (4.9) матрица Грама является единичной:

$$G = \|g_{mn}\| = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ 1, & m = n, \end{cases} \quad (4.18)$$

то приведённые выше формулы (4.17) примут вид (4.11), (4.12), (4.13).

Пусть $Ox_1x_2x_3$ — косоугольная система координат, базис $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ которой характеризуется своими метрическими коэффициентами:

$$G = \|g_{mn}\| = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

и пусть \vec{a} — некоторый вектор, заданный в этой системе координат:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3. \quad (4.20)$$

Координаты a_1, a_2, a_3 этого вектора, в отличие от декартовой системы координат, не являются его проекциями на координатные оси. Действительно, умножив равенство (4.20) скалярно на векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ соответственно, получим систему

$$\begin{aligned} a_1\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + a_2\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + a_3\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \cdot \vec{a}, \\ a_1\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + a_3\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 &= \vec{e}_2 \cdot \vec{a}, \\ a_1\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + a_2\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 &= \vec{e}_3 \cdot \vec{a}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Поскольку определитель этой системы есть определитель Грама $\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \det G$ базисных векторов, то система имеет единственное решение, задающее значение координат a_1, a_2, a_3 :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{a} & g_{12} & g_{13} \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{a} & g_{22} & g_{23} \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{a} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, & a_2 &= \frac{1}{\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \begin{vmatrix} g_{11} & \vec{e}_1 \cdot \vec{a} & g_{13} \\ g_{21} & \vec{e}_2 \cdot \vec{a} & g_{23} \\ g_{31} & \vec{e}_3 \cdot \vec{a} & g_{33} \end{vmatrix}, \\ a_3 &= \frac{1}{\Gamma(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \vec{e}_1 \cdot \vec{a} \\ g_{21} & g_{22} & \vec{e}_2 \cdot \vec{a} \\ g_{31} & g_{32} & \vec{e}_3 \cdot \vec{a} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Поскольку скалярные произведения вектора \vec{a} на базисные векторы имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{e}_1 &= (a_1 \ a_2 \ a_3)G \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1g_{11} + a_2g_{21} + a_3g_{31}, \\ \vec{a} \cdot \vec{e}_2 &= (a_1 \ a_2 \ a_3)G \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_1g_{12} + a_2g_{22} + a_3g_{32}, \\ \vec{a} \cdot \vec{e}_3 &= (a_1 \ a_2 \ a_3)G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_1g_{13} + a_2g_{23} + a_3g_{33}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

а модули базисных векторов

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} = g_{11}^{1/2}, \quad |\vec{e}_2| = \sqrt{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2} = g_{22}^{1/2}, \quad |\vec{e}_3| = \sqrt{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3} = g_{33}^{1/2}, \quad (4.24)$$

то проекции вектора \vec{a} на координатные оси определяются как

$$\begin{aligned}\text{пр}_{\vec{e}_1} \vec{a} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{e}_1|} = (a_1 g_{11} + a_2 g_{21} + a_3 g_{31}) g_{11}^{-1/2}, \\ \text{пр}_{\vec{e}_2} \vec{a} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_2}{|\vec{e}_2|} = (a_1 g_{12} + a_2 g_{22} + a_3 g_{32}) g_{22}^{-1/2}, \\ \text{пр}_{\vec{e}_3} \vec{a} &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{e}_3|} = (a_1 g_{13} + a_2 g_{23} + a_3 g_{33}) g_{33}^{-1/2}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Пример 4.4. Косоугольная система координат $Ox_1x_2x_3$ задается репером $(O, \mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3))$, базис которого характеризуется метрическими коэффициентами, составляющими матрицу Грама

$$G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} & 4\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 3 & 6 \\ 4\sqrt{2} & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Найти длины базисных векторов и угол между ними.

Решение. Длины базисных векторов находятся из диагональных метрических коэффициентов:

$$\begin{aligned}|\vec{e}_1| &= \sqrt{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} = \sqrt{g_{11}} = 2, & |\vec{e}_2| &= \sqrt{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2} = \sqrt{g_{22}} = \sqrt{3}, \\ |\vec{e}_3| &= \sqrt{\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3} = \sqrt{g_{33}} = 4.\end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned}\cos[\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2)] &= \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{|\vec{e}_1||\vec{e}_2|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4 \cdot 3}} = \frac{1}{2}, & \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_2) &= \frac{\pi}{3}; \\ \cos[\angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3)] &= \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3}{|\vec{e}_1||\vec{e}_3|} = \frac{g_{13}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \angle(\vec{e}_1, \vec{e}_3) &= \frac{\pi}{4}; \\ \cos[\angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3)] &= \frac{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3}{|\vec{e}_2||\vec{e}_3|} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}} = \frac{6}{\sqrt{3 \cdot 16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \angle(\vec{e}_2, \vec{e}_3) &= \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Пример 4.5. В косоугольной системе координат заданы два вектора:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \\ \vec{b} &= \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3.\end{aligned}$$

Базисные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеют длину $|\vec{e}_1| = 2, |\vec{e}_2| = 1, |\vec{e}_3| = 2$ и образуют друг с другом углы, равные $\pi/3$. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} и проекцию вектора \vec{a} на вектор \vec{b} .

Решение. Для удобства вычислений выпишем матрицу Грама базисных векторов:

$$G = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{3} & 4\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & 2 \\ 4\sqrt{2} & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Теперь, следуя определению (4.14), найдём

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \ 1 \ 1)G \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 28;$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (2 \ 1 \ 1)G \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 35;$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = (1 \ 2 \ 1)G \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 24,$$

откуда

$$\cos[\angle(\vec{a}, \vec{b})] = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{28}{\sqrt{24 \cdot 35}} = \frac{28}{28,9} \approx 0,96,$$

т.е. $\angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 15^\circ$ и, соответственно,

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{28}{\sqrt{24}} \approx 5,7.$$

4.3. Метод ортогонализации Грама–Шмидта

При необходимости от косоугольной системы координат можно перейти к декартовой. Это можно сделать с помощью метода ортогонализации Грама–Шмидта. Смысл метода заключается в следующем. По базисным векторам $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ косоугольного базиса построим три новых вектора

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{f}_1, \\ \vec{e}_2 &= \vec{f}_2 + \lambda_{21}\vec{e}_1, \\ \vec{e}_3 &= \vec{f}_3 + \lambda_{32}\vec{e}_2 + \lambda_{31}\vec{e}_1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Коэффициенты λ_{mn} можно найти, подчинив векторы \vec{e}_m условиям ортогональности: $\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = 0$, $m \neq n$. Действительно, умножив 2-ое уравнение скалярно на вектор \vec{e}_1 , получим

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_{21}\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 0,$$

откуда

$$\lambda_{21} = -\frac{\vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}. \quad (4.27)$$

Далее, умножив 3-е уравнение на \vec{e}_1 и \vec{e}_2 соответственно, найдём

$$\lambda_{31} = -\frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}, \quad \lambda_{32} = -\frac{\vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2}{\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2}. \quad (4.28)$$

Несложно заметить, что этот метод пригоден для векторных пространств любой размерности, поскольку процедура (4.26) даёт алгоритм для построения ортогонального базиса. Однако для пространств малых размерностей, в частности для трёхмерного пространства, с его помощью можно получить конкретные формулы, задающие явный вид трёхмерного (двумерного) ортогонального базиса через метрические коэффициенты $\vec{f}_m \cdot \vec{f}_n$.

Итак, по базисным векторам $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ косоугольного базиса построим вместо (4.26) три новых вектора

$$\vec{e}_1 = \vec{f}_1,$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_2 &= \vec{f}_2 + \alpha_{21}\vec{f}_1, \\ \vec{e}_3 &= \vec{f}_3 + \alpha_{32}\vec{f}_2 + \alpha_{31}\vec{f}_1\end{aligned}\quad (4.29)$$

и потребуем их попарной ортогональности, т.е.

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0.$$

Выписав три скалярных произведения и приравняв их к нулю, получим

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 \cdot (\vec{f}_2 + \alpha_{21}\vec{f}_1) &= 0; \\ \vec{f}_1 \cdot (\vec{f}_3 + \alpha_{32}\vec{f}_2 + \alpha_{31}\vec{f}_1) &= 0; \\ (\vec{f}_2 + \alpha_{21}\vec{f}_1) \cdot (\vec{f}_3 + \alpha_{32}\vec{f}_2 + \alpha_{31}\vec{f}_1) &= \\ &= \vec{f}_2 \cdot (\vec{f}_3 + \alpha_{32}\vec{f}_2 + \alpha_{31}\vec{f}_1) + \alpha_{21}\vec{f}_1 \cdot (\vec{f}_3 + \alpha_{32}\vec{f}_2 + \alpha_{31}\vec{f}_1) = \\ &= \vec{f}_2 \cdot (\vec{f}_3 + \alpha_{32}\vec{f}_2 + \alpha_{31}\vec{f}_1) + 0 = 0.\end{aligned}$$

Положив для удобства $\vec{f}_m \cdot \vec{f}_n = g_{mn}$, имеем уравнение

$$\alpha_{21}g_{11} + g_{12} = 0 \quad (4.30)$$

и систему

$$\begin{aligned}\alpha_{31}g_{11} + \alpha_{32}g_{12} &= -g_{31}, \\ \alpha_{31}g_{12} + \alpha_{32}g_{22} &= -g_{32},\end{aligned}\quad (4.31)$$

решения которых имеют вид

$$\alpha_{21} = -\frac{g_{12}}{g_{11}}, \quad \alpha_{31} = -\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \alpha_{32} = -\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (4.32)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} g_{31} & g_{12} \\ g_{32} & g_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{31} \\ g_{12} & g_{32} \end{vmatrix}. \quad (4.33)$$

Подставив (4.32) в (4.29), получим явный вид трёхмерного ортогонального базиса:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{f}_1, \\ \vec{e}_2 &= \vec{f}_2 - \frac{g_{12}}{g_{11}}\vec{f}_1, \\ \vec{e}_3 &= \vec{f}_3 - \frac{\Delta_2}{\Delta}\vec{f}_2 - \frac{\Delta_1}{\Delta}\vec{f}_1,\end{aligned}\quad (4.34)$$

который можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

где C — матрица перехода от базиса $\mathcal{B} = (\vec{f}_1 \vec{f}_2 \vec{f}_3)$ к базису $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ 0 & 1 & \alpha_{32} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{g_{12}}{g_{11}} & -\frac{\Delta_1}{\Delta} \\ 0 & 1 & -\frac{\Delta_2}{\Delta} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Пример 4.6. Для косоугольной системы координат и векторов \vec{a} и \vec{b} из примера 4.5 найти преобразование, переводящее ее базис в ортогональный и определить координаты векторов \vec{a} и \vec{b} в ортогональном базисе. Вычислить их длины и скалярное произведение и сравнить с результатами, полученными ранее.

Решение. Как следует из примера 4.5, матрица Грама косоугольного базиса $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ имеет вид

$$G(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = \|g_{mn}\| = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Искомое преобразование, переводящее косоугольный базис $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ в ортогональный $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, определяется матрицей (4.36). Поскольку, согласно (4.33),

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

то

$$\alpha_{31} = -\frac{g_{21}}{g_{11}} = -\frac{1}{4}, \quad \alpha_{31} = -\frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_{32} = -\frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{2}{3}.$$

В силу этого для матрицы преобразования (4.36) имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Таким образом, ортогональный базис, согласно (4.35), определится соотношением

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = C^T \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Для определения координат векторов \vec{a} и \vec{b} в ортогональном базисе $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, найдём, исходя из (4.38):

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

тогда

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/4 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

и, соответственно,

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Для работы с векторами \vec{a} и \vec{b} в ортогональном базисе $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ выпишем его матрицу Грама:

$$G(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \|g_{mn}\| = \|\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n\|.$$

В силу ортогональности нового базиса все ее недиагональные элементы будут равны нулю: $\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = 0$, $m \neq n$, а диагональные элементы, согласно (4.39), найдутся как

$$g_{11} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = (1 \ 0 \ 0)G(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4;$$

$$g_{22} = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{4} \ 1 \ 0\right)G(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{3}{4};$$

$$g_{33} = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{3} \quad -\frac{2}{3} \quad 1\right) G(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \begin{pmatrix} -1/4 \\ -2/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{8}{3}.$$

Таким образом,

$$G(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Теперь, зная координаты векторов \vec{a} (4.41) и \vec{b} (4.42) в ортогональном базисе и его матрицу Грама (4.43), найдём

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8/3 \\ 1 \end{pmatrix} = 28; \\ \vec{a} \cdot \vec{a} &= \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11/4 \\ 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} = 35; \\ \vec{b} \cdot \vec{b} &= \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 8/3 \\ 1 \end{pmatrix} = 24, \end{aligned}$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{28}{\sqrt{24 \cdot 35}} \approx \frac{28}{28,98} \approx 0,96,$$

т.е. $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}) \approx 15^\circ$ и, соответственно,

$$\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{28}{\sqrt{24}} \approx 5,7.$$

Как видим, полученные значения полностью совпадают со значениями, вычисленными в предыдущей задаче.

Заметим, что с помощью дополнительного преобразования нормировки, матрица которого имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3/5} \end{pmatrix}$$

можно от ортогонального базиса $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ перейти к ортонормированному базису $\mathcal{B}'' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = D^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Пример 4.7. Показать, что скалярное произведение двух векторов независимо (или инвариантно) от выбора системы координат.

Решение. Выше было показано, что координаты точек и векторов в пространстве, вообще говоря, различны в разных системах координат. Покажем, что значение скалярного произведения не зависит от выбора системы координат.

Действительно, пусть в базисе $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ два вектора имеют координаты $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, а в базисе $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3) = \mathcal{B}C$, соответственно, координаты $\vec{a} = (a'_1, a'_2, a'_3)$, $\vec{b} = (b'_1, b'_2, b'_3)$. Старые и новые координаты векторов связаны соотношениями (3.13), т.е.

$$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (4.44)$$

Скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} в базисе \mathcal{B} имеет вид

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \ a_2 \ a_3)G \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = (a_1 \ a_2 \ a_3)\mathcal{B}^T\mathcal{B} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Поскольку преобразование базиса осуществляется с помощью неособой матрицы C , то для неё всегда существует обратная матрица C^{-1} , такая что $CC^{-1} = \mathbb{I}$ и $(C^{-1})^T C^T = \mathbb{I}$, и (4.45) можно записать как

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \ a_2 \ a_3)(C^{-1})^T C^T \mathcal{B}^T \mathcal{B} C C^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Отсюда с учётом (4.44) и того, что $\mathcal{B}' = \mathcal{B}C$, найдём

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a'_1 \ a'_2 \ a'_3)(\mathcal{B}')^T \mathcal{B}' \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = (a'_1 \ a'_2 \ a'_3)G' \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}.$$

Это и означает, что скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ при замене базиса не меняет своего значения.

Таким образом, скалярное произведение векторов является инвариантным относительно выбора (а значит, и преобразования) системы координат.

◇ Это утверждение потребует нам при использовании векторного исчисления в аналитической геометрии. Например, если треугольник задать тремя векторами, то при переходе от одной системы координат к другой углы и стороны треугольника не меняют своих значений.

4.4. Преобразование прямоугольных координат в пространстве

Выше мы рассмотрели преобразование прямоугольных координат на плоскости. Рассмотрим аналогичную задачу в пространстве.

Теорема 4.2. *Для того чтобы равенство*

$$(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \vec{e}'_3) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)C \quad (4.46)$$

определяло переход от одного ортонормированного базиса $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ к другому $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$, необходимо и достаточно, чтобы матрица перехода C была ортогональной.

Доказательство. Пусть \mathcal{B} и \mathcal{B}' — два ортонормированных базиса, тогда их матрицы Грама являются единичными:

$$\|\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n\| = \|\vec{e}'_m \cdot \vec{e}'_n\| = g_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (4.47)$$

Из (4.47):

$$(\vec{e}'_1 \ \vec{e}'_2 \ \vec{e}'_3) \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

с учётом (4.46) имеем

$$(\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3)CC^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \vec{e}_3) \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Полученное равенство справедливо только при условии $CC^T = \mathbb{I}$, которое и является условием ортогональности матрицы C .

Наоборот, если C — ортогональная матрица и $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — ортонормированный базис, то для базиса $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$, полученного по формуле

$$(\vec{e}'_1 \vec{e}'_2 \vec{e}'_3) = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)C,$$

условие его ортогональности

$$(\vec{e}'_1 \vec{e}'_2 \vec{e}'_3) \begin{pmatrix} \vec{e}'_1 \\ \vec{e}'_2 \\ \vec{e}'_3 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3)CC^T \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3) \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

обеспечивается ортогональностью матрицы C : $CC^T = \mathbb{I}$.

Следствие 4.2.1. Если равенство

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

задает переход от прямоугольной системы координат $Oxyz$ к прямоугольной системе координат $O'x'y'z'$, то матрица C ортогональна. Наоборот, если система координат $Oxyz$ прямоугольна и матрица C ортогональна, то система координат $O'x'y'z'$ также прямоугольна.

4.5. Векторное произведение двух векторов и его свойства

Сначала дадим определение правой и левой тройки векторов, правой и левой системы координат.

Пусть в пространстве выбрана ориентация. Здесь будет уместно еще раз и более подробно рассмотреть это понятие. Напомним, что любое пространство (плоскость, прямая) имеют ровно два класса одноименных базисов (см. разд. «Ориентация прямой, плоскости и пространства»). Все базисы одного класса можно получить из единственного непрерывной его деформацией, тогда как непрерывный переход базиса из одного класса в другой невозможен! Поэтому изначально в пространстве можно выбрать один из этих двух базисов и объявить его исходным для получения остальных. Такой выбор и называется *выбором ориентации пространства*. На рис. 37 приведены возможные ориентации прямой, плоскости и пространства. В левой колонке показаны базисы левой ориентации, а в правой — правой ориентации (для простоты построений выбраны ортонормированные базисы).

Выбор левой и правой ориентации (базиса) одной и той же прямой пояснений не требует. Очевидно, что один базис из другого получается зеркальным отображением относительно начала координат. Само направление стрелок объясняет название ориентаций.

Для ориентации плоскостей к уже ориентированной прямой — оси Ox — добавляется прямая, пересекающая ее в начале координат. Ориентация этой прямой и задает ориентацию плоскости — направление оси Oy . Очевидно, что левый базис получается из правого зеркальным отображением относительно одной из координатных осей.

Для ориентации пространства к уже ориентированной плоскости xOy добавляется прямая, пересекающая эту плоскость в точке O . Ориентация этой прямой и задает ориентацию пространства — направление оси Oz . Очевидно,

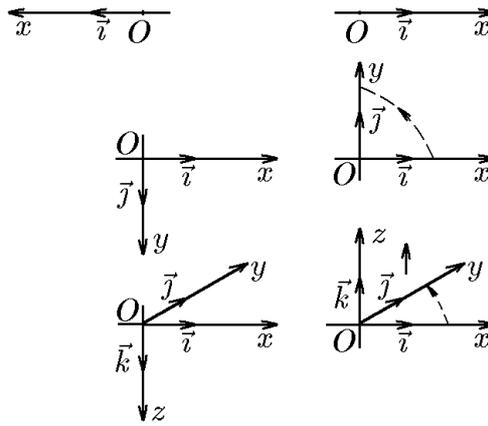


Рис. 37.

что левый базис получается из правого зеркальным отображением относительно любой координатной поверхности.

Таким образом, задать ориентацию означает задать направление поступательного движения по прямой, направление вращения на плоскости и направление поступательного движения винта при его вращении в пространстве. Заметим, что если для прямой и плоскости выбор порядка следования базисных векторов при заданной ориентации труда не составляет, то для пространственного случая возможных затруднений можно избежать с помощью различных мнемонических правил. Одно из них — правило правого и левого винта — мы уже сформулировали выше. Другое, называемое правилом правой и левой руки, формулируется следующим образом.

◆ Тройка некопланарных векторов, отнесённых к общему началу O , называется *правой*, если составляющие ее векторы располагаются в порядке нумерации аналогично тому, как расположены большой (по вектору \vec{a}), указательный (по вектору \vec{b}) и средний (по вектору \vec{c}) пальцы правой руки (рис. 38).

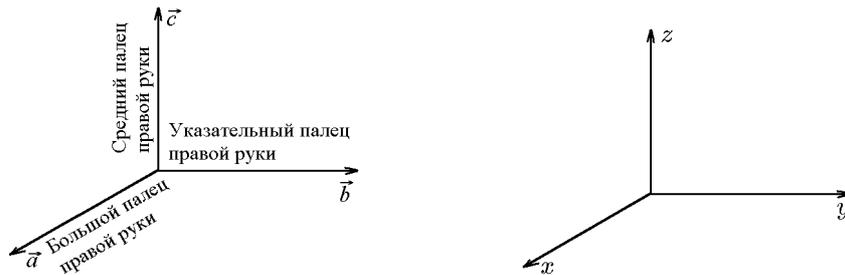


Рис. 38. Правая тройка векторов Правая система координат

◆ Тройка некопланарных векторов, отнесенных к общему началу O , называется *левой*, если составляющие ее векторы располагаются в порядке нумерации аналогично тому, как расположены большой (по вектору \vec{a}), указательный (по вектору \vec{b}) и средний (по вектору \vec{c}) пальцы левой руки (рис. 39).

◆ Произвольную упорядоченную тройку некопланарных векторов в ориентированном пространстве, одноименную с его базисом, будем называть *положительной*, в противном случае — *отрицательной*.

Такая терминология имеет простое объяснение. Пусть три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в базисе $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ задаются своими координатами: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Тогда, согласно теоремам 3.1 и 3.2, эта тройка векто-

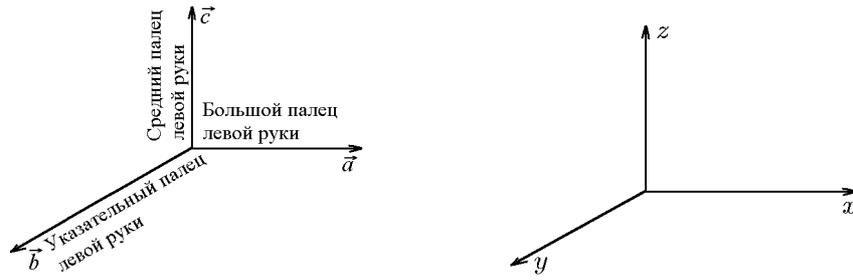


Рис. 39. Левая тройка векторов Левая система координат

ров будет одноименной с базисом, т.е. положительной, при условии

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} > 0 \quad (4.49)$$

и разноименным в противном случае.

Оценка (4.49) позволяет легко установить характеристику произвольной тройки векторов в ориентированном пространстве.

На плоскости оценка (4.49) заменяется двумерным определителем

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0, \quad (4.50)$$

а на прямой — одномерным

$$a_1 > 0. \quad (4.51)$$

Из оценки (4.51) следует, что на ориентированной прямой с базисным ортом \vec{e}_1 вектор $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1$, имеющий положительную координату, сонаправлен (одноименный) с вектором \vec{e}_1 . Естественно, что вектор $\vec{a} = a_1 \vec{e}_1$ с координатой $a_1 < 0$ имеет противоположное с вектором \vec{e}_1 направление (разноименный). С учётом этого и приняв во внимание, что $|a_1|$ задает длину вектора \vec{a} , величину a_1 называют еще *ориентированной длиной* l .

Аналогично на ориентированной плоскости величина

$$S = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \quad (4.52)$$

называется *ориентированной площадью параллелограмма*, построенного на векторах $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$. В свою очередь, в ориентированном пространстве величина

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (4.53)$$

называется *ориентированным объёмом параллелепипеда*, построенного на векторах $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Далее, если противное не оговорено, мы будем пользоваться только правой ориентацией.

♦ Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется новый вектор \vec{c} , который обозначается символами

$$\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \times \vec{b}$$

и определяется тремя условиями:

- 1) модуль вектора $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\widehat{ab})$;
- 2) вектор $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ перпендикулярен как вектору \vec{a} , так и вектору \vec{b} ;
- 3) вектор \vec{c} направлен так, чтобы тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ была правой, т.е. его направление соответствует «правилу правой руки». Это означает, что если векторы \vec{a}, \vec{b} и $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ приведены к общему началу, то вектор \vec{c} должен быть направлен так, как направлен средний палец правой руки, большой палец которой направлен по первому сомножителю (по \vec{a}), а указательный – по второму (по \vec{b}) (рис. 38).

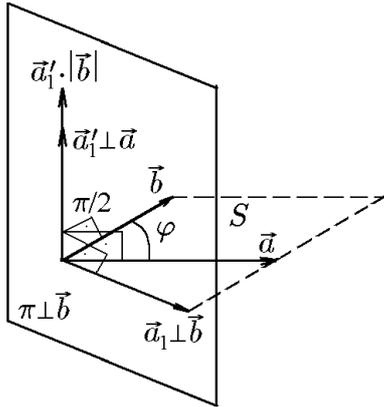


Рис. 40.

Или третье условие определяется так: вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ направлен так, что кратчайший поворот от \vec{a} к \vec{b} виден с его конца совершающимся против часовой стрелки.

Это определение в некоторых приложениях формулируется в виде следующего геометрического построения. Чтобы найти векторное произведение двух векторов $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, достаточно (рис. 40):

- 1) спроектировать вектор \vec{a} на плоскость π , перпендикулярную вектору \vec{b} ;
- 2) полученный вектор \vec{a}_1 , для которого $|\vec{a}_1| = |\vec{a}| \sin \varphi$, повернуть в этой плоскости на прямой угол так, чтобы поворот наблюдался происходящим по ходу часовой стрелки с той стороны, куда направлен вектор \vec{b} ;

3) вектор \vec{b} , который получается в результате поворота вектора \vec{a}_1 и для которого $|\vec{a}'_1| = |\vec{a}_1| = |\vec{a}| \sin \varphi$, умножается на модуль вектора $|\vec{b}|$.

Полученный в результате этих трех операций вектор и будет векторным произведением $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}'_1 \cdot |\vec{b}|$, поскольку \vec{a}'_1 по построению перпендикулярен одновременно \vec{a} и \vec{b} и его модуль $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}'_1| |\vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, причём \vec{a}, \vec{b} и $\vec{a}'_1 |\vec{b}|$ образуют положительную (правую) тройку векторов.

Свойство линейности можно представить суперпозицией свойств ассоциативности векторного произведения

$$(\alpha \vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) \tag{4.54}$$

и его дистрибутивности

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b}. \tag{4.55}$$

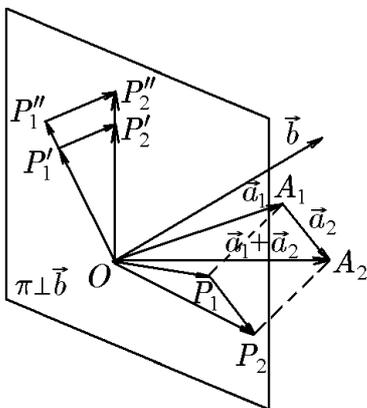


Рис. 41.

$$\vec{OA}_1 = \vec{a}_1, \quad \vec{A_1A_2} = \vec{a}_2, \quad \vec{OA_2} = \vec{OA_1} + \vec{A_1A_2} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2;$$

Справедливость (4.54) очевидным образом вытекает из геометрического построения векторного произведения (рис. 40). Из этого же геометрического построения вытекает и соотношение (4.55), для доказательства которого нам потребуются некоторые дополнительные построения (см. рис. 41). Согласно схеме геометрического построения векторного произведения, проведём следующие три операции:

а) через начало O вектора \vec{b} (рис. 41) проведём перпендикулярную к нему плоскость π и спроектируем на нее треугольник OA_1A_2 со сторонами

б) полученный в проекции треугольник OP_1P_2 повернём в плоскости π вокруг точки O на прямой угол так, чтобы с той стороны, куда направлен вектор \vec{b} , этот поворот был виден происходящим по часовой стрелке;

в) все векторы, являющиеся сторонами повернутого треугольника OP_1P_2' , умножим на $|\vec{b}|$. Получим треугольник $OP_1''P_2''$, подобный треугольнику OP_1P_2' . Но это означает, с одной стороны, что

$$\overrightarrow{OP_2''} = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b}, \quad \overrightarrow{OP_1''} = \vec{a}_1 \times \vec{b}, \quad \overrightarrow{P_1''P_2''} = \vec{a}_2 \times \vec{b},$$

а с другой, что

$$\overrightarrow{OP_2''} = \overrightarrow{OP_1''} + \overrightarrow{P_1''P_2''},$$

следовательно,

$$(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) \times \vec{b} = \vec{a}_1 \times \vec{b} + \vec{a}_2 \times \vec{b},$$

что и доказывает справедливость (4.55).

Свойство 1. Векторное произведение равно нулю (нуль-вектору) тогда и только тогда, когда векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны. В частности, $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$ для любого вектора \vec{a} , а также $[\vec{a}, \vec{0}] = 0$ — в полном соответствии с ранее введённой договорённостью, что нулевой вектор коллинеарен любому другому вектору.

Действительно, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то угол между ними равен 0° , либо 180° , если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Но $\sin 0^\circ = 0$ и $\sin 180^\circ = 0$, а значит, и $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = ab \sin 0^\circ = 0$. Следовательно, и сам вектор $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = 0$. В частности, $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$, так как $|\vec{a}, \vec{a}| = aa \sin 0 = 0$.

Свойство 2. Если $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$, то $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Действительно, если $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$, то и его длина $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = ab \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$. Отсюда, если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0$, и, следовательно, $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Свойство 3. Если векторы \vec{a} и \vec{b} приведены к общему началу и они неколлинеарны, то модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} (рис. 42).

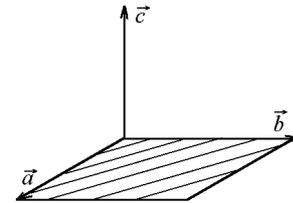


Рис. 42.

Действительно, это утверждение следует из того, что площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними.

Свойство 4. Свойство антиперестановочности сомножителей:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]. \quad (4.56)$$

Действительно, равенство (4.56) справедливо, если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, так как в этом случае $||[\vec{a}, \vec{b}]|| = ab \sin 0 = 0$, значит, и вектор $[\vec{a}, \vec{b}] = 0$ и $||[\vec{b}, \vec{a}]|| = ba \sin 0 = 0$, т.е. вектор $[\vec{b}, \vec{a}] = 0$.

Если векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны, то имеет место только (4.56). Действительно, согласно третьему условию, входящему в определение векторного произведения, векторные произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{b}, \vec{a}]$ имеют взаимно противоположные направления.

В самом деле, если сначала направим большой и указательный пальцы правой руки соответственно по векторам \vec{a} и \vec{b} , а затем по векторам \vec{b} и \vec{a} , то нам придется повернуть кисть руки так, что направление среднего пальца во втором случае окажется противоположным тому направлению, которое он имел в первом случае.

Антикоммутативность (4.56) векторного произведения вытекает непосредственно из определения и следствия 3.1.1. Действительно, во-первых, перестановка сомножителей \vec{a} и \vec{b} не меняет модуль $|\vec{a} \times \vec{b}|$. А во-вторых, для того чтобы положительная (правая) тройка векторов \vec{a} , \vec{b} и $\vec{a} \times \vec{b}$ при перестановке сомножителей \vec{a} и \vec{b} сохранила свою ориентацию, третий вектор должен изменить направление на противоположное, откуда и следует (4.56).

Свойство 5. Скалярный множитель λ можно выносить из-под знака векторного произведения:

$$[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}].$$

Действительно, а) если $\lambda = 0$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то левые и правые части данных равенств будут равны нулю, и формулы эти верны;

б) если $\lambda > 0$, то эти формулы очевидны, так как при увеличении одной стороны параллелограмма в λ раз его площадь также увеличится в λ раз;

в) если $\lambda < 0$, то при изменении знака одного из сомножителей модуль векторного произведения останется неизменным, а направление этого вектора (векторного произведения) меняется на противоположное.

Свойство 6. Справедливо соотношение

$$[\vec{a}, (\vec{b} + \vec{c})] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}], \quad [(\vec{b} + \vec{c}), \vec{a}] = [\vec{b}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{a}],$$

т.е. векторное произведение подчиняется распределительному закону.

Из свойств 4–6 следует, что векторное умножение суммы векторов на сумму векторов подчиняется обычным правилам перемножения многочленов. Нужно только следить за тем, чтобы порядок следования множителей не изменялся, например,

$$[(\vec{a} + \vec{b}), (\vec{c} - 3\vec{d})] = [\vec{a}, \vec{c}] - 3[\vec{a}, \vec{d}] + [\vec{b}, \vec{c}] - 3[\vec{b}, \vec{d}].$$

Свойство 7. Пусть i, j, k — декартов базис. Тогда векторные произведения

$$[\vec{i}, \vec{i}] = 0, \quad [\vec{j}, \vec{j}] = 0, \quad [\vec{k}, \vec{k}] = 0 \quad (4.57)$$

и

$$[\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}, \quad [\vec{k}, \vec{j}] = -\vec{i}, \quad [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}, \quad [\vec{i}, \vec{k}] = -\vec{j}. \quad (4.58)$$

Доказательство. Соотношения (4.57) справедливы, так как $|\vec{i}, \vec{i}| = 1 \cdot 1 \sin 0 = 0$. Аналогично доказывается справедливость остальных соотношений в (4.57).

Рассмотрим теперь $[\vec{i}, \vec{j}]$. Его модуль $|\vec{i}, \vec{j}| = 1 \cdot 1 \sin 90^\circ = 1$ — это площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{i} и \vec{j} . Этот параллелограмм — квадрат $OADB$, сторона которого равна 1 и площадь равна 1 (рис. 43). Таким образом, $[\vec{i}, \vec{j}]$ есть единичный вектор (его длина равна 1), который перпендикулярен как вектору \vec{i} , так и вектору \vec{j} и направлен согласно правилу правой руки.

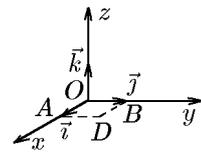


Рис. 43.

Легко заметить, что он совпадает с базисным ортом \vec{k} , т.е.

$$[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}, \quad [\vec{j}, \vec{i}] = -\vec{k}.$$

4.6. Векторное произведение векторов, заданных декартовыми координатами

Теорема 4.3. Если векторы заданы своими декартовыми координатами: $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то их векторное произведение определяется формулой

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \quad (4.59)$$

Доказательство. Составим векторное произведение заданных векторов:

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = \\ &= x_1x_2[\vec{i}, \vec{i}] + x_1y_2[\vec{i}, \vec{j}] + x_1z_2[\vec{i}, \vec{k}] + \\ &+ y_1x_2[\vec{j}, \vec{i}] + y_1y_2[\vec{j}, \vec{j}] + y_1z_2[\vec{j}, \vec{k}] + \\ &+ z_1x_2[\vec{k}, \vec{i}] + z_1y_2[\vec{k}, \vec{j}] + z_1z_2[\vec{k}, \vec{k}]. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Подставив в (4.61) соотношения (4.58), получим

$$[\vec{a}, \vec{b}] = 0 + x_1y_2\vec{k} - x_1x_2\vec{j} + (-y_1x_2)\vec{k} + 0 + y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} + 0$$

или

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}, \quad (4.61)$$

где правая часть есть определитель 3-го порядка, расписанный по элементам \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .

Итак, мы показали, что формула (4.59) справедлива.

Модуль вектора (4.61) есть

$$|[\vec{a}\vec{b}]| = \sqrt{(y_1z_2 - z_1y_2)^2 + (x_1z_2 - z_1x_2)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2}$$

или

$$|[\vec{a}\vec{b}]| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}. \quad (4.62)$$

Следствие 4.3.1. Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то

$$[\vec{a}\vec{b}] = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k} = 0,$$

а значит, и его проекции равны нулю:

$$\begin{aligned} y_1z_2 - z_1y_2 &\Rightarrow \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}; \\ x_1z_2 - z_1x_2 &\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2}; \\ x_1y_2 - y_1x_2 &\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (4.63)$$

Это условие параллельности векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, заданных своими координатами. Например, векторы $\vec{a} = (4, -6, 8)$ и $\vec{b} = (2, -3, 4)$ параллельны, так как выполняется условие (4.63) параллельности векторов:

$$\frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} = \frac{8}{4}.$$

Пример 4.8. Найти площадь треугольника с вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 1)$ и $C(0, -3, -2)$.

Решение. Треугольник построен на векторах

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 1)\vec{i} + (2 - 1)\vec{j} + (1 - 1)\vec{k} = \vec{i} + \vec{j}$$

и

$$\overrightarrow{AC} = (0 - 1)\vec{i} + (-3 - 1)\vec{j} + (-2 - 1)\vec{k} = -\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Найдём

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

и

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{3}.$$

Итак, площадь параллелограмма, построенного на векторах \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} равна $S = 3\sqrt{3}$, а площадь треугольника

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}S = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ кв. ед.}$$

Выясним механический смысл векторного произведения.

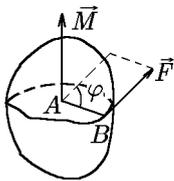


Рис. 44.

Момент силы. Пусть твёрдое тело неподвижно закреплено в точке A (рис. 44), а в точке B к нему приложена сила F .

Возникает вращающийся момент этой силы относительно точки A , численно равный $AB \cdot F \sin \varphi$, т.е. площади параллелограмма, построенного на векторах \overrightarrow{AB} и \vec{F} . В теоретической механике этот момент определяется вектором

$$\vec{m}_A(\vec{F}) = \vec{M} = [\overrightarrow{AB}, \vec{F}] \quad \text{или} \quad \vec{M} = \overrightarrow{AB} \times \vec{F}.$$

В частности, момент относительно начала координат $m(\vec{F}) = [\vec{r}, \vec{F}]$, где \vec{r} — радиус-вектор точки приложения силы.

Пример 4.9. Точка $A(2, -1, 1)$ твёрдого тела закреплена, в точке $B(0, 2, 4)$ тела приложена сила $\vec{F} = (2, 0, 1)$. Найти момент силы $m_A(\vec{F}) = M$ относительно точки A .

Решение. Вектор \overrightarrow{AB} имеет координаты $\overrightarrow{AB} = (0 - 2, 2 - (-1), 4 - 1)$ или $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 3)$. Вращающий момент

$$m_A(\vec{F}) = \vec{M} = [\overrightarrow{AB}, \vec{F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Значение момента

$$|m_A(\vec{F})| = |M| = \sqrt{3^2 + 8^2 + (-6)^2} = \sqrt{109}.$$

4.7. Скалярное и векторное произведение. Определитель Грама

Согласно определению векторного произведения,

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Отсюда

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \varphi = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \varphi) = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \varphi.$$

С учётом того, что

$$|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \varphi = (\vec{a} \cdot \vec{b})^2, \quad |\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{a}), \quad |\vec{b}|^2 = (\vec{b}, \vec{b}),$$

запишем

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

или

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2. \quad (4.64)$$

◆ Формула (4.64) называется *основным тождеством*, связывающим квадраты векторного и скалярного произведений.

Нетрудно заметить, что основное тождество (4.64) можно записать в виде определителя

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix}. \quad (4.65)$$

◆ Определитель (4.65) называется *определителем Грама* векторов \vec{a} и \vec{b} и обозначается $\Gamma(\vec{a}, \vec{b})$, т.е.

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix}. \quad (4.66)$$

Таким образом, основное тождество (4.64) можно записать так:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \Gamma(\vec{a}, \vec{b}) \geq 0. \quad (4.67)$$

Если учесть, что

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = S_{\text{пар}}^2,$$

где $S_{\text{пар}}$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , то получим равенство

$$S_{\text{пар}} = \sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})}. \quad (4.68)$$

◇ Соотношение (4.68) придает наглядный геометрический смысл определителю Грама двух векторов.

Очевидно, что высота параллелограмма, опущенного на сторону, представляющую вектор \vec{a} , можно найти как

$$h = \frac{S_{\text{пар}}}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})}}{|\vec{a}|} = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})}}. \quad (4.69)$$

Если под определителем Грама одного вектора понимать $(\vec{a}, \vec{a}) = \Gamma(\vec{a})$, то

$$h = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})}{\Gamma(\vec{a})}}. \quad (4.70)$$

Наряду с этим с помощью определителя Грама можно сформулировать еще один критерий линейной независимости двух векторов.

Два вектора: \vec{a} и \vec{b} будут линейно независимы только при условии $\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$. В противном случае они линейно зависимы (т.е. коллинеарны).

Ниже мы покажем, что этот критерий допускает обобщение на случай произвольного числа векторов.

Пример 4.10. С помощью определителя Грама вычислить площадь треугольника, заданного в примере 4.8, и его высоту, опущенную на сторону AB .

Решение. Координаты векторов \vec{AB} и \vec{AC} уже найдены в примере 4.8: $\vec{AB} = (1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (-1, -4, -3)$, а площадь треугольника S_{ABC} равна половине площади $S_{\text{пар}}$ параллелограмма, построенного на векторах \vec{AB} и \vec{AC} , поэтому по формуле (4.68):

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{1}{2} S_{\text{пар}} = \frac{1}{2} \sqrt{\Gamma(\vec{AB}, \vec{AC})} = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} \vec{AB}^2 & (\vec{AB}, \vec{AC}) \\ (\vec{AC}, \vec{AB}) & \vec{AC}^2 \end{array} \right|^{1/2} = \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} 2 & -5 \\ -5 & 26 \end{array} \right|^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{27} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \end{aligned}$$

получим значение S_{ABC} , совпадающее с полученным в примере 4.8.

Высоту h , опущенную на сторону AB , найдём аналогично высоте параллелограмма по формуле (4.69):

$$h = \frac{S_{ABC}}{|\vec{AB}|} = \frac{3\sqrt{3}/2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Пример 4.11. Задачу из примера 4.9 решить с помощью определителя Грама.

Решение. Плечо силы $\vec{F} = (2, 0, 1)$, приложенной к точке B , найдено в примере 4.9: $\vec{AB} = (-2, 3, 3)$, поэтому

$$m_A(\vec{F}) = |[\vec{AB}, \vec{F}]| = \sqrt{\Gamma(\vec{AB}, \vec{F})} = \left| \begin{array}{cc} \vec{AB}^2 & (\vec{AB}, \vec{F}) \\ (\vec{F}, \vec{AB}) & \vec{F}^2 \end{array} \right|^{1/2} = \left| \begin{array}{cc} 22 & -1 \\ -1 & 5 \end{array} \right|^{1/2} = \sqrt{109}$$

можно найти без помощи вектора $\vec{M} = [\vec{AB}, \vec{F}]$.

◇ В заключение, как и для скалярного произведения, обсудим возможность введения операции, обратной векторному произведению векторов, т.е. операции «деления вектора на вектор». Начала двух векторов \vec{a} и \vec{b} поместим в одну точку O , а через точку B , соответствующую концу вектора \vec{b} , проведём прямую ℓ параллельно вектору \vec{a} (рис. 45).

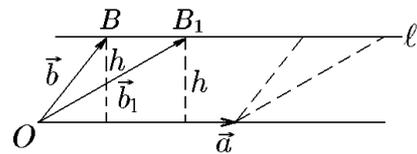


Рис. 45.

Теперь из точки O проведём вектор \vec{b}_1 , заканчивающийся в произвольной точке B_1 , лежащей на прямой ℓ . Из рис. 45 видно, что векторные произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{a}, \vec{b}_1]$ совпадут:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \vec{b}_1] = \vec{c}.$$

Таким образом, если известны векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}]$ и один из сомножителей, например \vec{a} , то существует бесконечное множество векторов, которые при векторном умножении на вектор \vec{a} дадут тот же самый вектор \vec{c} . Отсюда следует, что операция, обратная векторному произведению («операция деления вектора на вектор»), определена неоднозначно и потому не получила широкого применения.

5. Произведение трех векторов

Рассмотрим теперь три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Если перемножить любые два вектора скалярно, например $\vec{a} \cdot \vec{b}$, то третий вектор \vec{c} нужно умножать на скаляр (\vec{a}, \vec{b}) . Умножение вектора на скаляр уже рассмотрено выше. Если же два любых вектора, например три вектора \vec{a} , \vec{b} , мы перемножим векторно: $\vec{a} \times \vec{b}$, то полученный вектор с третьим вектором \vec{c} мы можем перемножить или скалярно, или векторно. В первом случае мы получим векторно-скалярное, или смешанное, произведение, а во втором — двойное векторное произведение. К их рассмотрению мы и переходим.

5.1. Смешанное произведение векторов и его свойства

◆ Пусть даны три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Умножив векторно вектор \vec{a} на вектор \vec{b} , получим вектор $[\vec{a}, \vec{b}]$. Если этот вектор умножить скалярно на вектор \vec{c} , получим число $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$, которое называется *векторно-скалярным*, или *смешанным*, произведением трех векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} и обозначается

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}).$$

Смешанное произведение — скалярная величина.

Геометрический смысл смешанного произведения трех векторов определяется следующей теоремой.

Теорема 5.1. *Смешанное произведение $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$ равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , взятому со знаком плюс, если эта тройка векторов правая, и со знаком минус, если эта тройка левая, т.е.*

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \pm V. \quad (5.1)$$

Если векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарны, то $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = 0$.

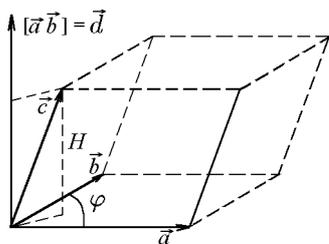


Рис. 46.

Доказательство. Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} — три некопланарных вектора. На этих векторах как на ребрах построим параллелепипед (рис. 46). Векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{d}$ есть вектор, перпендикулярный \vec{a} и \vec{b} , а модуль

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{d}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$$

есть площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} . Найдём скалярное произведение

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{d}, \vec{c}) = |\vec{d}| \cdot \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c}, \quad (5.2)$$

а $\text{pr}_{\vec{a}}\vec{c} = H$ — высота параллелепипеда. Тогда (5.2) примет вид

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = dH = SH = V$$

— объём параллелепипеда. Если векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} образуют левую тройку векторов, то $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = -V$. В общем случае $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = \pm V$, что и требовалось доказать.

Следствие 5.1.1. Объём V_1 треугольной пирамиды, образованной векторами \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , равен

$$V_1 = \frac{1}{6}V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}|. \quad (5.3)$$

Отметим основные свойства смешанного произведения векторов.

Свойство 1 (ассоциативности). Смешанное произведение не изменяется, если в нём поменять местами знаки векторного (\times) и скалярного (\cdot) умножения, т.е.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}). \quad (5.4)$$

Действительно, оба эти произведения имеют одинаковые абсолютные величины, равные объёму параллелепипеда, построенному на перемножаемых векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Поскольку в правой части (5.4) сомножители в скалярном произведении можно поменять местами, то мы будем иметь

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = ([\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}).$$

Отсюда следует, что если тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая, то и тройка $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$, полученная циклической перестановкой, тоже правая (см. пример 3.3). Это означает, что произведения в (5.4) совпадают как по абсолютной величине, так и по знаку, т.е. соотношение (5.4) является равенством.

◇ В силу ассоциативности смешанного произведения для него используется обозначение

$$([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

без указания порядка векторного и скалярного произведений.

Свойство 2. Смешанное произведение не изменяется, если переставить перемножаемые векторы в круговом (циклическом) порядке:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}).$$

Действительно, в этом случае не изменяется ни объём параллелепипеда, ни ориентация векторов, на которых он построен.

Свойство 3. При перестановке любых двух соседних векторов смешанное произведение изменяет только знак:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}),$$

поскольку объём параллелепипеда не изменяется, а тройка векторов меняет ориентацию.

Свойство 4. Смешанное произведение векторов равно нулю:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \quad (5.5)$$

тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы компланарны.

Действительно, объём параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах, равен нулю и, наоборот, если объём равен нулю, то векторы компланарны.

◇ Условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0.$$

◇ В частности, смешанное произведение равно нулю, если два его сомножителя коллинеарны:

$$(\vec{a}, \alpha\vec{a}, \vec{b}) = \alpha([\vec{a}, \vec{a}], \vec{b}) = 0.$$

◇ Если для трех векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) > 0$, то тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая, в противном случае тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая.

5.2. Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей

Теорема 5.2. Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими проекциями (координатами) $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то смешанное произведение этих векторов определяется формулой

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (5.6)$$

Доказательство. Известно, что

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

и $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$. Воспользовавшись теоремой о выражении скалярного произведения двух векторов через проекции сомножителей (4.9), будем иметь

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

или, что то же,

$$[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Ранее мы показали, что если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$. А согласно теореме 5.2, если смешанное произведение равно нулю, то векторы линейно зависимы. Поэтому необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ запишется в таком виде:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.7)$$

Пример 5.1. Даны координаты вершины пирамиды $O(0; 0; 0)$, $A(2; 3; 0)$, $B(3; 0; 4)$ и $C(0; 4; 5)$. Найти 1) объём пирамиды; 2) плоский угол AOB ; 3) площадь грани OAC ; 4) длину вектора \overrightarrow{AB} .

Решение. 1. Построим пирамиду (рис. 47). Ее объём втрое меньше объёма треугольной призмы с основанием OAB и боковым ребром OC , а объём этой призмы вдвое меньше объёма параллелепипеда, построенного на векторах \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} и \overrightarrow{OC} . Следовательно, в силу (5.3) найдём

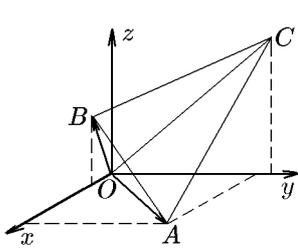


Рис. 47.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \cdot \overrightarrow{OC}|.$$

Запишем координаты векторов: $\overrightarrow{OA} = (2, 3, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (3, 0, 4)$ и $\overrightarrow{OC} = (0, 4, 5)$. Следовательно,

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} |-77| = 12\frac{5}{6} \text{ куб. ед.}$$

Знак минус указывает на то, что векторы \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} и \overrightarrow{OC} образуют левую тройку.

2. Угол $\angle AOB$ — это угол между векторами \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{OB} :

$$\cos \varphi = \frac{(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})}{OA \cdot OB} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2} \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{6}{5\sqrt{13}}.$$

5.3. Смешанное произведение векторов и определитель Грама

Координатная форма (5.6) смешанного произведения позволяет записать следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{pmatrix} = \Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \geq 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отсюда объём параллелепипеда, построенного на векторах \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , можно записать в виде

$$V_{\text{пар}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}. \quad (5.9)$$

Соответственно, высота параллелепипеда, опущенная на плоскость векторов \vec{a} и \vec{b} ,

$$h = \frac{V_{\text{пар}}}{S_{\text{пар}}} = \frac{\sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}}{\sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})}} = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})}}. \quad (5.10)$$

С помощью определителя Грама можно сформулировать еще один критерий линейной независимости трех векторов: три вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} будут линейно

независимы только при условии $\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$; в противном случае они линейно зависимы (т.е. компланарны).

◇ Три взаимно ортогональных ненулевых вектора всегда линейно независимы:

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2 c^2 \neq 0.$$

Пример 5.2. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, опущенную из конца вектора \vec{c} , если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 2$, а сами векторы образуют друг с другом одинаковые углы, равные $\pi/3$.

Решение. Следуя (5.10), найдём определители Грама:

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

тогда

$$h = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

5.4. Двойное векторное произведение

◇ Двойным векторным произведением векторов называется вектор \vec{f} , равный

$$\vec{f} = [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]. \quad (5.11)$$

Теорема 5.3. Для всех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливо соотношение

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}). \quad (5.12)$$

Доказательство. Пусть

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \quad \vec{c} = (x_3, y_3, z_3).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{i}\{y_1(x_2 y_3 - y_2 x_3) + z_1(x_2 z_3 - z_2 x_3) + (x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3)\} - \\ &\quad - \vec{j}\{x_1(x_2 z_3 - z_2 x_3) - y_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) + (y_1 y_2 y_3 - y_1 y_2 y_3)\} + \\ &\quad + \vec{k}\{-x_1(x_2 z_3 - z_2 x_3) - y_1(y_2 z_3 - z_2 y_3) + (z_1 z_2 z_3 - z_1 z_2 z_3)\} = \\ &= (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k})(x_1 x_3 + y_1 y_3 + z_1 z_3) - \\ &\quad - (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k})(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

◇ При доказательстве формулы (5.12) мы неявным образом опирались на два допущения:

а) векторы \vec{b} и \vec{c} предполагались неколлинеарными, т.е. $[\vec{b}, \vec{c}] \neq 0$;

б) векторы \vec{b} и \vec{c} предполагались не перпендикулярными вектору \vec{a} одновременно, т.е. $(\vec{b}, \vec{a})^2 + (\vec{c}, \vec{a})^2 \neq 0$.

Однако если хотя бы одно из этих допущений не выполняется, то обе части формулы (5.12) обращаются в нуль и она сохраняет свою силу независимо от этих допущений.

Следствие 5.3.1. Вектор двойного векторного произведения $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ лежит в плоскости векторов \vec{b} и \vec{c} . Причём если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ коллинеарен вектору \vec{b} , а если $\vec{a} \perp \vec{c}$, то вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$ коллинеарен вектору \vec{c} .

Следствие 5.3.2. Для любых трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ справедливо равенство

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = 0. \quad (5.13)$$

Соотношение (5.13) называется *тождеством Якоби*.

Доказательство. Действительно, из (5.12) следует

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}) + \vec{c}(\vec{b}, \vec{a}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}) + \vec{a}(\vec{c}, \vec{b}) - \vec{b}(\vec{c}, \vec{a}) = 0.$$

Свойство ассоциативности (независимости порядка выполнения операций умножения), характерное для смешанного произведения трёх векторов, для двойного векторного произведения в общем случае несправедливо. Действительно, рассмотрим двойное векторное произведение со следующим порядком: $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$. Согласно свойству антикоммутативности, его можно записать в виде, соответствующем порядку в формуле (5.12):

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = -[\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] \quad (5.14)$$

Применив эту формулу к (5.14), т.е. заменив формально в (5.12) $\vec{a} \Rightarrow \vec{c}$, $\vec{b} \Rightarrow \vec{a}$, $\vec{c} \Rightarrow \vec{b}$, получим

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = -[\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] = -\{\vec{a}(\vec{c}, \vec{b}) - \vec{b}(\vec{c}, \vec{a})\} = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{a}(\vec{c}, \vec{b})$$

или

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{a}(\vec{c}, \vec{b}). \quad (5.15)$$

Сравнив (5.12) и (5.15), находим, что в общем случае

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] \neq [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]].$$

Обе формулы: (5.12) и (5.14), объединяются следующим правилом разложения векторного произведения.

◇ Векторно-векторное (двойное векторное) произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ равно среднему вектору, умноженному на скалярное произведение крайних, минус тот вектор, который векторно перемножается со средним, умноженный на скалярное произведение двух остальных.

◇ Множество трехмерных векторов относительно операций сложения векторов, умножения на число и векторного произведения образуют алгебру Ли ($[[\vec{a}, \vec{a}]] = 0$ и для двойного векторного произведения справедливо тождество Якоби).

6. Определение основных характеристик треугольника методами векторной алгебры

Одной из основных задач элементарной геометрии является описание треугольника. В элементарной геометрии треугольник считается заданным, если известны три его стороны или две стороны и угол между ними. Последнее в векторной алгебре означает задание двух векторов. Пусть векторы \vec{a} и \vec{b} , выходящие из точки C , определяют треугольник ABC (рис. 48).

Покажем, что все характеристики этого треугольника легко найти методами векторной алгебры.

1. Длина стороны AB

Вектор \overrightarrow{AB} есть разность

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a},$$

тогда

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (\vec{b} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a}) = b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + a^2,$$

откуда

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}}. \quad (6.1)$$

С учётом определения скалярного произведения: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = b^2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = ab \cos \varphi$, и соотношение (6.1) можно записать в виде

$$|AB| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}.$$

Это соотношение известно в элементарной геометрии как теорема косинусов.

2. Второй угол, прилежащий к стороне CA (угол $\psi = \angle CAB$)

Из рис. 48 следует

$$(-\vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{a}| |\vec{b} - \vec{a}| \cos \psi,$$

откуда

$$\cos \psi = \frac{-\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a})}{|\vec{a}| |\vec{b} - \vec{a}|} = \frac{a^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \sqrt{a^2 + b^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}}} = \frac{a^2 - ab \cos \varphi}{a \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi}}. \quad (6.2)$$

3. Вектор-высота \vec{h} , опущенная из вершины B , и её длина

Из рис. 48 следует

$$\vec{b} + \vec{h} = \overrightarrow{CH},$$

откуда

$$\vec{h} = \overrightarrow{CH} - \vec{b},$$

а с учётом

$$\overrightarrow{CH} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2} = \frac{\vec{a}}{a} b \cos \varphi$$

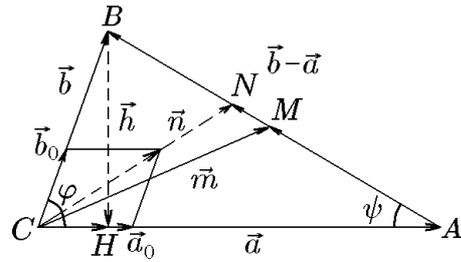


Рис. 48.

имеем

$$\vec{h} = \frac{\vec{a}(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2} - \vec{b}. \quad (6.3)$$

Из (6.3) найдём

$$\begin{aligned} |\vec{h}| &= \sqrt{(\vec{h}, \vec{h})} = \sqrt{\frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2} - |\vec{b}|^2 - 2\frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2}} = \sqrt{|\vec{b}|^2 - \frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{|\vec{a}|^2}} = \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{a}|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2} = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})}{\Gamma(\vec{a})}} = b \sin \psi. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Любая из формул (6.4) позволяет вычислить длину высоты h , опущенной из вершины B .

4. *Вектор-медиана \vec{m} , проведённая из точки C*

Из рис. 48 следует

$$\vec{m} = \vec{a} + \overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$$

или

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{a}). \quad (6.5)$$

Это соответствует утверждению известной из элементарной геометрии теоремы о том, что точка пересечения диагоналей параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , делит их пополам.

Из (6.5) найдём

$$|\vec{m}| = \frac{1}{2}|\vec{b} + \vec{a}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b})}. \quad (6.6)$$

5. *Вектор-биссектриса \vec{n} , проведённая из точки C*

Здесь мы воспользуемся тем свойством, что диагонали ромба являются не только медианами, но и биссектрисами соответствующих треугольников. Вычислив по векторам \vec{a} и \vec{b} их орты:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \quad \vec{b}_0 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|},$$

вектор биссектрисы можем записать как

$$\vec{n} = \alpha\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right). \quad (6.7)$$

Наряду с этим из рис. 48 следует, что

$$\vec{n} = \vec{a} + \overrightarrow{AN} = \vec{a} + \beta(\vec{b} - \vec{a}), \quad (6.8)$$

где β — ещё один неизвестный параметр. Оба неизвестных параметра α и β мы найдём, приравняв правые части (6.7) и (6.8):

$$\alpha\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right) = \vec{a} + \beta(\vec{b} - \vec{a}).$$

Получим

$$\left(\frac{\alpha}{|\vec{a}|} - 1 + \beta\right)\vec{a} + \left(\frac{\alpha}{|\vec{b}|} - \beta\right)\vec{b} = 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости векторов \vec{a} и \vec{b} найдём

$$1 - \beta = \frac{\alpha}{|\vec{a}|}, \quad \frac{\alpha}{|\vec{b}|} = \beta. \quad (6.9)$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$\alpha = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}, \quad \beta = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}. \quad (6.10)$$

Подставив α из (6.10) в (6.7), найдём вектор-биссектрису

$$\vec{n} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = \frac{b\vec{a} + a\vec{b}}{a + b} \quad (6.11)$$

и её длину

$$|\vec{n}| = \sqrt{(\vec{n}, \vec{n})} = \frac{\sqrt{2ab[ab - ab \cos \varphi]}}{a + b}. \quad (6.12)$$

Заметим, что параметр β позволяет записать составляющие вектора $\vec{b} - \vec{a}$ как

$$\overrightarrow{AN} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}(\vec{b} - \vec{a}), \quad \overrightarrow{NB} = (\vec{b} - \vec{a}) - \frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}(\vec{b} - \vec{a}). \quad (6.13)$$

Отсюда

$$\frac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{NB}|} = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}. \quad (6.14)$$

Это соотношение соответствует известному в элементарной геометрии утверждению, что биссектриса делит сторону на отрезки, отношение длин которых совпадает с отношением длин сторон, к которым они прилегают.

6. Площадь треугольника S_{ABC}

Из свойств векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ имеем

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{a}, \vec{b}]| = \frac{1}{2} \sqrt{([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{a}, \vec{b}])} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})}. \quad (6.15)$$

Пример 6.1. Для треугольника ABC , построенного на векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{p} - \vec{q}$, $\overrightarrow{CB} = 2\vec{p} + \vec{q}$, где $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$, методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA и AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , проведённую из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

Решение. На сторонах треугольника построим векторы $\overrightarrow{CA} = \vec{a} = \vec{p} - \vec{q}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}$. Вычислив

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= (\vec{a}, \vec{a}) = (\vec{p} - \vec{q}, \vec{p} - \vec{q}) = |\vec{p}|^2 - 2(\vec{p}, \vec{q}) + |\vec{q}|^2 = \\ &= 1 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 5 - 2\sqrt{2}; \\ |\vec{b}|^2 &= (\vec{b}, \vec{b}) = (2\vec{p} + \vec{q}, 2\vec{p} + \vec{q}) = 4|\vec{p}|^2 + 4(\vec{p}, \vec{q}) + |\vec{q}|^2 = \\ &= 4 + 4 \cdot 1 \cdot 2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 8 + 4\sqrt{2}; \\ (\vec{a}, \vec{b}) &= (\vec{p} - \vec{q}, 2\vec{p} + \vec{q}) = 2|\vec{p}|^2 - 2(\vec{q}, \vec{p}) + (\vec{p}, \vec{q}) - |\vec{q}|^2 = \\ &= 2|\vec{p}|^2 - (\vec{p}, \vec{q}) - |\vec{q}|^2 = 2 - \sqrt{2} - 4 = -2 - \sqrt{2}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

найдем определитель Грама

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{a}, \vec{b}) &= \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 - 2\sqrt{2} & -2 - \sqrt{2} \\ -2 - \sqrt{2} & 8 + 4\sqrt{2} \end{vmatrix} = \\ &= (5 - 2\sqrt{2})4(2 + 2\sqrt{2}) - (2 + 2\sqrt{2})^2 = 4(6 + \sqrt{2}) - (6 + 4\sqrt{2}) = 18. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Соотношения (6.16) и (6.17) позволяют воспользоваться рис. 48 и формулами (6.1)–(6.15):

$$\text{а) } |CA| = |\overrightarrow{CA}| = |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} |AB| &= |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(\vec{b}, \vec{b}) - 2(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{a})} = \\ &= \sqrt{8 + 4\sqrt{2} - 2(-2 - \sqrt{2}) + 5 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{17 + 4\sqrt{2}}, \\ \cos \psi &= \frac{(\vec{a}, \vec{a}) - (\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b} - \vec{a}|} = \frac{5 - 2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}}{\sqrt{(5 - 2\sqrt{2})(17 + 4\sqrt{2})}} \approx 0,798, \quad \psi \approx 37^\circ; \end{aligned}$$

б) согласно (6.15),

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{1}{2} \sqrt{18} = \frac{3}{2} \sqrt{2};$$

в) согласно (6.3),

$$\vec{h} = \frac{\vec{a}(\vec{a}, \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{a})} - \vec{b} = \frac{\vec{a}(-2 - \sqrt{2})}{5 - 2\sqrt{2}} - \vec{b} = -\frac{14 + 9\sqrt{2}}{17} \vec{a} - \vec{b} = \frac{-48 - 9\sqrt{2}}{17} \vec{p} + \frac{-3 + 9\sqrt{2}}{17} \vec{q},$$

а, согласно (6.4),

$$|\vec{h}| = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{a})}{\Gamma(\vec{a})}} = \sqrt{\frac{18}{5 - 2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{18(5 + 2\sqrt{2})}{17}};$$

г) вектор-медиана \vec{m} , согласно (6.5), равна

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{p} - \vec{q} + 2\vec{p} + \vec{q}) = \frac{3}{2}\vec{p},$$

соответственно,

$$|\vec{m}| = \frac{3}{2}|\vec{p}| = \frac{3}{2},$$

впрочем, этот же результат следует из (6.6):

$$|\vec{m}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2\sqrt{2} + 8 + 4\sqrt{2} + 2(-2 - \sqrt{2})} = \frac{3}{2};$$

д) вектор-биссектриса \vec{n} и ее модуль $|\vec{n}|$ определяются формулами (6.11) и (6.12), для упрощения примем

$$|\vec{a}| = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}} \approx 1,5; \quad |\vec{b}| = 2\sqrt{2 + \sqrt{2}} \approx 3,7; \quad (\vec{a}, \vec{b}) = -(2 + \sqrt{2}) \approx -3,4,$$

тогда

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \frac{3,7\vec{a} + 1,5\vec{b}}{5,2} = \frac{3,7(\vec{p} - \vec{q}) + 1,5(2\vec{p} + \vec{q})}{5,2} \approx 1,3\vec{p} - 0,1\vec{q}, \\ |\vec{n}| &\approx \sqrt{1,3^2|\vec{p}|^2 - 0,26(\vec{p}, \vec{q}) + 0,01|\vec{q}|^2} \approx \sqrt{1,4} \approx 1,2, \end{aligned}$$

этот же результат следует из (6.12).

7. Основные задачи векторной алгебры

7.1. Определение вектора по известному скалярному произведению с заданным вектором

Рассмотрим уравнение

$$\vec{x} \cdot \vec{a} = \alpha, \tag{7.1}$$

где \vec{x} — вектор, подлежащий определению, а вектор \vec{a} и число α — заданные величины.

Решение уравнения (7.1) эквивалентно нахождению вектора \vec{x} по его скалярному произведению с заданным вектором \vec{a} . Как мы уже знаем, решение этой задачи неоднозначно. Исследуем характер этой неоднозначности.

Пусть \vec{x} — решение уравнения (7.1). Если мы умножим его векторно на вектор \vec{a} , то мы получим некоторый вектор \vec{b} :

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}. \tag{7.2}$$

Умножив (7.2) еще раз векторно на \vec{a} , получим

$$(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}. \tag{7.3}$$

Воспользовавшись разложением двойного векторного произведения в виде (5.12) и учитывая (7.1), запишем

$$(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{a} = \vec{x}(\vec{a} \cdot \vec{a}) - \vec{a}(\vec{x} \cdot \vec{a}) = |\vec{a}|^2\vec{x} - \alpha\vec{a}. \tag{7.4}$$

Отсюда

$$|\vec{a}|^2\vec{x} - \alpha\vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$$

и, следовательно,

$$\vec{x} = \frac{1}{|\vec{a}|^2}(\alpha\vec{a} + \vec{b} \times \vec{a}). \tag{7.5}$$

Обозначив $\vec{b}/|\vec{a}|^2 = \vec{\beta}$, получим решение уравнения (7.1) в виде

$$\vec{x} = \frac{\alpha}{|\vec{a}|^2} \vec{a} + \vec{\beta} \times \vec{a}. \quad (7.6)$$

Нетрудно убедиться, что при любом выборе вектора $\vec{\beta}$ вектор \vec{x} удовлетворяет уравнению (7.1). Действительно, подставив (7.6) в (7.1):

$$\left(\frac{\alpha}{|\vec{a}|^2} \vec{a} + \vec{\beta} \times \vec{a} \right) \cdot \vec{a} = \frac{\alpha}{|\vec{a}|^2} (\vec{a}, \vec{a}) + (\vec{\beta} \times \vec{a}) \cdot \vec{a} = \alpha + 0 = \alpha,$$

получим тождество.

Таким образом, общее решение (7.6) уравнения (7.1) находится с точностью до произвольного вектора. Этот результат становится очевидным, если исходное уравнение рассматривать как одно линейное уравнение для трех неизвестных координат x_1, x_2, x_3 вектора \vec{x} :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = \alpha.$$

7.2. Определение вектора по известному векторному произведению с заданным вектором

Рассмотрим уравнение

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}, \quad (7.7)$$

где \vec{x} — искомый вектор, а векторы \vec{a} и \vec{b} — заданные перпендикулярные векторы, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Решение уравнения (7.7) эквивалентно нахождению вектора \vec{x} по его векторному произведению с заданным вектором \vec{a} . Мы уже знаем, что решение этой задачи неоднозначно. Установим характер этой неоднозначности.

Уравнение (7.7) умножим векторно на вектор \vec{a} :

$$(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}.$$

Воспользовавшись разложением (7.3) двойного векторного произведения, получим

$$\vec{x} |\vec{a}|^2 - \vec{a} (\vec{x} \cdot \vec{a}) = \vec{b} \times \vec{a}$$

или

$$\vec{x} = \frac{(\vec{x} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2}.$$

Обозначив $(\vec{x} \cdot \vec{a})/|\vec{a}|^2 = \alpha$, получим решение уравнения (7.7) в виде

$$\vec{x} = \alpha \vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2}. \quad (7.8)$$

Нетрудно убедиться, что при любом выборе скаляра α полученный вектор \vec{x} удовлетворяет уравнению (7.7). Действительно, подставив (7.8) в (7.7), с учётом соотношений $\vec{a} \times \vec{a} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$ получим тождество

$$\vec{a} \times (\alpha \vec{a} + \frac{\vec{b} \times \vec{a}}{|\vec{a}|^2}) = \alpha \vec{a} \times \vec{a} + \frac{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})}{|\vec{a}|^2} = 0 + \vec{b} \frac{\vec{a} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} - \frac{\vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{a})}{|\vec{a}|^2} = \vec{b}.$$

Таким образом, общее решение (7.8) уравнения (7.7) находится с точностью до произвольного скаляра, в отличие от решения уравнения (7.1), которое находится с точностью до произвольного вектора. Это отличие становится понятным, если исходное уравнение (7.7) рассматривать как систему линейных уравнений для определения координат x_1, x_2, x_3 искомого вектора \vec{x} через известные координаты a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\begin{aligned} -a_3x_2 + a_2x_3 &= b_1, \\ a_3x_1 - a_1x_3 &= b_2, \\ -a_2x_1 + a_1x_2 &= b_3. \end{aligned}$$

7.3. Определение вектора по известным векторному и скалярному произведениям с заданными векторами

Требуется определить неизвестный вектор \vec{x} из системы двух уравнений

$$\begin{cases} \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} = \beta, \end{cases} \quad (7.9)$$

где скаляр β и векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ считаются заданными, причём предполагается, что вектор \vec{a} перпендикулярен вектору \vec{b} и не перпендикулярен вектору \vec{c} : $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$.

Решение этой системы можно получить с помощью решений (7.6) или (7.8). Однако имеется более простой способ. Первое уравнение в (7.9) умножим векторно на вектор \vec{c} :

$$(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$$

или

$$\vec{x}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{x} \cdot \vec{c}) = \vec{b} \times \vec{c}.$$

Отсюда, воспользовавшись вторым уравнением системы, найдём вектор

$$\vec{x} = \frac{\beta \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{c}} + \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{c}}. \quad (7.10)$$

Из (7.10) следует, что вектор, заданный своими векторным и скалярным произведениями, определяется однозначно.

Пример 7.1. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{cases} \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} = -3, \end{cases} \quad (7.11)$$

если в декартовой системе координат $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 3, 2)$.

Решение. Условиями разрешимости системы (7.11) являются требования $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$. Вычислив

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 1 - 1 = 0, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 - 3 + 2 = -1,$$

выясняем, что система разрешима. Приняв во внимание, что

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k},$$

согласно (7.10), найдём

$$\vec{x} = -3 \frac{\vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{c}} + \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\vec{a} \cdot \vec{c}} = 3(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) - (5\vec{i} - 4\vec{j} + 6\vec{k}) = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}.$$

7.4. Определение вектора по трём скалярным произведениям

Требуется найти неизвестный вектор \vec{x} , если известны его скалярные произведения с тремя некопланарными векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Рассматриваемая задача сводится к решению трех уравнений

$$\vec{a} \cdot \vec{x} = \alpha, \quad \vec{b} \cdot \vec{x} = \beta, \quad \vec{c} \cdot \vec{x} = \gamma. \quad (7.12)$$

Умножим скалярно первое уравнение из (7.12) на \vec{b} , а второе на $(-\vec{a})$ и сложим их:

$$\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{x}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{x}) = \vec{b}\alpha - \vec{a}\beta.$$

Отсюда

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{x} = \alpha\vec{b} - \beta\vec{a}.$$

Это уравнение вместе с третьим уравнением исходной системы

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{x} &= \alpha\vec{b} - \beta\vec{a}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= \gamma \end{aligned} \quad (7.13)$$

дают систему вида (7.9). Решение системы (7.13), согласно (7.10), имеет вид

$$\vec{x} = \gamma \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}} + \frac{(\alpha\vec{b} - \beta\vec{a}) \times \vec{c}}{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}} = \frac{\alpha(\vec{b} \times \vec{c}) + \beta(\vec{c} \times \vec{a}) + \gamma(\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}. \quad (7.14)$$

7.5. Линейное векторное уравнение

Требуется найти неизвестный вектор \vec{x} из уравнения

$$\alpha\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b} \quad (7.15)$$

по известным векторам \vec{a}, \vec{b} и скаляру α .

Умножим исходное уравнение (7.15) скалярно на \vec{a} и получим

$$\alpha(\vec{x} \cdot \vec{a}) + (\vec{a} \times \vec{x}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

откуда следует

$$\vec{x} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{\alpha}. \quad (7.16)$$

Умножение исходного уравнения (7.15) векторно на тот же вектор дает

$$\alpha\vec{x} \times \vec{a} + (\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a}$$

или

$$\alpha(\vec{x} \times \vec{a}) + \vec{x}|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot (\vec{x} \cdot \vec{a}) = \vec{b} \times \vec{a}. \quad (7.17)$$

Исключим векторное произведение $\vec{x} \times \vec{a}$ из (7.17) с помощью исходного уравнения (7.15): $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b} - \alpha\vec{x}$, а скалярное произведение $(\vec{x} \cdot \vec{a})$ — из (7.17) с помощью (7.16). После этого уравнение (7.17) примет вид

$$\vec{x}|\vec{a}|^2 - \vec{a} \frac{(\vec{b} \cdot \vec{a})}{\alpha} - \alpha(\vec{b} - \alpha\vec{x}) = \vec{b} \times \vec{a},$$

откуда получим

$$(|\vec{a}|^2 + \alpha^2)\vec{x} = \vec{b} \times \vec{a} + \alpha\vec{b} + \frac{\vec{a}}{\alpha}(\vec{b} \cdot \vec{a})$$

и, следовательно,

$$\vec{x} = \frac{\alpha(\vec{b} \times \vec{a}) + \alpha^2\vec{b} + \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{a})}{\alpha(\alpha^2 + |\vec{a}|^2)}. \quad (7.18)$$

Пример 7.2. Решить векторное уравнение

$$2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}, \quad (7.19)$$

если $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$.

Решение уравнения (7.19) задается формулой (7.18), т.е.

$$\vec{x} = \frac{2(\vec{b} \times \vec{a}) + 4\vec{b} + \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{a})}{2(4 + |\vec{a}|^2)}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \vec{b} \times \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{j} - 3\vec{k}, \\ \vec{b} \cdot \vec{a} &= 0, \quad |\vec{a}|^2 = 3, \end{aligned}$$

то

$$\vec{x} = \frac{1}{2(4+3)} [2(-3\vec{j} - 3\vec{k}) + 4(2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})] = \frac{1}{7}(4\vec{i} - \vec{j} - 5\vec{k}).$$

7.6. Разложение заданного вектора по трём некопланарным векторам

Даны три некопланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и вектор \vec{r} . Требуется найти координаты вектора \vec{r} в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Эта задача сводится к определению трёх скаляров x_1, x_2, x_3 из уравнения

$$\vec{r} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}. \quad (7.20)$$

Умножив скалярно исходное уравнение (7.20) последовательно на векторы $(\vec{b} \times \vec{c})$, $(\vec{c} \times \vec{a})$, $(\vec{a} \times \vec{b})$, получим

$$\begin{aligned} (\vec{r}, \vec{b}, \vec{c}) &= x_1(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}), \\ (\vec{r}, \vec{c}, \vec{a}) &= x_2(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}), \\ (\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}) &= x_3(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}). \end{aligned}$$

Отсюда найдём

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(\vec{r}, \vec{b}, \vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}; \\ x_2 &= \frac{(\vec{a}, \vec{r}, \vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}; \\ x_3 &= \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{r})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Формулу (7.21) можно рассматривать как векторную запись правила Крамера.

Действительно, если положить в некотором базисе

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad (7.22)$$

то векторное уравнение будет равносильно системе трёх линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= d_1, \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2, \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= d_3. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Отсюда по правилу Крамера, например, для x_1 получим формулу из (7.21):

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Формулы (7.21) допускают фундаментальное обобщение для любых линейных систем, в которых число переменных равно числу уравнений.

7.7. Определение основных характеристик тетраэдра методами векторной алгебры

В трёхмерном пространстве роль, аналогичную роли треугольника на плоскости, играет тетраэдр, или треугольная пирамида $ABCD$ (рис. 49). (Треугольник и тетраэдр, в терминах многогранников — трехгранник и четырехгранник, — являются двумерным и трёхмерным симплексами, причём гранями трёхмерного симплекса будут двумерные симплексы, т.е. треугольники, и т.д. (см. подробнее разд. «Симплексы»)).

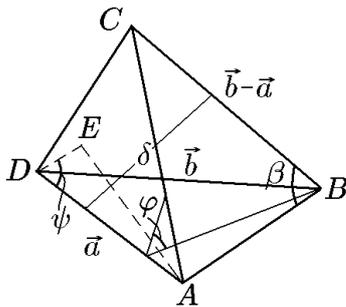


Рис. 49.

Аналогично можно найти длины других рёбер.

Четыре точки A, B, C, D определяют некоторый тетраэдр $ABCD$. С точки зрения векторной алгебры, четыре точки задают три вектора, например $\vec{a} = \overrightarrow{DA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{DB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$ (см. рис. 49).

Покажем, что все основные характеристики тетраэдра можно найти методами векторной алгебры.

1. Длина, например, ребра AB определяется следующей цепочкой равенств:

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}}. \quad (7.24)$$

2. Плоские углы граней

Например, угол $\beta = \angle ABC$ с учётом свойств скалярного произведения определится соотношением

$$\cos \beta = \frac{(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})}{|\vec{b} - \vec{a}| |\vec{b} - \vec{c}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b}^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}} \sqrt{|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c}}}. \quad (7.25)$$

Аналогично определяются другие плоские углы граней.

3. Двугранные углы при рёбрах

Например, угол φ при ребре DA равен углу между перпендикулярами к векторам \vec{a}, \vec{b} и \vec{a}, \vec{c} . Тогда с учётом свойств смешанного и двойного векторного произведений запишем

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{c})}{|\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{a} \times \vec{c}|} = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{c})|\vec{a}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c})^2}}. \quad (7.26)$$

Косинусы остальных двугранных углов тетраэдра определяются аналогично.

4. Углы между рёбрами и гранями

Например, угол ψ между ребром \overrightarrow{DA} и гранью DBC равен $\psi = \pi/2 - \alpha$, где α — угол между вектором \vec{a} и перпендикуляром к грани, образованной векторами \vec{b} и \vec{c} . Поэтому

$$\sin \psi = \frac{|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|}{|\vec{a}| |\vec{b} \times \vec{c}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{\Gamma(\vec{b}, \vec{c})}}. \quad (7.27)$$

Углы между остальными рёбрами и гранями находятся аналогично.

5. Длины высот

Например, длина высоты AE , опущенной из точки A на грань DBC , определится как отношение объёма тетраэдра к площади основания DBC . В результате получим

$$h = |AE| = |\vec{a}| \sin \psi = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{\Gamma(\vec{b}, \vec{c})}}. \quad (7.28)$$

6. Кратчайшее расстояние между рёбрами

Например, расстояние между рёбрами DA и BC (рис. 49) равно проекции вектора \overrightarrow{AC} на перпендикуляр к векторам \overrightarrow{DA} и \overrightarrow{CB} . Следовательно, с учётом свойств векторного произведения запишем

$$\delta = |\text{пр}_{\vec{N}} \vec{b}| = \vec{b} \cdot \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|},$$

где

$$\vec{N} = \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}),$$

или

$$\delta = \frac{|(\vec{b}, \vec{a}, (\vec{b} - \vec{c}))|}{|\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c})|} = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{\Gamma(\vec{a}, \vec{b} - \vec{c})}}. \quad (7.29)$$

Расстояние между другими рёбрами находится аналогично.

◇ Все полученные формулы, позволяющие рассчитать характеристики тетраэдра, в итоге содержат только скалярные произведения образующих тетраэдр векторов. Скалярные произведения являются числами (инвариантами), не изменяются при преобразованиях базисных векторов и, следовательно, содержащие их определители Грама также не меняются, а поэтому полученные выше формулы остаются справедливыми в любой системе координат.

Пример 7.3. Дана пирамида $DABC$. Длина рёбер пирамиды, выходящих из вершины D , равна: $DA = 2$, $DB = 4$, $DC = 4$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = 2\pi/3$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = \pi/2$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC и кратчайшее расстояние между рёбрами BA и BC ;
- объём пирамиды.

Решение. На рёбрах пирамиды построим векторы $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Воспользуемся рис. 49 и введёнными там обозначениями. Для удобства дальнейших вычислений предварительно найдём определитель Грама:

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{c} \cdot \vec{a} & \vec{c} \cdot \vec{b} & \vec{c} \cdot \vec{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 16 & 6 \\ 0 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 288, \quad (7.30)$$

$$\Gamma(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 16 \end{vmatrix} = 48, \quad \Gamma(\vec{a}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 36, \quad \Gamma(\vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 108.$$

Соотношение (7.30) позволяет воспользоваться формулами (7.24)–(7.29):

$$\text{а) } |AB| = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})} = \sqrt{4 + 16 + 8} = \sqrt{28};$$

$$\begin{aligned} \cos \beta = \cos(\angle ABC) &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + |\vec{b}|^2}{\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})} \sqrt{|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2(\vec{b} \cdot \vec{c})}} = \\ &= \frac{0 - (-4) - 6 + 16}{\sqrt{4 + 16 + 8} \sqrt{16 + 9 - 12}} = \frac{14}{\sqrt{364}} \approx 0,73, \quad \angle ABC \approx 42^\circ; \end{aligned}$$

б) двугранный угол φ при ребре DA , согласно (7.26), равен

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{b} \cdot \vec{c})|\vec{a}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{b})}{\Gamma(\vec{a}, \vec{b})\Gamma(\vec{a}, \vec{c})} = \frac{6 \cdot 4 - 0}{\sqrt{48}\sqrt{36}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,57, \quad \varphi \approx 57^\circ,$$

а угол ψ между ребром DA и гранью DBC , в силу (7.27), найдётся как

$$\sin \psi = \frac{1}{|\vec{a}|} \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{\Gamma(\vec{b}, \vec{c})}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{288}{108}} \approx 0,81, \quad \psi \approx 55^\circ;$$

в) длина h высоты, опущенной из точки A на грань DBC (7.28) равна

$$h = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{\Gamma(\vec{b}, \vec{c})}} = \sqrt{\frac{288}{108}} \approx 1,62,$$

а кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC (7.29):

$$\delta = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{\Gamma(\vec{a}, \vec{b} - \vec{c})}},$$

поскольку

$$\begin{aligned} \Gamma(\vec{a}, \vec{b} - \vec{c}) &= \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \\ (\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} & (\vec{b} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \end{vmatrix} = \\ &= |\vec{a}|^2[|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2(\vec{b} \cdot \vec{c})] - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - (\vec{a} \cdot \vec{c})^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{c}) = \\ &= 4(16 + 9 - 12) - 16 = 26, \end{aligned}$$

то

$$\delta = \sqrt{\frac{288}{26}} \approx 3,3;$$

г) объём пирамиды равен

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{\Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} = \frac{1}{6} \sqrt{288} \approx 2,8.$$

8. Произведение четырёх векторов

Все многообразие произведений четырёх векторов можно получить следующими двумя способами:

а) умножением произведения двух векторов на произведение двух других векторов:

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d}); \quad (8.1)$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}); \quad (8.2)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}); \quad (8.3)$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}); \quad (8.4)$$

и

б) умножением трёх векторов на четвёртый:

$$\{(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}\} \cdot \vec{d}; \quad (8.5)$$

$$\{(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}\} \times \vec{d}; \quad (8.6)$$

$$\{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\} \vec{d}; \quad (8.7)$$

$$\{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\} \cdot \vec{d}; \Rightarrow (8.3) \quad (8.8)$$

$$\{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\} \times \vec{d}. \quad (8.9)$$

Очевидно, что не все выписанные произведения различны между собой. Действительно, учитывая, что скалярный множитель можно выносить за знак скалярного и векторного произведений, можно заметить, что первые два произведения из пункта б), т.е. (8.5) и (8.6), совпадают с двумя первыми произведениями из пункта а):

$$\begin{cases} \{(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}\} \cdot \vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d}), \\ \{(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}\} \times \vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}). \end{cases} \quad (8.10)$$

Далее рассмотрим в (8.8) векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}$ как один вектор. Тогда произведение (8.8) является смешанным произведением трёх векторов: $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{c} , \vec{d} , которое обладает свойством ассоциативности, позволяющим поменять местами векторное и скалярное произведения, т.е.

$$\{(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}\} \cdot \vec{d} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}). \quad (8.11)$$

Это означает, что произведение (8.8), по сути дела, совпадает с произведением (8.3) из пункта а).

В дополнение к этому заметим, что первое и второе произведения в пункте а) представляют собой скаляр и некий вектор соответственно, получаемые из четырех векторов наиболее простым способом. В силу этого их еще называют *основными произведениями четырех векторов*. Интересно, что оставшиеся произведения можно представить как линейные комбинации основных произведений, т.е. произведениями вида (8.1) и (8.2). Начнём с произведения (8.3).

Расписав в левой части (8.11) двойное векторное произведение, согласно (5.15), найдём

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \{\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})\} \cdot \vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}). \quad (8.12)$$

Таким образом, произведение (8.3) выражается через основные произведения вида (8.1).

◇ Если разложение (8.12) записать с помощью определителя, а именно:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix},$$

то эту формулу можно рассматривать как обобщение определителя Грама, поскольку при $\vec{a} = \vec{c}$, $\vec{b} = \vec{d}$ имеем $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \Gamma(\vec{a}, \vec{b})$.

Векторное произведение двух векторных произведений можно преобразовать двумя способами.

Во-первых, рассматривая это произведение как двойное векторное произведение трёх векторов $(\vec{a} \times \vec{b})$, \vec{c} , \vec{d} , мы получим

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{c} \cdot ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}) - \vec{d} \cdot ((\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \quad (8.13)$$

Во-вторых, рассматривая это же произведение как двойное векторное произведение трех векторов \vec{a} , \vec{b} , $(\vec{c} \times \vec{d})$, мы получим

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}). \quad (8.14)$$

Таким образом, векторное произведение двух векторных произведений (8.4) можно двумя способами (8.13) и (8.14) представить как линейные комбинации вида (8.7).

Сравнив (8.13) и (8.14), найдём

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d} = \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + \vec{b}(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d}) + \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}). \quad (8.15)$$

◇ Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — некопланарные векторы, т.е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$, то из (8.15) следует формула разложения вектора \vec{d} в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\vec{d} = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} [\vec{a}(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) + \vec{b}(\vec{c}, \vec{a}, \vec{d}) + \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})], \quad (8.16)$$

совпадающая с формулой (7.20), (7.21), полученной ранее.

Тройное векторное произведение (8.9) так же можно разложить двумя способами.

Во-первых, разложив двойное векторное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и умножив его затем векторно на четвёртый вектор \vec{c} , получим

$$[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] \times \vec{d} = [\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c})] \times \vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \times \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{d}). \quad (8.17)$$

Эта формула выражает двойное векторное произведение (8.9) через основные произведения (8.2).

Разложим теперь (8.9) как двойное векторное произведение векторов $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{c} , \vec{d} :

$$[(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}] \times \vec{d} = \vec{c}[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}] - (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d}) = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d}). \quad (8.18)$$

Эта формула даёт второе разложение тройного векторного произведения (8.9).

Представление оставшегося в (8.8) произведения $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d}$ через основные произведения (8.2) можно получить из сравнения (8.17) и (8.18). Действительно,

$$(\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \times \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{d})(\vec{a} \times \vec{b}),$$

откуда следует

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \times \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \cdot \vec{d})(\vec{a} \times \vec{b})$$

или

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})\vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{a})(\vec{b} \times \vec{d}) + (\vec{c} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \cdot \vec{d})(\vec{a} \times \vec{b}).$$

Выполнив в этом равенстве формальную замену $\vec{d} \leftrightarrow \vec{c}$, получим равенство

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\vec{d} = (\vec{d} \cdot \vec{a})(\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{d} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{d} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{b}), \quad (8.19)$$

выражающее произведение (8.7) через основные произведения (8.1).

Формула (8.19) замыкает перечень формул, выражающих все произведения четырёх векторов через основные произведения (8.1) и (8.2).

◇ Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ некопланарны, т.е. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$, то из (8.19) получим формулу для разложения произвольного вектора \vec{d} по трём векторным произведениям этих векторов:

$$\vec{d} = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} [(\vec{d} \cdot \vec{a})(\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{d} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{d} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{b})]. \quad (8.20)$$

Пример 8.1. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ имеют длину $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{d}| = 2$, соответственно, и образуют друг с другом равные углы $\pi/3$. Найти скалярное произведение векторов

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}).$$

Решение задачи можно получить, воспользовавшись соотношением (8.12) для произведения четырёх векторов. Действительно, положив в (8.12) $\vec{a} = \vec{c}$, найдём

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Пример 8.2. Для векторов $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$, $\vec{d} = (0, 3, 2)$ найти векторное произведение векторов

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{d}).$$

Решение. Проще всего воспользоваться соотношением (8.14) для произведения четырёх векторов. Действительно, положив в (8.14) $\vec{a} = \vec{c}$, найдём

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{d}) = \vec{b}(\vec{a}, \vec{a}, \vec{d}) - \vec{a}(\vec{b}, \vec{a}, \vec{d}) = -\vec{a} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15\vec{a}.$$

Пример 8.3. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 3, 2)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (1, -4, 4)$ в этом базисе и в базисе, составленном из векторов $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$.

Решение. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, если их смешанное произведение отлично от нуля. Поскольку

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0,$$

то векторы образуют базис.

Чтобы найти координаты вектора \vec{r} в базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, можно воспользоваться формулами (7.20), (7.21) или соотношением (8.16) для произведения четырёх векторов:

$$\vec{r} = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} [\vec{a}(\vec{r}, \vec{b}, \vec{c}) + \vec{b}(\vec{a}, \vec{r}, \vec{c}) + \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{r})].$$

Поскольку

$$(\vec{r}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 45, \quad (\vec{a}, \vec{r}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -15, \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

то

$$\vec{r} = 3\vec{a} - \vec{b}.$$

Чтобы найти разложение вектора \vec{r} в базисе $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}, \vec{b} \times \vec{c}$, можно воспользоваться выражением (8.20) для произведения четырёх векторов:

$$\vec{r} = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} [(\vec{r} \cdot \vec{c})(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{r} \cdot \vec{b})(\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{r} \cdot \vec{a})(\vec{b} \times \vec{c})] = \frac{1}{15} [-4(\vec{a} \times \vec{b}) - 6(\vec{a} \times \vec{c}) + 9(\vec{b} \times \vec{c})].$$

9. Произведение пяти и шести векторов

Сразу отметим, что мы не будем выписывать все возможные произведения такого числа векторов. При необходимости с помощью формул (8.1)–(8.9) любое произведение пяти векторов можно свести к линейным комбинациям двух основных произведений

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d})\vec{e} \quad \text{и} \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d} \cdot \vec{e}), \quad (9.1)$$

а произведения шести векторов — к основным произведениям вида

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d})(\vec{e} \cdot \vec{f}) \quad \text{и} \quad (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{c} \cdot \vec{d})(\vec{e} \times \vec{f}). \quad (9.2)$$

Из всех произведений пяти векторов мы рассмотрим произведения вида

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d} \times \vec{e}), \quad (9.3)$$

позволяющие получить разложение векторного произведения $\vec{d} \times \vec{e}$ в произвольном базисе $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вместо декартова базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Действительно, применив к (9.3) формулу (8.15), получим

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d} \times \vec{e}) = \vec{a}[(\vec{b} \times \vec{c})(\vec{d} \times \vec{e})] - \vec{b}[(\vec{a} \times \vec{c})(\vec{d} \times \vec{e})] + \vec{c}[(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{d} \times \vec{e})],$$

откуда с учётом (8.12) найдём

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d} \times \vec{e}) &= \vec{a} \begin{vmatrix} \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{e} \\ \vec{c} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{e} \end{vmatrix} - \vec{b} \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{a} \cdot \vec{e} \\ \vec{c} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{e} \end{vmatrix} + \vec{c} \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{a} \cdot \vec{e} \\ \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{e} \end{vmatrix} = \\ &= \vec{a} \begin{vmatrix} \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{e} \end{vmatrix} - \vec{b} \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{d} \\ \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{e} \end{vmatrix} + \vec{c} \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \\ \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{b} \cdot \vec{e} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (9.4)$$

или

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d} \times \vec{e}) = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{d} \\ \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{b} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{e} \end{vmatrix}. \quad (9.5)$$

Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не коллинеарны, то их можно рассматривать как трехмерный базис, а тогда из (9.4) следует формула

$$\vec{d} \times \vec{e} = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{d} \\ \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{b} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{e} \end{vmatrix}, \quad (9.6)$$

задающая векторное произведение в этом базисе вместо декартова базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Из всех произведений шести векторов мы выделим умножение смешанных произведений

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}), \quad (9.7)$$

обобщающее понятие определителя Грама. Действительно, умножив (9.4) скалярно на вектор \vec{f} , получим

$$\begin{aligned} & (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d} \times \vec{e}) \cdot \vec{f} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}) = \\ & = (\vec{a} \cdot \vec{f}) \begin{vmatrix} \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{e} \end{vmatrix} - (\vec{b} \cdot \vec{f}) \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{d} \\ \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{e} \end{vmatrix} + (\vec{c} \cdot \vec{f}) \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \\ \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{b} \cdot \vec{e} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

или

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{d} \\ \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{b} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{e} \\ \vec{a} \cdot \vec{f} & \vec{b} \cdot \vec{f} & \vec{c} \cdot \vec{f} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{a} \cdot \vec{f} \\ \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{e} & \vec{b} \cdot \vec{f} \\ \vec{c} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{f} \end{vmatrix}. \quad (9.8)$$

Эта формула является обобщением понятия определителя Грама, поскольку при $\vec{a} = \vec{d}$, $\vec{b} = \vec{e}$, $\vec{c} = \vec{f}$ из (9.8) имеем $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = \Gamma(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Пример 9.1. Для векторов $\vec{d} = (1, -4, 4)$, $\vec{e} = (1, 0, 1)$ найти разложение их векторного произведения в базисе, составленном из векторов $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 3, 2)$.

Решение. То, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют базис, мы установили в примере 8.3:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$$

Чтобы найти искомое разложение, можно вычислить вектор $\vec{r} = \vec{d} \times \vec{e}$ и далее, как в примере 8.3, использовать формулу (8.16) для произведения четырёх векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{r}$. Если воспользоваться соотношением (9.6) для произведения пяти векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$, то решение получается гораздо проще:

$$\vec{d} \times \vec{e} = \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} & \vec{c} \cdot \vec{d} \\ \vec{a} \cdot \vec{e} & \vec{b} \cdot \vec{e} & \vec{c} \cdot \vec{e} \end{vmatrix} = \frac{1}{15} \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ 9 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{a} - 26\vec{b} + 21\vec{c}.$$

Пример 9.2. Для векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ из предыдущего примера вычислить смешанное произведение их векторных произведений $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{c} \times \vec{a}$.

Решение. Из предыдущего примера следует, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не являются компланарными, поскольку $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 15$. Чтобы найти искомое произведение, можно вычислить векторы $\vec{d} = \vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{e} = \vec{b} \times \vec{c}$, $\vec{f} = \vec{c} \times \vec{a}$ и найти их смешанное произведение. Если же воспользоваться формулой (9.8) для произведения шести векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$, то решение получится гораздо проще:

$$\begin{aligned} ([\vec{a} \times \vec{b}], [\vec{b} \times \vec{c}], [\vec{c} \times \vec{a}]) = (\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}) &= \frac{1}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \begin{vmatrix} 0 & (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) & 0 \\ 0 & 0 & (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = 15^2 = 225. \end{aligned}$$

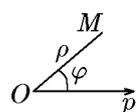
ГЛАВА 2

Прямая линия на плоскости

Аналитическая геометрия — это область математики, которая рассматривает геометрические задачи средствами алгебры на основе метода координат. Её основы были заложены в первой половине 18-го века в трудах французских математиков Р. Декарта и П. Ферма.

В этом разделе будем пользоваться в основном декартовой и полярной системами координат.

1. Декартовы координаты, известные из курса средней школы и уже примененные ранее, представляют собой две взаимно перпендикулярные оси с одинаковыми масштабами, началом отсчёта по осям является точка их взаимного пересечения. Каждая точка на плоскости имеет вполне определенные координаты и наоборот.



2. Полярные координаты применяются чаще при исследовании вращательных движений. Для определения полярных координат нужно выбрать полюс O и полярную ось Op , после чего положение точки характеризуется полярным радиусом ρ , т.е. расстоянием OM , и полярным углом φ (он же называется фазой точки M).

10. Уравнения линий в декартовой и полярной системах координат

♦ *Линией* (на плоскости) называется совокупность всех точек, координаты x, y которых (относительно декартовой системы координат) удовлетворяют уравнению вида

$$F(x, y) = 0. \quad (10.1)$$

О точке, координаты которой x, y удовлетворяют уравнению (10.1), говорят, что она «принадлежит линии».

Пример 10.1. Составить уравнения биссектрисы второго и четвёртого координатных углов.

Решение. Все точки биссектрисы второго и четвёртого координатного угла и только они находятся на равных расстояниях от осей координат, но именно в этих координатных углах координаты эти имеют разные знаки. Алгебраически это свойство можно записать уравнением

$$y = -x.$$

Средствами алгебры на основе метода координат установлен геометрический образ — биссектриса угла.

Итак, совокупность пар чисел x, y , удовлетворяющих уравнению вида (10.1), образует линию.

Будем рассматривать только алгебраические линии, т.е. когда $F(x, y)$ есть полином.

♦ Степень полинома $F(x, y)$ называется *порядком линии*.

Так, уравнение $x^2y^7 + 1 = 0$ есть уравнение алгебраической кривой 9-го порядка.

Изучение алгебраических кривых любого порядка составляет основу аналитической геометрии.

Уравнение линии в полярных координатах имеет аналогичный вид:

$$F(\rho, \varphi) = 0. \quad (10.2)$$

Если уравнение (10.2) разрешить относительно переменной ρ , то

$$\rho = f(\varphi).. \quad (10.3)$$

Именно в форме (10.3) уравнение (10.2) используется в приложениях.

Бывает, что обе координаты, например декартовы, заданы как функции некоторой третьей переменной, которую можно обозначить через t :

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \dots \quad (10.4)$$

Эта переменная является параметром, определяющим положение точки (x, y) на плоскости; когда изменяется t , точка на плоскости перемещается, описывая некоторую линию z .

♦ *График кривой*, задаваемой уравнением с двумя переменными, есть множество всех точек, координаты которых обращают уравнение в тождество.

Линия, алгебраическое уравнение которой имеет первый порядок, есть *прямая*.

Линии, порядок уравнения которых два и выше, есть *кривые* линии.

Например, уравнение $x^2 + y^2 = R^2$ — это алгебраическое уравнение второго порядка; график этой линии в декартовой системе координат — окружность с центром в начале координат и радиусом R . Уравнение этой линии в полярных координатах имеет вид

$$\rho = 2R \cos \varphi.$$

11. Прямая линия на плоскости

11.1. Параметрические и канонические уравнения прямой

Для того чтобы записать уравнение прямой, необходимо задать точку, через которую эта прямая проходит, и её направление. Направление можно задать либо вектором, параллельным этой прямой, либо ещё одной точкой этой прямой.

Пусть M_0 — точка, через которую проходит прямая, и \vec{s} — вектор, задающий её направление (если задана вторая точка M_1 , то $\vec{s} = \overrightarrow{M_0M_1}$). Выберем на прямой произвольную точку M , тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ принадлежит этой прямой и, следовательно, коллинеарен вектору \vec{s} , т.е.

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s},$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}, \quad (11.1)$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ — радиус-векторы точек M и M_0 , соответственно, а t — число или параметр, связывающий коллинеарные векторы. Изменяя в (11.1) параметр от $-\infty$ до $+\infty$, мы переберём все точки M , лежащие на прямой.

От векторной формы уравнения прямой (11.1) можно перейти к координатной.

Пусть в плоскости xOy (в репере $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$) заданы точки $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ и ненулевой вектор $\vec{s} = (m, n)$ (рис. 50). Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $(x - x_0)$, $(y - y_0)$ и из (11.1) следует

$$x - x_0 = mt, \quad y - y_0 = nt$$

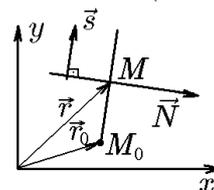


Рис. 50.

или

$$\begin{aligned}x &= x_0 + mt, \\y &= y_0 + nt.\end{aligned}\tag{11.2}$$

◆ Уравнения (11.1) и (11.2) называются *параметрическими уравнениями прямой*, проходящей на плоскости через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m, n)$, в *векторной и координатной форме*, соответственно. Вектор \vec{s} называется *направляющим вектором прямой*.

Исключив в (11.2) параметр t , получим уравнение

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.\tag{11.3}$$

◆ Уравнение (11.3) называется *каноническим уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{s} = (m, n)$* .

◇ Формальная запись

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n}$$

определяет прямую, параллельную оси Oy и отстоящую от начала координат на величину x_0 , т.е. $x = x_0$.

11.2. Уравнение прямой линии, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Перепишав теперь уравнение (11.3) в виде

$$n(x - x_0) - m(y - y_0) = 0$$

и обозначив

$$A = n, \quad B = -m,\tag{11.4}$$

имеем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.\tag{11.5}$$

Обозначив через \vec{N} вектор $\vec{N} = (A, B)$, что в силу (11.4) он ортогонален направляющему вектору \vec{s} , так как

$$(\vec{N}, \vec{s}) = nm + (-m)n = 0.\tag{11.6}$$

Уравнение (11.5) с помощью вектора $\vec{N} = (A, B)$ можно записать через скалярное произведение:

$$(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}) = 0.\tag{11.7}$$

Считая в (11.7) вектор $\vec{N} = (A, B)$ заданным (рис. 50), мы получим ещё одно векторное уравнение прямой, выражающее ортогональность любого вектора прямой $\overrightarrow{M_0M}$ к вектору \vec{N} .

◆ Уравнение (11.7) называется *уравнением прямой, проходящей на плоскости через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно заданному вектору \vec{N} , в векторной форме*. Вектор $\vec{N} = (A, B)$ называется *вектором нормали к прямой*.

◇ Отметим, что уравнение (11.7) можно получить из геометрических соображений, не обращаясь к параметрическим уравнениям прямой.

Пусть в плоскости xOy заданы точка $M_0(x_0, y_0)$ и ненулевой вектор $\vec{N} = (A, B)$. Найдём уравнение прямой, проходящей через данную точку M_0 перпендикулярно \vec{N} .

Точка M , отличная от M_0 , тогда и только тогда лежит на прямой, когда вектор $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}$, т.е. когда справедливо соотношение (11.7). Обозначим через $\vec{r} = (x, y)$ радиус-вектор текущей точки прямой, а через $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$ – радиус-вектор данной (фиксированной) точки M_0 . Так как $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, то уравнение (11.7) можно переписать в виде

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}) = 0. \quad (11.8)$$

Это уравнение прямой в векторной форме. Запишем это уравнение в координатной форме.

Так как вектор $\vec{r} - \vec{r}_0$ имеет координаты $x - x_0, y - y_0$, а скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат сомножителей, то уравнение (11.7) можно представить как

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (11.9)$$

Мы видим, что получилось уравнение первой степени относительно x и y . Мы приходим к следующей основной теореме теории прямой линии.

Теорема 11.1. *Во всякой системе координат любая прямая задаётся уравнением первой степени, а уравнение первой степени задаёт некоторую прямую.*

11.3. Общее уравнение прямой и уравнение прямой в отрезках

Преобразуем уравнение (11.9):

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0.$$

Обозначив $-Ax_0 - By_0 = C$, получим уравнение прямой в ещё одном виде:

$$Ax + By + C = 0. \quad (11.10)$$

♦ Уравнение (11.9) называется *общим уравнением прямой на плоскости*.

Рассмотрим некоторые особые случаи расположения прямой.

I. $C = 0, A \neq 0, B \neq 0$ – прямая, определяемая уравнением $Ax + By = 0$, проходит через начало координат.

II. $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ – прямая, определяемая уравнением $By + C = 0$ (или $y = -C/B = b$), параллельна оси Ox .

III. $B = 0, A \neq 0, C \neq 0$ – прямая, определяемая уравнением $Ax + C = 0$ (или $x = -C/A = b$), параллельна оси Oy .

IV. $B = C = 0, A \neq 0$ – прямая, определяемая уравнением $Ax = 0$ (или $x = 0$), есть ось Oy .

V. $A = C = 0, B \neq 0$ – прямая, определяемая уравнением $By = 0$ (или $y = 0$), есть ось Ox .

VI. $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$ – прямая, определяемая уравнением $Ax + By + C = 0$ не параллельна ни ось Ox , ни оси Oy и не проходит через начало координат.

В последнем случае для более удобного построения общее уравнение прямой можно разделить на величину $(-C)$. После этого оно примет вид

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1.$$

Это уравнение можно записать как

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a = -\frac{C}{A}, \quad b = -\frac{C}{B}. \quad (11.11)$$

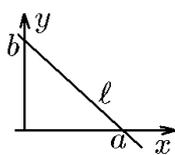


Рис. 51.

◆ Уравнение (11.11) называется *уравнением прямой в отрезках*.

Положив в уравнении (11.11) $y = 0$, получим $x = a$, а положив в уравнении (11.11) $x = 0$, получим $y = b$. Таким образом, получим две точки с координатами $M_1(a, 0)$ и $M_2(0, b)$, лежащие на координатных осях, через которые эта прямая проходит. Следова-

тельно, отложив на оси x отрезок a и на оси y отрезок b (Отсюда и название уравнения), мы получим прямую, которая отсекает эти отрезки (рис. 51).

Пример 11.1. Определить положение следующих прямых на плоскости:

- 1) $x - y = 0$;
- 2) $3x - 12 = 0$;
- 3) $5y + 20 = 0$.

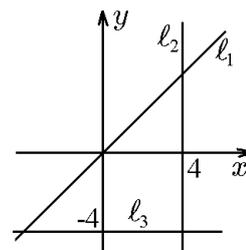


Рис. 52.

Решение. Запишем уравнения прямых в отрезках: $l_1: y = x$; $l_2: x = 4$; $l_3: y = -4$. Тогда нетрудно заметить, что: 1) прямая l_1 является биссектрисой I и III координатных углов; 2) прямая l_2 параллельна оси Oy и проходит через точку $(4, 0)$; 3) прямая l_3 параллельна оси Ox и проходит через точку $(0, -4)$ (рис. 52).

11.4. Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом

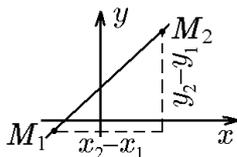
Рассмотрим уравнение прямой в общем виде $Ax + By + C = 0$.

Разделим это уравнение на $B \neq 0$ и получим

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Введя обозначения $-A/B = k$ и $C/B = b$, получим искомое уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b. \quad (11.12)$$



Тангенс угла наклона прямой к оси Oy называется угловым коэффициентом и обозначается

$$\operatorname{tg} \alpha = k.$$

Угловым коэффициентом прямой можно вычислить, если известны координаты двух каких-либо точек этой прямой, по формуле

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (11.13)$$

11.5. Уравнение прямой с данным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку

Формула (11.13) определяет угловым коэффициентом прямой по двум заданным её точкам. В нашем случае точка M_1 задана, а в качестве второй точки можно взять любую точку $M(x, y)$ искомой прямой.

Если же точка M лежит на прямой, которая проходит через точку M_1 и имеет угловым коэффициентом k , то в силу формулы (11.13) имеем

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k,$$

или

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (11.14)$$

Это уравнение называется *уравнением пучка прямых*, проходящих через точку $M_1(x_1, y_1)$, так как, меняя k , получим множество прямых, проходящих через фиксированную точку под различными углами к оси Ox .

Теорема 11.2. *Если*

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

— уравнения двух прямых, пересекающихся в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$, а α и β — произвольные не равные нулю числа, то

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad (11.15)$$

есть уравнение прямой, проходящей через точку M_0 . Более того, какова бы ни была наперед заданная прямая, проходящая через точку M_0 , она определяется уравнением (11.15) при некотором выборе α и β .

Доказательство. Достаточность утверждения очевидна. Поскольку подстановка x_0, y_0 в уравнения прямых обращает их в тождества:

$$\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 &= 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 &= 0, \end{aligned}$$

то и подстановка x_0, y_0 в (11.15) также обращает его в тождество:

$$\alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) \equiv 0.$$

Теперь проверим необходимость утверждения теоремы.

Пусть третья прямая, задаваемая уравнением

$$A_3x + B_3y + C_3 = 0,$$

проходит через точку M_0 . Возьмём на этой прямой другую точку $M_1(x_1, y_1)$. Положим

$$\begin{aligned} A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 &= \beta_1, \\ A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 &= -\alpha_1. \end{aligned}$$

Поскольку точка M_1 не может принадлежать одновременно первой и второй прямым, то по крайней мере одно из чисел α_1 или β_1 отлично от нуля. Тогда уравнение

$$\alpha_1(A_1x + B_1y + C_1) + \beta_1(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (11.16)$$

являясь уравнением первой степени, определяет некоторую четвёртую прямую. Иначе было бы верным равенство

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

и две первые прямые не могли бы пересекаться в одной точке. Теперь нетрудно установить, что прямая (11.16) проходит одновременно через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$. Действительно,

$$\alpha_1(A_1x + B_1y + C_1) + \beta_1(A_2x + B_2y + C_2) \equiv 0$$

и

$$\alpha_1(A_1x + B_1y + C_1) + \beta_1(A_2x + B_2y + C_2) = \alpha_1\beta_1 + \beta_1(-\alpha_1) \equiv 0.$$

Это означает, что прямая (11.16) проходит через те же точки, что и третья прямая, а следовательно, они совпадают.

Уравнение (11.15) называется уравнением пучка прямых, проходящих через точку M_0 .

11.6. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть даны две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Проведём через эти точки прямую ℓ .

Рассмотрим любую точку M на этой прямой. Так как точки M_1 , M и M_2 лежат на одной прямой ℓ , то векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны. Следовательно,

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{M_1M_2}. \quad (11.17)$$

Относительно декартовой системы координат векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1), \quad \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$

Теперь равенство (11.17) можно записать как

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad (11.18)$$

так как, если векторы коллинеарны, их координаты пропорциональны.

Уравнение (11.18) теряет смысл, если один из знаменателей равен нулю. Если $x_2 - x_1 = 0$, то это означает, что прямая $\ell \parallel (Oy)$. В этом случае ее уравнение будет $x = x_1$. Если $y_2 - y_1 = 0$, то прямая $\ell \parallel (Ox)$, ее уравнение будет $y = y_1$.

Уравнение (11.18) можно получить, воспользовавшись каноническим уравнением прямой и положив в нём $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$. В результате получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

уравнение

совпадающее с (11.18).

Пример 11.2. Дан треугольник ABC , координаты вершин которого $A(-3; 2)$, $B(1; 5)$ и $C(5; -7)$. Составить уравнение медианы, выходящей из вершины A .

Решение. Если A_1 — середина стороны BC , то

$$A_1\left(\frac{1+5}{2}, \frac{5-7}{2}\right) = A_1(3; -1).$$

После подстановки координат точек A и A_1 в уравнение (11.18) получим

$$\frac{x + 3}{3 + 3} = \frac{y - 2}{-1 - 2}$$

или

$$x + 2y - 1 = 0.$$

11.7. Уравнение прямой в нормальном виде

Составим уравнение прямой ℓ , заданной в прямоугольной декартовой системе координат единичным нормальным вектором $\vec{n}_0 = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ и расстоянием p этой прямой от начала координат.

Из точки O опустим перпендикуляр на прямую, его основание обозначим через N , а радиус-вектор точки N — через \overrightarrow{ON} . По условию $\overrightarrow{ON} = p\vec{n}_0$. Пусть \vec{r} — радиус-вектор текущей точки прямой ℓ . Для того чтобы точка M лежала на прямой ℓ , необходимо и достаточно, чтобы $\overrightarrow{NM} \perp \vec{n}_0$, т.е. чтобы $(\overrightarrow{NM}, \vec{n}_0) = 0$.

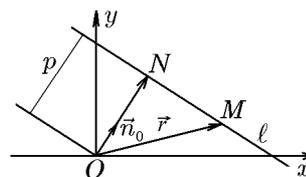
Но $\overrightarrow{NM} = \vec{r} - \overrightarrow{ON} = \vec{r} - p\vec{n}_0$, поэтому $(\vec{r} - p\vec{n}_0, \vec{n}_0) = 0$
или

$$(\vec{r}, \vec{n}_0) - p = 0 \quad (11.19)$$

— нормальное уравнение прямой в векторной форме.

Если учесть, что $\vec{r} = (x, y)$, а $\vec{n}_0 = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, то предыдущее соотношение можно записать так:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0. \quad (11.20)$$



Это и есть нормальное уравнение прямой в координатной форме.

Из уравнения прямой в нормальном виде следует, что для того чтобы уравнение прямой было нормальным, необходимо, чтобы сумма квадратов коэффициентов при переменных x и y была равна единице.

Поэтому общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$ можно привести к нормальному виду, если умножить его левую часть на число

$$\lambda = \pm \frac{1}{|\vec{n}_0|} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (11.21)$$

Число λ называется нормирующим или нормировочным множителем, знак λ противоположен знаку постоянной C .

Пример 11.3. Пусть дано общее уравнение прямой $3x + 4y - 15 = 0$. Записать его в нормальном виде.

Решение. Умножим левую часть уравнения на нормировочный множитель

$$\lambda = + \frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}.$$

Получим нормальное уравнение

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 3 = 0.$$

Проверим:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1.$$

Следовательно, получено нормальное уравнение прямой.

12. Простейшие задачи на прямую на плоскости

12.1. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая ℓ задана общим уравнением

$$Ax + By + D = 0, \quad D = -Ax_0 - By_0. \quad (12.1)$$

Это означает, что она проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору нормали $\vec{N} = (A, B)$ (рис. 53). И пусть точка $M_1(x_1, y_1)$ не лежит на прямой ℓ . Тогда расстояние d от точки M_1 до прямой ℓ есть не что иное, как проекция вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$ на вектор нормали $\vec{N} = (A, B)$, т.е.

$$\begin{aligned} d &= |\text{пр}_{\vec{N}} \overrightarrow{M_0M_1}| = \frac{|(\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{N})|}{|\vec{N}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

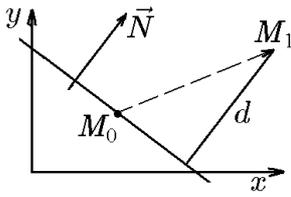


Рис. 53.

Формула (12.2) задаёт правило вычисления расстояния от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой ℓ : нужно в уравнение прямой (12.1) подставить координаты этой точки. Полученное число, взятое по модулю и делённое на модуль $|\vec{N}|$, и является искомым расстоянием d .

Формула (12.2) значительно упрощается, если для определения расстояния от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой ℓ воспользоваться нормальным уравнением прямой (11.19), поскольку в этом случае $\vec{N} = \vec{n}_0$, а $|\vec{n}_0| = 1$. Величину $\delta = x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p$ называют *отклонением точки $M_1(x_1, y_1)$ от данной прямой*. Отклонение положительно, если начало координат и точка M_1 лежат по разные стороны прямой, и отрицательно, если они лежат по одну сторону прямой. Расстояние от точки M_1 до прямой определяется соотношением $d = |\delta|$.

Пример 12.1. Найти расстояние от точки $M_1(-1, 2)$ до прямой $4x + 3y - 15 = 0$.

Решение. 1 способ. Подставив данные задачи в (12.2), получим

$$d = \frac{|4 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 - 15|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-13|}{5} = \frac{13}{5}.$$

2 способ. Приводим уравнение прямой к нормальному виду. Для этого умножим его на

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{1}{5}. \quad \text{Получим} \quad \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 3 = 0.$$

В нормальное уравнение прямой подставим координаты точки M_1 , расстояние от которой до прямой мы находим. Расстояние найдём по формуле

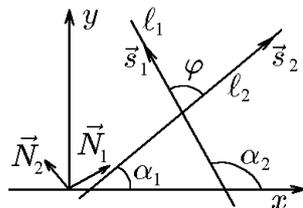
$$d = |\delta|, \quad \delta = \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}y_1 - 3,$$

где x_1, y_1 — координаты точки M_1 , т.е.

$$\delta = \frac{3}{5}(-1) + \frac{4}{5}(2) - 3 = -\frac{13}{5}, \quad d = |\delta| = \frac{13}{5}.$$

Следовательно, точка M_1 и начало координат, точка O , лежат по разные стороны от прямой ℓ .

12.2. Угол между прямыми



Пусть две прямые ℓ_1 и ℓ_2 с направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2)$ заданы своими каноническими уравнениями:

$$\ell_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1}; \quad \ell_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2}.$$

◆ Угол φ между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 равен углу между их направляющими векторами \vec{s}_1 и \vec{s}_2 , если $(\vec{s}_1, \vec{s}_2) \geq 0$, и дополняет этот угол до π , если $(\vec{s}_1, \vec{s}_2) < 0$. Следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2)|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2}}. \quad (12.3)$$

Если прямые заданы общими уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0, \end{aligned} \quad (12.4)$$

то, учитывая связь между координатами направляющих векторов $\vec{s}_1 = (m_1, n_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2)$ и их нормальными $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$:

$$A_1 = n_1, \quad B_1 = -m_1; \quad A_2 = n_2, \quad B_2 = -m_2, \quad (12.5)$$

из (12.3) можно получить ещё одну формулу:

$$\cos \varphi = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2}} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (12.6)$$

◇ Впрочем, формула (12.6) следует из (12.3) на основании равенства углов с перпендикулярными сторонами, известного из элементарной геометрии.

Кроме угла между прямыми l_1 и l_2 на ориентированной плоскости имеет значение угол от прямой l_1 до прямой l_2 .

◆ Углом от прямой l_1 до прямой l_2 называется угол от направляющего вектора $\vec{s}_1 = (m_1, n_1)$ прямой l_1 до направляющего вектора $\vec{s}_2 = (m_2, n_2)$ прямой l_2 . Его обозначают $\angle(l_1 \mapsto l_2)$.

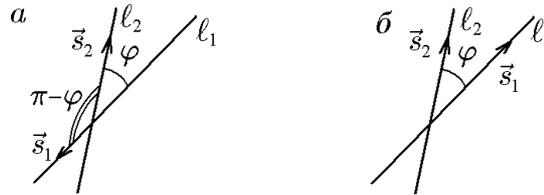


Рис. 54.

Определённый таким образом угол, вообще говоря, зависит от ориентации направляющих векторов \vec{s}_1 и \vec{s}_2 прямых l_1 и l_2 . Если направляющие векторы выбраны так, как показано на рис. 54,а, то

$$\operatorname{tg}[\angle(\vec{s}_1 \mapsto \vec{s}_2)] = \operatorname{tg} \varphi$$

(положительным считается направление вращения против часовой стрелки). Если же направляющие векторы выбраны так, как показано на рис. 54,б, то

$$\operatorname{tg}[\angle(\vec{s}_1 \mapsto \vec{s}_2)] = \operatorname{tg}[-(\pi - \varphi)] = \operatorname{tg} \varphi,$$

где φ — угол между векторами \vec{s}_1 и \vec{s}_2 , показанный на рис. 54,а. Таким образом, с учётом (12.3) и определения векторного произведения векторов запишем

$$\operatorname{tg}[\angle(l_1 \mapsto l_2)] = \operatorname{tg}[\angle(\vec{s}_1 \mapsto \vec{s}_2)] = \frac{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)} = \frac{m_1n_2 - n_1m_2}{m_1m_2 + n_1n_2}. \quad (12.7)$$

Приняв во внимание соотношение (12.5), можно эту формулу переписать через координаты нормалей $\vec{N}_1 = (A_1, B_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2)$ к прямым:

$$\operatorname{tg}[\angle(l_1 \mapsto l_2)] = \operatorname{tg}[\angle(\vec{s}_1 \mapsto \vec{s}_2)] = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{A_1B_2 - B_1A_2}{A_1A_2 + B_1B_2}. \quad (12.8)$$

Перейдя от общих уравнений прямых (12.4) к уравнениям с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, найдём связь между координатами нормалей и угловыми коэффициентами:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}. \quad (12.9)$$

Теперь, разделив числитель и знаменатель правой части (12.8) на B_1B_2 , получим

$$\operatorname{tg}[\angle(\ell_1 \mapsto \ell_2)] = \frac{A_1/B_1 - A_2/B_2}{1 + (A_1/B_1)(A_2/B_2)}.$$

Это соотношение с помощью (12.9) запишется в виде

$$\operatorname{tg}[\angle(\ell_1 \mapsto \ell_2)] = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \quad (12.10)$$

Формула (12.10) задаёт угол от прямой ℓ_1 до прямой ℓ_2 через их угловые коэффициенты.

Прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны, если угол между ними равен нулю. Это возможно при выполнении условий

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad k_1 = k_2 \quad (12.11)$$

в зависимости от способа задания прямой.

◇ Формулы (12.11) задают условия параллельности двух прямых.

Прямые ℓ_1 и ℓ_2 будут перпендикулярны, если угол между ними будет равен $\pi/2$. Это возможно при выполнении условий

$$m_1m_2 + n_1n_2 = 0, \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \quad k_1 = -\frac{1}{k_2} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \rightarrow \infty, \quad 1 + k_1k_2 = 0 \right) \quad (12.12)$$

в зависимости от способа задания прямой.

◇ Формулы (12.12) определяют условия перпендикулярности двух прямых.

Если угол между прямыми отличен от нуля, т.е.

$$\frac{m_1}{m_2} \neq \frac{n_1}{n_2}, \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}, \quad k_1 \neq k_2, \quad (12.13)$$

то они пересекаются в единственной точке x_0, y_0 , которую можно найти, например, из системы

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= -D_1, \\ A_2x + B_2y &= -D_2. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Единственность решения x_0, y_0 системы и, следовательно, точки пересечения гарантирована условием

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0,$$

совпадающим с (12.13).

Для параллельных прямых из системы (12.14) следует, что они либо совпадают, и в этом случае

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{D_1}{D_2}, \quad (12.15)$$

либо вообще не пересекаются, и в этом случае

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \quad (12.16)$$

В первом случае система (12.14) не определена и имеет бесконечное множество решений, а во втором система (12.14) несовместна.

12.3. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и составляющей заданный угол с данной прямой

Пусть прямая на плоскости задана уравнением с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$. Требуется найти уравнение прямой проходящей через точку $M_0 = (x_0, y_0)$ под углом φ к данной прямой.

Согласно (12.10),

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k - k_1}{1 + k_1k},$$

откуда

$$k = \frac{k_1 \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \pm k_1 \operatorname{tg} \varphi},$$

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

12.4. Уравнение биссектрисы углов, образованных данными прямыми

Пусть даны уравнения двух прямых в общем виде:

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + D_2 = 0.$$

Поскольку точки биссектрисы равноудалены от этих прямых, то её уравнение следует из равенства расстояний d_1 и d_2 , т.е.

$$\frac{|A_1x + B_1y + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

или

$$\frac{A_1x + B_1y + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (12.17)$$

Пусть даны две прямые в нормальной форме:

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p_1 = 0, \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi - p_2 = 0.$$

Левые части уравнений равны отклонению δ точки $M(x, y)$ от первой и второй прямых. На одной из биссектрис эти отклонения равны, а на другой противоположны по знаку. Тогда

$$\begin{aligned} (x \cos \theta + y \sin \theta - p_1) - (x \cos \varphi + y \sin \varphi - p_2) &= 0; \\ (x \cos \theta + y \sin \theta - p_1) + (x \cos \varphi + y \sin \varphi - p_2) &= 0. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Пример 12.2. Для треугольника с вершинами $A(1, 3)$, $B(4, -2)$, $C(-3, -1)$ найти:

а) каноническое уравнение прямой CA , уравнение прямой CB в параметрической форме и общее уравнение прямой AB , одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом;

б) угол между прямыми CB и CA ;

в) точку пересечения медиан треугольника;

г) уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;

д) расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;

е) уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна прямой CB .

Решение. Для удобства изобразим эти точки на рис. 55.

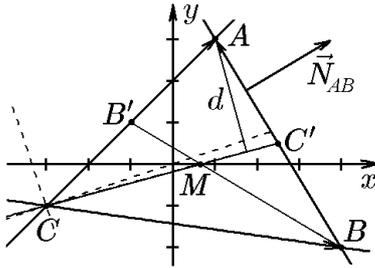


Рис. 55.

а) Направляющим вектором прямой CA является вектор $\overrightarrow{CA} = (1+3, 3+1)$, т.е. $\overrightarrow{CA} = (4, 4)$. Следовательно, каноническое уравнение прямой CA :

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{4} \quad (12.19)$$

преобразуется к уравнению в общем виде:

$$x - y + 2 = 0. \quad (12.20)$$

Разделив общее уравнение прямой (12.20) на (-2) , получим уравнение прямой CA в отрезках:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1. \quad (12.21)$$

На рис. 55 видно, что прямая CA действительно отсекает на оси x отрезок $a = -2$, а на оси y — отрезок $b = 2$.

Направляющим вектором прямой CB является вектор $\overrightarrow{CB} = (4+3, -2+1)$, т.е. $\overrightarrow{CB} = (7, -1)$. Следовательно, уравнение прямой CB в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= 4 + 7t, \\ y &= -2 - t \end{aligned} \quad (12.22)$$

преобразуется к уравнению в общем виде:

$$x + 7y + 10 = 0. \quad (12.23)$$

Домножив уравнение (12.23) на нормировочный множитель $\lambda = -1/\sqrt{1+49} = -1/\sqrt{50}$, получим уравнение прямой CB в нормальной форме:

$$\frac{x}{\sqrt{50}} + \frac{7y}{\sqrt{50}} + \frac{14}{\sqrt{50}} = 0. \quad (12.24)$$

Направляющим вектором прямой BA является вектор $\overrightarrow{BA} = (1-4, 3+2)$, т.е. $\overrightarrow{BA} = (-3, 5)$. Вектор $\vec{N}_{BA} = (5, 3)$ перпендикулярен вектору \overrightarrow{BA} , и его можно выбрать вектором нормали к прямой BA . Следовательно, общее уравнение прямой BA имеет вид

$$5(x-1) + 3(y-3) = 0$$

или

$$5x + 3y - 14 = 0. \quad (12.25)$$

Разрешив уравнение (12.25) относительно y , получим для прямой BA уравнение с угловым коэффициентом

$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{14}{3}. \quad (12.26)$$

б) Угол φ между прямыми

$$\begin{aligned} CA: \quad x - y + 2 = 0, \quad \vec{N}_{CA} &= (1, -1), \quad \vec{s}_{CA} = (-1, -1); \\ CB: \quad x + 7y + 10 = 0, \quad \vec{N}_{CB} &= (1, 7), \quad \vec{s}_{CB} = (7, -1) \end{aligned}$$

находится, согласно определению, как

$$\cos \varphi = \frac{|(\vec{N}_{CA}, \vec{N}_{CB})|}{|\vec{N}_{CA}||\vec{N}_{CB}|} = \frac{|1 \cdot 1 + (-1) \cdot 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{2}\sqrt{50}} = \frac{6}{10} = 0,6;$$

$$\varphi = \arccos 0,6 \approx 53^\circ.$$

В свою очередь, угол ψ от прямой CA к прямой CB определяется соотношением (12.8):

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \angle(CA \mapsto CB) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{1 \cdot 1 + (-1) \cdot 7} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3};$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(-\frac{4}{3} \right) \approx -53^\circ.$$

Углы φ и ψ совпадают по абсолютной величине, но угол ψ отрицателен, поскольку поворот от прямой CA к прямой CB совершается по часовой стрелке, а не против, что и подтверждается рис. 55.

в) Точку пересечения медиан проще всего найти, воспользовавшись формулой деления отрезков в данном отношении. Действительно, медиана CC' делит сторону BA пополам и, следовательно, координаты точки C' равны

$$x_{C'} = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 4}{2} = \frac{5}{2}; \quad y_{C'} = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2}, \quad (12.27)$$

т.е. $C'(5/2, 1/2)$. Теперь можно воспользоваться тем, что точка пересечения медиан M делит отрезок CC' в отношении $2 : 1$, следовательно, её координаты равны

$$x_M = \frac{x_C + 2x_{C'}}{1 + 2} = \frac{-3 + 2 \cdot 5/2}{3} = \frac{2}{3}; \quad y_M = \frac{y_C + 2y_{C'}}{1 + 2} = \frac{1 + 2 \cdot 1/2}{2} = 0. \quad (12.28)$$

Таким образом, точка пересечения медиан имеет координаты $M(2/3, 0)$.

Для проверки найдём координаты этой точки, записав уравнения медиан CC' , BB' и определив точку их пересечения.

Уравнение медианы CC' можно найти как уравнение прямой, проходящей через точки $C(-3, -1)$ и $C'(5/2, 1/2)$ (см. (12.27)):

$$\frac{x + 3}{5/2 + 3} = \frac{y + 1}{1/2 + 1}$$

или

$$3x - 11y - 2 = 0. \quad (12.29)$$

Теперь найдём координаты точки B' как середины стороны CA :

$$x_{B'} = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1; \quad y_{B'} = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = 1, \quad (12.30)$$

т.е. $B'(-1, 1)$.

Это позволяет записать уравнение медианы BB' как уравнение прямой, проходящей через точки $B(4, -2)$ и $B'(-1, 1)$:

$$\frac{x + 1}{4 + 1} = \frac{y - 1}{-2 - 1}$$

или

$$3x + 5y - 2 = 0. \quad (12.31)$$

Итак, мы нашли уравнения двух медиан CC' и BB' , точкой пересечения которых является точка M . Её координаты можно найти, решив систему из уравнений (12.29) и (12.31):

$$\begin{aligned} 3x - 11y - 2 &= 0, \\ 3x + 5y - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы $x = 2/3$, $y = 0$ и задаёт координаты точки M , которые совпадают с найденными ранее.

г) Уравнение биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA , найдутся по формуле (12.17) с учётом уравнений этих сторон (12.19) и (12.22):

$$\frac{x - y + 2}{\sqrt{2}} = \pm \frac{x + 7y + 10}{\sqrt{50}}$$

или

$$5(x - y + 2) = \pm(x + 7y + 10). \quad (12.32)$$

Выбрав знак «+», получим уравнение биссектрисы угла ACB :

$$y = \frac{x}{3},$$

проходящей через начало координат.

Выбрав знак «-», получим уравнение биссектрисы смежного угла (штриховые линии на рис. 55)

$$3x + y + 10 = 0.$$

д) Поскольку уравнение медианы CC'

$$3x - 11y - 2 = 0$$

мы уже нашли ранее (см. (12.29)), то расстояние d до неё от точки $A(1, 3)$ найдётся по формуле (12.2):

$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 11 \cdot 3 - 6|}{\sqrt{9 + 121}} = \frac{|-36|}{\sqrt{130}} = \frac{36}{\sqrt{130}} \approx 3,16.$$

е) Из уравнения (12.22) прямой CB в параметрической форме нам известен её направляющий вектор $\vec{s}_{CB} = (7, -1)$, а из общего уравнения (12.23) — вектор нормали $\vec{N}_{CB} = (1, 7)$. С учётом этого прямая ℓ_{\parallel} , параллельная CB , будет своим вектором нормали \vec{N}_{\parallel} иметь вектор \vec{N}_{CB} , т.е. $\vec{N}_{\parallel} = \vec{N}_{CB}$, а прямая ℓ_{\perp} , перпендикулярная CB , будет своим вектором нормали \vec{N}_{\perp} иметь вектор \vec{s}_{CB} , т.е. $\vec{N}_{\perp} = \vec{s}_{CB}$. Тогда уравнения соответствующих прямых, проходящих через точку $A(1, 3)$, будут иметь вид

$$\begin{aligned} \ell_{\parallel} : 1 \cdot (x - 1) + 7(y - 3) &= 0 \text{ или } x + 7y - 22 = 0; \\ \ell_{\perp} : -7(x - 1) + 1 \cdot (y - 3) &= 0 \text{ или } -7x + y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Кривые линии на плоскости

13. Кривые второго порядка на плоскости. Окружность

Кривые второго порядка играют большую роль во многих прикладных науках, таких, как астрономия, механика, военное дело и др.

◆ Множество точек плоскости называется *алгебраической кривой второго порядка*, если левая часть ее уравнения есть полином второй степени относительно x и y :

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + E = 0. \quad (13.1)$$

Мы будем рассматривать наиболее распространенные кривые второго порядка: окружность, эллипс, параболу и гиперболу. Прежде чем перейти к изучению кривых второго порядка, дадим определение касательной к кривой.

◆ Касательной к кривой L в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется предельное положение секущей M_0M , когда точка M стремится к точке M_0 по кривой L .

Из элементарной геометрии известно следующее

◆ *Окружностью* называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой центром окружности.

◇ Это определение мы будем называть *геометрическим определением окружности*.

◆ *Хордой* (от греческого *χορδή* — «струна») окружности называется отрезок, соединяющий две ее произвольные точки.

◆ *Диаметром* (от греческого *διαμετρος* — «поперечник») называется хорда, проходящая через середины двух любых меньших параллельных хорд.

На рис. 56 изображены три параллельные хорды χ_1, χ_2, χ_3 и их диаметр δ_1 , а также две параллельные хорды χ_4, χ_5 и их диаметр δ_2 . Из простейших геометрических построений следует, что все диаметры окружности проходят через ее центр — точку O и являются хордами наибольшей длины. Поэтому диаметр окружности иногда определяют как хорду наибольшей длины, эту длину также называют диаметром. Отрезок диаметра от центра окружности до ее точки и его длина называются одним словом — *радиус* окружности (уже от латинского *radius* — «луч», «спица колеса»). Исходя из геометрического определения окружности и определения прямой линии, а также связанных с ними вспомогательных понятий, т.е. с помощью циркуля и линейки, можно решить ряд планиметрических задач, что, собственно, и составляет содержание курса начертательной геометрии.

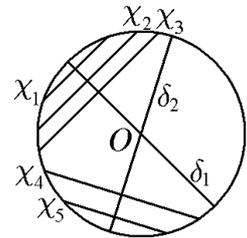


Рис. 56.

Наряду с геометрическим определением можно сформулировать определение, связывающее текущие координаты x, y произвольной точки окружности, в форме некоторого уравнения аналогично данному ранее определению прямой линии. Такое определение можно рассматривать как аналитическое выражение, поэтому определение кривых с помощью уравнений естественно назвать *аналитическим*. Исследование свойств геометрических объектов с помощью алгебраических уравнений и составляет предмет курса аналитической геометрии.

В таком подходе важное значение имеет выбор системы координат. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпадало с центром окружности (рис. 57,а). Такую систему координат будем называть *канонической*.

Пусть в канонической системе координат точка $M(x, y)$ — произвольная точка окружности (рис. 57,а) и пусть R — расстояние, на которое она удалена от

центра. Это расстояние между двумя точками: $O(0, 0)$ и $M(x, y)$, и, следовательно,

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

После возведения этого выражения в квадрат мы получим уравнение второго порядка

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (13.2)$$

описывающее окружности радиуса R с центром в начале координат.

◆ Уравнение (13.2) называется *каноническим уравнением окружности*.

Каноническое уравнение окружности можно положить в основу определения окружности.

◆ Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (13.2), называется *окружностью*.

Это определение мы будем называть аналитическим определением окружности.

Очевидно, что геометрическое и аналитическое определения эквивалентны. Действительно, в том, что из геометрического определения следует уравнение (13.2), мы уже убедились. Убедимся теперь в обратном. Пусть xOy — прямоугольная система координат, в которой координаты точек некоторой кривой удовлетворяют уравнению (13.2). Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка этой кривой. Тогда при заданной координате x её координата y определяется соотношением

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, \quad R \geq 0, \quad |x| \leq R. \quad (13.3)$$

Исходя из (13.3), найдём расстояние d от точки $M(x, y)$ до точки $O(0, 0)$:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (R^2 - x^2)} = \sqrt{R^2} = |R| = R.$$

Последнее равенство полностью соответствует геометрическому определению окружности с $\delta = 2R$.

Из уравнения (13.2) можно получить все известные из элементарной геометрии свойства окружности, а также получить аналитическое решение ряда задач, использующих геометрические построения (см. примеры 13.1, 13.2).

Начнём с того, что замена переменных $x \rightarrow -x$ и $y \rightarrow -y$ в уравнении (13.2) не меняет его вида. Это означает, что координатные оси являются осями симметрии окружности (13.2), а точка их пересечения, т.е. центр окружности, является ее центром симметрии. Геометрически это соответствует зеркальному отображению относительно любой из осей, а также повороту канонической системы координат на угол, кратный $\pi/2$, т.е. $\varphi = \pi n/2$, $n = \overline{0, \infty}$. Более того, поворот канонической системы координат на любой угол φ также не меняет вид уравнения. Действительно, пусть $x'Oy'$ — система координат, полученная поворотом исходной системы xOy против часовой стрелки на угол φ (рис. 57, б). Из простейших свойств прямоугольных треугольников имеем

$$x' = R \cos \psi, \quad y' = R \sin \psi, \quad (13.4)$$

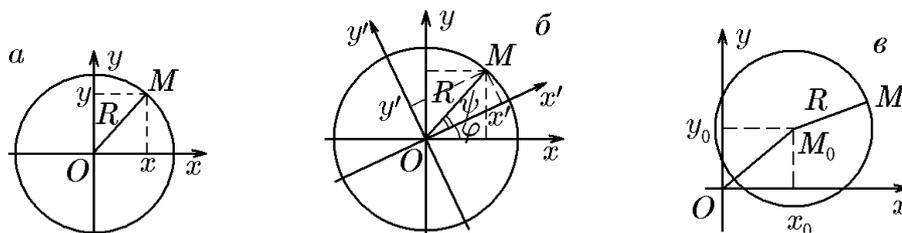


Рис. 57.

и, соответственно,

$$x = R \cos(\psi + \varphi), \quad y = R \sin(\psi + \varphi), \quad (13.5)$$

где ψ — угол между осью Ox' и радиусом OM , а φ — угол поворота. Из (13.5) с учётом (13.4) найдём

$$\begin{aligned} x &= R \cos \psi \cos \varphi - R \sin \psi \sin \varphi = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y &= R \cos \psi \sin \varphi + R \sin \psi \cos \varphi = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \end{aligned} \quad (13.6)$$

Подстановка (13.6) в (13.2) даёт

$$x^2 + y^2 = (x' \cos \varphi - y' \sin \varphi)^2 + (x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)^2 = (x')^2 + (y')^2 = R^2.$$

Отсюда и следует, что в новой системе координат вид уравнения не меняется. Это свойство уравнения окружности называют ещё свойством *инвариантности* уравнения (13.2) относительно любых поворотов канонической системы координат вокруг своего начала. Другими словами, канонической системой координат для окружности является любая ортогональная система координат с началом в ее центре.

◇ Напомним, что кривая, обладающая центром симметрии, называется *центральной*, причём если повороты кривой относительно центра симметрии на угол $\varphi = 2\pi/n$, $n = \overline{2, \infty}$, отображают ее в самое себя, то она обладает симметрией n -го порядка. Квадрат, например, обладает симметрией 4-го порядка относительно своего центра. Отметим, что в рамках этого определения окружность обладает центральной симметрией бесконечного порядка!

Наличие симметрии нередко в практических приложениях позволяет по известному решению построить другое решение из «соображений симметрии».

Рассмотрим теперь систему координат, в которой центр окружности радиуса R расположен в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 57, в). Рассуждая так же, как и при выводе (13.2), придём к уравнению

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (13.7)$$

С помощью параллельного переноса, определяемого вектором $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$:

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0,$$

возвращаемся к канонической системе координат и каноническому уравнению окружности

$$(x')^2 + (y')^2 = R^2.$$

Раскрыв скобки в (13.7), получим уравнение вида

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0,$$

которое характерно тем, что коэффициенты при x^2 и y^2 равны, а слагаемые с произведением xy отсутствуют. Таким образом, общее уравнение второго порядка следующего вида:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (13.8)$$

всегда при $A^2 + B^2 > 4C$ определяет некоторую окружность. Выделив полный квадрат в (13.8), приведём его к виду

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

из которого найдём координаты ее центра и радиус:

$$x_0 = -\frac{A}{2}, \quad y_0 = -\frac{B}{2}, \quad R^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C. \quad (13.9)$$

Итак, уравнение 2-го порядка общего вида (13.8) параллельным переносом

$$x' = x + \frac{A}{2}, \quad y' = y + \frac{B}{2}$$

приводится к каноническому виду.

Как и прямая, делящая плоскость на две полуплоскости $Ax + By + C \leq 0$, окружность делит плоскость на две области, называемые *кругом* и *его внешне-стью* и определяемые неравенствами

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &< R^2, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &> R^2 \end{aligned} \quad (13.10)$$

соответственно.

Пример 13.1. В курсе элементарной геометрии известно утверждение, что вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, равен $\pi/2$. Доказать это утверждение методами аналитической геометрии.

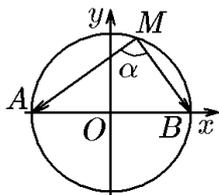


Рис. 58.

В этом случае его концы A и B имеют координаты $x_A = -R$, $y_A = 0$ и $x_B = R$, $y_B = 0$ (рис. 58).

Выберем на окружности произвольную точку $M(x_M, y_M)$. Поскольку она принадлежит окружности, ее координаты равны x_M , $y_M = \sqrt{R^2 - x_M^2}$. Теперь построим (см. рис. 58) векторы \overrightarrow{MA} и \overrightarrow{MB} и определим угол между ними, вычислив их скалярное произведение. Запишем координаты векторов:

$$\overrightarrow{MA} = (-R - x_M, -\sqrt{R^2 - x_M^2}), \quad \overrightarrow{MB} = (R - x_M, -\sqrt{R^2 - x_M^2}),$$

откуда

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = -(R^2 - x_M^2) + (R^2 - x_M^2) = 0.$$

Равенство нулю скалярного произведения означает, что векторы \overrightarrow{MA} и \overrightarrow{MB} ортогональны, следовательно, угол $\angle AMB$ — прямой, что и требовалось доказать.

Пример 13.2. Методами аналитической геометрии показать, что радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

Решение. В элементарной геометрии взаимное расположение прямой и окружности классифицируется следующим образом:

- 1) прямая имеет с окружностью две общие точки — такая прямая называется секущей (рис. 59, прямая M_1M_0);
- 2) прямая имеет с окружностью одну общую точку — такая прямая называется касательной (рис. 59, прямая M'_1M_0);
- 3) прямая не имеет с окружностью общих точек (рис. 59, прямая AM_0).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка вне окружности $x^2 + y^2 = R^2$, через которую проходит прямая с единичным направляющим вектором $\vec{s} = (m, n)$, $m^2 + n^2 = 1$. Если прямую задать параметрическими уравнениями, то, с точки зрения аналитической геометрии, взаимное расположение прямой и окружности определяется решениями системы уравнений

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2, \\ x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \quad m^2 + n^2 = 1. \end{aligned} \quad (13.11)$$

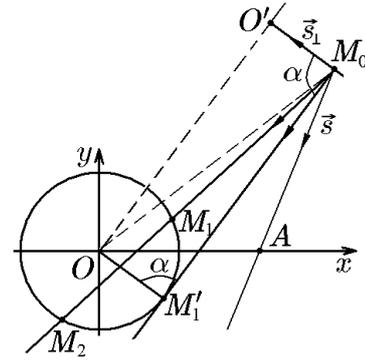


Рис. 59.

Чтобы найти решения этой системы, подставим x и y из 2-го и 3-го уравнений в первое. Это дает квадратное относительно переменной t уравнение

$$t^2 + 2(x_0m + y_0n)t + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0 \quad (13.12)$$

с решениями

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= -(x_0m + y_0n) \pm \sqrt{(x_0m + y_0n)^2 - (x_0^2 + y_0^2 - R^2)} = \\ &= -(x_0m + y_0n) \pm \sqrt{R^2 - (x_0n - y_0m)^2}. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Структура этих решений определяется значением подкоренного выражения, т.е. дискриминанта

$$D = R^2 - (x_0n - y_0m)^2.$$

Если $D < 0$, то уравнение (13.12) не имеет действительных решений. Это означает, что прямая с направляющим вектором $\vec{s} = (m, n)$ и окружность не пересекаются.

Если $D > 0$, то уравнение (13.12) имеет два действительных различных решения $t_1 \neq t_2$, подставив которые в (13.11), мы найдём координаты точек пересечения M_1 и M_2 прямой (секущей) с окружностью.

Если $D = 0$, то уравнение (13.12) имеет два действительных равных решения $t_1 = t_2$, подставив которые в (13.11), мы найдём координаты одной точки пересечения M'_1 прямой (касательной) с окружностью.

◇ Из соображений удобства точку касания M'_1 удобнее рассматривать не как одну, а как две (по числу решений) совпавших точки.

Из равенства

$$D = R^2 - (x_0n - y_0m)^2 = 0$$

следует

$$|x_0n - y_0m| = R. \quad (13.14)$$

Приняв во внимание, что x_0 и y_0 есть координаты радиус-вектора $\vec{OM}_0 = (x_0, y_0)$, а n и $(-m)$ — координаты вектора $\vec{s}_\perp = (n, -m)$, перпендикулярного $\vec{s} = (m, n)$, поскольку $(\vec{s}_\perp, \vec{s}) = 0$, равенство (13.14) можно записать как

$$|(\vec{OM}_0, \vec{s}_\perp)| = |\text{пр}_{\vec{s}_\perp} \vec{OM}_0| = |O'M_0| = |\vec{OM}'_1| = R.$$

Это означает, что четырехугольник $OO'M_0M'$ является прямоугольником и, следовательно, угол α — угол между касательной и радиусом — равен $\pi/2$, что и требовалось доказать.

14. Эллипс

Перейдём теперь к рассмотрению эллипса и дадим его геометрическое определение.

♦ *Эллипсом* называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек этой же плоскости, называемых фокусами, постоянна и равна $2a$.

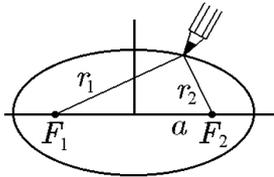


Рис. 60.

Из определения следует способ построения эллипса с помощью натянутой нити (рис. 60).

Для эллипса, как и для окружности, вводятся следующие вспомогательные понятия.

♦ *Хордой* эллипса называется отрезок, соединяющий две ее любые точки.

♦ *Диаметром* эллипса называется хорда, проходящая через середины любых параллельных хорд.

На рис. 61 изображены три группы параллельных хорд и их диаметры, проходящие через их середины. Из простейших геометрических построений следует, что все диаметры проходят через одну точку O , называемую центром эллипса.

В отличие от окружности, у которой все диаметры равны, для эллипса полезно ввести понятие сопряженного диаметра.

♦ Если δ — некоторый диаметр эллипса, то диаметр δ^* , проведённый к хордам, параллельным δ , называется *диаметром, сопряженным к δ* , или *сопряженным диаметром* (рис. 62).

Свойство сопряженности диаметров взаимно: $(\delta^*)^* = \delta$, а касательная, проведённая к эллипсу в точке ее пересечения с диаметром δ , параллельна δ^* и наоборот.

♦ Взаимно перпендикулярные сопряженные диаметры называются *главными* (рис. 63).

Эллипс имеет только одну пару главных диаметров D и D^* (для сравнения: окружность имеет их бесконечное множество). Очевидно, что любой диаметр эллипса меньше главного диаметра D и больше главного диаметра D^* . Вместе с этим, главные диаметры являются осями симметрии эллипса. Поэтому выражение «главный диаметр» зачастую заменяют словом «ось». Отсюда происходит терминология: большая ось, она же фокальная ось — главный (фокальный) диаметр, проходящий через фокусы и имеющий наибольшую длину; малая ось — главный диаметр, сопряженный фокальному и имеющий наименьшую длину. Аналогично определяются большая и малая полуоси, главные оси и т.д.

♦ Точки эллипса, принадлежащие главным диаметрам, называются его *вершинами*.

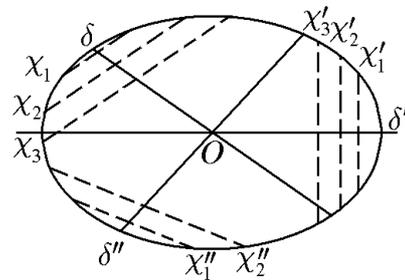


Рис. 61.

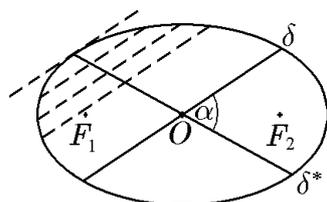


Рис. 62.

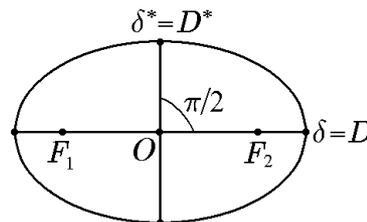


Рис. 63.

♦ *Фокальной хордой* называется хорда, проходящая через фокус перпендикулярно фокальной оси. Половина длины фокальной хорды называется *фокальным параметром*.

Термин «межфокусное расстояние» пояснений не требует.

Наряду с геометрическим определением эллипса можно сформулировать его аналитическое определение, связывающее координаты x, y произвольной точки эллипса неким уравнением, как это было сделано для прямой и окружности.

Как уже отмечалось, в таком подходе важное значение имеет выбор системы координат. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox проходила через фокусы эллипса, а ее начало находилось на равном расстоянии от фокусов (рис. 64). Такую систему координат будем называть канонической.

◇ Приняв во внимание введённую выше терминологию, можно утверждать еще до вывода уравнения, что каноническая система координат — это система координат с началом в центре эллипса и осями, направленными по его главным диаметрам. Другими словами, это система координат, образованная главными осями эллипса.

Пусть xOy — каноническая система координат данного эллипса (рис. 64). Тогда его фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Произвольную точку эллипса с координатами x, y обозначим через $M(x, y)$. Радиус-вектор \overrightarrow{OM} , проведённый в эту точку, обозначим стандартным образом: $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. В дополнение к нему введём в рассмотрение фокальные радиус-векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , проведённые из фокусов F_1 и F_2 в точку M , т.е. $\vec{r}_1 = \overrightarrow{F_1M}$ и $\vec{r}_2 = \overrightarrow{F_2M}$. Запишем координаты этих трех векторов: $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_1 = (x + c, y)$, $\vec{r}_2 = (x - c, y)$.

Согласно геометрическому определению эллипса, должно выполняться равенство

$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = |\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = 2a$$

или

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Отсюда после двукратного возведения в квадрат последовательно получим

$$\begin{aligned} \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \\ (x + c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2, \\ a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= a^2 - cx; \\ a^2[(x - c)^2 + y^2] &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2; \\ x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned} \tag{14.1}$$

Из рис. 64 видно, что $2a > 2c$, т.е. $a^2 - c^2 > 0$. Обозначим для краткости

$$a^2 - c^2 = b^2 > 0. \tag{14.2}$$

Тогда уравнение (14.1) примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{14.3}$$

Уравнение (14.3) является уравнением 2-го порядка и описывает эллипс с межфокусным расстоянием $2c$, большой осью $2a$ и малой осью $2b$.

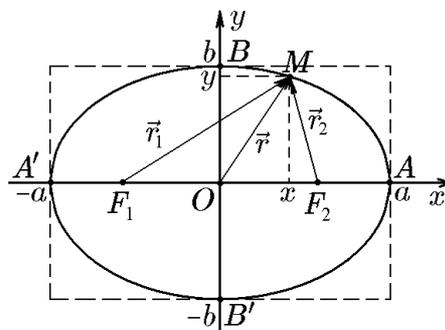


Рис. 64.

◆ Уравнение (14.3) называется *каноническим уравнением эллипса*.

◆ Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (14.3), называется *эллипсом*.

Это определение естественно считать аналитическим определением эллипса. Очевидно, что геометрическое и аналитическое определения эквивалентны. Действительно, что из геометрического определения вытекает уравнение (14.3), мы уже убедились. Убедимся теперь в обратном. Пусть xOy — некоторая прямоугольная система координат, в которой координаты точек некоторой кривой связаны уравнением (14.3). Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка этой кривой, тогда, зафиксировав координату x , для координаты y получим

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad |x| \leq a. \quad (14.4)$$

Исходя из (14.4), найдём расстояние $|\vec{r}_1|$ от точки $M(x, y)$ до фокуса $F_1(-c, 0)$:

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1| &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{c}{a}x + a\right)^2} = \\ &= \left|\frac{c}{a}x + a\right| = a + \frac{c}{a}x, \end{aligned} \quad (14.5)$$

поскольку $|x| < a$, т.е. $|cx/a| < c$.

Аналогично найдём расстояние $|\vec{r}_2|$ от точки $M(x, y)$ до фокуса $F_2(c, 0)$:

$$|\vec{r}_2| = a - \frac{c}{a}x. \quad (14.6)$$

Таким образом, для любой точки, удовлетворяющей уравнению (14.3), выполняется условие $|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2| = 2a$, т.е. кривая, определяемая этим уравнением, является эллипсом. Следовательно, геометрическое и аналитическое определения эллипса эквивалентны.

Из уравнения (14.3) следуют все известные из элементарной геометрии свойства эллипса, а также можно получить аналитическое решение ряда задач, использующих геометрические построения.

Начнём с того, что замена $x \rightarrow -x$ и $y \rightarrow -y$ в (14.3) не меняет уравнение. Это означает, что координатные оси канонической системы координат, как и следовало ожидать, являются осями симметрии, а точка их пересечения, т.е. центр эллипса, является его центром симметрии. Поскольку после поворота на угол π вокруг своего центра эллипс отображается сам в себя, то, следовательно, он обладает центральной симметрией 2-го порядка ($\pi = 2\pi/2$).

При повороте на $\pi/2$ против часовой стрелки $x = -y'$, $y = x'$, и (14.3) примет вид

$$\frac{(y')^2}{a^2} + \frac{(x')^2}{b^2} = 1. \quad (14.7)$$

Непосредственно из уравнения (14.3) следует, что эллипс является ограниченной кривой, поскольку он заключен в прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$ (см. рис. 64), называемый *основным прямоугольником эллипса*. Эллипс касается основного прямоугольника в точках пересечения эллипса с координатными осями, т.е. его вершинах: при $y = 0$, $x = \pm a$; при $x = 0$, $y = \pm b$.

Если положить $y = 0$, то $x = \pm a$, а если $x = 0$, то $y = \pm b$. Таким образом, a и b — длины полуосей эллипса, большой и малой соответственно.

◆ Отношение

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad (14.8)$$

называется *эксцентриситетом эллипса*. Эксцентриситет характеризует степень вытянутости эллипса, что будет подробно рассмотрено в примере 14.1 (см. также рис. 65 и 66).

Пример 14.1. Рассмотрим, как изменение эксцентриситета влияет на форму эллипса.

Решение. Согласно определению (14.8), $\varepsilon = c/a$, откуда

$$b = a\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (14.9)$$

Из (14.8), (14.9) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ уравнение эллипса (14.3) становится уравнением окружности $x^2 + y^2 = R^2$ с радиусом $R = a = b$. Для $\varepsilon \neq 0$ эллипс описывается уравнением (14.3) с полуосями a и b , будем предполагать, что $a > b$. Рассмотрим случай, когда $\varepsilon \rightarrow 1$, т.е.

$$b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} a\sqrt{1 - \varepsilon^2}. \quad (14.10)$$

Из (14.10) следует, что при фиксированном значении a

$$b = a \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0. \quad (14.11)$$

Если же $a \rightarrow \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 1$, то в (14.10) возникает неопределенность и возможно

$$b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 1} a\sqrt{1 - \varepsilon^2} \neq 0. \quad (14.12)$$

В первом случае можно говорить о «сжатии» окружности, во втором — о ее «растяжении». Действительно, в первом случае $\varepsilon = c/a \rightarrow 1$ соответствует $(a - c)|_{\varepsilon \rightarrow 1} \rightarrow 0$, а во втором $\varepsilon = c/a \rightarrow 1$ соответствует $(a - c)|_{\varepsilon \rightarrow 1} = 2p = \text{const}$, тогда $a = c + 2p$ и, следовательно, $\varepsilon = (c + 2p)/c|_{c \rightarrow \infty} = 1$.

Графическая иллюстрация первого варианта приведена на рис. 65 для кривой второго порядка $x^2/a^2 + y^2/(a^2 - c^2) = 1$, $\varepsilon = c/a$, $a = 5$:

0) $\varepsilon_0 = 0$; $c_0 = 0$, окружность $x^2 + y^2 = 8$;

1) $\varepsilon_1 = 0,6$; $c_1 = a\varepsilon_1 = 5 \cdot 0,6 = 3$; $b_1 = \sqrt{a^2 - c_1^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$;

2) $\varepsilon_2 = 0,98$; $c_2 = 4,9$; $b_2 = \sqrt{5^2 - 4,9^2} = \sqrt{0,99} = 0,994$;

3) $\varepsilon_3 = 0,99$; $c_3 = 4,95$; $b_3 = \sqrt{5^2 - 4,95^2} = \sqrt{0,4975} = 0,705$

(даже при значениях эксцентриситета, очень «близких» к 1, величина b «значительно» отличается от нуля);

4) $\varepsilon_4 \rightarrow 1$, $c_4 \rightarrow 5$, $b_4 \rightarrow 0$, что соответствует отрезку $y = 0$, $-5 \leq x \leq 5$.

Графическая иллюстрация второго варианта приведена на рис. 66 для эллипса

$$\frac{(x - c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

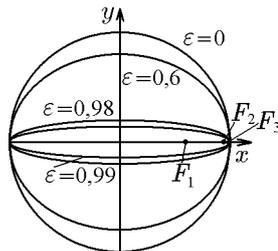


Рис. 65.

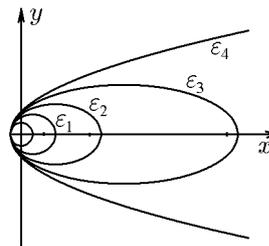


Рис. 66.

В этом случае будем менять межфокусное расстояние, соблюдая, например, условие

$$a - c = \frac{p}{2} = 1 \quad \text{или} \quad a = 1 + c. \quad (14.13)$$

Тогда

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{c}{1+c} \quad \text{или} \quad c = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (14.14)$$

В свою очередь,

$$a = \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad (14.15)$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = (a-c)(a+c) = 1 \cdot \left(\frac{1}{1-\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right) = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}, \quad (14.16)$$

$$b = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}.$$

Для удобства преобразуем исходное уравнение при условии (14.13):

$$\begin{aligned} y^2 &= (a^2 - c^2) \left[1 - \frac{(x-c)^2}{a^2} \right] = \frac{(a+c)(a-c)}{a^2} [a^2 - x^2 - 2xc - c^2] = \\ &= \frac{p}{2} \frac{a+c}{a^2} \left[\frac{p}{2}(a+c) + 2xc - x^2 \right] = \frac{p}{2} \frac{2c+1}{c+1} \left[\frac{p}{2} \frac{2c+1}{c+1} + 2x \frac{c}{c+1} - \frac{x^2}{c+1} \right]. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Из (14.17) следует

$$\begin{aligned} y^2(x)|_{x=-1} &= b^2 \left[1 - \frac{(1+c)^2}{a^2} \right] = b^2(1-1) = 0; \\ y^2(x)|_{x=0} &= b^2 \left[1 - \frac{c^2}{a^2} \right] = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} (1-\varepsilon^2) = (1+\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

и, что очень важно,

$$y^2(x)|_{\substack{\varepsilon \rightarrow 1 \\ (c \rightarrow \infty)}} = \frac{p}{2} \frac{2c+1}{c+1} \left[\frac{p}{2} \frac{2c+1}{c+1} + 2x \frac{c}{c+1} - \frac{x^2}{c+1} \right] \Big|_{\substack{\varepsilon \rightarrow 1 \\ (c \rightarrow \infty)}} = p(p+2x-0),$$

откуда следует уравнение

$$y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right), \quad (14.18)$$

которое, как мы увидим позже, описывает параболу. При $p = 2$ из (14.18) получим

$$y^2 = 4(x+1) : \quad (14.19)$$

Тогда (см. рис. 66) имеем

0) $\varepsilon_0 = 0$, $c_0 = 0$, $a_0 = b_0 = 1$ окружность $x^2 + y^2 = 1$,

1) $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$, $a_1 = \frac{1}{1-1/2} = 2$, $b_1^2 = \frac{1+1/2}{1-1/2} = 3$,

$$b_1 = \sqrt{3} \approx 1,73; \quad y_1(0) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

2) $\varepsilon_2 = \frac{3}{4}$, $c_2 = 3$, $a_2 = 4$, $b_2 = \sqrt{7} = 2,64$; $y_2(0) = \frac{7}{4}$;

3) $\varepsilon_3 = 0,9$; $c_3 = 9$, $a_3 = 10$, $b_3 = \sqrt{19} \approx 4,35$; $y_3(0) = 1,9$;

4) $\varepsilon_4 = \frac{c}{c+1} \Big|_{c \rightarrow \infty} \rightarrow 1$; $c_4 \rightarrow \infty$, $a_4 \rightarrow \infty$, $y^2 = 4(x+1)$ – парабола, $y(0) = 2$.

Заметим, что между эллипсами, изображенными на рис. 65 и 66, можно установить взаимно однозначное соответствие в парах, имеющих равные эксцентриситеты, хотя и разные размеры. При этом отрезок на рис. 65 будет соответствовать параболе на рис. 66, поскольку они имеют эксцентриситет $\varepsilon = 1$.

◆ *Директрисой D_j эллипса*, соответствующей (ближайшей) фокусу F_j ($j = 1, 2$), называется прямая, расположенная в одной с ним полуплоскости π_j перпендикулярно фокальной оси эллипса на расстоянии a/ε от его центра. В канонической системе координат уравнения директрис имеют вид

$$D_1 : x = d_1 = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad D_2 : x = d_2 = \frac{a}{\varepsilon}. \quad (14.20)$$

Следующее утверждение можно было бы выбрать в качестве определения эллипса. Покажем, что оно эквивалентно данным выше определениям.

Теорема 14.1. *Для того чтобы точка лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния $|\vec{r}_j|$ от нее до фокуса к расстоянию d_j до соответствующей директрисы равнялось эксцентриситету эллипса:*

$$\frac{|\vec{r}_j|}{d_j} = \varepsilon. \quad (14.21)$$

Доказательство. Докажем необходимость сформулированного условия. На рис. 67 изображены эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и его директрисы $D_j: x = \pm a/\varepsilon$ в канонической системе координат. Как обычно, обозначим через $M(x, y)$ произвольную точку эллипса, а через \vec{r}_1 и \vec{r}_2 его фокальные радиусы; через d_1 обозначим расстояние от точки M до директрисы D_1 , а через d_2 – расстояние от M до D_2 . Как следует из рис. 67,

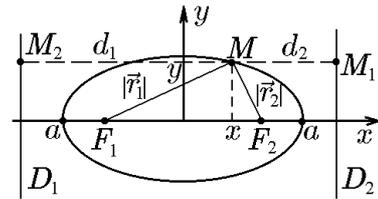


Рис. 67.

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{a}{\varepsilon} + x = \frac{1}{\varepsilon}(a + \varepsilon x), \\ d_2 &= \frac{a}{\varepsilon} - x = \frac{1}{\varepsilon}(a - \varepsilon x). \end{aligned} \quad (14.22)$$

Ранее из определения эллипса были получены выражения для $|\vec{r}_1|$ и $|\vec{r}_2|$ в виде (14.5) и (14.6):

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1| &= a + \varepsilon x, \\ |\vec{r}_2| &= a - \varepsilon x, \end{aligned}$$

с учётом которых убеждаемся, что

$$\frac{|\vec{r}_1|}{d_1} = \frac{|\vec{r}_2|}{d_2} = \varepsilon.$$

Перейдём к доказательству достаточности. Пусть для произвольной точки некоторой кривой выполняется равенство

$$\frac{|\vec{r}_1|}{d_1} = \frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{x + a/\varepsilon} = \varepsilon.$$

Учтя, что $\varepsilon = c/a$, после возведения в квадрат получим (14.1), откуда, как мы видели, следует каноническое уравнение эллипса (14.3).

Доказательство для фокуса F_2 и директрисы D_2 аналогично.

Пример 14.2. Найти значение фокального параметра эллипса, описываемого каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

Решение. Согласно определению, фокальный параметр p равен половине длины фокальной хорды, т.е. ординате точки $M(x, y)$ эллипса при $x = c$. Положив в уравнении $x = c$, найдём

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

откуда

$$p = y = \frac{b^2}{a}. \quad (14.23)$$

Пример 14.3. Показать, что уравнение касательной к эллипсу $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (14.24)$$

Решение. Касательные, проходящие через две точки, являющиеся вершинами эллипса $M_1(-a, 0)$ и $M_2(a, 0)$, перпендикулярны к главному диаметру и, следовательно, к оси Ox , т.е. уравнения этих касательных $x = \pm a$.

1-й способ. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — фиксированная точка эллипса, а $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса, отличная от M_0 . Уравнение секущей MM_0 можно записать в параметрической форме:

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t. \quad (14.25)$$

Здесь α, β — координаты направляющего вектора $\vec{q} = (\alpha, \beta)$ для прямой (14.25). Уравнение эллипса запишем в виде

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad (14.26)$$

и подставим в него соотношения (14.25):

$$b^2(x_0 + \alpha t)^2 + a^2(y_0 + \beta t)^2 - a^2b^2 = (b^2\alpha^2 + a^2\beta^2)t^2 + 2(b^2\alpha x_0 + a^2\beta y_0)t = 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что точка M_0 принадлежит эллипсу и, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению (14.26). Решив получившееся квадратное относительно переменной t уравнение, найдём

$$t_1 = 0, \quad t_2 = -\frac{2(b^2\alpha x_0 + a^2\beta y_0)}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}.$$

Когда точка M стремится к точке M_0 вдоль эллипса, параметр $t_2 \rightarrow 0$. Следовательно, в предельном положении, т.е. когда секущая становится касательной, должно выполняться условие

$$b^2\alpha x_0 + a^2\beta y_0 = 0,$$

т.е.

$$\alpha = a^2 y_0 s, \quad \beta = -b^2 x_0 s,$$

где s — параметр, характеризующий длину направляющего вектора касательной к эллипсу в точке M_0 . Тогда уравнение касательной в параметрической форме примет вид

$$x = x_0 + a^2 y_0 t, \quad y = y_0 - b^2 x_0 t.$$

Исключив параметр t , найдём

$$\frac{x - x_0}{a^2 y_0} = -\frac{y - y_0}{b^2 x_0}$$

или

$$\frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0.$$

Раскрыв скобки, окончательно получим

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

2-й способ. Если $y_0 \neq 0$, то уравнение касательной к точке $M_0(x_0, y_0)$ можно записать в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0), \quad (14.27)$$

где k — угловой коэффициент. Пусть $M(x_0, y_0)$ — произвольная точка эллипса, для которой $y_0 \neq 0$. Не уточняя знак y_0 , обозначим через $y = y(x)$ соответствующую функцию, для которой выполняется тождество

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2(x)}{b^2} = 1.$$

Продифференцировав его по x , найдём

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y(x)y'(x)}{b^2} = 0.$$

Подставив сюда $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ и разрешив относительно $y'(x_0)$, получим

$$y'(x_0) = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}. \quad (14.28)$$

Отсюда в силу геометрического смысла производной найдём

$$k = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Следовательно, уравнение касательной (14.27) примет вид

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}(x - x_0)$$

или

$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2.$$

Поскольку точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, имеем

$$b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2,$$

откуда

$$a^2 y y_0 + b^2 x x_0 = a^2 b^2$$

и соответственно

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1,$$

что совпадает с (14.24). Отметим, что уравнение (14.24) справедливо и для вершин эллипса, поскольку из него следует $x = \pm a$.

Пример 14.4. Показать, что касательная и нормаль в некоторой точке эллипса являются биссектрисами смежных углов, образуемых фокальными радиус-векторами, проведёнными в точку касания.

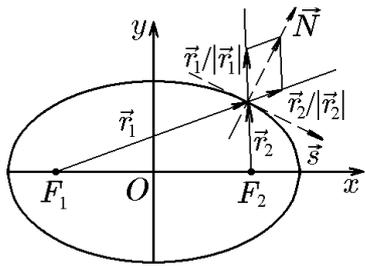


Рис. 68.

Решение. Пусть $M(x_0, y_0)$ — произвольная точка эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (рис. 68). В примере 14.3 мы показали, что касательная к эллипсу в этой точке описывается уравнением (14.24). Это означает, что вектор \vec{N} нормали к касательной имеет координаты $(x_0/a^2, y_0/b^2)$. Ранее было показано, что вектор \vec{r}_0 , направленный по биссектрисе угла между векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 есть диагональ ромба, т.е.

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} + \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|}.$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= (x_0 + c, y_0), & |\vec{r}_1| &= a + \frac{c}{a}x_0, \\ \vec{r}_2 &= (x_0 - c, y_0), & |\vec{r}_2| &= a - \frac{c}{a}x_0, \end{aligned}$$

найдем

$$\vec{r}_0 = \left(\frac{x_0 + c}{a + cx_0/a} + \frac{x_0 - c}{a - cx_0/a}, \frac{y_0}{a + cx_0/a} + \frac{y_0}{a - cx_0/a} \right)$$

или

$$\vec{r}_0 = \left(\frac{2b^2a}{a^2 - c^2x_0^2/a^2} \frac{x_0}{a^2}, \frac{2b^2a}{a^2 - c^2x_0^2/a^2} \frac{y_0}{b^2} \right) = \frac{2b^2a}{a^2 - c^2x_0^2/a^2} \vec{N}.$$

Последнее равенство означает коллинеарность векторов \vec{N} и \vec{r}_0 . Геометрически это соответствует тому, что нормаль к касательной действительно является биссектрисой угла между фокальными радиус-векторами \vec{r}_1 и \vec{r}_2 . Но тогда сама касательная в точке M_0 является биссектрисой смежного угла в силу ортогональности нормали \vec{N} и направляющего вектора \vec{s} касательной.

Пример 14.5. Показать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к эллипсу является величиной постоянной, равной квадрату длины малой полуоси.

Решение. Пусть эллипс задан своим каноническим уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка данного эллипса (рис. 69). Запишем уравнение касательной (14.24) в этой точке:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

или

$$xx_0b^2 + yy_0a^2 - a^2b^2 = 0. \quad (14.29)$$

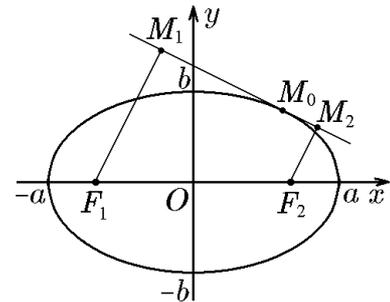


Рис. 69.

Из каждого фокуса F_1 и F_2 на касательную (14.29) опустим перпендикуляры F_1M_1 и F_2M_2 , задающие расстояния от фокуса до прямой-касательной. Расстояние от точки до прямой находим стандартным образом — нормируем уравнение прямой и подставим в него координаты точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$:

$$\begin{aligned} |F_1M_1| &= \frac{|-cx_0b^2 - a^2b^2|}{\sqrt{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}}, \\ |F_2M_2| &= \frac{|cx_0b^2 - a^2b^2|}{\sqrt{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}}. \end{aligned}$$

Вычислим произведение $|F_1M_1||F_2M_2|$:

$$|F_1M_1||F_2M_2| = \frac{|c^2x_0^2b^4 - a^4b^4|}{x_0^2b^4 + y_0^2a^4}. \quad (14.30)$$

Учтём, что

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

или

$$y_0^2a^2 = a^2b^2 - x_0^2b^2,$$

и подставим последнее равенство в (14.30):

$$|F_1M_1||F_2M_2| = \frac{|c^2x_0^2b^4 - a^4b^4|}{|x_0^2b^4 + a^4b^2 - x_0^2b^2a^2|} = \frac{b^4|c^2x_0^2 - a^4|}{|a^4b^2 - x_0^2b^2a^2|} = b^2.$$

Это и означает, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной является величиной постоянной для данного эллипса, и, более того, это произведение равно квадрату его малой полуоси b , что и требовалось показать.

Рассмотрим теперь систему координат, в которой центр эллипса расположен в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 70). Рассуждая так же, как и при выводе уравнения (14.3), придём к уравнению 2-го порядка

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (14.31)$$

С помощью параллельного переноса

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0$$

возвращаемся к канонической системе координат и каноническому уравнению эллипса

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1.$$

Уравнение (14.31) в развёрнутом виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x_0}{b^2}x - 2\frac{y_0}{b^2}y + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0,$$

характеризуется тем, что коэффициенты при x^2 и y^2 имеют один знак, а слагаемые с произведением xy отсутствуют. Таким образом, общее уравнение 2-го порядка, удовлетворяющее этим требованиям, т.е. уравнение

$$A^2x^2 + B^2y^2 - 2Cx - 2Dy + E = 0, \quad (14.32)$$

всегда при $C^2/A^2 + D^2/B^2 - E > 0$ определяет некоторый эллипс. Выделив полные квадраты, приведём его к виду

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Отсюда следуют координаты центра эллипса и длины его полуосей:

$$x_0 = \frac{C}{A^2}; \quad y_0 = \frac{D}{B^2}; \quad a^2 = \frac{1}{A^2} \left(\frac{C^2}{A^2} + \frac{D^2}{B^2} - E \right); \quad b^2 = \frac{1}{B^2} \left(\frac{C^2}{A^2} + \frac{D^2}{B^2} - E \right).$$

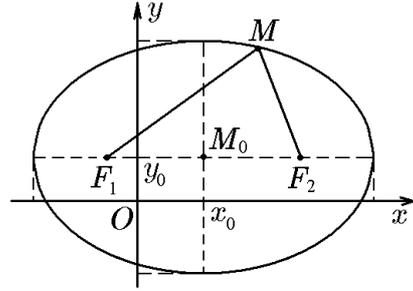


Рис. 70.

Таким образом, уравнение 2-го порядка общего вида (14.32) параллельным переносом

$$x' = x - \frac{C}{A^2}; \quad y' = y - \frac{D}{B^2}$$

приводится к каноническому виду (более подробно см. разд. «Приведение общего уравнения 2-го порядка к каноническому виду»).

Как и окружность, эллипс делит плоскость на две области: внутреннюю

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$

и внешнюю

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

Как уже отмечалось, при исследовании свойств эллипса большую роль играют его сопряженные диаметры.

Пример 14.6. Найти уравнения любой пары сопряженных диаметров эллипса и с их помощью записать уравнение касательной к эллипсу. Результат сравнить с результатом, полученным с использованием производной.

Решение. Начнём с главных диаметров. Так как главные диаметры совпадают с осями координат (рис. 71, а), то их уравнения имеют вид $x = 0$ и $y = 0$. Очевидно, что уравнения касательных в вершинах эллипса имеют вид $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Пусть теперь $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{14.33}$$

не совпадающая с вершиной. Ее координаты, согласно (14.33), связаны соотношением

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \quad y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}. \tag{14.34}$$

Поскольку любой диаметр проходит через центр эллипса, уравнение прямой, проходящей через две точки: $M_0(x_0, y_0)$ и $O(0, 0)$,

$$y = \frac{y_0}{x_0}x \tag{14.35}$$

или в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= x_0 t, \\ y &= y_0 t, \end{aligned} \tag{14.36}$$

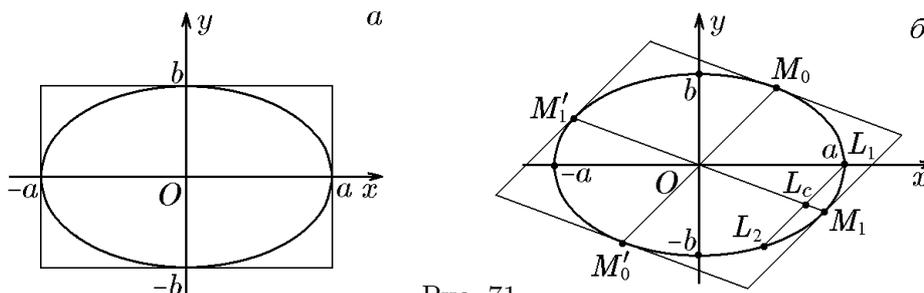


Рис. 71.

можно рассматривать как уравнение диаметра $M_0M'_0$ (рис. 71,б). Согласно определению, диаметр, сопряженный диаметру $M_0M'_0$, проходит через середины хорд, параллельных диаметру $M_0M'_0$. С учётом (14.36) уравнение прямой, проходящей, например, через вершину $L_1(a, 0)$ параллельно $M_0M'_0$, имеет вид

$$\begin{aligned} x &= a + x_0t, \\ y &= y_0t. \end{aligned} \quad (14.37)$$

Найдём координаты точек пересечения прямой (14.37) с эллипсом. Для этого подставим (14.37) в (14.33). Тогда

$$\frac{(a + x_0t)^2}{a^2} + \frac{y_0^2t^2}{b^2} = 1,$$

откуда

$$t\left(t + \frac{2x_0}{a}\right) = 0. \quad (14.38)$$

Это уравнение имеет два решения: $t_1 = 0$ и $t_2 = -2x_0/a$. Подставив $t_1 = 0$ в (14.37), получим $x_1 = a, y_1 = 0$, что, как и следовало ожидать, соответствует вершине $L_1(a, 0)$. А подстановка $t_2 = -2x_0/a$ даёт $x_2 = (a^2 - 2x_0^2)/a, y_2 = -2x_0y_0/a$, т.е. координаты точки $L_2(x_2, y_2)$. Таким образом, мы нашли координаты концов хорды L_1L_2 . Координаты середины этой хорды — точки $L_c(x_c, y_c)$ — находятся стандартным образом:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a + (a^2 - 2x_0^2)/a}{2} = \frac{a^2 - x_0^2}{2}; \\ y_c &= \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_0y_0}{a}. \end{aligned} \quad (14.39)$$

Таким образом, мы нашли координаты точек, делящих пополам две параллельные хорды. Это точка $O(0, 0)$ — середина диаметра $M_0M'_0$ и точка $L_c(x_c, y_c)$ — середина хорды L_1L_2 (рис. 71,б). Запишем уравнение прямой, проходящей через эти точки:

$$\frac{x - 0}{0 - (a^2 - x_0^2)/a} = \frac{y - 0}{0 - x_0y_0/a}.$$

Преобразовав это уравнение, получим уравнение с угловым коэффициентом

$$y = \frac{x_0y_0}{x^2 - a^2}x = \frac{x_0y_0}{a^2(x_0^2/a^2 - 1)}x = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x. \quad (14.40)$$

Кроме этого, его можно записать в общем виде

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 0. \quad (14.41)$$

Уравнение прямой (14.40) или (14.41), проходящей через две точки O и L_c , и является уравнением диаметра, сопряженного диаметру $M_0M'_0$.

Найдём теперь уравнение касательной, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. Касательная, проходящая через конец диаметра $M_0M'_0$, будет параллельна сопряженному $M_0M'_0$ диаметру (14.41), отсюда

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

или

$$\frac{xx_0}{a^2} = \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad (14.42)$$

Это уравнение касательной совпадает с уравнением (14.24), полученным с помощью вычисления соответствующей производной.

Пример 14.7. Показать, что полудлины сопряженных диаметров эллипса a_1 и b_1 связаны с длинами его полуосей соотношением

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2. \quad (14.43)$$

Решение. В геометрии соотношение (14.43) известно еще со времен античности под названием теоремы Аполлония. Докажем его аналитическими методами, используя уравнения сопряженных диаметров, полученных в примере 14.6, и рис. 71,б, построенный при его решении. На этом рисунке изображены два сопряженных диаметра: $M_0M'_0$ и $M_1M'_1$. Обозначим для краткости $a_1 = OM_0$ и $b_1 = OM_1$. Если координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ заданы, то координаты точки $M_1(x_1, y_1)$ нужно найти. Это можно сделать, решив систему двух уравнений: уравнений диаметра (14.40) и эллипса (14.33), т.е.

$$y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} x_1,$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Подставив первое уравнение этой системы во второе, запишем

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \frac{b^4}{a^4} \frac{x_0^2}{y_0^2} x_1^2 = \frac{x_1^2}{a^2} \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x_0^2}{y_0^2}\right) = \frac{x_1^2}{a^2} \left(1 + \frac{x_0^2}{a^2} \frac{1}{1 - x_0^2/a^2}\right) = \frac{x_1^2}{a^2} \frac{a^2}{a^2 - x_0^2} = 1$$

или

$$x_1^2 = a^2 - x_0^2. \quad (14.44)$$

В свою очередь, подставив (14.44) во второе уравнение системы, получим

$$y_1^2 = b^2 \frac{x_0^2}{a^2} = b^2 \left(1 - \frac{y_0^2}{b^2}\right) = b^2 - y_0^2. \quad (14.45)$$

Формулы (14.44) и (14.45) определяют координаты точки $M_1(x_1, y_1)$. Зная координаты точек M_0 и M_1 , можно записать равенства

$$\begin{aligned} a_1^2 &= |OM_0|^2 = x_0^2 + y_0^2; \\ b_1^2 &= |OM_1|^2 = x_1^2 + y_1^2, \end{aligned} \quad (14.46)$$

суммирование которых дает

$$a_1^2 + b_1^2 = x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2.$$

Отсюда с учётом (14.44) и (14.45) приходим к равенству

$$a_1^2 + b_1^2 = x_0^2 + y_0^2 + a^2 - x_0^2 + b^2 - y_0^2 = a^2 + b^2,$$

совпадающему с (14.43).

Пример 14.8. Орбита земного шара — эллипс с полуосью $a = 150 \cdot 10^6$ км и эксцентриситетом $\varepsilon = 0,017$. Зная, что Солнце находится в фокусе этого эллипса, найти, насколько кратчайшее расстояние Земли от Солнца (4 января) короче длиннейшего (3 июля).

Решение. Пусть $2c$ — межфокусное расстояние эллипса. Тогда кратчайшее расстояние $l_{\min} = a - c$, а длиннейшее $l_{\max} = a + c$ и соответственно $l_{\max} - l_{\min} = a + c - (a - c) = 2c = 2\varepsilon a = 5,1 \cdot 10^6$ км.

Пример 14.9. Составить каноническое уравнение эллипса, если
а) межфокусное расстояние равно 10, а малая полуось равна 5;

- б) эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{3/5}$, а малая полуось равна 2;
 в) эксцентриситет $\varepsilon = 1/2$, а межфокусное расстояние равно 8.

Решение. Случаю а) соответствуют $c = 5$ и $b = 5$, тогда $a^2 = b^2 + c^2 = 50$, и, следовательно,

$$\frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Для случая б) $\varepsilon = \sqrt{3/5}$ и $b = 2$. Так как $\varepsilon = c/a$ или $\varepsilon^2 = c^2/a^2 = c^2/(c^2 + b^2)$, то

$$\frac{3}{5} = \frac{c^2}{c^2 + 4},$$

откуда $c^2 = 6$ и $a^2 = c^2/\varepsilon^2 = 6 \cdot 5/3 = 10$ и, следовательно,

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Для случая в) $\varepsilon = 1/2$ и $c = 4$. Тогда $a = c/\varepsilon = 8$ и $b^2 = a^2 - c^2 = 48$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$$

Пример 14.10. Составить уравнение эллипса в канонической системе координат, если

- а) эллипс проходит через точки $M_1(2, \sqrt{5}/3)$ и $M_2(-3, 0)$;
 б) эллипс проходит через точку $M(-2, 11/\sqrt{15})$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon = 2/\sqrt{15}$;
 в) расстояние между директрисами равно $4\sqrt{15}$, а эксцентриситет $\varepsilon = 1/\sqrt{2}$.

Решение. Для случая а) подстановка координат точек M_1 и M_2 в уравнение эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ дает систему

$$\begin{aligned} \frac{4}{a^2} + \frac{5}{9b^2} &= 1; \\ \frac{9}{a^2} &= 1, \end{aligned}$$

откуда $a^2 = 9$, $b^2 = 1$, и, следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1.$$

Случаю б) отвечают a и $c = a\varepsilon$,

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) = a^2\left(1 - \frac{4}{15}\right) = \frac{11}{15}a^2.$$

С учётом этого искомое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

можно переписать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{15y^2}{11a^2} = 1.$$

Подставив сюда координаты точки M_1 , получим

$$\frac{4}{a^2} + \frac{11}{a^2} = 1,$$

откуда $a^2 = 15$, $b^2 = 11a^2/15 = 11$, и, следовательно,

$$\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{11} = 1.$$

Для случая в) с учётом уравнений директрис $x = \pm a/\varepsilon$ можно записать $2a/\varepsilon = 4\sqrt{15}$, откуда $a = 2\varepsilon\sqrt{15}$ и, соответственно,

$$b^2 = a^2 - c^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) = a^2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{a^2}{2}.$$

Так как $a = 2\varepsilon\sqrt{15} = 2\sqrt{15}/\sqrt{2} = \sqrt{30}$, то $a^2 = 30$ и $b^2 = a^2/2 = 15$, и, следовательно,

$$\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{15} = 1.$$

Пример 14.11. Показать, что с помощью ортогональной проекции заданной окружности можно получить эллипс с заданным эксцентриситетом $\varepsilon = \sin \alpha$, где α — угол между плоскостями, в которых расположены окружность и эллипс.

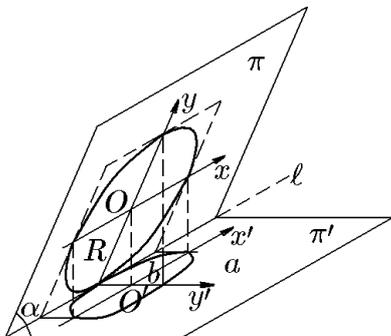


Рис. 72.

Решение. Пусть π и π' — две плоскости, пересекающиеся под углом α , а ℓ — линия их пересечения (рис. 72). На плоскости π выберем систему координат xOy с осью Ox , параллельной прямой ℓ . В этой системе координат зададим окружность $x^2 + y^2 = R^2$ (на рис. 72 окружность, для удобства построения, касается ℓ , что всегда можно сделать выбором R). Если теперь из каждой точки плоскости π опустить перпендикуляр на плоскость π' , то плоскость π' можно рассматривать как ортогональную проекцию плоскости π . При этом точка O спроектируется в точку O' , а координатные оси Ox и Oy — в координатные оси $O'x'$

и $O'y'$. Соответственно, каждая точка $M(x, y)$ спроектируется в точку $M'(x', y')$. Из простых геометрических построений следует, что старые и новые координаты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x' &= x; \\ y' &= y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (14.47)$$

При таком отображении уравнение окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в переменных x' и y' примет вид

$$(x')^2 + \frac{(y')^2}{\cos^2 \alpha} = R^2,$$

или

$$\frac{(x')^2}{R^2} + \frac{(y')^2}{(R \cos \alpha)^2} = 1. \quad (14.48)$$

Уравнение (14.48) в системе координат $x'O'y'$ является каноническим уравнением эллипса с полуосями $a = R$ и $b = R \cos \alpha$. Вычислим его эксцентриситет:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sin \alpha.$$

Таким образом, изменением угла между плоскостями π и π' , можно получить эллипс с заданным эксцентриситетом, что и требовалось показать.

Свойства фигур, которые не меняются при проективных преобразованиях, например при центральном проектировании (рис. 73), изучает проективная геометрия. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что в отличие от ортогональных преобразований такие свойства, как параллельность и перпендикулярность прямых, равенство

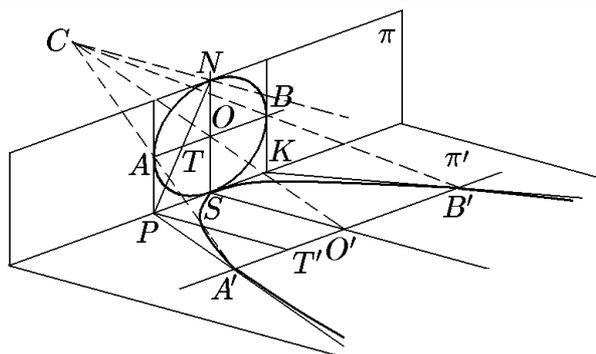


Рис. 73.

отрезков и углов, не сохраняются при проективных преобразованиях. Пересекающиеся прямые могут спроектироваться в параллельные, равные отрезки — в неравные и т.д. Рисунок 73 характеризует центральную проекцию окружности, лежащей в плоскости π , в параболу, лежащую в плоскости π' . Поскольку при проектировании точек одной плоскости π на другую π' не каждая точка π имеет образ на π' и, наоборот, не каждая точка π' имеет прообраз на π , то вместо евклидовых плоскостей удобнее использовать проективные плоскости, которые являются евклидовыми плоскостями, дополненными бесконечно удаленной (несобственной) точкой B в результате при операции проектирования проективные плоскости отображаются в проективные же плоскости (аналогичным образом из евклидова пространства строится проективное пространство).

На рис. 73 изображены две проективные плоскости π и π' . Через точку C — центр окружности и точку M на плоскости π проводится прямая до пересечения с плоскостью π' в точке M' . Точка M называется *прообразом*, а точка M' — *образом* проекции. Если на плоскости π' задать некоторое множество точек M , то, проделав указанную процедуру для всех точек $M \in M$, получим множество M' — образ множества M . На рис. 73 в качестве множества M задана окружность. Точка C расположена так, что образом точки $N \in \pi$ окружности является несобственная (бесконечно удаленная) точка N' . Непараллельные отрезки разной длины PT и SO проектируются в параллельные отрезки равной длины PT' и SO' . Окружность проектируется в параболу. Касательные PA и KB к окружности, параллельные в π проектируются в касательные PA' и KB' к параболе, но они уже не являются параллельными, и т.д.

◇ В большей или меньшей степени положения проективной геометрии используются в теории графов, теории операторов, квантовой теории поля, статистике и многих других.

15. Гипербола

◆ *Гиперболой* называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух данных точек этой же плоскости, называемых фокусами этой гиперболы, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

Обозначим эту разность через $2a$, а расстояние между фокусами через $2c$.

Выберем прямоугольную систему координат xOy , ось Ox которой проходит через фокусы гиперболы, а начало координат находится на равном расстоянии c от фокусов (рис. 74). Такую систему координат называют *канонической*. В канонической системе координат фокусы гиперболы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. Обозначим через $M(x, y)$ произвольную точку гиперболы с координатами x, y . Радиус-вектор \overrightarrow{OM} , про-

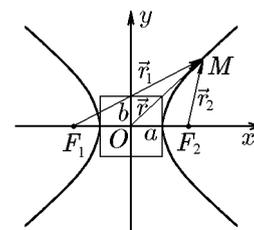


Рис. 74.

ведённый в эту точку, обозначим стандартным образом: $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Дополнительно введём в рассмотрение фокальные радиус-векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , проведённые из фокусов F_1 и F_2 в точку M , т.е. $\vec{r}_1 = \overrightarrow{F_1M}$ и $\vec{r}_2 = \overrightarrow{F_2M}$. Выбранные векторы в канонической системе координат имеют следующие координаты: $\vec{r} = (x, y)$, $\vec{r}_1 = (x + c, y)$, $\vec{r}_2 = (x - c, y)$.

Согласно определению гиперболы, которое будем называть геометрическим, запишем

$$|\overrightarrow{F_1M}| - |\overrightarrow{F_2M}| = ||\vec{r}_1| - |\vec{r}_2|| = 2a, \quad (15.1)$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Произведя те же преобразования, что и для эллипса, учтя, что $2a < 2c$, и обозначив $a^2 + b^2 = c^2$ (здесь нельзя обозначить, как и прежде, $a^2 - b^2 = c^2$, так как $a < c$!), получим

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2.$$

Разделив на $-a^2$ и b^2 , получим искомое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (15.2)$$

◆ Уравнение (15.2) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

Каноническое уравнение гиперболы можно использовать для ее определения, которое будем называть аналитическим.

◆ Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (15.2), называется *гиперболой*.

Очевидно, что геометрическое и аналитическое определения гиперболы эквивалентны. Действительно, что из геометрического определения вытекает уравнение (15.2), мы уже убедились. Убедимся теперь в обратном. Пусть xOy — некоторая прямоугольная система координат, в которой координаты точек некоторой кривой связаны соотношением (15.2). Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка кривой, тогда, зафиксировав координату x , для координаты y получим

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad |x| \geq a. \quad (15.3)$$

Исходя из (15.3), найдём расстояние $|\vec{r}_1|$ от точки $M(x, y)$ до фокуса $F_1(-c, 0)$:

$$\begin{aligned} |\vec{r}_1| &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \\ &= \left|a + \frac{c}{a}x\right| = \begin{cases} a + \frac{c}{a}x, & x \geq a; \\ -a - \frac{c}{a}x, & x \leq -a. \end{cases} \end{aligned} \quad (15.4)$$

Аналогично расстояние $|\vec{r}_2|$ от точки $M(x, y)$ до фокуса $F_2(c, 0)$:

$$|\vec{r}_2| = \left|a - \frac{c}{a}x\right| = \begin{cases} -a + \frac{c}{a}x, & x \geq a; \\ a - \frac{c}{a}x, & x \leq -a. \end{cases} \quad (15.5)$$

Таким образом, для любой точки $M(x, y)$, координаты которой удовлетворяют уравнению (15.2), справедливо

$$||\vec{r}_1| - |\vec{r}_2|| = \begin{cases} \left| \left(a + \frac{c}{a}x\right) - \left(-a + \frac{c}{a}x\right) \right| = 2a, & x \geq a; \\ \left| \left(-a - \frac{c}{a}x\right) - \left(a - \frac{c}{a}x\right) \right| = 2a, & x \leq -a, \end{cases}$$

т.е. для всех $|x| \geq a$

$$||\vec{r}_1| - |\vec{r}_2|| = 2a.$$

Это означает, что все точки плоскости, удовлетворяющие уравнению (15.2), согласно данному выше геометрическому определению, принадлежат гиперболе.

Замена $x \rightarrow -x$ и $y \rightarrow -y$ в уравнении гиперболы (15.2) совместно или поочередно не меняет его вида. Из этого следует, что координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии гиперболы, а точка их пересечения, т.е. начало координат, — ее центром симметрии. Легко установить, что гипербола обладает центральной симметрией 2-го порядка, поскольку после поворота на угол π вокруг своего центра переходит сама в себя, т.е. $n = 2\pi/\pi = 2$.

При повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки $x = -y'$, $y = x'$, откуда

$$\frac{(y')^2}{a^2} - \frac{(x')^2}{b^2} = 1. \quad (15.6)$$

◆ Кривая, описываемая уравнением $x^2/a^2 - y^2/b^2 = -1$, называется *гиперболой, сопряженной гиперболе* (15.2).

Из уравнения (15.2) следует, что все точки гиперболы лежат вне вертикальной полосы $|x| \geq a$ шириной $2a$. Ось абсцисс канонической системы пересекает гиперболу в двух точках $(-a, 0)$ и $(a, 0)$, называемых вершинами гиперболы. Ось ординат гиперболу не пересекает. Числа a и b определяют основной прямоугольник гиперболы и называются соответственно вещественной и мнимой полуосями гиперболы ($x = \pm ib$).

Для дальнейшего исследования формы гиперболы рассмотрим ее пересечение с произвольной прямой, проходящей через начало координат. Уравнение прямой зададим в виде

$$y = kx. \quad (15.7)$$

Решив систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1, & b^2 &= a^2 + c^2, \\ y &= kx, \end{aligned} \quad (15.8)$$

найдем

$$x_{1,2} = \pm \frac{b}{\sqrt{(b/a)^2 - k^2}}, \quad y_{1,2} = kx_{1,2} = \pm \frac{bk}{\sqrt{(b/a)^2 - k^2}}. \quad (15.9)$$

Из (15.9) следует, что при $|k| \geq b/a$ система (15.8) действительных решений не имеет и, следовательно, прямая и гипербола не пересекаются. При $|k| < b/a$ система имеет действительные решения, задающие координаты двух точек пересечения: $M(x_0, kx_0)$ и $M'(-x_0, -kx_0)$, где

$$x_0 = \frac{b}{\sqrt{(b/a)^2 - k^2}}. \quad (15.10)$$

В силу центральной симметрии гиперболы достаточно проследить за движением одной ее точки, например точки $M(x, kx)$, в I-й четверти при изменении углового коэффициента секущей прямой k (рис. 75).

Как и следовало ожидать, $k = 0$ соответствует правой вершине с координатами $x = a$, $y = 0$. С ростом k координата x точки пересечения M увеличивается как (15.10). Одновременно увеличивается и координата $y = kx$. По мере приближения углового коэффициента k к значению b/a точка пересечения гиперболы с прямой удаляется от своей вершины $(a, 0)$, неограниченно приближаясь к прямой

$$y = \frac{b}{a}x. \quad (15.11)$$

Действительно, расстояние от точки на гиперболе до прямой (15.11) определяется стандартным образом:

$$h = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|bx - ab\sqrt{x^2/a^2 - 1}|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

откуда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} |x - \sqrt{x^2 - a^2}| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{a^2}{|x + \sqrt{x^2 - a^2}|} = 0.$$

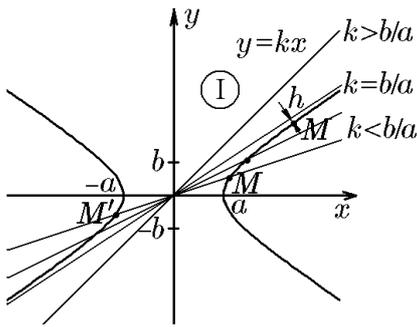


Рис. 75.

Таким образом, мы получим часть гиперболы, расположенную в I-й четверти (рис. 75). Ее симметричное отображение относительно оси Ox дает правую ветвь гиперболы: $x \geq a, y \in]-\infty, \infty[$. В свою очередь, симметричное отображение этой ветви относительно оси Oy дает ее левую ветвь: $a \leq -x, y \in]-\infty, \infty[$. В результате мы получим неограниченную кривую, состоящую из двух ветвей, каждая из которых расположена в угловом секторе, образованном прямыми

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \quad (15.12)$$

◆ Прямые (15.12) называются *асимптотами* гиперболы (15.8).

Геометрически асимптоты можно охарактеризовать как прямые, разбивающие пучок прямых $y = kx$ на два класса: прямые с меньшим угловым коэффициентом, чем у асимптоты, пересекают гиперболу, а с большим — нет.

Нетрудно заметить, что асимптоты (15.12) являются диагоналями основного прямоугольника гиперболы. Это подсказывает простой способ построения гиперболы. Сначала строится основной прямоугольник гиперболы и проводятся его диагонали, выходящие за пределы прямоугольника, т.е. асимптоты. Затем из вершины $M(a, 0)$ в I-й четверти проводится кривая, постепенно приближающаяся к своей асимптоте. Далее, после указанных выше симметричных отображений, получаем ветви гиперболы.

◆ Гипербола с $a = b$, у которой основной прямоугольник превращается в квадрат, называется *равнобочной*. Сопряжение равнобочной гиперболы можно получить поворотом исходной гиперболы на угол $\pi/2$:

$$y^2 - x^2 = a^2. \quad (15.13)$$

Пример 15.1. Показать, что уравнение касательной к гиперболе

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (15.14)$$

Решение полностью аналогично решению примера 14.3 для эллипса, нужно только учесть, что точки M и M_0 должны лежать на одной ветви гиперболы.

◇ Из (15.14) следует, что в вершинах гиперболы $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ касательными являются прямые $x = -a$ и $x = a$, на которых лежат вертикальные стороны основного прямоугольника гиперболы. Это следует учитывать при ее построении (рис. 76).

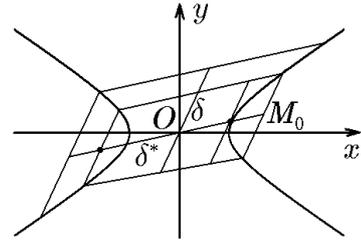


Рис. 76.

Как и для эллипса, вводится характеристика, позволяющая сравнивать гиперболы между собой.

◆ *Эксцентриситетом гиперболы* называется величина

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{15.15}$$

В отличие от эллипса, у которого $\varepsilon < 1$, эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} > 1. \tag{15.16}$$

Здесь α — угол наклона асимптоты к оси Ox .

◆ *Директрисой D_j* гиперболы, соответствующей (ближайшей) фокусу F_j ($j = 1, 2$), называется прямая, расположенная в одной с ней полуплоскости π_j перпендикулярно фокальной оси гиперболы на расстоянии a/ε от ее центра. В канонической системе координат их уравнения имеют вид

$$D_1 : x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad D_2 : x = \frac{a}{\varepsilon}. \tag{15.17}$$

Теорема 15.1. *Для того чтобы точка лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния $|\vec{r}_j|$ от нее до фокуса к расстоянию d_j до соответствующей директрисы равнялось ее эксцентриситету.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 14.1 для эллипса, с той лишь разницей, что вместо рис. 67 следует использовать рис. 77, на котором изображены гипербола $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, ее директрисы $x = \pm a/\varepsilon$ и фокальные радиусы.

Рассмотрим теперь систему координат, в которой центр гиперболы расположен в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 78).

Как и при выводе уравнения (15.2), приходим к уравнению 2-го порядка

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{15.18}$$

С помощью параллельного переноса, определяемого вектором $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$:

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0,$$

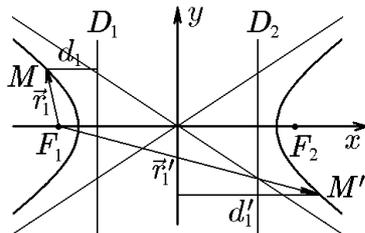


Рис. 77.

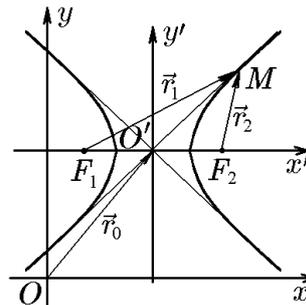


Рис. 78.

возвратимся к канонической системе координат и каноническому уравнению $(x')^2/a^2 - (y')^2/b^2 = 1$.

Развёрнутый вид уравнения (15.18):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x_0}{a^2}x + 2\frac{y_0}{b^2}y + \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1 = 0,$$

характерен тем, что коэффициенты при x^2 и y^2 имеют разные знаки, слагаемые с произведением xy отсутствуют. Следовательно, общее уравнение 2-го порядка, удовлетворяющее этим требованиям, всегда определяет некоторую гиперболу (возможно, вырожденную), каноническое уравнение которой можно получить, выделив полные квадраты.

Пример 15.2. Составить каноническое уравнение гиперболы, если угол между ее асимптотами равен $\pi/3$ и гипербола проходит через точку $M(4\sqrt{2}, 2)$.

Решение. Запишем каноническое уравнение гиперболы в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1. \quad (15.19)$$

Учитывая, что ее эксцентриситет можно записать как (15.16)

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{1}{\cos(\pi/6)} = \frac{1}{\cos(\pi/6)} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

получим

$$c^2 = \frac{4a^2}{3}$$

и, соответственно,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{3y^2}{a^2} = 1. \quad (15.20)$$

Подставив сюда координаты точки M , имеем

$$\frac{48}{a^2} - \frac{12}{a^2} = 1$$

или $a^2 = 36$. С учётом этого из (15.20) найдём искомое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Пример 15.3. Составить уравнение гиперболы, имеющей общие фокусы с эллипсом $x^2/35 + y^2/10 = 1$ и проходящей через точку $M(4\sqrt{2}, 3)$.

Решение. Из уравнения эллипса найдём расстояние от центра системы координат до фокуса: $c^2 = 35 - 10 = 25$, т.е. $c = 5$. Тогда искомое уравнение гиперболы можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{25 - a^2} = 1, \quad a^2 < 25. \quad (15.21)$$

Подставив сюда координаты точки M , найдём

$$a^4 - 66a^2 + 800 = 0,$$

откуда

$$a_1^2 = 50 > 25, \quad a_2^2 = 16 < 25.$$

Тогда из (15.21) получим искомое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Пример 15.4. Дана гипербола

$$\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

Написать уравнение сопряженной с ней гиперболы. Найти эксцентриситеты, директрисы и асимптоты данной и сопряженной гипербол.

Решение. Согласно определению, уравнение сопряженной гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = -1$$

или

$$-\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Для исходной гиперболы эксцентриситет равен

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{12}{24}} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

а уравнения директрис

$$y = \pm \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}/2} = \pm 4.$$

Для сопряженной гиперболы эксцентриситет равен

$$\varepsilon^* = \sqrt{1 + \frac{24}{12}} = \sqrt{3},$$

а уравнения директрис

$$y = \pm \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \pm 2.$$

Уравнения для асимптот обеих гипербол совпадают:

$$\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{12} = 0,$$

откуда

$$\frac{x}{\sqrt{24}} \pm \frac{y}{\sqrt{12}} = 0$$

или

$$x \pm \sqrt{2}y = 0.$$

Гипербола $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ разделяет все точки плоскости на два множества: внутренние и внешние точки гиперболы.

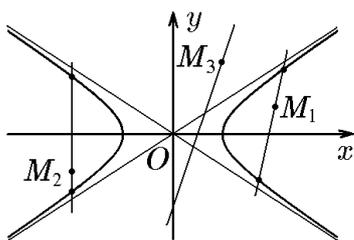


Рис. 79.

◆ Точка $M(x, y)$ называется внутренней точкой гиперболы, если любая прямая, проходящая через эту точку и не параллельная асимптотам, пересекает гиперболу в двух различных точках. Ее координаты удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1. \quad (15.22)$$

Внешней точкой гиперболы называется точка, не лежащая на гиперболе и не являющаяся внутренней.

Ее координаты удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1. \quad (15.23)$$

На рис. 79 M_1 и M_2 — внутренние точки, а точка M_3 — внешняя точка гиперболы.

Пример 15.5. Показать, что отрезок асимптоты, заключённый между центром гиперболы и директрисой, равен действительной полуоси.

Решение. Достаточно доказать справедливость этого утверждения для I-й четверти (рис. 80). В силу симметрии оно будет справедливо и для других четвертей. На рис. 80 построены два подобных треугольника: OAB и $OA'B'$, но катеты первого равны a и b , следовательно, катеты второго равны a/ε и b/ε соответственно. Отрезок OA' асимптоты от начала координат до директрисы — гипотенуза треугольника $OA'B'$, и, следовательно,

$$|OA'| = \sqrt{\frac{a^2}{\varepsilon^2} + \frac{b^2}{\varepsilon^2}} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2/a^2}} = a\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}} = a,$$

что и требовалось доказать.

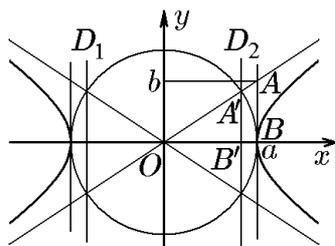


Рис. 80.

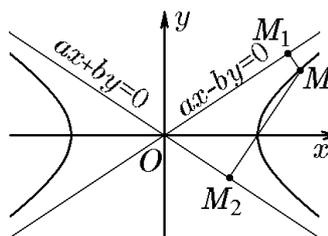


Рис. 81.

Пример 15.6. Показать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ до ее асимптот постоянно и равно $a^2b^2/(a^2 + b^2)$.

Решение. Запишем уравнения асимптот в виде

$$bx + ay = 0, \quad bx - ay = 0.$$

Обозначим через MM_1 и MM_2 перпендикуляры, опущенные из точки $M(x, y)$ гиперболы на асимптоты (рис. 81). Длины этих перпендикуляров, т.е. расстояния от M до гипербол, находятся стандартным способом:

$$|MM_1| = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$|MM_2| = \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Перемножив эти равенства и учтя, что $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, найдём

$$|MM_1| \cdot |MM_2| = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{|bx + ay|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}.$$

Пример 15.7. В прямоугольной системе координат на плоскости построить область, определяемую неравенствами

$$\begin{aligned} x^2 - 4y^2 - 4 &> 0, \\ 4x + 3y - 12 &< 0. \end{aligned}$$

Решение. Построим линии, определяемые уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} - y^2 &= 1, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Из рис. 82 следует, что система неравенств определяет множество внутренних точек гиперболы, расположенных под прямой.

Пример 15.8. Показать, что произведение расстояний от фокусов до любой касательной к гиперболе является величиной постоянной, равной квадрату мнимой полуоси.

Решение полностью повторяет решение аналогичной задачи для эллипса (см. пример 14.5).

Пример 15.9. Показать, что касательная и нормаль в некоторой точке гиперболы являются биссектрисами смежных углов, образуемых фокальными радиус-векторами, проведёнными в точку касания.

Решение аналогично решению соответствующей задачи для эллипса (пример 14.4), с той лишь разницей, что вместо рис. 68 следует использовать рис. 83, где изображены гипербола, ее касательная и нормаль. Кроме того, следует учесть, что уравнение касательной к гиперболе имеет вид (15.14), а вектор нормали и направляющий вектор определяются соотношениями

$$\vec{N} = \left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{b^2} \right), \quad \vec{q} = \left(\frac{y_0}{b^2}, \frac{x_0}{a^2} \right).$$

Векторы $|\vec{r}_1|$ и $|\vec{r}_2|$ задаются формулами (15.4), (15.5).

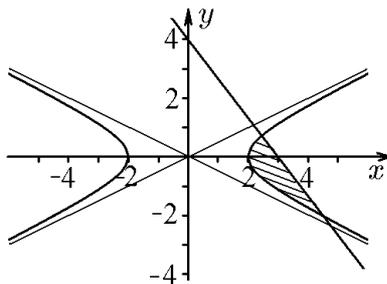


Рис. 82.

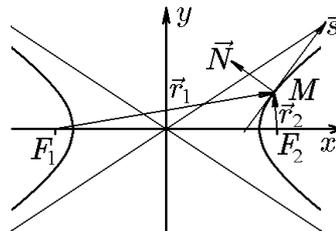


Рис. 83.

Пример 15.10. Уравнения эллипса и гиперболы в декартовой системе координат имеют вид $x^2/45 + y^2/36 = 1$ и $x^2/5 - y^2/4 = 1$ соответственно. Показать, что касательные к ним в точках пересечения взаимно перпендикулярны.

Решение. Решение системы уравнений дает значения $x_0 = \pm 5$, $y_0 = \pm 4$, соответствующие четырём точкам пересечения $M_1(5, 4)$, $M_2(-5, 4)$, $M_3(5, -4)$, $M_4(-5, -4)$. В силу симметрии достаточно доказать утверждение для одной точки, например $M_1(5, 4)$ из I-й четверти. Поскольку уравнения касательных определяются уравнениями (14.24) и (15.14) и в нашем случае имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{xx_0}{45} + \frac{yy_0}{30} &= 1, \\ \frac{xx_0}{5} - \frac{yy_0}{4} &= 1, \end{aligned} \quad (15.24)$$

то их векторы нормали определяются как

$$\vec{N}_э = \left(\frac{x_0}{45}, \frac{y_0}{30} \right), \quad \vec{N}_г = \left(\frac{x_0}{5}, -\frac{y_0}{4} \right).$$

Подставив сюда координаты точки M_1 : $x_0 = 5$, $y_0 = 4$, получим

$$\vec{N}_э = \left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right), \quad \vec{N}_г = (1, -1).$$

Равенство нулю скалярного произведения

$$(\vec{N}_э, \vec{N}_г) = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right) = 0$$

подтверждает ортогональность касательных (15.24) к эллипсу и гиперболе в точке их пересечения.

◇ Нетрудно убедиться, что заданные эллипс и гипербола софокусны:

$$c_э^2 = a_э^2 - b_э^2 = 45 - 36 = 9, \quad c_г^2 = a_г^2 + b_г^2 = 5 + 4 = 9,$$

т.е. имеют одинаковое фокусное расстояние $c_э = c_г = 3$.

Пример 15.11. Найти значение фокального параметра гиперболы, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Согласно определению, фокальный параметр p равен половине длины фокальной хорды. Положив в уравнении гиперболы $x = c$, запишем

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2},$$

откуда

$$p = y = \frac{b^2}{a}. \quad (15.25)$$

16. Парабола

В школьном курсе математики под параболой подразумевался график функции $y = ax^2$. Этим же уравнением, как мы увидим, описывается одно из конических сечений. Введём следующее геометрическое определение параболы.

♦ *Параболой* называется геометрическое место точек на плоскости, равноотстоящих от данной точки F , называемой фокусом, и прямой D , называемой директрисой (рис. 84).

Найдём связь между координатами x и y точек параболы. Для этого выберем прямоугольную систему координат xOy , ось Ox которой проходит через фокус F перпендикулярно директрисе D , а начало координат равноудалено от фокуса F и директрисы D , расстояние между которыми обозначим через p (рис. 84). Такую систему координат будем называть *канонической*. В канонической системе координат директриса задается уравнением $x = -p/2$, а фокус имеет координаты $F(p/2, 0)$. Произвольную точку на параболе с координатами x, y обозначим через $M(x, y)$. Радиус-вектор \overrightarrow{OM} , проведённый в эту точку, обозначим стандартным образом: $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. В дополнение к нему введём фокальный радиус-вектор \vec{r}_1 , проведённый в точку $M(x, y)$ из фокуса $F(p/2, 0)$. Таким образом, мы ввели два вектора с координатами $\vec{r} = (x, y)$ и $\vec{r}_1 = (x - p/2, y)$.

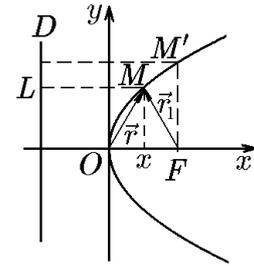


Рис. 84.

Согласно геометрическому определению, имеем

$$|LM| = |MF| = |\vec{r}_1|$$

или

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Возведя в квадрат и приведя подобные слагаемые, получим уравнение 2-го порядка

$$y^2 = 2px, \quad (16.1)$$

описывающее параболу с расстоянием p от фокуса до директрисы.

♦ Уравнение (16.1) называется *каноническим уравнением параболы*.

Каноническое уравнение параболы можно положить в основу еще одного ее определения.

♦ Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (16.1), называется *параболой*.

Это определение будем называть *аналитическим*. Очевидно, что геометрическое и аналитическое определения параболы эквивалентны. Действительно, из геометрического определения вытекает уравнение (16.1). Убедимся теперь в обратном. Пусть xOy — некоторая прямоугольная система координат, в которой координаты кривой связаны соотношением (16.1). Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка кривой. Тогда, зафиксировав координату x , для координаты y получим

$$y = \pm\sqrt{2px}, \quad x \geq 0. \quad (16.2)$$

Исходя из (16.2), найдём расстояние от точки $M(x, y)$ до точки $F_1(p/2, 0)$:

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{F_1M}| = |\vec{r}_1| &= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} = \\ &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = x + \frac{p}{2}. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Наряду с точкой $F_1(p/2, 0)$ рассмотрим прямую $D: x = -p/2$ и найдём расстояние от точки $M(x, y)$ до этой прямой. Если уравнение прямой записать в общем виде

$$x + \frac{p}{2} = 0, \quad (16.4)$$

то расстояние от M до D находится стандартным образом:

$$|DM| = \frac{|x + p/2|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \left| x + \frac{p}{2} \right| = x + \frac{p}{2}. \quad (16.5)$$

Таким образом, расстояние (16.3) от произвольной точки $M(x, y)$ кривой до фиксированной точки $F_1(p/2, 0)$ равно расстоянию (16.5) от точки M до прямой D . Это соответствует геометрическому определению параболы с фокусом F_1 и директрисой D .

По определению, эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$.

Из канонического уравнения (16.1) следует, что парабола, в отличие от эллипса и гиперболы, не обладает центральной симметрией, а симметрична лишь относительно оси Ox .

◆ Прямая, проходящая через фокус параболы перпендикулярно директрисе, называется *осью параболы*, а точка ее пересечения с параболой — ее *вершиной*.

Ось параболы является ее осью симметрии и, следовательно, в канонической системе координат совпадает с осью Ox .

◆ Хорда параболы, перпендикулярная ее оси и проходящая через фокус, называется ее *фокальной хордой*, а половина длины этой хорды — *фокальным параметром*.

Из определения параболы (геометрического или аналитического) следует, что ее фокальный параметр равен p — расстоянию от фокуса до директрисы ($\varepsilon = 1$, рис. 84).

Пример 16.1. Показать, что уравнение касательной к параболе $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$yy_0 = p(x + x_0). \quad (16.6)$$

Решение. Для вершины параболы $M_0(0, 0)$ утверждение (16.6) очевидно. Пусть теперь $x_0 \neq 0$ ($y_0 \neq 0$) и через точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит график функции $y(x) = \sqrt{2px}$ (аналогично для $y = -\sqrt{2px}$).

Способ 1. Уравнение секущей M_0M запишем в параметрической форме

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t. \quad (16.7)$$

Подставив (16.7) в каноническое уравнение параболы (16.1), запишем

$$(y_0 + \beta t)^2 = 2p(x_0 + \alpha t).$$

Раскрыв скобки, получим

$$\beta^2 t^2 - 2(y_0\beta - p\alpha)t = 0. \quad (16.8)$$

Здесь мы учли, что точка M_0 принадлежит параболе. Найдём корни квадратного уравнения (16.8):

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2}{\beta}(y_0\beta - p\alpha).$$

Если точка M стремится к точке M_0 вдоль параболы, то параметр t_2 стремится к нулю. Следовательно, для касательной должно выполняться условие

$$y_0\beta - p\alpha = 0,$$

т.е.

$$\alpha = y_0s, \quad \beta = ps,$$

где параметр s характеризует длину направляющего вектора касательной. Тогда уравнение касательной к параболе в точке M_0 в параметрической форме имеет вид

$$x = x_0 + y_0 t, \quad y = y_0 + p t.$$

Исключив параметр t , запишем

$$p(x - x_0) = y_0(y - y_0).$$

Раскрыв скобки, получим (16.6).

Способ 2. Продифференцировав уравнение $y^2(x) = 2px$ по x , получим

$$2y(x)y'(x) = 2p, \quad (16.9)$$

откуда угловой коэффициент k касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен

$$k = y'(x) = \frac{p}{y_0}.$$

С учётом этого уравнение касательной примет вид

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0).$$

Раскрыв скобки и учтя, что $y_0^2 = 2px_0$, получим (16.6).

◆ Точка $M(x, y)$ называется *внутренней точкой* параболы, если любая прямая, проходящая через эту точку и не параллельная оси параболы, пересекает параболу в двух точках. Ее координаты удовлетворяют неравенству

$$y^2 < 2px. \quad (16.10)$$

Внешней точкой параболы называется точка, не лежащая на параболе и не являющаяся внутренней. Ее координаты удовлетворяют неравенству

$$y^2 > 2px.$$

Рассмотрим теперь систему координат, в которой вершина параболы расположена в точке $O'(x_0, y_0)$ (рис. 85).

Рассуждая, как и при выводе уравнения (16.1), придём к уравнению второго порядка

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0). \quad (16.12)$$

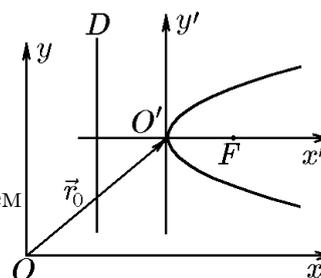


Рис. 85.

С помощью параллельного переноса, определяемого вектором $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$:

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0$$

возвратимся к канонической системе координат и каноническому уравнению $(y')^2 = 2px'$.

Уравнение (16.12) в развёрнутом виде

$$2px - y^2 + 2yy_0 - 2px_0 - y_0^2 = 0$$

характерно тем, что в нём отсутствуют слагаемые, содержащие x^2 и xy . Следовательно, общее уравнение 2-го порядка, обладающее этими свойствами, всегда определяет некоторую параболу, каноническое уравнение которой можно получить, выделив полные квадраты.

Каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$ при повороте системы координат на угол π примет вид

$$(y')^2 = -2px'. \quad (16.13)$$

В этом случае ветви параболы будут расположены в полуплоскости $x \leq 0$. Поворот системы координат на угол $\pi/2$ приводит каноническое уравнение (16.1) к виду

$$(x')^2 = \pm 2py' \quad (16.14)$$

или

$$y' = \pm \frac{1}{2p}(x')^2,$$

известному в теории элементарных функций.

Пример 16.2. Составить каноническое уравнение параболы, если

- а) фокус имеет координаты $(3, 0)$;
- б) фокус имеет координаты $(0, 5)$;
- в) директриса определяется уравнением $x + 15 = 0$;
- г) директриса определяется уравнением $y + 12 = 0$.

Решение. В случае а) осью симметрии является ось Ox . Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$ и с учётом $p/2 = 3$ запишется как $y^2 = 12x$ (рис. 86, а).

В случае б) осью симметрии является ось Oy . Каноническое уравнение параболы имеет вид $x^2 = 2py$ и с учётом $p/2 = 5$ запишется как $x^2 = 20y$ (рис. 86, б).

В случае в) осью симметрии является ось Ox . Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$ и с учётом $x = -15 = -p/2$, $p = 30$ запишется как $y^2 = 60x$ (рис. 86, в).

В случае г) осью симметрии является ось Oy . Каноническое уравнение параболы имеет вид $x^2 = 2py$ и с учётом $y = -12 = -p/2$, $p = 24$ запишется как $x^2 = 48y$ (рис. 86, г).

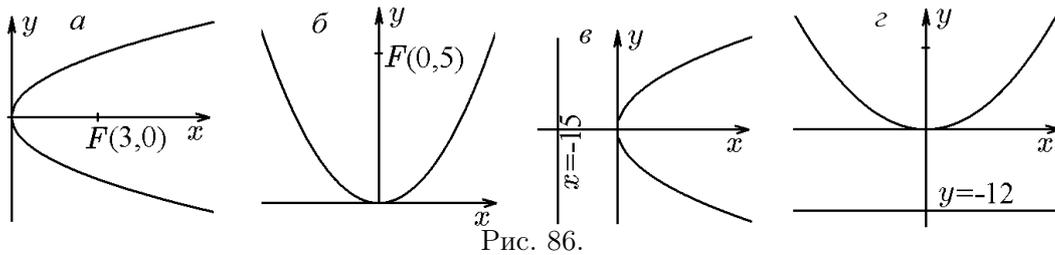


Рис. 86.

Пример 16.3. Под острым углом к горизонту брошен камень, который, двигаясь по параболе, упал на расстоянии 24 м от начального положения. Определить параметр траектории, зная, что наибольшая высота, достигнутая камнем,

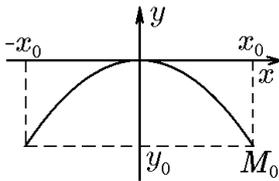


Рис. 87.

Решение. Поместим начало канонической системы координат в наивысшую точку траектории (рис. 87). Тогда уравнение траектории запишется как $x^2 = -2py$. Подставив сюда координаты начальной точки траектории $M_0(12, -6)$, имеем $12^2 = -2p(-6)$, откуда $p = 12$ м.

Пример 16.4. Найти кратчайшее расстояние от точек параболы $y^2 = 12x$ до прямой $x - y + 7 = 0$.

Решение. На рис. 88 изображены заданные парабола и прямая $y = x + 7$, имеющая угловой коэффициент $k = 1$. Искомым кратчайшим расстоянием будет расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ параболы, касательная в которой имеет угловой коэффициент, равный угловому коэффициенту заданной прямой, т.е. $k = 1$. В примере 16.1 мы уже показали, что угловой коэффициент касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен $k = p/y_0$. Поскольку $p = 6$ и $k = 1$, то $y_0 = 6$. Но тогда $x_0 = 36/12 = 3$ и координаты точки $M_0(3, 6)$. Расстояние от данной точки до заданной прямой найдём стандартным образом:

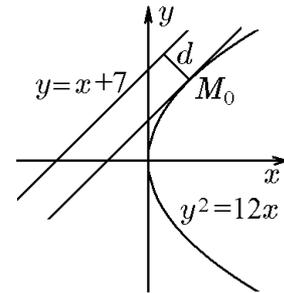


Рис. 88.

$$d = \frac{|3 - 6 + 7|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

Пример 16.5. Найти геометрическое место точек — оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы на все ее касательные.

Решение. Пусть парабола определяется каноническим уравнением $y^2 = 2px$. В примере 16.1 мы показали, что уравнение ее касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей параболе, имеет вид (16.6) или

$$y = \frac{p}{y_0}(x + x_0), \quad y_0 \neq 0.$$

Перпендикулярная ей прямая, проходящая через фокус $F(p/2, 0)$, задается уравнением

$$y = -\frac{y_0}{p}\left(x - \frac{p}{2}\right). \quad (16.15)$$

Точку пересечения касательной и соответствующего ей перпендикуляра, опущенного из фокуса, найдём из решения системы

$$\begin{aligned} y &= \frac{p}{y_0}(x + x_0), \\ y &= -\frac{y_0}{p}\left(x - \frac{p}{2}\right). \end{aligned}$$

Подставив второе уравнение системы (16.16) в первое, получим

$$\frac{p}{y_0}(x + x_0) = -\frac{y_0}{p}\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

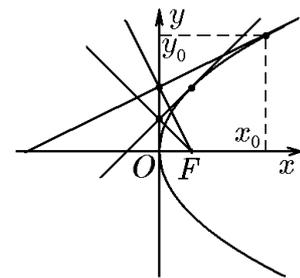


Рис. 89.

Приведя подобные, запишем

$$x(p^2 + y_0^2) + \frac{p}{2}(2px_0 - y_0^2) = 0.$$

Поскольку $2px_0 - y_0^2 = 0$, а $p^2 + y_0^2 \neq 0$, имеем $x = 0$. Подставив это значение во второе уравнение системы (16.16), найдём $y = -y_0/2$. Это означает, что система (16.16) имеет решения $x = 0$, $y = y_0/2$. Таким образом, при движении точки касания $M_0(x_0, y_0)$ по параболе концы соответствующих перпендикуляров будут двигаться по оси Oy , т.е. прямой $x = 0$, являющейся касательной к параболе в ее вершине (рис. 89).

17. Директориальные свойства кривых второго порядка

С использованием понятий фокуса, директрисы и эксцентриситета можно дать единообразное определение кривых второго порядка, а именно: кривые 2-го порядка определяются как множество точек, отношение расстояния от которых до фокуса к расстоянию до соответствующей директрисы постоянно и равно эксцентриситету.

Соответствующее соотношение имеет вид

$$\varepsilon = \frac{|\vec{r}_j|}{d_j} = \begin{cases} 0 \leq \varepsilon < 1 & \Rightarrow \text{эллипс, } j = 1, 2; \\ \varepsilon = 1 & \Rightarrow \text{парабола, } j = 1; \\ \varepsilon > 1 & \Rightarrow \text{гипербола, } j = 1, 2, \end{cases} \quad (17.1)$$

Следующая таблица сводит воедино все характеристики, введённые для рассмотрения кривых и их канонических уравнений.

Таблица 1

| | Эллипс | Гипербола | Парабола |
|--|---|---|--------------------------|
| 1. Каноническое уравнение | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | $y^2 = 2px$ |
| 2. Межфокусное расстояние | $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ | $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ | — |
| 3. Координаты фокусов | $F_{1,2}(\pm c, 0)$ | $F_{1,2}(\mp c, 0)$ | $F(p/2, 0)$ |
| 4. Фокальные радиус-векторы | $\vec{r}_{1,2} = (x \pm c, y)$ | $\vec{r}_{1,2} = (x \pm c, y)$ | $\vec{r} = (x - p/2, y)$ |
| 5. Эксцентриситет ε | $c/a < 1$ | $c/a > 1$ | 1 |
| 6. Уравнения директрис | $D_{1,2} : x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}$ | $D_{1,2} : x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}$ | $D : x = -\frac{p}{2}$ |
| 7. Фокальный параметр p | b^2/a | b^2/a | p |
| 8. Асимптоты | нет | $x_{1,2} = \pm \frac{b}{a}x$ | нет |
| 9. Уравнения касательных в точке $M_0(x_0, y_0)$ | $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ | $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ | $yy_0 = p(x + x_0)$ |

◇ Здесь в символе \pm верхний знак соответствует первому индексу. Для эллипса $c = b$, т.е. окружности, эксцентриситет ε равен нулю, а директрисы не определены.

Задав положения фокуса и директрисы, для различных эксцентриситетов получим семейство кривых второго порядка (рис. 90).

Если выбрать систему координат так, чтобы все три кривые: эллипс, гипербола и парабола пересекались в ее начале, то их уравнения можно объединить в одно:

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2, \quad p > 0, \quad (17.2)$$

где p и ε — фокальный параметр и эксцентриситет кривой.

Действительно, для параболы с $\varepsilon = 1$ это очевидно. Подставим в уравнение (17.2) фокальный параметр и эксцентриситет эллипса (см. табл. 1)

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)x^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

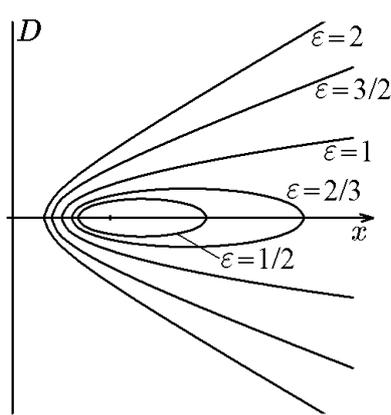


Рис. 90.

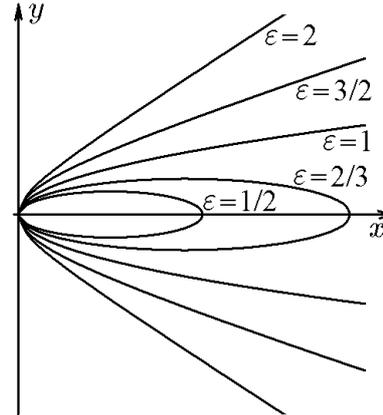


Рис. 91.

Разделив на b^2 :

$$\frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}$$

и выделив полный квадрат:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{(x-a)^2}{a^2},$$

получим уравнение эллипса, проходящего через начало координат

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (17.3)$$

Аналогично, подставив в уравнение (17.2) фокальный параметр и эксцентриситет гиперболы (см. табл. 1), получим уравнение гиперболы

$$\frac{(x+a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (17.4)$$

также проходящей через начало координат.

Уравнение (17.2) в зависимости от эксцентриситета определяет кривые, изображенные на рис. 91. Кривые на рис. 90 и 91 различаются тем, что все кривые на рис. 90 имеют один фокус и одну директрису, а кривые на рис. 91, описываемые (17.2), имеют одну точку пересечения, совпадающую с началом системы координат.

Из уравнения (17.2) следует, что координаты фокусов кривых второго порядка, изображенных на рис. 91, определяются как

$$x_F = \frac{p}{1+\varepsilon}, \quad y_F = 0, \quad (17.5)$$

а уравнение директрисы имеет вид

$$x = -\frac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)}. \quad (17.6)$$

Директриса перпендикулярна к оси симметрии, проходящей через фокус. Поэтому расстояние между фокусом и директрисой равно p/ε , что и следует из (17.5) и (17.6). Для центральных кривых — эллипса и гиперболы — прямые

$$x = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \begin{cases} a & \text{для эллипса;} \\ -a & \text{для гиперболы} \end{cases} \quad (17.7)$$

являются другими осями симметрии. Это означает, что эти кривые имеют два фокуса и две директрисы, симметричные относительно (17.7).

18. Фокальные (оптические) свойства кривых второго порядка

Происхождение использованных выше терминов «фокус», «фокальная ось», «межфокусное расстояние» и др. исторически связано с рядом свойств кривых второго порядка, получивших название геометрических или оптических. Из школьного курса физики известен основной закон геометрической оптики: «угол падения равен углу

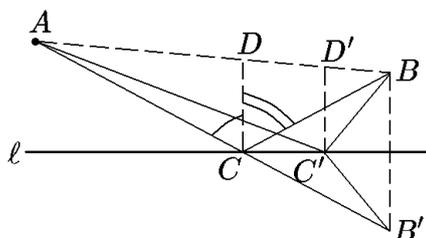


Рис. 92.

Важность этого закона проиллюстрируем следующей вспомогательной задачей: для данной прямой ℓ и двух точек A и B , лежащих по одну сторону от нее, найти такую точку $C \in \ell$, что сумма расстояний AC и CB минимальна.

Обозначим через B' точку, симметричную точке B относительно прямой ℓ (рис. 92). В евклидовом пространстве длина отрезка AB' равна кратчайшему расстоянию между A и B' . Далее, обозначим через C точку пересечения отрезка AB' с прямой ℓ , а через C' — любую точку на этой прямой, отличную от C . Из простейших геометрических построений очевидно, что $|AC| + |CB| = |AB'|$ и $|AC'| + |C'B| = |AC'| + |C'B'|$, причём из треугольника $AB'C'$ следует, что $|AB'| \leq |AC'| + |C'B'|$. Из последнего соотношения вытекает, что минимум расстояния достигается в точке C , в которой перпендикуляр к прямой ℓ является биссектрисой угла ACB , т.е. $\angle ACD = \angle BCD$.

Ход световых лучей в геометрической оптике подчиняется принципу Ферма, согласно которому путь луча минимизирует время, а в однородной среде, следовательно, и расстояние, которое он проходит. Поэтому, как следует из вспомогательной задачи, отражение светового луча от плоского зеркала подчиняется знаменитому правилу «угол падения $\angle ACD$ равен углу отражения $\angle BCD$ ».

То же правило справедливо и для «кривых» зеркал — в этом случае нужно рассматривать углы между лучом и касательной к кривой в точке отражения.

Теорема 18.1. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) Лучи, выходящие из одного фокуса эллипса, после отражения от эллипса проходят через другой его фокус (рис. 93,а).
- 2) Лучи, выходящие из фокуса параболы, после отражения от нее параллельны (рис. 93,б).

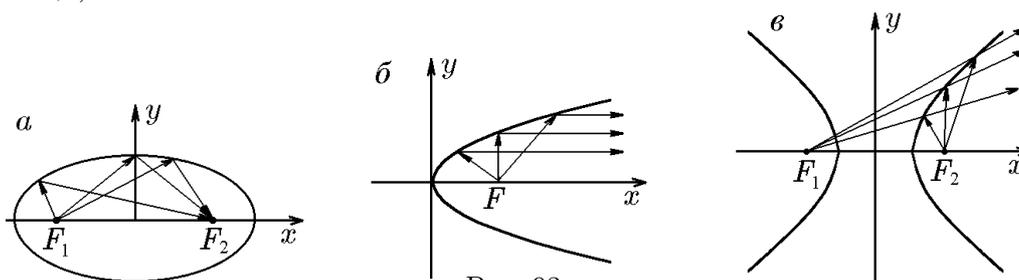


Рис. 93.

- 3) Лучи, выходящие из одного фокуса гиперболы, после отражения от нее совпадают с лучами, «исходящими» из другого фокуса, т.е. продолжение отраженного луча за точку отражения проходит через другой фокус (рис. 93,в).

Доказательство. 1) Эллипс. Пусть луч света вышел из фокуса F_1 и, отразившись от эллипса в точке M , не попал в другой фокус F_2 . Значит, если ℓ — касательная к эллипсу в точке M , то расстояние $|F_1M| + |MF_2|$ не является минимальным. Следовательно, существует точка N , лежащая на прямой ℓ , для которой расстояние $|F_1N| + |NF_2|$ минимально. Но это противоречит геометрическому определению эллипса, так как остальные точки касательной лежат вне его. Для них сумма расстояний до фокусов больше $2a$.

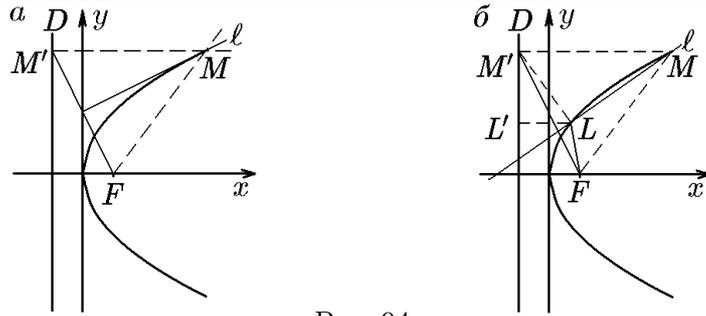


Рис. 94.

2) Парабола. Рассмотрим параболу с фокусом F и директрисой d (рис. 94).

Пусть луч, исходящий из фокуса F , пересекается с параболой в точке M (рис. 94,а) и пусть ℓ — серединный перпендикуляр к отрезку $M'F$, где M' — проекция M на директрису D . По определению параболы, треугольник $M'MF$ — равнобедренный и ℓ проходит через середину его основания (см. рис. 94,а). Покажем, что ℓ является касательной к параболе в точке M . Предположим противное. Тогда должна существовать еще одна точка пересечения ℓ с параболой — точка L (не совпадающая с M) и L' — ее проекция на директрису D (рис. 94,б). Тогда, по определению серединного перпендикуляра, $M'L = LF$, а так как L — точка параболы, то и $|L'L| = |LF|$. Отсюда следует, что $|M'L| = |L'L|$, но длина гипотенузы $M'L$ не может быть равна длине катета $L'L$. Полученное противоречие доказывает отсутствие точки L и тем самым справедливость утверждения, что ℓ является не хордой, а касательной. Так как угол между прямыми $M'M$ и ℓ равен углу между прямыми FM и ℓ , то луч, отразившись от параболы в точке M , идет вдоль прямой $M'M$. Но $M'M$ параллельна оси Ox . Следовательно, любой луч, исходящий из фокуса параболы, после отражения от нее становится параллельным оси Ox .

3) Гипербола. Доказательство аналогично доказательству для эллипса.

Следствие 18.1.1. Эллипс и гипербола с общими фокусами пересекаются под прямым углом.

Действительно, пусть ℓ_3 и $\ell_г$ — касательные к эллипсу и гиперболе, соответственно, в точке их пересечения. Согласно доказанной теореме, углы будут такими, как показано на рис. 95. Следовательно, $2\alpha + 2\beta = \pi$, откуда $\alpha + \beta = \pi/2$.

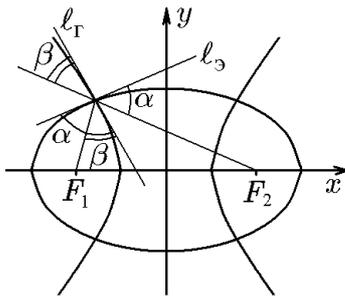


Рис. 95.

◆ Кривые второго порядка с общими фокусами называются *софокусными* или *конфокальными*.

◇ Конфокальные эллипсы и гиперболы пересекаются под прямым углом.

◇ С кривыми второго порядка связаны две системы координат: эллиптическая и параболическая, играющие важную роль в механике и математической физике.

Пусть F_1 и F_2 — заданные точки плоскости. Согласно следствию 18.1.1, через каждую точку плоскости можно провести один эллипс и одну гиперболу, имеющие точки F_1 и F_2 своими фокусами (рис. 96,а). Каждый эллипс ортогонален любой софокусной с ним гиперболе, т.е. пересекается с ней в четырех точках (по одной в каждой четверти) под прямыми углами. Совокупность всех софокусных эллипсов и гипербол в заданной системе координат xOy определяется уравнением

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \tag{18.1}$$

где c — расстояние от фокусов до начала координат, а λ — переменный параметр, который при $\lambda > c$ определяет эллипс, а при $0 < \lambda < c$ — гиперболу.

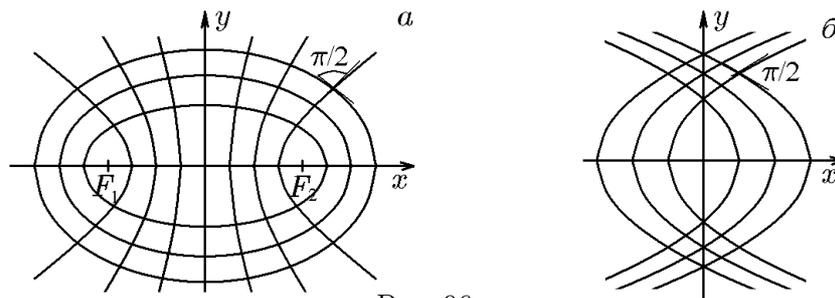


Рис. 96.

Если в один из фокусов поместить в начало координат, а другой устремить в бесконечность по оси Ox , то в пределе получаются два семейства софокусных парабол (рис. 96, б). Любые две параболы, принадлежащие к разным семействам, ортогональны друг другу.

Софокусные эллипсы и гиперболы задают на плоскости координатную сеть эллиптической системы координат, а софокусные параболы — координатную сеть параболической системы координат.

Пример 18.1. Показать, что любой световой луч, проходящий через фокус эллиптического зеркала в любом направлении, после многократного отражения от поверхности зеркала проходит по фокальной оси, отражаясь от его вершин $(-a, 0)$ и $(a, 0)$.

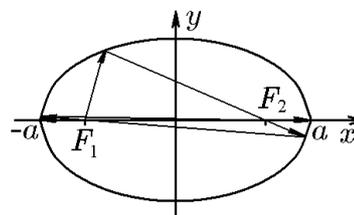


Рис. 97.

Решение. Поскольку после каждого отражения световой луч проходит поочередно через оба фокуса, то ордината его точки отражения монотонно убывает, в результате чего луч будет проходить по фокальной оси, отражаясь от зеркала в его вершинах (рис. 97).

Пример 18.2. Определить условие, при котором луч, исходящий из фокуса гиперболического зеркала, сможет отразиться от этого зеркала.

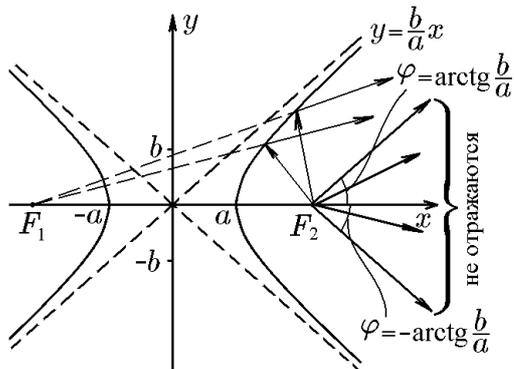


Рис. 98.

Решение. Пусть a и b — действительная и мнимая полуоси гиперболы (рис. 98). Углы $\varphi = \pm \arctg(b/a)$ задают асимптотические направления гиперболы, т.е. углы наклона двух ее асимптот $y = \pm bx/a$. Два луча, прошедшие через фокус F_2 под углами $\varphi = \arctg(b/a)$, параллельны асимптотам и, следовательно, не могут отразиться от зеркала. Из простейших геометрических построений (рис. 98) очевидно, что лучи, направляющие векторы которых лежат внутри этого угла, также не смогут отразиться от зеркала. Лучи же, направления которых лежат вне этого угла, отражаются от гиперболического зеркала и кажутся исходящими из другого фокуса F_1 .

19. Кривые в полярной системе координат

Чтобы полнее использовать возможности, предоставляемые полярной системой координат, проведем её естественное обобщение.

Если полярная система координат задана на ориентированной плоскости с ортогональным репером $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ так, что ее полюс совпадает с началом декартовой системы координат O , а полярная ось направлена по вектору \vec{e}_1 , то такие полярная и декартова системы координат называются *естественно связанными*.

Координаты точек в естественно связанных полярной и декартовой системах координат (рис. 99) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi. \end{aligned} \quad (19.1)$$

Обратно

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (19.2)$$

а φ с точностью до угла $2\pi k$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (19.3)$$

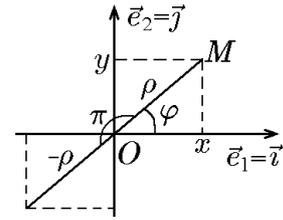


Рис. 99.

Обозначим через $M(\rho, \varphi)$ точку M с полярными координатами ρ и φ . Поскольку полярный угол определяется неоднозначно, его значение, удовлетворяющее условию $0 \leq \varphi < 2\pi$, называют *главным*. Иногда в литературе главным значением полярного угла называют значение, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$.

◊ В отличие от декартовой, полярная система координат не устанавливает взаимно однозначное соответствие между парами чисел (ρ, φ) и точками плоскости. В большинстве приложений возникающая в результате этого неопределенность может быть устранена.

Как уже отмечалось, уравнение кривой в полярной системе координат имеет вид $F(\rho, \varphi) = 0$ или $\rho = f(\varphi)$. При этом оно может быть получено либо непосредственно, исходя из геометрических свойств кривой, либо переходом к полярным координатам в уравнении этой кривой, заданном в декартовых координатах.

В связи с этим существуют два подхода к определению кривых, заданных уравнением $\rho = f(\varphi)$ в полярной системе координат.

В первом случае полярные координаты точки $M(\rho, \varphi)$ на плоскости должны удовлетворять условию $\rho = f(\varphi) \geq 0$, что соответствует геометрическому смыслу полярной координаты ρ — расстоянию между точками M и O .

Второй подход связан со следующим свойством полярной системы координат. Если в формулах (19.1) одновременно заменить $\rho \rightarrow -\rho$ и $\varphi \rightarrow \pi + \varphi$, то декартовы координаты точки $M(x, y)$ не изменятся. Это означает, что точки $M(x, y)$ можно задавать как парой (ρ, φ) , так и парой $(-\rho, \varphi \pm \pi)$.

Теперь точка M , имеющая полярные координаты ρ и φ ($\rho > 0$, $-\pi < \varphi < \pi$), будет определяться не только координатами ρ и $\varphi + 2k\pi$ (k — любое число), но и координатами $-\rho$, $(\varphi \pm \pi) + 2k\pi$. В наиболее общем случае полярные координаты такой точки можно записать в виде

$$M[(-1)^n \rho, \varphi + n\pi], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, возникает возможность использовать отрицательные значения величины ρ . Через начало координат проведём ось $O\rho$, положительное направление которой составляет угол φ с положительным направлением оси Ox .

Если $\rho(\varphi) > 0$ для угла φ , то будем понимать под этим следующее правило: паре координат (ρ, φ) сопоставляется точка плоскости в соответствии с описанным выше стандартным правилом. Если же $\rho(\varphi) < 0$ для угла φ , то соответствующий отрезок откладывается в отрицательном направлении оси $O\rho$, т.е. под углом $(\varphi \pm \pi)$ к этой оси. (Аналогичная договоренность действует и на комплексной плоскости (z), на которой переход от z к $-z = ze^{\pm i\pi}$ соответствует

повороту отрезка $|z| > 0$ на угол $\pm\pi$.) В некоторых случаях эти подходы определяют одинаковые по форме кривые, в некоторых же формы кривых будут различаться (см. примеры).

◆ Полярную систему координат, в которой переменная ρ может принимать отрицательные значения, называют *обобщенной*.

Рассмотрим теперь, как в полярных координатах выглядят уравнения линий 1-го и 2-го порядка.

Начнём с линий 1-го порядка, т.е. прямых.

19.1. Прямая в полярных координатах

Пусть прямая проходит через полюс O (рис. 100, а) и её угловой коэффициент в полярной системе координат равен k . В этом случае уравнение прямой имеет вид

$$\operatorname{tg} \varphi = k. \quad (19.4)$$

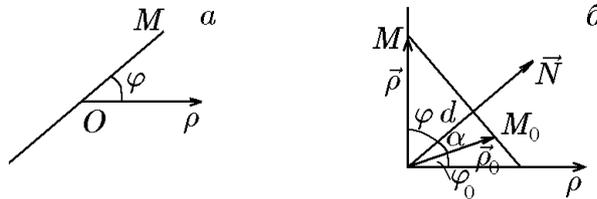


Рис. 100.

Пусть теперь прямая проходит через точку $M_0(\rho_0 \cos \varphi_0, \rho_0 \sin \varphi_0)$ (рис. 100, б), а не через полюс, и перпендикулярна вектору $\vec{ON} = |\vec{N}|(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Обозначим через $M = (x, y) = \rho(\cos \varphi, \sin \varphi)$ текущую точку прямой. Тогда уравнение прямой примет вид

$$(\vec{N}, \vec{MM}_0) = 0$$

или

$$|\vec{N}| \cos \alpha (\rho \cos \varphi - \rho_0 \cos \varphi_0) + |\vec{N}| \sin \alpha (\rho \sin \varphi - \rho_0 \sin \varphi_0) = 0.$$

Разделив на $|\vec{N}|$, запишем

$$\rho(\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi) - \rho_0(\cos \alpha \cos \varphi_0 + \sin \alpha \sin \varphi_0) = 0,$$

откуда

$$\rho = \frac{\rho_0 \cos(\varphi_0 - \alpha)}{\cos(\varphi - \alpha)}. \quad (19.5)$$

Уравнение (19.5) является уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(\rho_0, \varphi_0)$ перпендикулярно вектору \vec{ON} , в полярной системе координат. Из рис. 100, б видно, что условие перпендикулярности прямой вектору \vec{ON} можно заменить тем условием, что прямая находится на расстоянии p от полюса O (см. (11.20)):

$$p = \rho_0 \cos(\varphi_0 - \alpha). \quad (19.6)$$

С учётом (19.6) уравнение прямой (19.5) в полярной системе координат примет вид

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}, \quad (19.7)$$

где α — угол между вектором нормали прямой и полярной осью, p — расстояние от прямой до начала координат.

Простейшие преобразования (19.7):

$$\rho \cos(\varphi - \alpha) = \rho(\cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha = d \quad (19.8)$$

переводят уравнение прямой (19.7) в нормальное уравнение прямой (19.8) в декартовых координатах, естественным образом (19.1) связанных с полярными. При необходимости от уравнения прямой в декартовой системе координат обратным преобразованием можно вернуться к полярной системе, естественно связанной с декартовой.

Пример 19.1. Построить кривую, заданную в полярных координатах уравнением

$$\rho = \frac{1}{\cos \varphi + \sin \varphi}.$$

Решение. *Способ 1.* Преобразуем заданное уравнение:

$$\rho = \frac{\sqrt{2}/2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi} = \frac{\sqrt{2}/2}{\cos \varphi \cos \pi/4 + \sin \varphi \sin \pi/4} = \frac{\sqrt{2}/2}{\cos(\varphi - \pi/4)}.$$

Полученное уравнение при $d = \sqrt{2}/2$, $\alpha = \pi/4$ совпадает с (19.7). Следовательно, исходное уравнение определяет прямую, отстоящую от полюса O на расстояние $\sqrt{2}/2$ и перпендикулярную вектору \overrightarrow{ON} , образующему с полярной осью угол $\alpha = \pi/4$ (рис. 101, а).

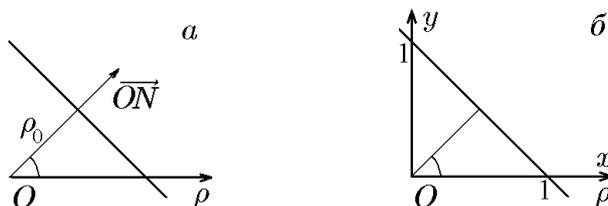


Рис. 101.

Способ 2. Преобразуем заданное уравнение к следующему виду:

$$\rho(\cos \varphi + \sin \varphi) = 1.$$

Это уравнение в естественно связанной декартовой системе координат имеет вид

$$x + y = 1,$$

которому соответствует прямая на рис. 101, б.

19.2. Канонические уравнения кривых второго порядка в полярной системе координат

Пусть $\{O, x, y\}$ — декартова система координат, а $\{O, \rho, \varphi\}$ — естественно связанная с ней полярная система координат.

В каноническом уравнении эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

заменяем декартовы координаты полярными:

$$\frac{(\rho \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{(\rho \sin \varphi)^2}{b^2} = 1,$$

или

$$\rho^2 \left[\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \varphi + 1 - \cos^2 \varphi \right] = b^2.$$

Поскольку $(a^2 - b^2)/a^2 = \varepsilon^2$, где ε — эксцентриситет эллипса, то

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}. \quad (19.9)$$

Аналогично из канонического уравнения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

получим ее уравнение в полярной системе координат

$$\rho^2 = \frac{b^2}{\varepsilon^2 \cos^2 \varphi - 1}, \quad (19.10)$$

и из канонического уравнения параболы

$$y^2 = 2px$$

— ее уравнение в полярной системе координат

$$\rho = \frac{2p \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = 2p \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin \varphi}. \quad (19.11)$$

Пример 19.2. Записать в полярной системе координат уравнения кривых второго порядка, проходящих через полюс.

Решение. Общий вид уравнений кривых 2-го порядка, проходящих через начало декартовой системы координат, задается формулой (17.2), которую мы запишем как

$$y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 = 2px.$$

Перейдя в этом уравнении к полярным координатам, найдём

$$\rho^2 [\sin^2 \varphi + (1 - \varepsilon^2) \cos^2 \varphi] = 2p\rho \cos \varphi,$$

откуда

$$\rho = \frac{2p \cos \varphi}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}. \quad (19.12)$$

Из (19.12) для параболы ($\varepsilon = 1$) следует уже полученное уравнение (19.7), а для окружности ($\varepsilon = 0$) —

$$\rho = 2p \cos \varphi, \quad (19.13)$$

что соответствует окружности радиуса p , центр которой смещен по оси Ox в точку $M_0(p, 0)$. Заметим, что уравнение окружности (19.13) получается из (17.2) при $a = b = p$, т.е. из уравнения

$$(x - p)^2 + y^2 = p^2. \quad (19.14)$$

Аналогично окружности, смещенной по оси Oy и проходящей через начало координат:

$$x^2 + (y - p)^2 = p^2, \quad (19.15)$$

соответствует уравнение в полярной системе координат

$$\rho = 2p \sin \varphi. \quad (19.16)$$

19.3. Уравнения кривых второго порядка в полярной системе координат, полюс которой совпадает с фокусом, а полярная ось сонаправлена с осью симметрии кривой

Пусть $\{O, \rho, \varphi\}$ — полярная система координат, центр которой совпадает с фокусом кривой, а полярная ось направлена по ее оси симметрии (рис. 102). Согласно директориальным свойствам кривых, отношение расстояний $|FM|$ и $|M'M|$ есть величина постоянная, равная ее эксцентриситету, т.е.

$$\frac{|FM|}{|M'M|} = \varepsilon. \quad (19.17)$$

В выбранной системе координат расстояние $|FM|$ есть полярный радиус, т.е. $|FM| = \rho$. Если через p и ε обозначить фокальный параметр и эксцентриситет кривой, то из рис. 102 следует

$$|M'M| = \frac{p}{\varepsilon} + \rho \cos \varphi.$$

С учётом этого соотношение (19.17) примет вид

$$\frac{\rho}{p/\varepsilon + \rho \cos \varphi} = \varepsilon,$$

откуда

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}. \quad (19.18)$$

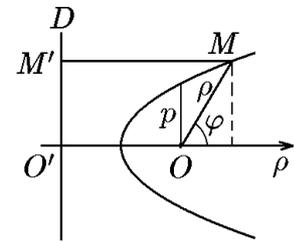


Рис. 102.

Уравнение (19.18) и есть искомое уравнение кривой второго порядка в полярной системе координат. Оно в зависимости от эксцентриситета ε описывает эллипс, гиперболу и параболу.

Пример 19.3. Показать, что в полярной системе координат уравнение окружности, проходящей через точку $M(\rho_0, \varphi_0)$ и полюс, имеет вид

$$\rho = 2\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (19.19)$$

Решение. Запишем уравнение (19.19) в декартовых координатах, естественно связанных с полярными. Так как

$$\rho^2 = 2\rho_0 \rho \cos(\varphi - \varphi_0),$$

то

$$x^2 + y^2 = 2\rho_0 \rho (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) = 2xx_0 + 2yy_0,$$

где $x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0$, $y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0$. Выделив полные квадраты в последнем соотношении, получим

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = x_0^2 + y_0^2 = R^2.$$

В декартовых координатах это уравнение описывает окружность с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ ($x_0 = \rho_0 \cos \varphi_0$, $y_0 = \rho_0 \sin \varphi_0$) и радиусом $R = \rho_0$ (рис. 103). Прямая $\operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} \varphi_0$ является касательной к окружности в полюсе.

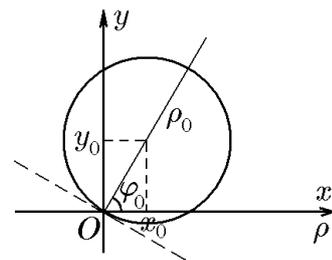


Рис. 103.

Пример 19.4. Построить кривые

$$\text{а) } \operatorname{tg} \varphi = -1; \quad \text{б) } \rho \cos \varphi = 2; \quad \text{в) } \rho \sin \varphi = 1.$$

Решение. *Способ 1.* В естественно связанной декартовой системе координат эти уравнения имеют вид а) $y = -x$; б) $x = 2$; в) $y = 1$, и построение определяемых ими кривых не вызывает затруднений (рис. 104,а).

Способ 2. Для случая а) из уравнения (19.3) можно сделать вывод, что уравнение $\operatorname{tg} \varphi = -1$ описывает прямую, проходящую через полюс под углом $\varphi = \operatorname{arctg}(-1) = 3\pi/4$. В случае б) заданное уравнение совпадает с уравнением (19.7) при $d = 2$ и $\alpha = 0$ и, следовательно, описывает прямую, отстоящую от полюса на расстояние $d = 2$ и перпендикулярную вектору, составляющему с полярной осью угол $\alpha = 0$. В случае в) заданное уравнение совпадает с уравнением (19.7) при $d = 1$ и $\alpha = \pi/2$ и, следовательно, описывает прямую, отстоящую от полюса на расстояние $d = 1$ и перпендикулярную вектору, составляющему с полярной осью угол $\alpha = \pi/2$ (рис. 104,б).

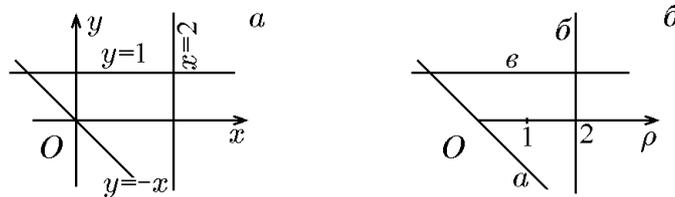


Рис. 104.

Пример 19.5. Построить кривую $\rho = 4 \cos \varphi$.

Решение. *Способ 1.* Запишем уравнение в декартовых координатах, естественно связанных с полярными. Так как

$$\rho^2 = 4\rho \cos \varphi,$$

то

$$x^2 + y^2 = 4x.$$

Выделение полного квадрата приводит это уравнение к виду

$$(x - 2)^2 + y^2 = 2^2.$$

Оно определяет в декартовых координатах окружность радиуса $R = 2$ с центром, смещенным в точку $x_0 = 2$, и, следовательно, проходящую через начало координат (рис. 105,а).

Способ 2. Заданное уравнение совпадает с уравнением (19.19) при $\rho_0 = 2$ и $\varphi = 0$ и, следовательно, определяет окружность радиуса $R = 2$ с центром в точке M_0 с полярными координатами $\rho_0 = 2$, $\varphi = 0$ (рис. 105,б).

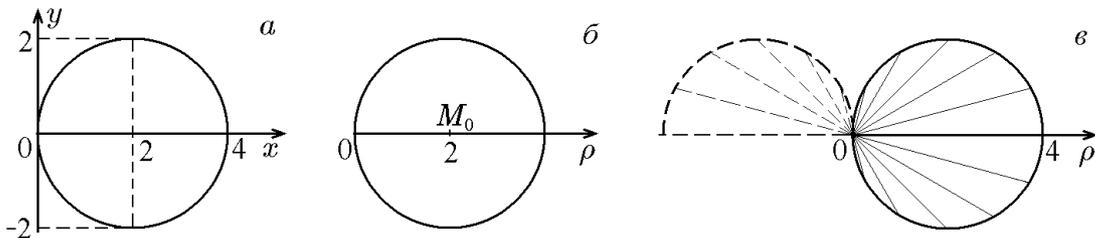


Рис. 105.

Способ 3. Оба предыдущих способа опирались на уравнение кривой в декартовой или полярной системе координат, когда определяемая уравнением кривая известна. Каждое из уравнений в своей системе координат характеризует радиус этой окружности и положение центра. В некоторых случаях получить представление о кривой можно, построив некоторую последовательность точек по заданному уравнению, в данном случае по уравнению $\rho = 4 \cos \varphi$. Построим эту последовательность в полярных и обобщенных полярных координатах.

а) Величина $\rho \geq 0$. Из уравнения $\rho = 4 \cos \varphi$ следует, что значения ρ положительны только для азимутальных углов φ , удовлетворяющих неравенству $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Для других значений углов φ величина $\rho < 0$ и, следовательно, определяемые уравнением кривые геометрического смысла не имеют в области действительных чисел. Задавая значения φ , получим зависимость, представляемую таблицей

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----------------|-------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|-----|-------------------|------------------|------------------|------------------|--------------------|------------------|
| φ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{12}$ | 0 | $-\frac{\pi}{12}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{5\pi}{12}$ | $-\frac{\pi}{2}$ |
| ρ | 0 | 1,03 | 2,0 | 2,82 | 3,46 | 3,86 | 4,0 | 3,86 | 3,46 | 2,85 | 2,0 | 1,03 | 0 |

Откладывая под углами, значения которых приведены в верхней строке таблицы, от начала координат отрезки соответствующей длины, получим последовательность точек, гладкое соединение которых даст окружность (рис. 105, в).

б) В обобщенной полярной системе координат величина ρ может принимать отрицательные значения. В этом случае нужно построить следующую таблицу:

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----------|-----|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|------------------|-------------------|--------------------|--------------------|-------|
| φ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{5\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{12}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{9\pi}{12}$ | $\frac{10\pi}{12}$ | $\frac{11\pi}{12}$ | π |
| ρ | 4,0 | 3,86 | 3,47 | 2,82 | 2,0 | 1,03 | 0 | -1,03 | -2 | -2,82 | -3,37 | -3,86 | -4 |

В этой таблице половина значений ρ положительна, а другая половина отрицательна. Точки с $\rho \geq 0$ строятся, как и в предыдущем случае. Чтобы построить точку с отрицательным ρ , отрезок нужно отложить не на самом луче, выходящем из начала координат под углом φ , а на его продолжении за полюс (рис. 105, в). Выполнив указанные операции, получим то же множество точек, что и в предыдущем случае. Заметим, что для углов φ , принимающих значения от π до 2π , получим ту же окружность.

Пример 19.6. Построить кривые

а) $\rho = -6 \sin \varphi$; б) $\rho = 8 \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)$; в) $\rho = 3\sqrt{3} \cos \varphi + 3 \sin \varphi$.

Решение. Воспользуемся формулой (19.19), описывающей окружность, проходящую через точку $M(\rho_0, \varphi_0)$ и имеющую радиус ρ_0 , т.е. проходящую через полюс. Поскольку все три уравнения можно записать в виде

а) $\rho = -6 \sin \varphi = 6 \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$;

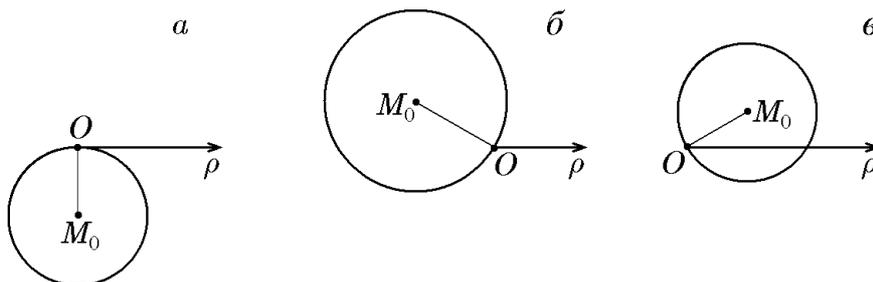


Рис. 106.

$$\text{б) } \rho = 8 \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = 8 \cos \left(\varphi - \frac{5\pi}{6} \right);$$

$$\text{в) } \rho = 3\sqrt{3} \cos \varphi + 3 \sin \varphi = 6 \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right),$$

то они определяют окружности, центры которых смещены в точку M_0 с полярными координатами $(3, -\pi/2)$, $(4, 5\pi/6)$ и $(3, \pi/6)$ соответственно (рис. 106, а–в).

Пример 19.7. Построить кривые

$$\text{а) } \rho = \frac{3}{1 - \cos \varphi}; \quad \text{б) } \rho = \frac{9}{5 - 4 \cos \varphi}; \quad \text{в) } \rho = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi}.$$

Решение. *Способ 1.* Воспользуемся формулой (19.18):

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi},$$

описывающей кривую 2-го порядка в полярной системе координат, полюс которой расположен в ее фокусе, а полярная ось направлена по оси симметрии кривой. Сравнив исходные данные с (19.18), заключаем, что в случае а) уравнение определяет параболу, поскольку $\varepsilon = 1$; в случае б) — эллипс, поскольку

$$\rho = \frac{9}{5 - 4 \cos \varphi} = \frac{9/5}{1 - (4/5) \cos \varphi}, \quad (19.20)$$

и, следовательно, $\varepsilon = 4/5 < 1$. В случае в) — гиперболу, поскольку

$$\rho = \frac{9}{4 - 5 \cos \varphi} = \frac{9/4}{1 - (5/4) \cos \varphi} \quad (19.21)$$

и, следовательно, $\varepsilon = 5/4 > 1$. Теперь, когда тип каждой кривой известен, определим ее параметры, необходимые для построения.

Для случая а) задача затруднений не представляет, так как из уравнения сразу определяем ее фокальный параметр: $p = 3$ (рис. 107, а).

В случае б) для эллипса $p = 9/5$, $\varepsilon = 4/5$, но

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{5}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5},$$

поэтому

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{p}{a} = 1 - \frac{9}{5a} = \left(\frac{4}{5} \right)^2,$$

откуда $a = 5$, $c = 4$, $b = 3$. Зная полуоси эллипса и его межфокусное расстояние, строим его в полярных координатах (рис. 107, б).

В случае в) для гиперболы $p = 9/4$, $\varepsilon = 5/4$ и

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{4}, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4},$$

тогда

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{p}{a} = 1 + \frac{9}{4a} = \left(\frac{5}{4} \right)^2,$$

откуда $a = 4$, $c = 5$, $b = 3$. Зная полуоси гиперболы и ее межфокусное расстояние, строим ее в полярных координатах (рис. 107, в).

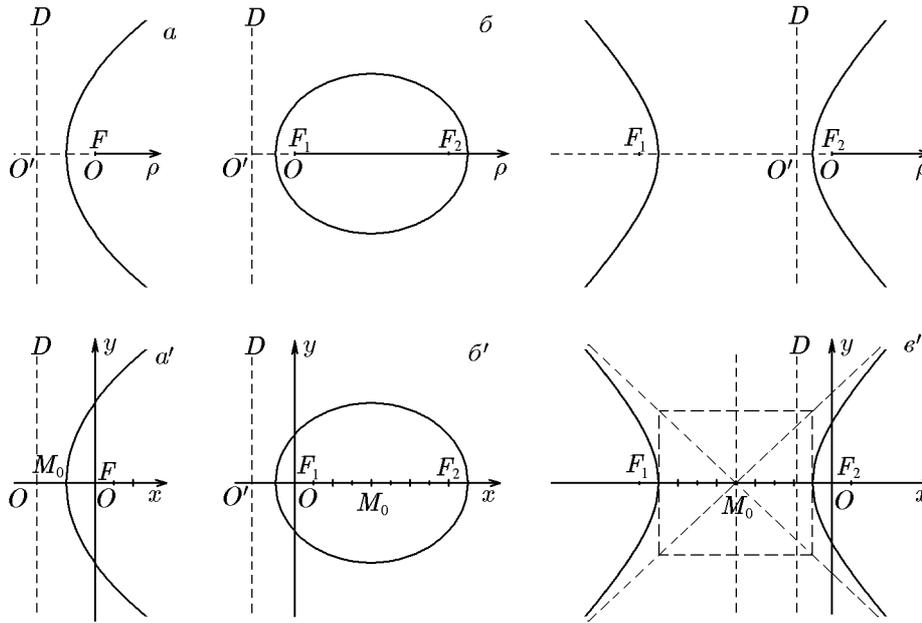


Рис. 107.

Способ 2. В заданных полярных уравнениях перейдем к естественно связанным декартовым координатам. Для этого в случае а) преобразуем исходное уравнение к виду

$$\rho(1 - \cos \varphi) = \rho - x = 3.$$

Перепишав его:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = x + 3$$

и возведя в квадрат, найдём

$$x^2 + y^2 = (x + 3)^2,$$

откуда

$$y^2 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

Это уравнение параболы с вершиной, смещенной в точку $M_0(-3/2, 0)$ (рис. 107, а').

В случае б) преобразование исходного уравнения дает

$$\rho(5 - 4 \cos \varphi) = 5\rho - 4x = 9.$$

Перепишав его:

$$5\rho = 5\sqrt{x^2 + y^2} = 4x + 9$$

и возведя в квадрат

$$25(x^2 + y^2) = 16x^2 + 72x + 81,$$

найдем

$$9x^2 - 72x + 25y^2 = 81.$$

Выделив полный квадрат

$$\frac{(x - 4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

получим уравнение эллипса с полуосями $a = 5$ и $b = 3$ и центром, смещенным в точку $M_0(4, 0)$, в декартовых координатах (рис. 107, б').

В случае в) преобразование исходного уравнения дает

$$\rho(4 - 5 \cos \varphi) = 4\rho - 5x = 9.$$

Перепишав его:

$$4\rho = 4\sqrt{x^2 + y^2} = 5x + 9$$

и возведя в квадрат

$$16(x^2 + y^2) = 25x^2 + 90x + 81,$$

найдем

$$9x^2 + 90x - 16y^2 + 81 = 0.$$

Выделив полный квадрат

$$\frac{(x + 5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1,$$

получим уравнение гиперболы с полуосями $a = 4$ и $b = 3$ и центром, смещенным в точку $M_0(-5, 0)$ (рис. 107, в').

В заключение отметим, что для решения целого класса задач перед переходом в полярную систему координат удобно предварительно выбрать подходящий масштаб по осям Ox и Oy , т.е.

$$x = ar \cos \psi, \quad y = br \sin \psi, \quad (19.22)$$

где $r \in [0, \infty[$, $\psi \in [0, 2\pi[$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. Поскольку из (19.22) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= r^2 = \text{const}; \\ \text{tg } \psi &= \frac{ay}{bx} = \text{const}, \end{aligned}$$

то координатными линиями такой системы координат являются эллипсы и лучи.

◆ Систему координат (r, ψ) , связанную с декартовой системой координат соотношениями (19.22), также называют *полярной* или *обобщенной полярной* системой координат.

Пример 19.8. Выбрать обобщенную полярную систему координат вида (19.22), в которой уравнения двух эллипсов

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1$$

запишутся в наиболее простой форме.

Решение. Исходя из того, что полуоси первого эллипса $a = 5$, $b = 3$, введём обобщенную полярную систему координат

$$x = 5r \cos \psi, \quad y = 3r \sin \psi.$$

Подставив эти координаты в исходные уравнения, получим

$$r^2 = 1, \quad \frac{r^2}{2} = 1,$$

и, следовательно, искомые уравнения имеют вид

$$r = 1, \quad r = \sqrt{2}.$$

20. Уравнения кривых второго порядка в параметрической форме

Иногда бывает удобнее пользоваться уравнением кривой в так называемой параметрической форме.

Мы уже отмечали, что в общем случае кривая в параметрической форме задаётся соотношениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где t – параметр (от греческого *παράμετρον* – «отмеривающий»). В качестве параметра, «отмеривающего» величины x, y , могут выступать как размерные: время, длина, и др., так и безразмерные: относительная длина и т.д.

Если известно уравнение кривой в форме $F(x, y) = 0$ в декартовой системе координат, то переход от этого уравнения к уравнению в параметрической форме называется его *параметризацией*. Трудоемкость процесса параметризации определяется выбором самого параметра t . Обратная же операция, т.е. переход от параметрической формы к явной или неявной, не всегда возможна. По этой причине существуют целые классы кривых, для которых параметрическая форма описания является единственной.

Ниже мы рассмотрим некоторые из возможных параметризаций канонических уравнений кривых 2-го порядка.

20.1. Окружность

Как уже отмечалось, вид параметрических уравнений кривой зависит от выбора параметра. Для окружности рассмотрим, например, следующую задачу. Пусть в декартовой системе координат xOy отрезок OM длиной R расположен вдоль оси Ox (рис. 108,а). Если этот отрезок перемещать различными способами, то его точки будут описывать различные кривые на плоскости, которые при выборе определенного параметра t будут определяться параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$. Можно указать, например, не менее трех способов перемещения этого отрезка, при которых кривые, описываемые некоторыми точками отрезка, являются окружностями.

I. Исходя из геометрического определения окружности, будем вращать отрезок OM вокруг неподвижной точки O . В результате, как известно, точка M опишет окружность радиуса R с центром в точке O . Если в качестве параметра выбрать угол наклона отрезка OM к оси Ox , то координаты точки $M(x, y)$ из простейших свойств прямоугольных треугольников найдутся как

$$x = R \cos \varphi; \quad y = R \sin \varphi. \quad (20.1)$$

Уравнения (20.1) являются простейшими параметрическими уравнениями, соответствующими каноническому уравнению окружности

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

которое получается из (20.1) исключением параметра φ . Действительно, возведя каждое из (20.1) в квадрат и сложив, придём к каноническому уравнению. В параметрическом уравнении параметр φ может пробегать все значения из промежутка $] - \infty, +\infty[$, тогда уравнение (20.1) определяет кривую, точка которой многократно описывает эту окружность. При необходимости параметр φ можно ограничить любым промежутком $]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[$.

II. Теперь отрезок OM будем перемещать так, чтобы его концы скользили по координатным осям (рис. 108,б). При таком перемещении точка L , делящая

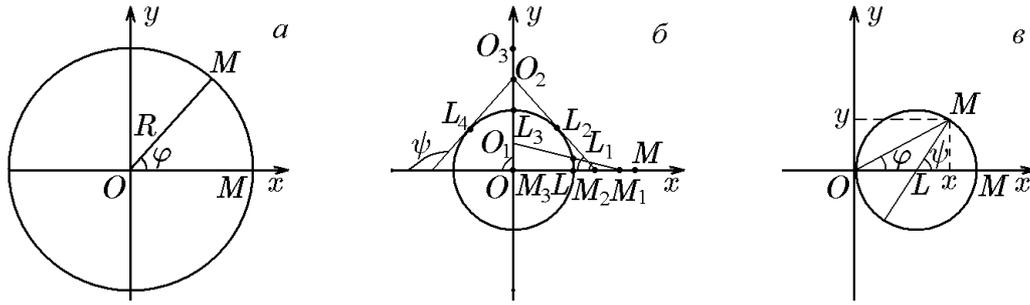


Рис. 108.

отрезок пополам, опишет окружность радиуса $OL = R/2$. Чтобы получить параметрические уравнения этой окружности, выберем в качестве параметра угол ψ , который луч MO образует с отрицательным направлением оси Ox . Поскольку при таком скольжении отрезка серединная точка $L(x, y)$ лежит на некоторой кривой, а, как следует из рис. 108, б, гипотенузы $OL = LM = R/2$ своей длины не меняют, то координаты x и y этой точки будут равны

$$x = \frac{R}{2} \cos \psi; \quad y = \frac{R}{2} \sin \psi. \quad (20.2)$$

Исключив из (20.2) параметр ψ , придём к каноническому уравнению окружности радиуса $R/2$ с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2.$$

Заметим, что в отличие от предыдущего случая, когда все точки отрезка описывали окружности, в данном случае единственная точка L описывает окружность. Очевидно, что траекториями концов отрезка OM являются отрезки длиной $2R$, лежащие на координатных осях. Что же касается остальных точек, то ниже мы убедимся, что они описывают эллипсы.

Заметим также, что азимутальный угол φ , являющийся безразмерным параметром в уравнениях (20.1), можно заменить размерным. Считая, например, вращение отрезка OM равномерным с постоянной угловой скоростью ω , можем записать $\varphi = \omega t$, откуда

$$x = R \cos \omega t, \quad y = R \sin \omega t.$$

Здесь параметр t представляет собой время вращения отрезка и является величиной размерной.

III. Как и в предыдущем случае, на отрезке OM выберем точку L , делящую его пополам: $OL = LM = R/2$, и будем вращать отрезок вокруг неподвижной точки L , т.е. его середины. Очевидно, что концы отрезка — точки O и L — опишут окружность радиуса $R/2$ с центром в точке L . Чтобы найти параметрические уравнения этой окружности, выберем в качестве параметра азимутальный угол φ между радиус-вектором \overrightarrow{OM} и осью Ox (рис. 108, в). Повороту радиус-вектора \overrightarrow{OM} на угол φ соответствует поворот отрезка LM на угол ψ , который — как центральный — связан с вписанным углом φ соотношением $\psi = 2\varphi$. Вместе с тем, из простейших геометрических построений (см. рис. 108, в) следует, что

$$x = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} \cos \psi, \quad y = \frac{R}{2} \sin \psi.$$

Это позволяет записать параметрические уравнения окружности через параметр φ как

$$x = \frac{R}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad y = \frac{R}{2} \sin 2\varphi. \quad (20.3)$$

Исключив из (20.3) параметр, получим уравнение окружности

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

с центром в точке L и радиусом $R/2$, что и следовало ожидать.

20.2. Эллипс

Начнём с параметризации канонического уравнения эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

используя в качестве параметра угол φ радиус-вектора точки M , принадлежащей эллипсу. Как следует из рис. 109,

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \sin \varphi, \quad (20.4)$$

где $\rho(\varphi)$ — полярный радиус точки $M(x, y)$, который, согласно (19.18), равен

$$\rho(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Подставив это выражение в (20.4):

$$x = \frac{ab \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad y = \frac{ab \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (20.5)$$

получим искомое параметрическое уравнение. Громоздкость этих параметрических уравнений говорит о том, что выбор угла φ в качестве параметра не является самым удачным. Рассмотрим еще одну возможную параметризацию. Для этого вернёмся к задаче, рассмотренной в предыдущем разделе.

Пусть OM — отрезок, расположенный вдоль оси Ox , а точка L делит его на два отрезка: OL и LM длиной $OL = a$ и $LM = b$ соответственно. Отрезок OM будем перемещать так, чтобы он своими концами скользил по координатным осям (рис. 110,а). Найдём параметрические уравнения кривой, которую опишет точка L , выбрав в качестве параметра угол ψ , образованный лучом OM и отрицательным направлением оси Ox . Из двух прямоугольных треугольников (рис. 110,а) следует, что

$$x = a \cos \psi, \quad y = b \sin \psi. \quad (20.6)$$

Исключив из (20.6) параметр ψ , получим каноническое уравнение эллипса с полуосями a и b :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Именно эту кривую описывает точка L .

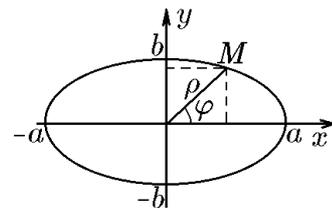


Рис. 109.

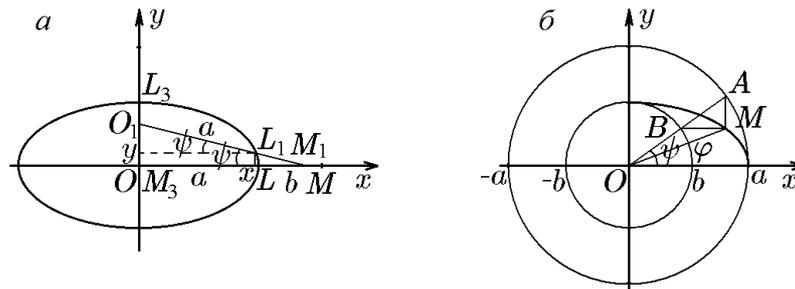


Рис. 110.

Таким образом, уравнение (20.6) представляет собой параметрическое уравнение эллипса. Очевидно, что (20.6) является естественной параметризацией эллипса и по этой причине наиболее используемой параметрической его формой. Параметр ψ может пробегать все значения из промежутка $]-\infty, +\infty[$, в результате чего точка $M(x, y)$ неоднократно описывает один и тот же эллипс. При необходимости этот параметр можно ограничить любым промежутком $]\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi[$.

Проведём две концентрические окружности радиусов a и b с центром в точке O (рис. 110, б). Затем из начала координат проведём под углом ψ луч, который пересечёт обе окружности в точках A и B соответственно. Через точку A проведём вертикальную прямую $x = a \cos \psi$, а через точку B горизонтальную прямую $y = b \sin \psi$. Точка их пересечения M будет иметь такие же координаты и, следовательно, как показано выше, будет лежать на эллипсе с полуосями a и b . При непрерывном изменении угла ψ точка $M(x, y)$ опишет весь эллипс.

Таким образом, геометрический смысл параметра ψ состоит в том, что он является азимутальным углом двух точек, лежащих на окружностях радиусов a и b , по которым указанным способом строится соответствующая точка M эллипса.

Для четырех точек эллипса, а именно его вершин, параметр ψ совпадает с азимутальным углом φ точки M на эллипсе ($\varphi = \psi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$).

В общем случае связь между параметрами φ и ψ задается соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \psi. \quad (20.7)$$

Действительно, из параметрических уравнений (20.6) следует

$$\frac{y}{x} = \frac{b \sin \psi}{a \cos \psi} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \psi.$$

Учтя, что для точки $M(x, y)$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi,$$

придём к (20.7).

Как и следовало ожидать, для окружности, т.е. при $a = b$, параметры φ и ψ совпадают.

Следующий пример наглядно иллюстрирует еще один геометрический смысл параметра ψ .

Пример 20.1. Показать, что параметр ψ в параметрических уравнениях эллипса (20.6) определяется отношением площадей:

$$\psi = 2\pi \frac{S_M}{S}, \quad (20.8)$$

где S — площадь эллипса, а S_M — площадь эллиптического сектора, отвечающего точке M (рис. 111).

Решение. Из первого уравнения (20.6) имеем

$$\psi = \arccos \frac{x}{a}. \quad (20.9)$$

Теперь, исходя из рис. 111, вычислим площадь эллиптического сектора, задаваемого точкой $M(x, y)$:

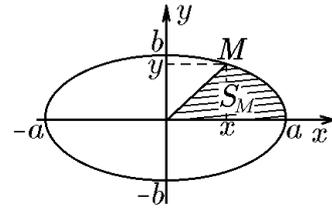


Рис. 111.

$$\begin{aligned} S_M &= \frac{xy}{2} + \int_x^a y(x) dx = \frac{xy}{2} + \frac{b}{a} \int_x^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \\ &= \frac{xy}{2} + \frac{b}{2a} \left[x\sqrt{a^2 - x^2} \Big|_x^a + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \Big|_x^a \right] = \\ &= \frac{xy}{2} + \frac{b}{2a} \left[-x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \left(\arcsin 1 - \arcsin \frac{x}{a} \right) \right] = \\ &= \frac{xy}{2} + \frac{b}{2a} \left[-x \frac{a}{b} y + a^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{a} \right) \right] = \frac{ba}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{a} \right) = \frac{ba}{2} \arccos \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (20.10)$$

Из этого равенства следует, что

$$\arccos \frac{b}{a} = \frac{2S_M}{ab}. \quad (20.11)$$

Сравнив (20.9) и (20.11), запишем

$$\psi = \frac{2S_M}{ab}. \quad (20.12)$$

Учтя, что площадь эллипса $S = \pi ab$, из (20.12) найдём связь

$$\psi = 2\pi \frac{S_M}{S},$$

совпадающую с (20.8).

20.3. Гипербола

Как и для эллипса, сначала проведём параметризацию канонического уравнения гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

используя в качестве параметра азимутальный угол φ радиус-вектора точки M , лежащей на гиперболе. Как следует из рис. 112,

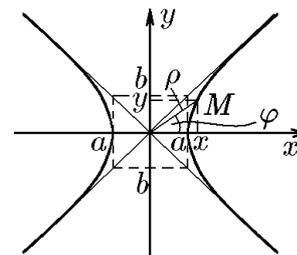


Рис. 112.

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \sin \varphi, \quad (20.13)$$

где $\rho(\varphi)$ — полярный радиус точки $M(x, y)$, который, согласно (19.18), равен

$$\rho(\varphi) = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi}}.$$

Подставив это выражение в (20.13), получим искомые параметрические уравнения

$$x = \frac{ab \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}}, \quad y = \frac{ab \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (20.14)$$

Громоздкость этих уравнений указывает на то, что выбор азимутального угла φ в качестве параметра не является самым удачным. Продолжив аналогию с эллипсом, можем заметить, что существует более простая параметризация

$$x = \pm a \operatorname{ch} \psi, \quad y = b \operatorname{sh} \psi. \quad (20.15)$$

Действительно, исключив в (20.15) параметр ψ (с использованием свойства гиперболических функций $\operatorname{ch}^2 \psi - \operatorname{sh}^2 \psi = 1$), получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Азимутальный угол φ и параметр ψ связаны соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \operatorname{th} \psi, \quad (20.16)$$

вытекающим из (20.15):

$$\frac{y}{x} = \frac{b \operatorname{sh} \psi}{a \operatorname{ch} \psi} = \frac{b}{a} \operatorname{th} \psi = \operatorname{tg} \varphi.$$

Отметим, что угол φ ограничен углом наклона асимптоты $\operatorname{tg} \varphi = b/a$, поэтому, когда точка гиперболы стремится к асимптоте, то $\operatorname{th} \psi \rightarrow 1$, что соответствует параметру $\psi \rightarrow \infty$.

Следующий пример иллюстрирует геометрический смысл параметра ψ .

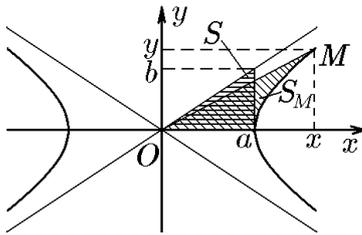


Рис. 113.

Пример 20.2. Показать, что параметр ψ в параметрических уравнениях гиперболы (20.15) определяется отношением площадей прямоугольного треугольника $S = ab/2$ и гиперболического сектора S_M , отвечающего точке M (рис. 113):

$$\psi = \frac{S_M}{S}. \quad (20.17)$$

Решение. Из первого уравнения (20.15) имеем

$$\psi = \operatorname{Arch} \frac{x}{a}, \quad x > 0. \quad (20.18)$$

Теперь, исходя из рис. 113, вычислим площадь гиперболического сектора:

$$\begin{aligned} S_M &= \frac{xy}{2} - \int_a^x y(x) dx = \frac{xy}{2} - \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx = \\ &= \frac{xy}{2} - \frac{b}{2a} \left[x\sqrt{x^2 - a^2} \Big|_a^x - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \Big|_a^x \right] = \\ &= \frac{xy}{2} - \frac{b}{2a} \left[x \frac{a}{by} - a^2 \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right] = \\ &= \frac{xy}{2} - \frac{b}{2a} \left[\frac{a}{b} xy - a^2 \operatorname{Arch} \frac{x}{a} \right] = \frac{ab}{2} \operatorname{Arch} \frac{x}{a} = S \operatorname{Arch} \frac{x}{a}. \end{aligned} \quad (20.19)$$

Из этого равенства следует, что

$$\operatorname{Arch} \frac{x}{a} = \frac{S_M}{S}. \quad (20.20)$$

Сравнение (20.18) и (20.20) дает (20.17).

20.4. Парабола

Проведём параметризацию канонического уравнения параболы

$$y^2 = 2px,$$

используя в качестве параметра азимутальный угол φ радиус-вектора точки M , лежащей на параболе. Как следует из рис. 114,

$$x = \rho(\varphi) \cos \varphi, \quad y = \rho(\varphi) \sin \varphi, \quad (20.21)$$

где $\rho(\varphi)$ — полярный радиус точки $M(x, y)$, который, согласно (19.18), равен

$$\rho(\varphi) = 2p \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Подставив это выражение в (20.21), получим искомые параметрические уравнения

$$x = 2p \operatorname{ctg}^2 \varphi, \quad y = 2p \operatorname{ctg} \varphi. \quad (20.22)$$

Нетрудно проверить, что, исключив параметр φ , получим каноническое уравнение параболы.

Более простую параметризацию можно получить, выбрав в качестве параметра ординату точки $M(x, y)$, лежащей на параболе. Положив $y = t$, найдём

$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t. \quad (20.23)$$

В некоторых приложениях полезной бывает параметризация, когда в качестве параметра выступает угол наклона ψ фокального радиус-вектора к оси Ox (рис. 114).

Пусть xOy — каноническая система координат параболы $y^2 = 2px$, а \overrightarrow{OM} и \overrightarrow{FM} — ее полярный и фокальный радиус-векторы, составляющие с осью Ox углы φ и ψ соответственно.

Из рис. 114 следует, что

$$x = \frac{p}{2} + \rho(\psi) \cos \psi, \quad y = \rho(\psi) \sin \psi, \quad (20.24)$$

где $\rho(\psi)$ — длина фокального радиус-вектора, определяемая формулой (19.18) при $\varepsilon = 1$:

$$\rho(\psi) = \frac{p}{1 - \cos \psi}.$$

Подставив это выражение в (20.24), получим

$$x = \frac{p}{2} + \frac{p \cos \psi}{1 - \cos \psi} = \frac{p(1 + \cos \psi)}{2(1 - \cos \psi)}, \quad y = \frac{p \sin \psi}{1 - \cos \psi}. \quad (20.25)$$

Отсюда после простейших тригонометрических преобразований запишем искомые параметрические уравнения

$$x = \frac{p}{2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\psi}{2}, \quad y = p \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}. \quad (20.26)$$

Разделив в (20.24) второе уравнение на первое:

$$\frac{y}{x} = \frac{p \operatorname{ctg}(\psi/2)}{(p/2) \operatorname{ctg}^2(\psi/2)} = 2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2},$$

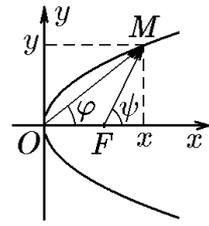


Рис. 114.

найдем связь между азимутальным φ и фокальным ψ углами точки $M(x, y)$ параболы:

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}. \quad (20.27)$$

Пример 20.3. Построить кривые, заданные параметрическими уравнениями

$$\text{а) } x = t^2 - 2t + 1, \quad y = t - 1; \quad \text{б) } x = \frac{a}{\cos t}, \quad y = b \operatorname{tg} t;$$

$$\text{в) } x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right); \quad \text{г) } x = 2R \cos^2 t, \quad y = R \sin 2t.$$

Решение. Записав для случая а) $x = (t - 1)^2$, получим $y^2 = x$ (рис. 115,а) — уравнение параболы.

Вычислив для случая б)

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad \left(\frac{y}{b} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 t,$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 t} - \operatorname{tg}^2 t = \frac{1 - \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1$$

— уравнение гиперболы с полуосями a и b (рис. 115,б).

Вычислив для случая в)

$$\left(\frac{x}{a} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2} \right), \quad \left(\frac{y}{b} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2} \right),$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— уравнение гиперболы с полуосями a и b (рис. 115,б).

Для случая г) можно записать

$$x = 2R \cos^2 t = R(1 + \cos 2t),$$

тогда

$$(x - R) = R \cos 2t, \quad y = R \sin 2t,$$

и после возведения в квадрат получим

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

— уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M_0(R, 0)$ (рис. 115,в).

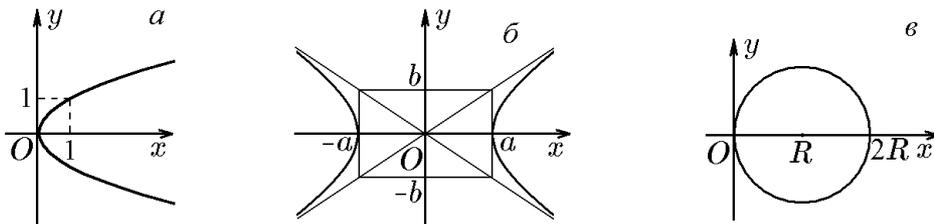


Рис. 115.

21. Кривые высших порядков и трансцендентные кривые

Заметим, что изложение по принципу «уравнение — вид кривой» при современных возможностях графических построений теряет смысл, хотя до недавнего времени такое изложение представляло интерес в качестве справки. В связи в этом имеет смысл рассматривать эти кривые как геометрическое место точек, подчиненных определенным требованиям или принципам построения. Такой подход оправдан, поскольку подавляющее большинство этих кривых известно еще с античных времен.

Из алгебраических кривых мы подробно рассмотрели кривые первого и второго порядков. Здесь мы остановимся на некоторых алгебраических кривых более высоких порядков. Наряду с этим мы рассмотрим ряд трансцендентных кривых, возникающих при вычислении криволинейных интегралов.

♦ *Трансцендентной кривой* называется плоская кривая, уравнение которой не является алгебраическим.

Трансцендентные кривые, в отличие от алгебраических, могут иметь бесконечное число точек пересечения с прямой, точек перегиба, асимптот и т.п., что наглядно иллюстрируется графиками элементарных трансцендентных функций (например, тригонометрических).

Вместе с этим мы рассмотрим несколько кривых, относящихся к особому классу. Этот класс составляют производные от других кривых, т.е. кривые, полученные из исходных при помощи специальных геометрических построений. К таким кривым относятся эволюта, эвольвента, линия погони и конхоида.

Если эволюта, эвольвента и линия погони (за редким исключением) изучаются методами дифференциальной геометрии, то конхоида — методами именно аналитической геометрии, что вытекает непосредственно из ее определения.

♦ *Конхоидой* кривой ℓ , заданной уравнением

$$\rho = \rho(\varphi), \quad (21.1)$$

называется кривая L , которая описывается полярным уравнением

$$\rho = \rho(\varphi) \pm \rho_0, \quad (21.2)$$

где ρ_0 — положительная постоянная.

Согласно определению, все окружности с центром в полюсе полярной системы координат являются конхоидами одной, например, единичной окружности $\rho = 1$, поскольку остальные можно задать уравнениями $\rho = 1 \pm \rho_0$.

Однако, если центр окружности смещен из полюса, то конхоида такой окружности вследствие дополнительного смещения (21.2) по форме будет напоминать раковину (см. рис. 124). Именно этим и объясняется ее название: конхоида — от греческого «похожая на раковину».

21.1. Классификация кривых третьего порядка

Полная классификация плоских алгебраических кривых третьего порядка, предложенная Ньютоном, имеет сложную структуру. Однако соответствующим выбором системы координат любое уравнение третьего порядка можно свести к одной из четырех канонических форм с коэффициентами a, b, c, d, e :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \begin{cases} xy^2 + ey - \text{каноническая форма } A; \\ xy - \text{каноническая форма } B; \\ y^2 - \text{каноническая форма } C; \\ y - \text{каноническая форма } D. \end{cases} \quad (21.3)$$

Не останавливаясь на классификации внутри отдельной канонической формы, рассмотрим некоторых представителей каждой из них.

21.2. Кривые третьего порядка. Каноническая форма А

1. Циссоида

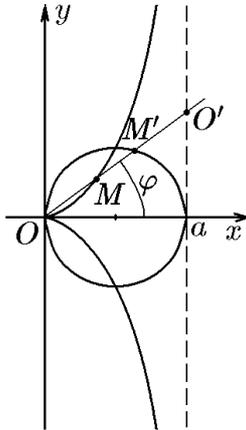


Рис. 116.

Луч OO' (рис. 116), вращаясь, пересекает заданную окружность в точке M' и прямую в точке O' . Циссоида представляет собой геометрическое место точек таких, что $|OM| = |O'M'|$. Ее уравнение проще всего получить в полярной системе координат, полюс которой помещен в точку O . В этой полярной системе координат уравнения прямой и окружности имеют вид

$$|OO'| = \rho_{\text{пр}} = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad |OM'| = \rho_{\text{ок}} = a \cos \varphi. \quad (21.4)$$

Если $\rho(\varphi)$ — полярный радиус точки M , принадлежащей циссоиде, то, согласно условию $|OM| = |O'M'|$, для него можно записать

$$|OM| = |O'M'| = \rho(\varphi) = \rho_{\text{пр}} - \rho_{\text{ок}} = \frac{a}{\cos \varphi} - a \cos \varphi$$

или

$$\rho(\varphi) = a \left(\frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi \right). \quad (21.5)$$

◆ Уравнение (21.5) называется *уравнением циссоиды в полярной системе координат*.

Домножив (21.5) на $\rho^2 \cos \varphi$, найдём

$$\rho^3 \cos \varphi = a \rho^2 (1 - \cos^2 \varphi) = a \rho^2 \sin^2 \varphi.$$

В декартовых координатах это уравнение примет вид

$$(x^2 + y^2)x = ay^2,$$

что удобнее записать как

$$x^3 = y^2(a - x). \quad (21.6)$$

◆ Уравнение (21.6) называется *уравнением циссоиды в декартовой системе координат*. Из (21.6) следует, что кривая симметрична относительно оси Ox , а прямая $x = a$ является её вертикальной асимптотой.

Из (21.5) можно легко получить параметрические уравнения циссоиды. Действительно, так как

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi = a \sin^2 \varphi, \\ y &= \rho \sin \varphi = a \operatorname{tg} \varphi \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (21.7)$$

то уравнения (21.7) можно рассматривать как параметрические уравнения кривой. Их можно упростить, введя параметр

$$t = \operatorname{tg} \varphi.$$

Тогда (21.7) примут вид

$$x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at^3}{1+t^2}. \quad (21.8)$$

◆ Уравнения (21.8) называется *уравнениями циссоиды в параметрической форме*.

Циссоида (от греческого — «похожая на лист плюща») была известна еще древнегреческим математикам. Диоклес использовал её при решении задачи об удвоении куба для определения $\sqrt[3]{2a}$.

Линейным сдвигом $x' = x - a$ уравнение (21.6) приводится к канонической форме А, поскольку в этом случае оно примет вид $-(x' + a)^3 = y^2 x'$.

2. Верзиера (локон Аньези)

Пусть, как и в предыдущем случае, луч OO' (рис. 117) пересекает заданную окружность в точке M' и прямую в точке O' (такую окружность иногда называют производящей, а прямую — её касательной). Если из точек M' и O' провести прямые, параллельные координатным осям, то точка пересечения этих прямых M при вращении луча OO' опишет кривую, называемую верзиерой. Ее уравнение проще всего получить в параметрической форме.

Пусть x и y — декартовы координаты точки $M(x, y)$, а $\rho_{\text{окр}} = a \cos \varphi$, $\rho_{\text{пр}} = a / \cos \varphi$ — полярные уравнения окружности и прямой соответственно. Из рис. 117 следует, что

$$\begin{aligned} x &= |OM'| \cos \varphi = \rho_{\text{окр}}(\varphi) \cos \varphi = a \cos^2 \varphi, \\ y &= |OO'| \sin \varphi = \rho_{\text{пр}}(\varphi) \sin \varphi = a \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = a \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \quad (21.9)$$

Введение параметра

$$t = \operatorname{tg} \varphi$$

позволяет записать уравнение (21.9) в виде

$$x = \frac{a}{1 + t^2}, \quad y = at. \quad (21.10)$$

◆ Уравнение (21.10) называется *уравнением верзиеры в параметрической форме*.

Исключив в (21.10) параметр t , получим

$$a^2(a - x) = xy^2. \quad (21.11)$$

◆ Уравнение (21.11) называется *уравнением верзиеры в декартовой системе координат*.

Из (21.11) следует, что кривая симметрична относительно оси Ox , а прямая $x = 0$ является ее вертикальной асимптотой.

Верзиера (от латинского «поворачивать») впервые была введена Марией Аньези, поэтому иногда её называют локон Аньези.

3. Строфоида

Из точки $A'(-a, 0)$ (рис. 118) проведён луч $A'O'$, на котором по обе стороны от точки O' откладываются отрезки $O'M$ и $O'N$, равные отрезку OO' . При вращении луча точки M и N описывают кривую, называемую *строфоидой*. Поместив в точку A полюс полярной системы координат и рассуждая, как и выше, получим

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm a \operatorname{tg} \varphi. \quad (21.12)$$

◆ Уравнение (21.12) называется *уравнением строфоиды в полярной системе координат*.

Из уравнения (21.12) стандартным способом находим уравнение

$$x^2(a + x) = y^2(a - x). \quad (21.13)$$

◆ Уравнение (21.13) называется *уравнением строфоиды в декартовой системе координат*.

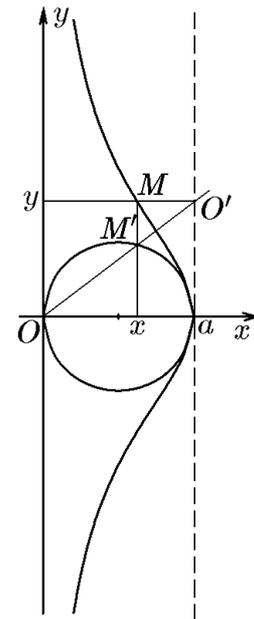


Рис. 117.

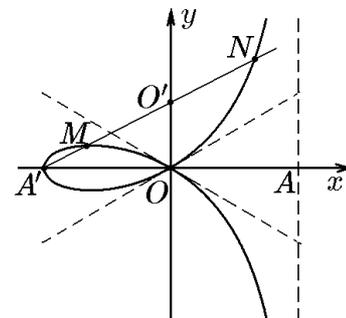


Рис. 118.

Из уравнения (21.13) следует, что кривая симметрична относительно оси Ox , а прямая $x = a$ является ее вертикальной асимптотой. Касательные в точке O перпендикулярны друг другу, поскольку являются диагоналями соответствующих квадратов.

Строфоида (от греческого «похожая на крученую ленту») была подробно исследована Э. Торричелли.

21.3. Кривые третьего порядка. Каноническая форма B

4. Трезубец

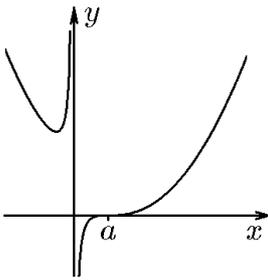


Рис. 119.

◆ Плоская кривая (рис. 119), описываемая уравнением

$$(x - a)^3 = xy,$$

называется *трязубцем*.

Отличительной особенностью трязубца является наличие двух бесконечных ветвей, разделенных вертикальной асимптотой $x = 0$. Левая ветвь кривой была известна под названием параболы Декарта. Название «трязубец» было дано Ньютоном и им же было проведено полное исследование этой кривой в его работах по классификации кривых третьего порядка.

Рис. 119.

21.4. Кривые третьего порядка. Каноническая форма C

5. Полукубическая парабола (парабола Нейля)

◆ Плоская кривая (рис. 120), описываемая уравнением

$$y^2 = x^3,$$

называется *полукубической параболой*.

Нетрудно получить уравнения полукубической параболы в параметрической форме:

$$x = t^2, \quad y = t^3.$$

◆ По дуге полукубической параболы материальная точка под действием силы тяжести движется с постоянной скоростью.

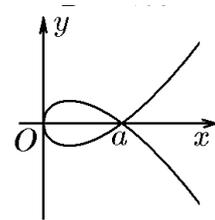
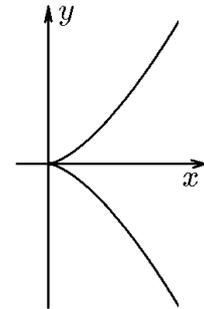


Рис. 121.

6. Петлевая парабола

◆ Плоская кривая (рис. 121), описываемая уравнением

$$ay^2 = x(x - a)^2,$$

называется *петлевой параболой*.

Уравнение петлевой параболы в параметрической форме имеет вид

$$x = t^2, \quad \sqrt{ay} = t(t^2 - a).$$

7. Декартов лист

◆ Плоская кривая (рис. 122), координаты точек которой удовлетворяют уравнению

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

называется *декартовым листом*.

Кривая симметрична относительно прямой $y = x$, поскольку замена $x \leftrightarrow y$ не меняет вид уравнения. Эта кривая имеет наклонную асимптоту $x + y + a = 0$, отстоящую от начала координат на расстояние $|OO'| = a/\sqrt{2}$. Длина отрезка $|OM| = 3|OO'| = 3a/\sqrt{2}$. Кривая допускает параметризацию

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

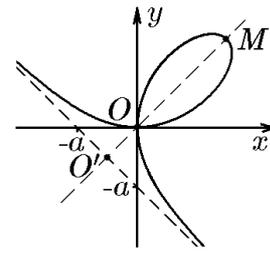


Рис. 122.

Уравнения кривых третьего порядка в канонической форме D представляют собой полином третьего порядка $y = P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, построение графика которого методами математического анализа не составляет труда.

21.5. Алгебраические кривые высших порядков

При рассмотрении кривых третьего порядка мы использовали производящую окружность $\rho = a \cos \varphi$ и ее касательную — прямую $\rho = a/\cos \varphi$ ($x = a$). Теперь рассмотрим конхоиды каждой из этих линий отдельно.

8. Конхоида прямой (конхоида Никомеда)

◆ Плоская кривая (рис. 123), координаты точек которой удовлетворяют уравнению

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = x^2 \rho_0^2,$$

называется *конхоидой прямой* (конхоидой Никомеда).

В естественно связанных декартовой и полярной системах координат уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $M_0(a, 0)$, имеет вид $x = a$ или $\rho = a/\cos \varphi$. Согласно определению (21.2), запишем уравнение конхоиды этой прямой:

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm \rho_0. \tag{21.14}$$

Из уравнения (21.14) вытекает следующее геометрическое свойство этой кривой. Если из точки O провести любой луч, который пересечет прямую $x = a$ в точке O' и конхоиду в точках M и N , то отрезки $O'M$ и $O'N$ будут иметь одинаковую длину, равную ρ_0 , т.е.

$$|O'M| = |O'N| = \rho_0. \tag{21.15}$$

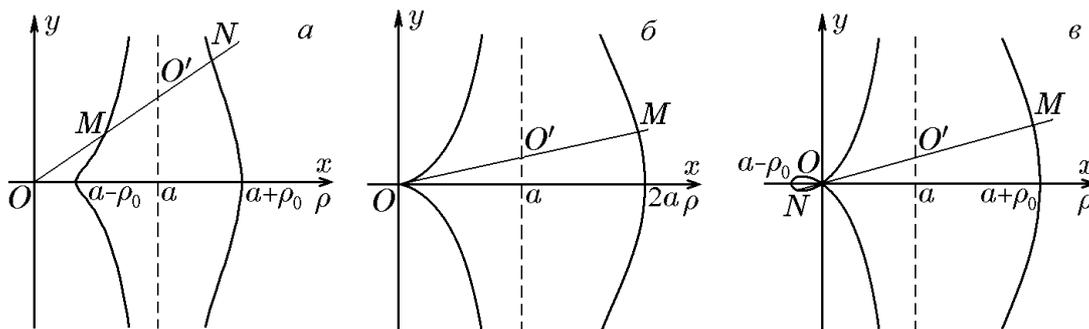


Рис. 123. Конхоида прямой: $\rho < a$ (а); $\rho = a$ (б); $\rho > a$ (в)

Равенство (21.15) можно положить в основу геометрического определения конхойды прямой. Тогда из условия (21.15) мы получим уравнение (21.14).

Следующие преобразования уравнения (21.14):

$$\begin{aligned}(\rho \cos \varphi - a)^2 &= \rho_0^2 \cos^2 \varphi, \\(x - a)^2 \rho^2 &= \rho_0^2 \rho^2 \cos^2 \varphi\end{aligned}$$

приводят его к уравнению в декартовых координатах:

$$(x^2 + y^2)(x - a)^2 = \rho_0^2 x^2. \quad (21.16)$$

Из (21.16) следует, что рассматриваемая кривая является алгебраической кривой 4-го порядка. Ее форма зависит от значения параметра ρ_0 (см. рис. 123).

Конхойду прямой (21.16) называют *конхойдой Никомеда* по имени древнегреческого математика, применявшего её для решения задачи о трисекции угла.

9. Конхойда окружности (улитка Паскаля)

◆ Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x^2 + y^2 - ax) = \rho_0^2(x^2 + y^2)$$

в декартовой системе координат или

$$\rho = a \cos \varphi \pm \rho_0$$

в полярной системе координат, называется *конхойдой окружности* или *улиткой Паскаля* (рис. 124).

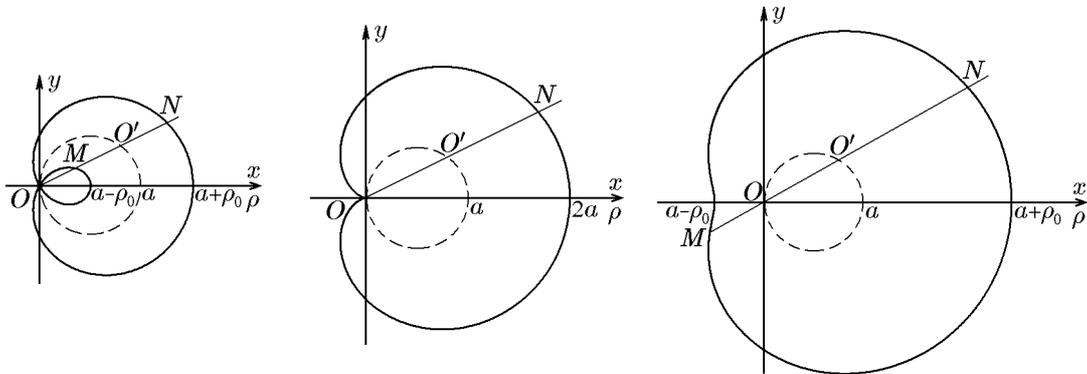


Рис. 124. Конхойда окружности: $\rho < a$ (а); $\rho = a$ — кардиоида (б); $\rho > a$ (в)

В естественно связанных декартовой и полярной системах координат уравнение окружности с центром в точке $M_0(a/2, 0)$, проходящей через начало координат, имеет вид $(x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2$ или $\rho = a \cos \varphi$. Уравнение конхойды этой окружности, согласно определению (21.2), запишется как

$$\rho = a \cos \varphi \pm \rho_0. \quad (21.17)$$

Из уравнения (21.17) вытекает следующее геометрическое свойство этой кривой. Если из точки O провести любой луч, который пересечёт окружность в точке O' и конхойду в точках M и N , то отрезки $O'M$ и $O'N$ будут иметь одинаковую длину, равную ρ_0 , т.е.

$$|O'M| = |O'N| = \rho_0. \quad (21.18)$$

Равенство (21.18) можно положить в основу геометрического определения конхоиды заданной окружности. Исходя из него, мы получим уравнение (21.16).

Следующие преобразования уравнения (21.16):

$$\begin{aligned}\rho^2 - a\rho \cos \varphi &= \pm \rho \rho_0, \\ (\rho^2 - a\rho \cos \varphi)^2 &= \rho_0^2 \rho^2\end{aligned}$$

приводят его к уравнению в декартовых координатах:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = \rho_0^2(x^2 + y^2). \quad (21.19)$$

Из (21.19) следует, что рассматриваемая кривая является алгебраической кривой 4-го порядка. Ее форма зависит от значения параметра ρ_0 (см. рис. 124).

Конхоиду окружности (21.19) еще называют улиткой Паскаля по имени Б. Паскаля, впервые рассмотревшего её. Частный случай этой кривой при $\rho = \rho_0$ был известен и ранее под названием кардиоиды (от греческого «сердцевидная»).

10. Каппа-кривая

◆ Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x^2 + y^2)y^2 = a^2x^2$$

в декартовой системе координат или

$$\rho = a \operatorname{ctg} \varphi$$

в полярной системе координат, называется *каппа-кривой* (рис. 125).

Каппа-кривая представляет собой множество точек касания касательных, проведённых из начала координат к произвольной окружности, центр которой перемещается вдоль оси Ox . Ее уравнение проще всего получить в полярной системе координат. Действительно, из прямоугольных треугольников (рис. 125) следует

$$|OM| = \rho = a \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = a \operatorname{ctg} \varphi. \quad (21.20)$$

Переход в (21.20) к декартовым координатам даёт уравнение 4-го порядка

$$(x^2 + y^2)y^2 = a^2x^2. \quad (21.21)$$

Кривая симметрична относительно обеих координатных осей. Своё название она получила за сходство с греческой буквой κ .

Теперь мы рассмотрим две кривые, обобщающие кривые второго порядка. Пусть F_1 и F_2 — две точки, представляющие собой фокусы, радиус-векторы

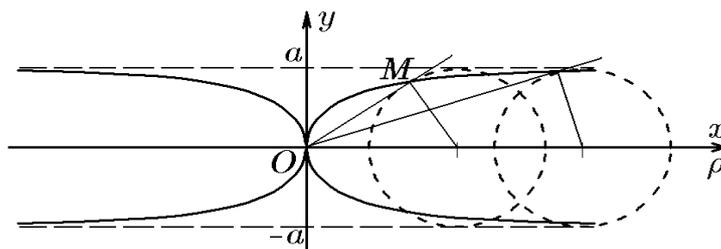


Рис. 125.

которых обозначим \vec{r}_1 и \vec{r}_2 . По аналогии с кривыми второго порядка можно построить множество точек плоскости, для которых вместо суммы (или разности) радиус-векторов сохраняется линейная комбинация их модулей, т.е.

$$|\vec{r}_1| + \alpha|\vec{r}_2| = 2a, \tag{21.22}$$

или постоянным является произведение модулей

$$|\vec{r}_1| |\vec{r}_2| = a^2. \tag{21.23}$$

Кривая, определяемая соотношением (21.22), называется *овалом Декарта*, а соотношением (21.23) — *овалом Кассини*.

11. Овал Декарта

◆ Геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \alpha\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

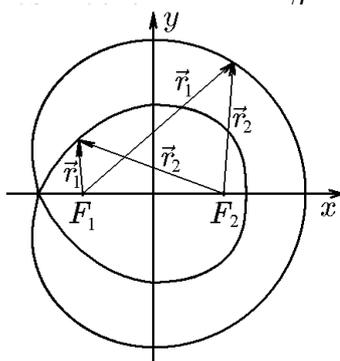


Рис. 126.

Пусть точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ — фокусы кривой.

Тогда их радиус-векторы определяются соотношениями

$$\vec{r}_1 = (x+c)\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{r}_2 = (x-c)\vec{i} + y\vec{j}. \tag{21.24}$$

Согласно определению (21.22), имеем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \alpha\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{21.25}$$

При произвольном соотношении величин α , c и a приведение уравнения к рациональному виду является достаточно громоздкой задачей. Более того, оно может после приведения иметь как 2-й, так и 4-й порядок. Действительно, при $\alpha = 1$ и $a > c$ декартов овал представляет собой эллипс, при $\alpha = -1$ и $a < c$ — гиперболу и при $\alpha = a/c$ — улитку Паскаля. При других соотношениях декартов овал представляет собой сложную кривую, схематически изображенную на рис. 126.

12. Овал Кассини

◆ Геометрическое место точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c(x^2 - y^2) = a^4 - c^4,$$

называется *овалом Кассини* (рис. 127).

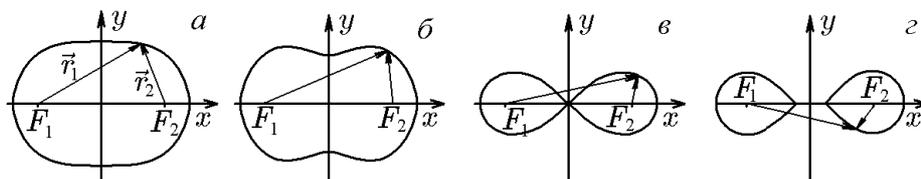


Рис. 127.

Пусть точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ — фокусы кривой. Тогда их радиус-векторы определяются соотношением (21.24). Согласно определению (21.23), имеем

$$\sqrt{[(x^2 + y^2)^2][(x^2 - y^2)]} = a^2. \quad (21.26)$$

Возведя это уравнение в квадрат, получим

$$(x^2 - c^2)^2 + y^4 + 2y^2(x^2 + c^2) = a^4,$$

откуда

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c(x^2 - y^2) = a^4 - c^4. \quad (21.27)$$

Уравнение 4-го порядка (21.27) является уравнением овала Кассини. Вид кривой при различных соотношениях величин a и c приведён на рис. 127. Видно, что с уменьшением величины a кривые с одной ветвью становятся кривыми с двумя ветвями.

Выделим случай, когда $a = c$. Тогда уравнение (21.27) упрощается:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c(x^2 - y^2) = 0, \quad (21.28)$$

а сама кривая ещё называется *лемнискатой Бернулли*. Из (21.28) можно получить уравнение лемнискаты Бернулли в полярной системе координат:

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi. \quad (21.29)$$

Овал Кассини впервые был рассмотрен Дж. Кассини при попытке описать траекторию движения Земли. Он считал, что орбитой Земли является не эллипс (эксцентриситет эллиптической орбиты Земли периодически изменяется), а овал, определяемый уравнением (21.27) и названный впоследствии его именем. Овал Кассини относится к большому классу кривых, называемых лемнискатами.

♦ *Лемнискатой* (от латинского «лентоподобная») называется плоская алгебраическая кривая порядка $2n$, состоящая из множества точек, произведение расстояний которых до n заданных точек (фокусов) постоянно.

Лемниската с одним фокусом — окружность, а лемниската с двумя фокусами — овал Кассини. Этим объясняется происхождение названия ее частного случая — «лемниската Бернулли».

Аналогично кривым второго порядка овалу Кассини можно дать не только геометрическое определение (21.23), его можно определить как сечение тороидальной поверхности.

Действительно, в декартовой системе координат зададим производящую окружность радиуса r , центр которой расположен на оси Ox на расстоянии c от начала координат (рис. 128). При вращении этой окружности относительно оси Oy образуется тор с характеристиками r и c . Можно показать, что сечением поверхности тора плоскостью, параллельной его оси и отстоящей от нее на расстояние a , является алгебраическая кривая четвертого порядка

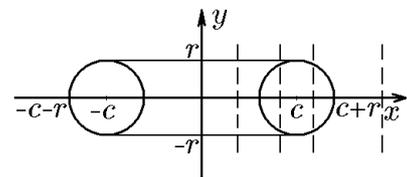


Рис. 128.

$$(x^2 + y^2 + a^2 + c^2 - r^2)^2 - 4c^2(x^2 + a^2) = 0. \quad (21.30)$$

1. Если плоскость сечения удалена на расстояние $a > c + r$, то она с тором не пересекается и уравнение (21.30) не определяет ни одну точку.

2. Если $c \leq a \leq c + r$, то линия пересечения имеет вид рис. 127, а.

3. Если $c - r \leq a \leq c$, то линия пересечения имеет вид рис. 127,б, т.е. овала с «талией», которая вырождается в точку при $a = c$ (рис. 127,в).

4. Если $0 \leq a \leq c - r$, то линия пересечения имеет вид рис. 127,г, т.е. состоит из двух овалов. Эти овалы, когда плоскость сечения проходит через ось тора, превращаются в окружности радиуса r (рис. 128). Действительно, положив в (21.30) $a = 0$, получим

$$(x^2 + y^2 + c^2 - r^2)^2 - 4c^2x^2 = 0,$$

откуда

$$(x^2 + y^2 + c^2 - r^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 - r^2 + 2cx) = 0.$$

С учётом условия

$$[(x - c)^2 + y^2 - r^2][(x + c)^2 + y^2 - r^2] = 0$$

получим уравнения двух окружностей:

$$(x - c)^2 + y^2 = r^2, \quad (x + c)^2 + y^2 = r^2.$$

Если радиус тора r равен $c/2$, то его сечение плоскостью на расстоянии $a = c/2$ даёт лемнискату (21.28). Действительно, положив в (21.30) $a = c/2$, $r = c/2$, найдём

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0,$$

что совпадает с (21.30).

◇ Тороидальные сечения, как и конические, изучались ещё древнегреческими математиками, поэтому кривую, описываемую уравнением (21.30), называют ещё кривой Персея по имени одного из них.

Рассмотренные выше кривые являются кривыми четвёртого порядка. Рассмотрим ещё один класс кривых более высокого порядка, достаточно часто встречающихся в приложениях.

13. Четырехлепестковая роза

◆ Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$(x^2 + y^2)^3 = a^2x^2y^2, \quad (21.31)$$

называется четырехлепестковой розой (рис. 129).

◆ Уравнение (21.31) в полярной системе координат имеет вид

$$\rho = \frac{a}{2} \sin 2\varphi. \quad (21.32)$$

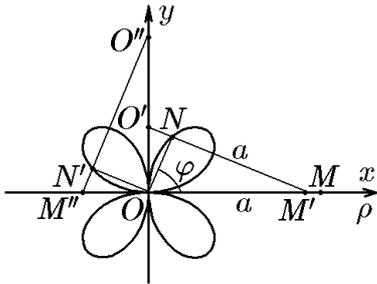


Рис. 129.

Вернёмся к задаче, которую мы уже использовали для построения кривой с заданными геометрическими свойствами. Пусть отрезок OM длиной a , расположенный вдоль оси Ox (рис. 129) перемещается так, что его концы скользят по координатным осям. Найдём геометрическое место точек, являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из начала координат на этот отрезок. Уравнение кривой, которую образуют эти точки, проще получить в полярной системе координат, естественно связанной с декартовой. Действительно, пусть ρ и φ — полярные координаты точки $N(x, y)$ (рис. 129). Из свойств прямоугольных треугольников

имеем

$$\begin{aligned} |OO'| &= |O'M'| \cos \varphi = a \cos \varphi; \\ |ON| &= |OO'| \sin \varphi = a \cos \varphi \sin \varphi = \frac{a}{2} \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (21.33)$$

Аналогичные рассуждения с учётом того, что во II-ой четверти $\cos \varphi < 0$, дают для этой четверти

$$|ON'| = -a \cos \varphi \sin \varphi = -\frac{a}{2} \sin 2\varphi. \quad (21.34)$$

Соотношения (21.33) и (21.34) можно объединить в одно уравнение

$$\rho = \frac{a}{2} |\sin 2\varphi|, \quad (21.35)$$

если $\rho \in [0, \infty[$, или уравнение (21.32), если $\rho \in]-\infty, \infty]$. Оба уравнения после умножения на ρ^2 и возведения в квадрат дают одно уравнение 6-го порядка (21.31), определяющее кривую в декартовых координатах.

Уравнение (21.32) в полярной системе координат можно обобщить следующим образом:

$$\rho = a \sin k\varphi, \quad k - \text{целое число}. \quad (21.36)$$

Уравнение (21.36) описывает плоские кривые, называемые *розами*. Все эти кривые расположены внутри круга радиуса a и состоят из конгруэнтных лепестков. Если k — нечётное, то роза состоит из k лепестков, если же k — чётное, то она содержит $2k$ лепестков.

Перейдём теперь к рассмотрению характерных особенностей некоторых трансцендентных кривых.

21.6. Трансцендентные кривые

14. Астроида

◆ Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}. \quad (21.37)$$

называется *астроидой* (рис. 130).

◆ Уравнение (21.37) можно представить в параметрической форме:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

Вернёмся снова к задаче о движении отрезка. Покажем, что в рамках этой задачи естественным образом точки отрезка описывают трансцендентные кривые.

Итак, пусть отрезок длиной a , расположенный вдоль оси Ox (рис. 130), перемещается так, что его концы скользят по координатным осям. Найдём геометрическое место точек, являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из точки N' — точки пересечения других перпендикуляров, восстановленных из концов отрезка. Проще всего получить параметрические уравнения кривой, состоящей из этих точек $N(x, y)$. Из трех прямоугольных треугольников (рис. 130) найдём уравнения

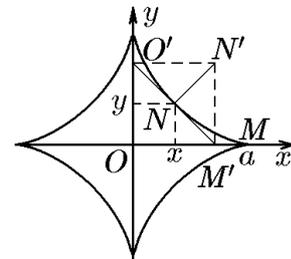


Рис. 130.

$$x = a \cos^3 \psi, \quad y = a \sin^3 \psi,$$

которое совпадает с (21.38) при замене ψ на t . Исключив в этом уравнении параметр ψ , получим уравнение (21.37) в декартовых координатах.

Аналогично тому, как это сделано выше, можно показать, что аналитическое определение астроида эквивалентно следующему геометрическому определению.

◆ Астроиду описывает фиксированная точка окружности, катящейся без скольжения по окружности вчетверо большего радиуса, оставаясь внутри последней.

15. Циклоида (трохоида)

◆ Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию

$$x = a(t - \alpha \sin t), \quad y = a(1 - \alpha \cos t), \quad (21.39)$$

называется *циклоидой* при $\alpha = 1$, *укороченной циклоидой* при $\alpha < 1$ и *удлиненной циклоидой* при $\alpha > 1$ (рис. 131).

Пусть дана производящая окружность радиуса a , касающаяся в точке O оси Ox . Построим кривую, которую вычертит точка M , жестко связанная с производящей окружностью, катящейся без скольжения по оси Ox , если эта точка находится на расстоянии $l = \alpha a$ от центра окружности. Пусть M' — точка кривой, отвечающая повороту производящей окружности на угол t . Это означает, что длина отрезка OM'' равна at (рис. 131). Тогда координата x точки M' определится разностью

$$x = |OM''| - \text{пр}_x \overrightarrow{O''M'} = at - \alpha a \sin t = a(1 - \alpha \sin t),$$

а координата y , соответственно,

$$y = a - \alpha a \cos t = a(1 - \alpha \cos t).$$

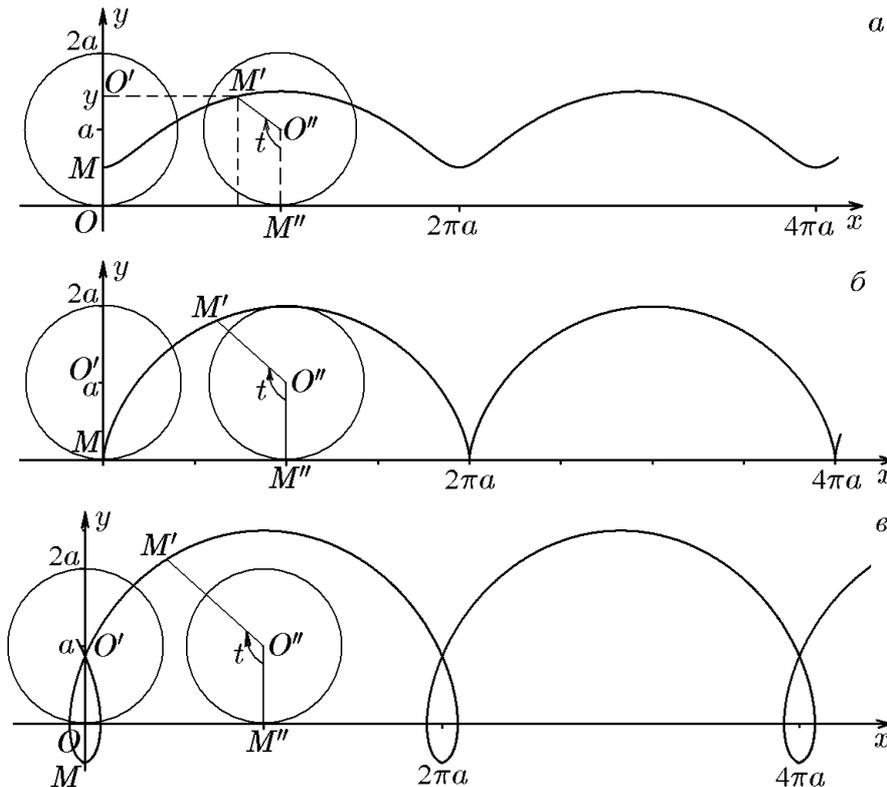


Рис. 131. Циклоиды: $\alpha < 1$ — укороченная (а); $\alpha = 1$ (б); $\alpha > 1$ — удлиненная (в)

Таким образом, мы получили параметрические уравнения (21.39) трансцендентной кривой.

◇ Название «циклоида» происходит от греческого — округлообразная. Укороченную и удлинённую циклоиды называют ещё трохоидами — колесообразными, подчёркивая тем самым, что вычерчивающая точка не лежит непосредственно на окружности (точка лежит как бы на спице колеса).

◇ Циклоида, обращённая выпуклостью вниз, обладает тем свойством, что время, за которое материальная точка скатывается по кривой до определенной высоты, не зависит от ее исходного положения на кривой.

Если прямую, по которой катится производящая окружность, заменить неподвижной окружностью радиуса R , то вычерчивающая точка производящей окружности опишет кривую, называемую циклоидальной. В зависимости от того, по какой стороне неподвижной окружности катится производящая окружность, кривые разделяют на гипоциклоиды и эпициклоиды. В первом случае производящая окружность катится по внутренней стороне, во втором — по внешней (от греческих *гипо* — под и *эпи* — над чем-либо).

16. Гипоциклоида (гипотрохоида)

◆ Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условию

$$\begin{cases} x = R[(1 - \beta) \cos \beta t + \alpha \beta \cos(1 - \beta)t], \\ y = R[(1 - \beta) \sin \beta t - \alpha \beta \sin(1 - \beta)t], \end{cases} \quad (21.40)$$

называется *укороченной гипоциклоидой* при $\alpha < 1$ (рис. 132,а), *гипоциклоидой* при $\alpha = 1$ (рис. 132,б) и *удлинённой гипоциклоидой* при $\alpha > 1$ (рис. 132,в).

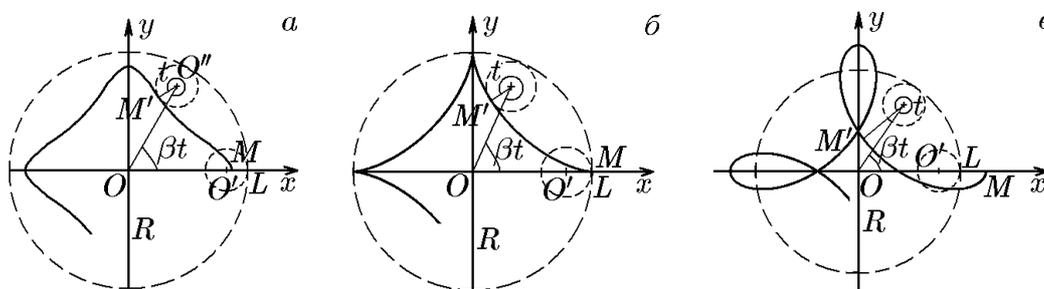


Рис. 132.

Пусть дана неподвижная окружность радиуса R с центром в начале декартовой системы координат. Производящая окружность радиуса $a = \beta R$ касается неподвижной в точке L на оси Ox (рис. 132). Рассмотрим, какую кривую вычертит точка M , жестко связанная с производящей окружностью, катящейся без скольжения по внутренней стороне неподвижной окружности, если эта точка находится на расстоянии $l = \alpha a = \alpha \beta R$ от центра производящей окружности. Пусть M' — точка кривой, отвечающая повороту производящей окружности на угол t , тогда ее центру O' соответствует угол βt . Рассуждая, как и при выводе уравнения циклоиды, имеем

$$\begin{aligned} x &= (R - a) \cos \beta t + l \cos(t - \beta t), \\ y &= (R - a) \sin \beta t - l \sin(t - \beta t). \end{aligned}$$

После простейших преобразований получим параметрические уравнения (21.40) трансцендентной кривой (рис. 132).

◇ Укороченную и удлинённую гипоциклоиды называют ещё *гипотрохоидами*.

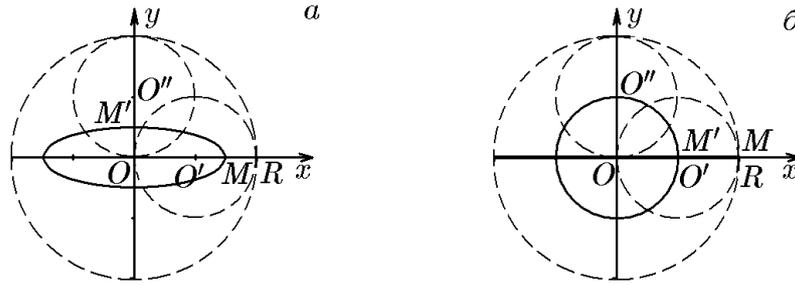


Рис. 133.

При определенных значениях величин α и β гипоциклоиды вырождаются в некоторые из рассмотренных выше кривых. Так, например, гипотрохоиды с $\beta = 1/2$, т.е. $a = R/2$, являются эллипсами (рис. 133); при $\alpha = 1/\beta - 1$ гипотрохоиды являются розами (рис. 129); гипоциклоида с $\alpha = 1$, $\beta = 1/4$ является астроидой (рис. 134,а), а при $\beta = 1/2$, $\alpha = 1$ представляет собой диаметр неподвижной окружности (вырожденный эллипс, рис. 133,б) и т.д.

Если параметр β можно представить в виде дроби $\beta = p/q$, то вычерчивающая точка после q полных оборотов производящей окружности возвращается в исходное положение и кривая является замкнутой. При иррациональном β вычерчивающая точка в исходное положение не возвращается и кривая остается незамкнутой, имея бесконечное число ветвей.

Пример 21.1. Показать, что гипотрохоида (21.40) при $\beta = 1/2$ определяет эллипс с эксцентриситетом $\varepsilon = 2\sqrt{\alpha}/(1 + \alpha)$.

Решение. Условие $\beta = 1/2$ соответствует радиусу производящей окружности $a = R/2$. При $\beta = 1/2$ из (21.40) имеем

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{2} \left[\cos \frac{t}{2} + \alpha \cos \frac{t}{2} \right] = \frac{R(1 + \alpha)}{2} \cos \frac{t}{2}; \\ y &= \frac{R}{2} \left[\sin \frac{t}{2} - \alpha \sin \frac{t}{2} \right] = \frac{R(1 - \alpha)}{2} \sin \frac{t}{2} \end{aligned} \quad (21.41)$$

— параметрические уравнения эллипса с большой полуосью $R(1 + \alpha)/2$ и малой $R(1 - \alpha)/2$ (рис. 133,а), что соответствует эксцентриситету

$$\varepsilon = \frac{R}{2} \sqrt{(1 + \alpha)^2 - (1 - \alpha)^2} / \frac{R}{2}(1 + \alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1 + \alpha} \quad (21.42)$$

и каноническому уравнению

$$\frac{x^2}{[R(1 + \alpha)/2]^2} + \frac{y^2}{[R(1 - \alpha)/2]^2} = 1. \quad (21.43)$$

Таким образом, к многочисленным определениям эллипса можно добавить еще одно.

◆ *Эллипсом* называется плоская кривая, которую описывает вычерчивающая точка производящей окружности, катящаяся без скольжения по внутренней стороне неподвижной окружности вдвое большего радиуса.

Из (21.41), (21.42) следует, что если вычерчивающая точка приближается к центру производящей окружности, то эксцентриситет эллипса стремится к нулю, и когда эти точки совпадают, т.е. при $\alpha = 0$, эксцентриситет обратится в нуль. Это означает, что вычерчивающая точка описывает окружность (рис. 133,б)

$$x = \frac{R}{2} \cos \frac{t}{2}, \quad y = \frac{R}{2} \sin \frac{t}{2}. \quad (21.44)$$

Напротив, при $\alpha \rightarrow 1$ вычерчивающая точка удаляется от центра производящей окружности и стремится занять положение на конце ее радиуса. Тогда эксцентриситет эллипса растет, и при $\alpha = 1$ эллипс вырождается в отрезок $x \in [-R, R]$ (рис. 133,б):

$$x = R \cos \frac{t}{2}, \quad y = 0.$$

Другими словами, если гипотрохоида вырождается в гипоциклоиду, то эллипс вырождается в отрезок.

Пример 21.2. Показать, что гипоциклоида ($\alpha = 1$, т.е. $l = a$) является астроидой, а удлиненная гипоциклоида с $\alpha = 3$, т.е. $l = 3a$, — четырехлепестковой розой, если радиус их производящей окружности в четыре раза меньше радиуса неподвижной окружности, т.е. $\beta = 1/4$ или $a = \beta R = R/4$.

Решение. Положив в (21.40) $\beta = 1/4$, имеем

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{4} \left[3 \cos \frac{t}{4} + \alpha \cos \frac{3t}{4} \right], \\ y &= \frac{R}{4} \left[3 \sin \frac{t}{4} - \sin \frac{3t}{4} \right]. \end{aligned} \tag{21.45}$$

Если теперь положить $\alpha = 1$, то из (21.45), обозначив $t/4 = \tau$, получим

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{4} (3 \cos \tau + \cos 3\tau) = R \cos^3 \tau, \\ y &= \frac{R}{4} (3 \sin \tau - \sin 3\tau) = R \sin^3 \tau \end{aligned}$$

— параметрические уравнения астроиды, совпадающие с уже полученными ранее (21.38) (рис. 134,а).

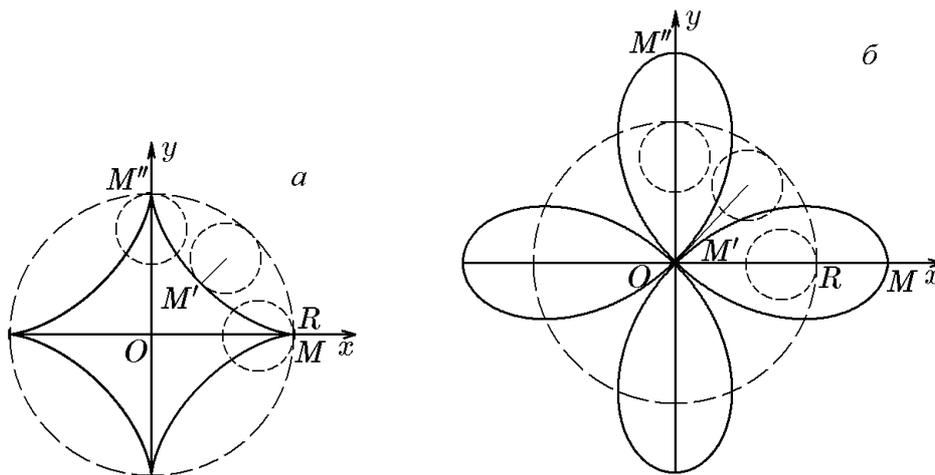


Рис. 134.

Положив теперь в (21.45) $\alpha = 3$ и обозначив $t/2 = \varphi$, найдём

$$\begin{aligned} x &= \frac{3R}{4} \left[\cos \frac{t}{4} + \cos \frac{3t}{4} \right] = \frac{3R}{2} \cos t \cos \frac{t}{2} = \frac{3R}{2} \cos 2\varphi \cos \varphi, \\ y &= \frac{3R}{4} \left[\sin \frac{t}{4} - \sin \frac{3t}{4} \right] = \frac{3R}{2} \sin \left(-\frac{t}{2} \right) \cos t = -\frac{3R}{2} \cos 2\varphi \sin \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho = \frac{3R}{2} \cos 2\varphi = \frac{3R}{2} \sin 2\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad (21.46)$$

что соответствует четырехлепестковой розе (21.32), повернутой на угол $\pi/4$ (сравнить рис. 134,б и 129).

17. Эпициклоида (эпитрохоида)

◆ Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} x &= R[(1 + \beta) \cos \beta t - \alpha \beta \cos(1 + \beta)t], \\ y &= R[(1 + \beta) \sin \beta t - \alpha \beta \sin(1 + \beta)t], \end{aligned} \quad (21.47)$$

называется *укороченной эпициклоидой* при $\alpha < 1$ (рис. 135,а), *эпициклоидой* при $\alpha = 1$ (рис. 135,б) и *удлиненной эпициклоидой* при $\alpha > 1$ (рис. 135,в).

Пусть дана неподвижная окружность радиуса R с центром в начале декартовой системы координат. Производящая окружность радиуса $a = \beta R$ касается неподвижной в точке L на оси Ox (рис. 135). Рассмотрим, какую кривую вычертит точка M , жестко связанная с производящей окружностью, катящейся без скольжения по внешней стороне неподвижной окружности, если вычерчивающая точка находится на расстоянии $l = \alpha a = \alpha \beta R$ от центра производящей окружности. Пусть $M'(x, y)$ — точка кривой, отвечающая повороту производящей окружности на угол t , тогда радиус-вектор ее центра O' повернется на угол βt . Рассуждая, как и выше, имеем

$$\begin{aligned} x &= (R + a) \cos \beta t - l \cos(t + \beta t), \\ y &= (R + a) \sin \beta t - l \sin(t + \beta t). \end{aligned}$$

После простейших преобразований придём к параметрическим уравнениям (21.47) трансцендентной кривой (рис. 135).

◇ Укороченную и удлиненную эпициклоиды называют еще эпитрохоидами.

При определенных значениях величин α и β эпициклоиды вырождаются в некоторые из рассмотренных выше кривых. Так, например, удлиненная эпициклоида при $\beta = 1$ ($a = R$) является улиткой Паскаля, а при $\alpha\beta = 1 + \beta$ ($l = R + a$) представляет собой розу. В свою очередь, эпициклоида с ($\alpha = 1$, $l = a$) с $\beta = 1$ является кардиоидой. Если параметр β можно представить в виде дроби $\beta = p/q$, где p и q — простые числа, то вычерчивающая точка после q полных оборотов производящей окружности возвращается в исходное положение, делая эпициклоиду замкнутой кривой. При иррациональном β вычерчивающая точка в исходное положение не возвращается и кривая остается незамкнутой, имея бесконечное число ветвей.

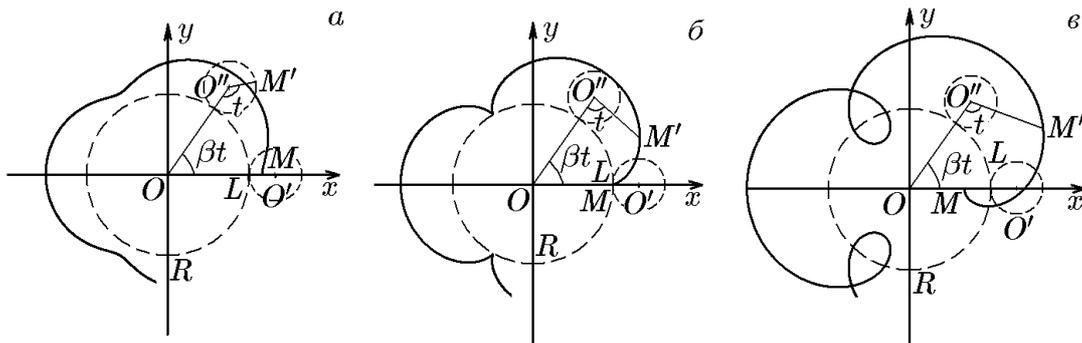


Рис. 135.

В заключение рассмотрим еще один класс кривых, называемых *спиралями* (от греческого — виток). Такие кривые обходят одну или несколько точек, приближаясь к ним или удаляясь от них.

18. Спираль Архимеда

◆ Кривая, описываемая точкой, движущейся с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся вокруг полюса O с постоянной угловой скоростью ω , называется спиралью Архимеда.

Уравнение этой кривой в полярной системе координат имеет вид

$$\rho = a\varphi,$$

где $a = v/\omega$.

Кривая состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси Oy . Построим одну ветвь, соответствующую положительным значениям полярного угла φ :

| | | | | | | | | | |
|-----------|---|------------|------------|------------|------------|-------------|------------|-------------|------------|
| φ | 0 | $\pm\pi/6$ | $\pm\pi/4$ | $\pm\pi/3$ | $\pm\pi/2$ | $\pm3\pi/4$ | $\pm\pi$ | $\pm3\pi/2$ | $\pm2\pi$ |
| ρ | 0 | $\pm0,52a$ | $\pm0,78a$ | $\pm1,04a$ | $\pm1,57a$ | $\pm2,35a$ | $\pm3,14a$ | $\pm4,71a$ | $\pm6,28a$ |

При отрицательных значениях φ получим вторую ветвь, обозначенную штрихами (рис. 136).

Расстояние между двумя соседними точками кривой, лежащими на одном и том же полярном луче, постоянно и равно $2\pi a$.

Спираль Архимеда используется в технике для создания механизмов, преобразующих равномерное вращательное движение в равномерное возвратно-поступательное.

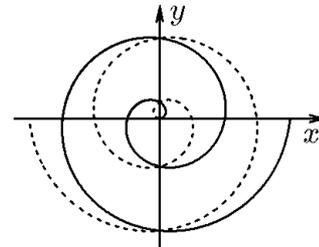


Рис. 136.

19. Гиперболическая спираль

◆ Кривая, которую описывает точка, движущаяся к полюсу с постоянной скоростью v по лучу, вращающемуся вокруг полюса с постоянной угловой скоростью ω (рис. 137), называется гиперболической спиралью.

Уравнение гиперболической спирали в полярных координатах имеет вид

$$\rho = \frac{v}{\omega\varphi} = \frac{a}{\varphi}. \tag{21.48}$$

Кривая получила свое название по аналогии: ее уравнение $\rho = a/\varphi$ или $\rho\varphi = a$ аналогично формуле гиперболы $xy = a$ в декартовой системе координат. Она состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси Oy . На рис. 137 непрерывная линия соответствует положительным значениям φ , а штриховая линия — отрицательным значениям φ .

Поскольку

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{a}{\varphi} \sin \varphi = a, \quad \lim_{\varphi \rightarrow \pm\infty} \rho = \lim_{\varphi \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{\varphi} = 0,$$

то кривая имеет асимптоту $y = a$ и асимптотическую точку O — полюс.

◆ Иногда, составив таблицу

| | | | | | |
|--------------------|----------|----------|----------|---------|--------|
| φ | 0 | $\pi/4$ | $\pi/2$ | π | и т.д. |
| $\rho = a/\varphi$ | ∞ | $4a/\pi$ | $2a/\pi$ | a/π | |

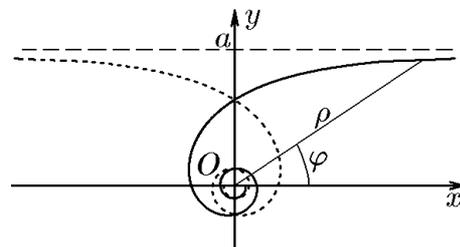


Рис. 137.

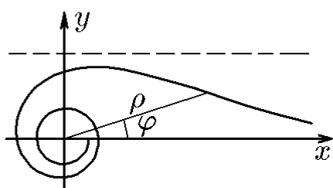


Рис. 138.

и поняв аналогию с гиперболой $xy = a$ буквально, вместо правильной кривой (рис. 137) рисуют кривую в виде рис. 138, отложив, согласно таблице, по лучу $\varphi = 0$ бесконечно большой отрезок. Такое построение бесконечно удаленной точки в полярной системе координат не корректно. Чтобы построить эту точку правильно, найдём ее декартовы координаты:

$$x = \rho \cos \varphi \Big|_{\varphi \rightarrow 0} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \cos \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{a}{\varphi} \cos \varphi = \infty;$$

$$y = \rho \sin \varphi \Big|_{\varphi \rightarrow 0} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} a \frac{\sin \varphi}{\varphi} = a.$$

Таким образом, бесконечно удаленная точка гиперболической спирали $\rho = a/\varphi$ имеет декартовы координаты $x = \infty$, $y = a$ (см. рис. 137).

◇ Можно проверить, что рис. 138 соответствует кривой $\rho = a/\sqrt{\varphi}$, называемой жезлом. В этом случае

$$x = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \cos \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{\varphi}} = \infty; \quad y = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \rho \sin \varphi = \lim_{\varphi \rightarrow 0} a \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\varphi}} = 0,$$

т.е. бесконечно удаленная точка этой кривой имеет декартовы координаты $x = \infty$, $y = 0$. Соответственно, координаты точки перегиба $x = 1/2$, $y = a\sqrt{2}$ ($y/x = \operatorname{tg} \varphi = a2\sqrt{2}$, $\varphi = \arctg(a2\sqrt{2})$).

20. Логарифмическая спираль

◆ Кривая, пересекающая все лучи, выходящие из одной точки O , под одним и тем же углом α , называется логарифмической спиралью (рис. 139).

Уравнение логарифмической спирали в полярных координатах имеет вид

$$\rho = a^\varphi.$$

Спираль образует бесчисленное множество витков, которые при возрастании φ от 0 до $+\infty$ раскручиваются, а при убывании от 0 до $-\infty$ закручиваются вокруг полюса. В этом случае ρ стремится к нулю, но никогда в нуль не обращается.

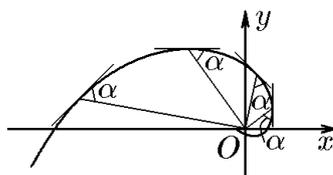


Рис. 139.

Одним из свойств логарифмической спирали является то, что радиус-векторы последовательных точек спирали, находящихся на одном и том же полярном луче $\varphi = \varphi_0$, образуют геометрическую прогрессию.

Действительно, для последовательности таких точек имеем

$$\rho_1 = a^{\varphi_1}, \quad \rho_2 = a^{\varphi_1+2\pi}, \quad \rho_3 = a^{\varphi_1+4\pi}, \quad \dots,$$

откуда знаменатель геометрической прогрессии есть

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{\rho_4}{\rho_3} = \dots = a^{2\pi}.$$

◇ Логарифмическую спираль ($\log_a \rho = \varphi$) иногда называют равноугольной. Равенство углов касательных широко используется в технике при разработке форм ножей, фрез и зубчатых передач.

Обобщением большого числа рассмотренных выше кривых является так называемая синусоидальная спираль.

21. Синусоидальная спираль

◆ Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\rho^n = a^n \sin n\varphi$, называется синусоидальной спиралью.

Если n — положительное целое число, то синусоидальная спираль состоит из n непересекающихся лепестков, проходящих через начало координат. Если $n = p/q$ — положительное дробное число, то синусоидальная спираль состоит из p лепестков, которые могут перекрывать друг друга. Синусоидальная спираль, например, при $n = 1$ является окружностью, при $n = 2$ — лемнискатой, при $n = 1/2$ — кардиоидой, ее вид при $n = 4$ показан на рис. 140 сплошной линией.

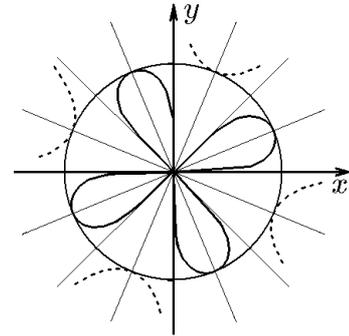


Рис. 140.

При отрицательных целых n кривая имеет $|n|$ осей симметрии, соответствующих $|n|$ бесконечным ветвям, не проходящим через полюс. Если $n = p/q$ — отрицательное дробное число, то $|p|$ бесконечных симметричных ветвей могут пересекаться друг с другом. Синусоидальная спираль, например, при $n = -1$ является прямой, при $n = -2$ — равнобочной гиперболой, при $n = -1/2$ — параболой, ее вид при $n = -4$ показан на рис. 140 штриховой линией.

22. Уравнения кривых второго порядка в матричной форме

Согласно определению (13.1), алгебраическая кривая второго порядка задается уравнением

$$F_2(x, y) = 0, \quad (22.1)$$

где

$$F_2(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0. \quad (22.2)$$

◇ В формуле (22.2) мы для удобства обозначили вещественные коэффициенты A, B, C, \dots через a_{ij} и a_i , что позволяет сравнительно просто записать уравнения (22.2) в матричной форме.

В зависимости от задач, в которых используется кривая (22.1), её левую часть можно записать в следующих матричных формах:

I)

$$F_2(x, y) = (x \ y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_1 \ a_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_0$$

или

$$F_2(x, y) = X^T G X + 2LX + a_0, \quad (22.3)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad L = (a_1 \ a_2); \quad (22.4)$$

II)

$$F_2(x, y) = (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = Y^T Q Y, \quad (22.5)$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}. \quad (22.6)$$

◆ Симметричная матрица Q называется *матрицей алгебраической кривой второго порядка*, симметричная матрица G — *матрицей ее квадратичной части* (формы), а матрица-строка $(a_1 \ a_2 \ a_0)$ — *матрицей ее линейной части* (формы).

Пример 22.1. Записать канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы в матричной форме.

Решение.

1. Каноническое уравнение эллипса имеет вид (14.3):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Записав (14.3) в форме (22.3), получим

$$X^T G X - 1 = 0, \quad (22.7)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix}, \quad \det G = \frac{1}{a^2 b^2} > 0, \quad L = (0 \ 0), \quad a_0 = -1.$$

Аналогично, записав (14.3) в форме (22.5), получим

$$Y^T Q Y = 0, \quad (22.8)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det Q = -\det G = -\frac{1}{a^2 b^2} < 0.$$

2. Каноническое уравнение гиперболы (15.2):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

запишем в форме (22.3). Тогда

$$X^T G X - 1 = 0, \quad (22.9)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & -1/b^2 \end{pmatrix}, \quad \det G = -\frac{1}{a^2 b^2} < 0, \quad L = (0 \ 0), \quad a_0 = -1.$$

Представив уравнение (15.2) в форме (22.5), найдём

$$Y^T Q Y = 0, \quad (22.10)$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \det Q = -\det G = \frac{1}{a^2 b^2} > 0.$$

3. Каноническое уравнение параболы (16.1):

$$y^2 - 2px = 0, \quad p \neq 0$$

запишем в форме (22.3). Тогда

$$X^T G X + 2LX = 0, \quad (22.11)$$

где

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det G = 0, \quad L = (-p \ 0), \quad a_0 = 0.$$

Представив уравнение (16.1) в форме (22.5), найдём

$$Y^T Q Y = 0, \quad (22.12)$$

если

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det Q = -p \neq 0.$$

◇ Матричная запись канонических уравнений позволяет выявить следующую закономерность: все кривые описываются невырожденной матрицей Q , $\det Q \neq 0$. При этом матрица квадратичной формы Q обладает следующей особенностью: для эллипса $\det G > 0$, для гиперболы $\det G < 0$, для параболы $\det G = 0$. Этими выводами мы воспользуемся при исследовании уравнения (22.1).

Пример 22.2. Построить кривые, описываемые уравнением 2-го порядка с матрицами

$$\begin{aligned} \text{а) } Q &= \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{б) } Q &= \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{в) } Q &= \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -2 & -1 \\ -5/2 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решение. В случае а) имеем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad (22.13)$$

множеством решений которого является пустое множество, поскольку сумма квадратов действительных величин не может быть отрицательной. С геометрической точки зрения, уравнение (22.13) не определяет ни одну точку на плоскости xOy .

Заметим, что уравнение (22.13) иногда называют уравнением мнимого эллипса. Такое название оправдывается, если переменные (x, y) считать комплексными. Если же переменные (x, y) вещественны, этот термин следует рассматривать как синоним пустого множества, не определяющего ни одну точку, тем более какую-либо линию.

В случае б) имеем уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad (22.14)$$

множество решений которого содержит единственную точку $x = y = 0$, т.е. начало координат декартовой системы xOy .

Заметим, что уравнение (22.14) иногда называют уравнением пары пересекающихся в точке $x = y = 0$ мнимых прямых:

$$\left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0, \quad x = \pm i\frac{a}{b}y.$$

Такое название оправдывается, если переменные (x, y) принадлежат комплексной плоскости, а если они принадлежат вещественной плоскости xOy , этот термин следует рассматривать как синоним единственной точки $x = y = 0$, совпадающей с началом координат xOy .

В случае в) уравнение (22.5) примет вид

$$\begin{aligned} (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -2 & -1 \\ -5/2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} x & -y/2 & -5/2 \\ -x/2 & -2y & -1 \\ -5x/2 & -y & 4 \end{pmatrix} = \\ &= x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}xy - 2y^2 - y - \frac{5}{2} - y + 4 = x^2 - xy - 2y^2 + 5x - 2y + 4, \end{aligned}$$

что соответствует уравнению

$$x^2 - xy - 2y^2 + 5x - 2y + 4 = 0. \quad (22.15)$$

Это уравнение является квадратным уравнением относительно переменной x , т.е.

$$x^2 - x(5 + y) - 2y^2 - 2y + 4 = 0,$$

найдем его корни:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{5 + y \pm \sqrt{(5 + y)^2 - 4(-2y^2 - 2y + 4)}}{2} = \\ &= \frac{5 + y \pm \sqrt{9y^2 + 18y + 9}}{2} = \frac{5 + y \pm 3(y + 1)}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x_1 = 4 + 2y, \quad x_2 = 1 - y,$$

и, следовательно, левую часть уравнения (22.15) можно представить как произведение двух множителей:

$$x^2 - xy - 2y^2 + 5x - 2y + 4 = (x - 2y - 4)(x + y - 1) = 0. \quad (22.16)$$

Геометрически это означает, что уравнение 2-го порядка определяет две прямые:

$$x - 2y - 4 = 0 \quad x + y - 1 = 0. \quad (22.17)$$

Приведённые примеры иллюстрируют тот факт, что общее уравнение 2-го порядка (22.1) может определять не только канонические кривые второго порядка, но и, наряду с этим, единственную точку или пару прямых, а может вообще не соответствовать никакой кривой.

◆ Кривая второго порядка (22.1) называется *содержательной*, если она состоит более чем из одной точки. Содержательные кривые — это эллипсы, гиперболы, параболы и пары прямых (пересекающихся, параллельных, а возможно, и совпадающих).

◆ Кривая второго порядка (22.1) называется *распадающейся*, если ее уравнение можно записать в виде

$$F_2(x, y) = \Phi_1(x, y)\tilde{\Phi}_1(x, y) = 0, \quad (22.18)$$

где $\Phi_1(x, y)$ и $\tilde{\Phi}_1(x, y)$ — полиномы первого порядка, определяющие пару прямых:

$$\Phi_1(x, y) = A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \tilde{\Phi}_1(x, y) = A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Лемма 22.1. *Содержательная кривая второго порядка является распадающейся только тогда, когда она описывается вырожденной матрицей Q , т.е. $\det Q = 0$.*

Доказательство. Пусть в уравнении (22.1) $a_{11} \neq 0$ (в противном случае выберем a_{22}). Тогда его можно записать в виде квадратного уравнения по переменной x :

$$a_{11}x^2 + 2x(a_{12} + a_1) + a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0 = 0, \quad (22.19)$$

корни которого находятся стандартным способом:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2(a_{12}y + a_1) \pm \sqrt{4(a_{12}y + a_1)^2 - 4(a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0)}}{2a_{11}} = \\ &= \frac{-(a_{12}y + a_1) \pm \sqrt{(a_{12}y + a_1)^2 - a_{22}y^2 - 2a_2y - a_0}}{a_{11}}. \end{aligned} \quad (22.20)$$

Подкоренное выражение представляет собой дискриминант уравнения (22.19):

$$(a_{12}y + a_1)^2 - a_{22}y^2 + 2a_2y + a_0 = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})y^2 + 2y(a_{12}a_1 + a_{11}a_2) + a_1^2 - a_{11}a_0. \quad (22.21)$$

Этот полином второго порядка по y является полным квадратом только в том случае, если уже его дискриминант обращается в нуль. Вычисление дискриминанта полинома (22.21) даёт

$$\begin{aligned} &4(a_{12}a_1 - a_{11}a_{12})^2 - 4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(a_1^2 - a_{11}a_0) = \\ &= -4a_{11}[a_1(a_2a_{12} - a_1a_{22}) - a_2(a_2a_{11} - a_1a_{12}) + a_0(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)] = -4a_{11} \det G. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\det Q = 0$, то подкоренное выражение в (22.20) является полным квадратом, что позволяет получить два вещественных корня $x_{1,2}$, выражающихся линейно через переменную y . Это и означает, что уравнение (22.19) можно представить в виде (22.18), т.е. содержательная кривая (22.19) является распадающейся, что и требовалось доказать.

Пример 22.3. Показать, что кривая б) из примера 22.2 является распадающейся кривой второго порядка.

Решение. Эта задача в примере 22.2 уже решена методом непосредственного разложения исходного уравнения на множители. В возможности такого разложения, не прибегая к нему, можно убедиться, воспользовавшись леммой 22.1. Итак, имеем уравнение

$$(x \ y \ 1) \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -2 & -1 \\ -5/2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$x^2 - xy - 2y^2 - 5x - 2y + 4 = 0.$$

Положив в этом уравнении $y = 0$, имеем

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Отсюда

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 4.$$

Это означает, что решение уравнения определяет, по меньшей мере, две точки: $M_1(1, 0)$ и $M_2(4, 0)$, и, следовательно, является содержательным, а поскольку

$$\det Q = \begin{vmatrix} 1 & -1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -2 & -1 \\ -5/2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ -9/2 & -2 & 9 \\ -9/2 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 0,$$

то, согласно лемме 22.1, кривая является распадающейся, т.е. представляет собой две прямые, полученные в примере 22.2.

23. Инварианты кривой второго порядка

Рассмотрим переход от прямоугольной системы координат (x, y) к другой прямоугольной системе координат (x', y') с помощью некоторого ортогонального преобразования, состоящего из поворота и параллельного переноса:

$$X = CX' + X_0, \quad (23.1)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix};$$

матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad (23.2)$$

— произвольная ортогональная матрица, характеризующая поворот системы координат, а вектор

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (23.3)$$

определяет параллельный перенос системы координат.

Если ввести матрицу

$$R = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det R = \det C, \quad (23.4)$$

то ортогональное преобразование (23.1) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & x_0 \\ c_{21} & c_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (23.5)$$

Если (23.5) записать как

$$Y = RY', \quad (23.6)$$

то его можно рассматривать как преобразование вектора Y .

◆ *Инвариантами общей кривой второго порядка (22.1) называются такие выражения, составленные из коэффициентов ее уравнения, которые не меняются при ортогональных преобразованиях, т.е. при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой.*

Теорема 23.1. Следующие три величины:

$$\begin{aligned} S = \operatorname{Sp} G &= a_{11} + a_{22}; & \delta = \det G &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}; \\ \Delta = \det Q &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (23.7)$$

являются ортогональными инвариантами кривой второго порядка (22.1).

Доказательство. Запишем уравнение кривой в матричной форме:

$$Y^\top Q Y = 0. \quad (23.8)$$

Если матрицы Y и Y' связаны соотношением (23.6), то

$$(RY')^\top Q (RY') = (Y')^\top R^\top Q R Y' = Y' Q' Y = 0.$$

Это означает, что матрицы, определяющие кривую второго порядка в координатах (x', y') и (x, y) , связаны соотношением

$$Q' = R^\top Q R. \quad (23.9)$$

Аналогично можно легко убедиться, что матрицы их квадратичной формы связаны соотношением

$$G' = C^\top G P. \quad (23.10)$$

Вычислим теперь определители матриц G' и Q' . Согласно (23.10), имеем

$$\det G' = \det(C^\top G C) = \det C^\top \det G \det C = (\det C)^2 \det G = \det G, \quad (23.11)$$

поскольку $\det C = 1$ в силу ортогональности матрицы C . Согласно (23.9), найдём

$$\det Q' = \det(R^\top Q R) = \det R^\top \det Q \det R = (\det R)^2 \det Q = \det Q. \quad (23.12)$$

Здесь мы воспользовались тем, что в силу (23.4) $\det R = \det P = 1$.

Равенства (23.11) и (23.12) доказывают инвариантность δ и Δ .

Перейдём теперь к доказательству инвариантности величины $S = \operatorname{Sp} G = a_{11} + a_{22}$. Для этого воспользуемся соотношением (23.10) и явным видом двумерных ортогональных матриц (3.31):

$$C_+(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (23.13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} G' &= \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = C^\top \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} P = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a_{11} \cos \varphi + a_{12} \sin \varphi) & (-a_{11} \sin \varphi + a_{12} \cos \varphi) \\ (a_{12} \cos \varphi + a_{22} \sin \varphi) & (-a_{12} \sin \varphi + a_{22} \cos \varphi) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \cos^2 \varphi + a_{12} \sin 2\varphi + a_{22} \sin^2 \varphi & \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11}) \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi \\ \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11}) \sin 2\varphi + a_{12} \cos 2\varphi & a_{11} \cos^2 \varphi + a_{12} \sin 2\varphi + a_{22} \sin^2 \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23.14)$$

Из явного вида матрицы G' (23.13) найдём

$$\begin{aligned} \operatorname{Sp} G' &= a'_{11} + a'_{22} = \\ &= a_{11} \cos^2 \varphi + a_{12} \sin 2\varphi + a_{22} \sin^2 \varphi + a_{11} \sin^2 \varphi - a_{12} \sin 2\varphi + a_{22} \cos^2 \varphi = \\ &= (a_{11} + a_{22})(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a_{11} + a_{22} = \operatorname{Sp} G, \end{aligned}$$

что и доказывает инвариантность величины $\operatorname{Sp} G$.

Следствие 23.1.1. Существует ортогональное преобразование $X = C_+(\varphi)X'$ или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (23.15)$$

соответствующее повороту на угол φ , определяемый равенством

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad \left(\varphi = \frac{\pi}{4} \text{ (при } a_{11} = a_{22}) \right), \quad (23.16)$$

при котором в системе координат (x', y') матрица квадратичной формы G' становится диагональной:

$$G' = \begin{pmatrix} a'_{11} & 0 \\ 0 & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (23.17)$$

где вещественные числа λ_1 и λ_2 являются решениями уравнения

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp} G + \det G = \lambda^2 - \lambda S + \delta = \det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (23.18)$$

а само уравнение (22.1) в координатах (x', y') принимает вид

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2(a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi)x' + 2(-a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi)y' + a_0 = 0 \quad (23.19)$$

или в векторной форме

$$\begin{aligned} (X')^T G' X' + aL'X' + a_0 &= (x' \ y') \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \\ &+ 2([a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi] \ [-a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi]) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_0 = 0, \end{aligned} \quad (23.20)$$

а также

$$\begin{aligned} Y'Q'Y' &= (x' \ y' \ 1) \times \\ &\times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi \\ 0 & \lambda_2 & -a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi \\ a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi & -a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (23.21)$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 23.1 была получена формула (23.14), задающая явный вид матрицы G' :

$$a'_{12} = a_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11}) \sin 2\varphi, \quad (23.22)$$

$$a'_{11} = \lambda_1 = a_{11} \cos^2 \varphi + a_{12} \sin 2\varphi + a_{22} \sin^2 \varphi, \quad (23.23)$$

$$a'_{22} = \lambda_2 = a_{11} \sin^2 \varphi - a_{12} \sin 2\varphi + a_{22} \cos^2 \varphi. \quad (23.24)$$

Потребовав выполнения условия $a'_{12} = 0$, найдём угол, при котором осуществляется это равенство:

$$a_{12} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11}) \sin 2\varphi = 0.$$

Если $a_{11} = a_{22}$, то $\cos 2\varphi = 0$ и, следовательно, $\varphi = \pi/4$. Если же $a_{11} \neq a_{22}$, то

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

(при $a_{12} = 0$ матрица G уже диагональна).

Чтобы получить уравнение (23.18), заметим, что из (23.23) и (23.24) следуют два соотношения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= a_{11} + a_{22} = \operatorname{Sp} G, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= \det G = \delta, \end{aligned}$$

но тогда, согласно теореме Виета, λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp} G + \det G = \lambda^2 - \lambda S + \delta = 0,$$

которое еще можно записать в виде

$$\det(G - \lambda \mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

совпадающем с (23.18).

Покажем, что решения этого квадратного уравнения могут быть только вещественными.

Действительно, корни уравнения (23.18) имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4\delta}}{2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}}{2}. \quad (23.25)$$

Нетрудно заметить, что, раскрыв скобки в подкоренном выражении, его можно записать в виде суммы квадратов:

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{12} + 4a_{12}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2,$$

т.е.

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}. \quad (23.26)$$

С учётом вышесказанного подстановка (23.15) в (22.1) дает (23.20) и, соответственно, (23.21).

Следствие 23.1.2. Корни λ_1 и λ_2 уравнения (23.18) позволяют вместо уравнения (23.16) использовать для определения угла φ следующие соотношения: для новой оси x'

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} \quad (23.27)$$

и для новой оси y'

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}. \quad (23.28)$$

Действительно, расписав в (23.16) тангенс двойного угла, придём к квадратному уравнению

$$\operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} \operatorname{tg} \varphi - 1 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{1,2} &= \frac{-(a_{11} - a_{22})/a_{12} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2/a_{12}^2 + 4}}{2} = \\ &= \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}. \end{aligned}$$

Отсюда с учётом (23.26) имеем выражение

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{\lambda_{1,2} - a_{11}}{a_{12}},$$

совпадающее с (23.27) и (23.28).

Заметим, что из двух уравнений (23.27) и (23.28) достаточно воспользоваться только одним, например (23.27) для φ_1 , тогда второе уравнение даст $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi/2$. Это следует, во-первых, из ортогональности преобразования системы координат, а во-вторых, в этом можно убедиться непосредственно, вычислив

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{(\lambda_1 - a_{11})(\lambda_2 - a_{11})}{a_{12}^2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 - a_{11}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{11}^2}{a_{12}^2} = \\ &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - a_{11}(a_{11} + a_{22}) + a_{11}^2}{a_{12}^2} = -1. \end{aligned} \quad (23.29)$$

Равенство $\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 = -1$ является условием ортогональности двух прямых $y = k_1x$ и $y = k_2x$ с угловыми коэффициентами $k_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$ и $k_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$.

Обратимся теперь к преобразованиям, соответствующим параллельному переносу системы координат.

Лемма 23.1. *Кривая второго порядка*

$$F(x, y) = X^T G X + 2LX + a_0 = Y^T Q Y \quad (23.30)$$

в системе координат (x', y') , полученной параллельным переносом начала координат в точку (x_0, y_0) , описывается матрицей

$$Q' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_1 \\ a_{12} & a_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & F(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (23.31)$$

где

$$a'_1 = a_1 + a_{11}x_0 + a_{12}y_0, \quad (23.32)$$

$$a'_2 = a_2 + a_{12}x_0 + a_{22}y_0, \quad (23.33)$$

а $F(x_0, y_0)$ находится из (23.30) при $x = x_0$ и $y = y_0$.

Доказательство. Подставив $X = X' + X_0$ или

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad (23.34)$$

в (23.30), получим уравнение

$$(Y')^\top Q' Y' = 0,$$

где матрица Q' имеет вид (23.31).

Следствие 23.1.1. Если инвариант кривой $\delta = \det G \neq 0$, то существует точка (x_0, y_0) , при переносе начала координат в которую линейная часть матрицы Q' , т.е. $L' = (a'_1 \ a'_2)$, обращается в нуль:

$$Q' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (23.35)$$

Действительно, одну из величин a'_1 или a'_2 из (23.32) и (23.33) в отдельности выбором x_0 и y_0 можно обратить в нуль. Для того чтобы обратить в нуль обе величины сразу, следует решить систему уравнение (23.32), (23.33):

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 &= -a_1, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 &= -a_2. \end{aligned} \quad (23.36)$$

Поскольку матрицей этой системы является матрица G , то система будет иметь единственное решение только при условии $\det G = \delta \neq 0$.

Заметим, что матрица общей кривой 2-го порядка

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$$

имеет три главных минора

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \mu_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \quad (23.37)$$

из которых минор δ является ортогональным инвариантом, а μ_1 и μ_2 таковыми не являются. Однако для ряда конкретных кривых сумма $\mu = \mu_1 + \mu_2$ является ортогональным инвариантом. Такие инварианты иногда называются *условными* (или *семиинвариантами*), поскольку они сохраняются только при выполнении некоторых условий для матрицы Q .

Теорема 23.2. Для кривой второго порядка, описываемой вырожденной матрицей Q с вырожденной же матрицей квадратичной формы G , т.е. при выполнении условий $\det Q = \det G = 0$, величина

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \operatorname{Sp} G - a_1^2 - a_2^2 \quad (23.38)$$

является ортогональным относительным инвариантом (семиинвариантом).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 23.1 с использованием при преобразовании матрицы Q' условий $\det Q = \det Q' = \det G = \det G' = 0$.

24. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Теорема 24.1. *Общее уравнение кривой второго порядка*

$$\begin{aligned} F(x, y) &= a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = Y^T Q Y = \\ &= (x \ y \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (24.1)$$

заданное относительно некоторой системы координат (x, y) , ортогональным преобразованием координат (поворотом и параллельным переносом) можно привести к одному из следующих типов:

$$\text{I. } \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + a_0'' = (x'' \ y'' \ 1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0; \quad (24.2)$$

$$\text{II. } \lambda_2(y'')^2 + 2a_1'x'' = (x'' \ y'' \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_1' & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0; \quad (24.3)$$

$$\text{III. } \lambda_2(y'')^2 + a_0'' = (x'' \ y'' \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (24.4)$$

Доказательство. Согласно следствию 23.1.1 теоремы 23.1, существует ортогональное преобразование (23.15), соответствующее повороту системы координат (x, y) на угол φ , определяемый равенством (23.16), при котором матрица квадратичной формы G' становится диагональной:

$$G' = \begin{pmatrix} a_{11}' & 0 \\ 0 & a_{22}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

где λ — корни уравнения (23.18). С учётом этого матрица Q в системе координат (x', y') примет вид

$$Q' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a_1' \\ 0 & \lambda_2 & a_2' \\ a_1' & a_2' & a_0 \end{pmatrix}. \quad (24.5)$$

Такой подход, позволяющий легко получить матрицы (24.5) для плоских кривых, оказывается неудобным для кривых в трёхмерном пространстве. Существует более универсальный метод, допускающий обобщение на пространства любой размерности.

Пусть \vec{e}_1, \vec{e}_2 — ортонормированный базис в системе координат xOy . Тогда любой вектор на этой плоскости записывается как $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ или

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С учётом этого квадратичная часть в (24.1)

$$(x \ y) G \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x \ y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (24.6)$$

представляет собой квадратичную форму с матрицей G .

Рассмотрим линейный оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ с той же матрицей G в том же базисе \vec{e}_1, \vec{e}_2 . Как известно, при переходе к новому базису \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 с матрицей перехода P матрица G квадратичной формы перейдет в $P^T G P$, а матрица линейного оператора \mathcal{L} — в $P^{-1} G P$, т.е., вообще говоря, эти матрицы преобразуются не одинаково. Однако если новый базис \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 тоже ортонормированный, то матрица перехода P ортогональна и $P^T = P^{-1}$. В этом случае матрица квадратичной формы и матрица линейного оператора преобразуются одинаково. Так как матрица G симметрична, то соответствующий линейный оператор $\widehat{\mathcal{L}}$ — самосопряженный. Но, согласно теореме Жордана, матрица самосопряженного оператора в собственном базисе приводится к диагональному виду с собственными значениями на главной диагонали.

Метод построения этого базиса известен (см. разд. «Операторы в евклидовом пространстве»). Однако для двумерного пространства он допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Коротко напомним его смысл.

Пусть $\vec{e}'_1 = (m_1, n_1)$, $\vec{e}'_2 = (m_2, n_2)$ — новый ортонормированный базис. Это означает, что

$$\begin{aligned} (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) &= (\vec{e}'_2, \vec{e}'_1) = m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \\ (\vec{e}'_i, \vec{e}'_i) &= |\vec{e}'_i|^2 = m_i^2 + n_i^2 = 1, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (24.7)$$

Переход от базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 к базису \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 , т.е. от системы координат xOy к системе координат $x'Oy'$ позволяет для любого радиус-вектора \vec{r} использовать эквивалентные разложения:

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2. \quad (24.8)$$

Формулу (24.8) удобно представить в матричной форме:

$$X = x\mathcal{E}_1 + y\mathcal{E}_2 = x'\mathcal{E}'_1 + y'\mathcal{E}'_2, \quad (24.9)$$

где $\vec{r} = X$ и

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 = \mathcal{E}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \vec{e}_2 = \mathcal{E}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \vec{e}'_1 = \mathcal{E}'_1 &= \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}, & \vec{e}'_2 = \mathcal{E}'_2 &= \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24.10)$$

Тогда (24.9) запишется как

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix}, \quad (24.11)$$

причём следует помнить, что для матриц \mathcal{E}'_1 и \mathcal{E}'_2 условия (24.7) принимают вид

$$(\mathcal{E}'_1)^T \mathcal{E}'_2 = m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0, \quad (\mathcal{E}'_i)^T \mathcal{E}'_i = m_i^2 + n_i^2 = 1, \quad i = 1, 2. \quad (24.12)$$

Теперь, воспользовавшись матричной записью (24.9) и (24.11), квадратичную форму (24.6) можно записать как

$$\begin{aligned} X^T G X &= \{x'(\mathcal{E}'_1)^T + y'(\mathcal{E}'_2)^T\} G \{x'\mathcal{E}'_1 + y'\mathcal{E}'_2\} = \\ &= (x')^2 (\mathcal{E}'_1)^T G \mathcal{E}'_1 + (y')^2 (\mathcal{E}'_2)^T G \mathcal{E}'_2 + x'y' \{(\mathcal{E}'_1)^T G \mathcal{E}'_2 + (\mathcal{E}'_2)^T G \mathcal{E}'_1\}. \end{aligned} \quad (24.13)$$

Это выражение можно упростить, если матрицы \mathcal{E}'_1 и \mathcal{E}'_2 подчинены условиям

$$\begin{aligned} G \mathcal{E}'_1 &= \lambda_1 \mathcal{E}'_1, \\ G \mathcal{E}'_2 &= \lambda_2 \mathcal{E}'_2, \end{aligned} \quad (24.14)$$

тогда

$$X^T G X = \lambda_1 (x')^2 (\mathcal{E}'_1)^T \mathcal{E}'_1 + \lambda_2 (y')^2 (\mathcal{E}'_2)^T \mathcal{E}'_2 + x' y' (\lambda_1 + \lambda_2) (\mathcal{E}'_1)^T \mathcal{E}'_2. \quad (24.15)$$

Заметим, что соотношения (24.14) можно записать в виде одного уравнения

$$G \mathcal{E} = \lambda \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}. \quad (24.16)$$

Таким образом, мы пришли к задаче на собственные значения и собственные векторы матрицы G , которая в развёрнутой форме имеет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = 0. \quad (24.17)$$

Как известно, однородная система (24.17) имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(G - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (24.18)$$

Уравнение (24.18) называется характеристическим уравнением матрицы G и с учётом введённых ранее обозначений может быть записано как

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{Sp} G + \det G = 0. \quad (24.19)$$

Это уравнение мы уже рассматривали и показали, что оно имеет два вещественных корня λ_1 и λ_2 (см. формулы (23.25), (23.26)), подстановка которых в (24.17) позволяет найти векторы \mathcal{E}'_1 и \mathcal{E}'_2 . Действительно, подставив λ_1 в (24.17), имеем

$$(a_{11} - \lambda_1)m_1 + a_{12}n_1 = 0 \quad (24.20)$$

(второе уравнение совпадает с (24.20) в силу $\det G = 0$), а подставив λ_2 , имеем

$$(a_{11} - \lambda_2)m_2 + a_{12}n_2 = 0. \quad (24.21)$$

Решив уравнения (24.20) и (24.21), получим собственные векторы

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{m_1}{a_{12}} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}'_2 = \frac{m_2}{a_{12}} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix}, \quad (24.22)$$

определённые с точностью до произвольных постоянных m_1 и m_2 , которые мы должны доопределить из условий нормировки (24.12). Нетрудно убедиться, что матрицы \mathcal{E}'_i , $i = 1, 2$, (24.22) удовлетворяют условию

$$(\mathcal{E}'_1)^T \mathcal{E}'_2 = 0, \quad (24.23)$$

эквивалентному условию ортогональности $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2) = 0$. Действительно,

$$(\mathcal{E}'_1)^T \mathcal{E}'_2 = m_1 m_2 \left(1 + \frac{(\lambda_1 - a_{11})(\lambda_2 - a_{11})}{a_{12}^2} \right) = m_1 m_2 (1 - 1) = 0,$$

согласно (23.29).

Если теперь m_1 и m_2 подчинить условиям нормировки

$$m_1^2 \left(1 + \frac{(\lambda_1 - a_{11})^2}{a_{12}^2} \right) = 1, \quad m_2^2 \left(1 + \frac{(\lambda_2 - a_{11})^2}{a_{12}^2} \right) = 1, \quad (24.24)$$

то матрицы $\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2$ удовлетворяют условиям (24.12). Но тогда, возвратившись к (24.15), получим

$$X^T G X = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2$$

— канонический вид квадратичной формы.

Теперь от матриц \mathcal{E}'_1 и \mathcal{E}'_2 по формулам (24.10) перейдём к базисным векторам \bar{e}'_1, \bar{e}'_2 .

Подводя итог, можем сказать, что с помощью ортогонального преобразования

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (24.25)$$

где

$$P = (\mathcal{E}'_1 \ \mathcal{E}'_2) = (\bar{e}'_1 \ \bar{e}'_2)_{2 \times 2}, \quad P^T = P^{-1}, \quad (24.26)$$

уравнение (23.38) примет вид (24.5), где

$$L' = (a'_1 \ a'_2) = LP = (a_1 \ a_2)P : \quad (24.27)$$

$$F(x, y) = (x' \ y' \ 1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & a'_1 \\ 0 & \lambda_2 & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (24.28)$$

Дальнейшее преобразование матрицы (24.28) возможно с помощью перехода к новой системе координат, связанной со старой параллельным переносом, в следующих случаях.

Случай I: $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$.

В этом случае, согласно следствию 23.1.1, с помощью параллельного переноса

$$X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} \quad (24.29)$$

можно обратить в нуль коэффициенты a'_1, a'_2 линейной формы. Величины x'_0 и y'_0 , согласно (23.36), найдутся как

$$x'_0 = \frac{a'_1}{\lambda_1}, \quad y'_0 = \frac{a'_2}{\lambda_2}. \quad (24.30)$$

Впрочем, эти значения можно найти из (24.28):

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a_0 = 0$$

непосредственно, выделив полные квадраты

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 - \frac{(a'_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_2)^2}{\lambda_2} + a_0 = 0.$$

В результате получим

$$F(x, y) = \lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + a''_0 = 0, \quad (24.31)$$

где

$$a''_0 = a_0 - \frac{(a'_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_2)^2}{\lambda_2}, \quad (24.32)$$

или

$$F(x, y) = (x'' \ y'' \ 1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a''_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (24.33)$$

т.е. матрица Q является диагональной.

Случай II: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a'_1 \neq 0$.

Это означает, что соотношение (24.28) имеет вид

$$F(x, y) = (x' \ y' \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & a'_1 \\ 0 & \lambda_2 & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2(y')^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a_0 = 0. \quad (24.34)$$

Выделив в (24.34) полный квадрат и проведя тождественные преобразования, можем записать

$$F(x, y) = \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 - a'_1 \left(x' + \frac{a'_0}{2a'_1} - \frac{(a'_2)^2}{2a'_1\lambda_2} \right) = 0.$$

Положив

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}, \quad (24.35)$$

где

$$x'_0 = \frac{a'_0}{2a'_1} - \frac{(a'_2)^2}{2a'_1\lambda_2}, \quad y'_0 = \frac{a'_2}{\lambda_2}, \quad (24.36)$$

получим

$$\lambda_2(y'')^2 + 2a'_1x'' = 0 \quad (a''_1 = a'_1), \quad (24.37)$$

и матрица Q является диагональной.

Случай III: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $a'_1 = 0$.

Это означает, что соотношение (24.32) имеет вид

$$F(x, y) = (x' \ y' \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & a'_2 \\ 0 & a'_2 & a_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2(y')^2 + 2a'_2y' + a_0 = 0. \quad (24.38)$$

Выделив, как и ранее, в (24.38) полный квадрат, найдём

$$F(x, y) = \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2} \right)^2 + \left(a_0 - \frac{(a'_2)^2}{\lambda_2} \right) = 0.$$

Положив в (24.35)

$$x'_0 = 0, \quad y'_0 = \frac{a'_2}{\lambda_2}, \quad (24.39)$$

получим

$$F(x, y) = \lambda_2(y'')^2 + a''_0 = 0, \quad (24.40)$$

где

$$a''_0 = a_0 - \frac{(a_2)^2}{\lambda_2}, \quad (24.41)$$

т.е. матрица Q является диагональной.

Теорема 24.1 дает исчерпывающую информацию о приведении общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду. Однако в практических приложениях её использование затруднено большим количеством промежуточных выкладок. Проанализируем перечисленные случаи подробнее, для чего запишем это уравнение в форме, более пригодной для практических приложений.

Таблица 2

| Случай | Q'' | S | δ | Δ | μ | Каноническая форма |
|--------|---|-------------------------|-----------------------|----------------|-----------|--|
| I | $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0'' \end{pmatrix}$ | $\lambda_1 + \lambda_2$ | $\lambda_1 \lambda_2$ | $\delta a_0''$ | — | $\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0,$ $\delta \neq 0$ |
| II | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1' \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_1' & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | λ_2 | 0 | $-S(a_1')^2$ | — | $(y'')^2 \pm \frac{2}{S} \sqrt{-\frac{\Delta}{S}} x'' = 0,$ $\delta = 0, \Delta \neq 0, S \neq 0$ |
| III | $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0'' \end{pmatrix}$ | λ_2 | 0 | 0 | $S a_0''$ | $(y'')^2 + \frac{\mu}{S} = 0,$ $\delta = \Delta = 0, S \neq 0$ |

Заметим, что уравнения (24.2)–(24.4) были получены только с помощью ортогональных преобразований, поэтому все инварианты остались неизменными. Вычислив инварианты по исходному уравнению

$$S = \text{Sp } G = a_{11} + a_{22}; \quad \delta = \det G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix};$$

$$\Delta = \det Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}; \quad \mu = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

и по виду Q'' из (24.2)–(24.4), можем составить таблицу 2.

Приведём некоторые пояснения.

I. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$. В этом случае $\delta = \delta''$, но $\delta'' = \lambda_1 \lambda_2$, следовательно, кривую можно характеризовать величиной $\delta = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Кроме этого, величину a_0'' можно найти, исходя из равенства инвариантов $\Delta = \Delta''$, т.е. $\Delta = \delta a_0''$, откуда $a_0'' = \Delta/\delta$. В результате уравнение (24.2) можно записать через инварианты:

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (24.42)$$

II. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, a_1' \neq 0$. В этом случае $S = S'' = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 \neq 0$, $\delta = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ и $\Delta = -(a_1')^2 \lambda_2 = -(a_1')^2 S \neq 0$. Отсюда $a_1' = \pm \sqrt{-\Delta/S}$. В результате уравнение (24.3) можно записать через инварианты

$$S(y'')^2 \pm 2\sqrt{-\frac{\Delta}{S}} x'' = 0$$

или

$$(y'')^2 \pm \frac{2}{S} \sqrt{-\frac{\Delta}{S}} x'' = 0. \quad (24.43)$$

III. $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0, a_1' = 0$. В этом случае $S = S'' = \lambda_1 + \lambda_2 = 0 + \lambda_2 = \lambda_2 \neq 0$, $\delta = \lambda_1 \lambda_2 = 0$, $\Delta = 0$. При равенстве нулю инвариантов $\delta = \Delta = 0$ условным инвариантом является величина

$$\mu = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix},$$

но $\mu = \mu'' = \lambda_2 a_0'' = S a_0''$, откуда $a_0'' = \mu/S$. В результате уравнение (24.4) запишется в виде

$$S(y'')^2 + \frac{\mu}{S} = 0$$

Таблица 3

| Группа | № | Уравнение линии | Название линии | Инварианты |
|--------|---|--|----------------------------------|--------------------------------|
| I | 1 | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | эллипс | $\delta > 0, S\Delta < 0$ |
| | 2 | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ | мнимый эллипс | $\delta > 0, S\Delta > 0$ |
| | 3 | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ | две мнимые пересекающиеся прямые | $\delta > 0, \Delta = 0$ |
| | 4 | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | гипербола | $\delta < 0, \Delta \neq 0$ |
| | 5 | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ | две пересекающиеся прямые | $\delta < 0, \Delta = 0$ |
| II | 6 | $x^2 = 2py$ | парабола | $\delta = 0, \Delta \neq 0$ |
| III | 7 | $x^2 = a^2 (a \neq 0)$ | две параллельные прямые | $\delta = \Delta = 0, \mu < 0$ |
| | 8 | $x^2 = -a^2 (a \neq 0)$ | две мнимые параллельные прямые | $\delta = \Delta = 0, \mu > 0$ |
| | 9 | $x^2 = 0$ | две совпадающие прямые | $\delta = \Delta = \mu = 0$ |

или

$$(y'')^2 + \frac{\mu}{S^2} = 0. \quad (24.44)$$

Кроме того, из теоремы 24.1 вытекает

Следствие 24.1.1. Общее уравнение кривой второго порядка (24.1) определяет одну из следующих девяти линий (см. табл. 3).

Доказательство.

Случай I. $\delta = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ для всех кривых с № 1 по № 5.

Чтобы получить из уравнения (24.42) уравнение первой кривой, следует потребовать, чтобы λ_1 и λ_2 имели один знак, что соответствует $\lambda_1 \lambda_2 = \delta > 0$. Если это условие выполняется, то деление уравнения (24.42) на величину $(-\Delta) \neq 0$ дает

$$\frac{(x'')^2}{-\Delta/\lambda_1\delta} + \frac{(y'')^2}{-\Delta/\lambda_2\delta} = 1. \quad (24.45)$$

Это уравнение есть уравнение эллипса с полуосями

$$a = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}}, \quad b = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}}, \quad (24.46)$$

если величины $\Delta/\lambda_1\delta$ и $\Delta/\lambda_2\delta$ отрицательны, т.е. $\Delta/\lambda_1\delta < 0$ и $\Delta/\lambda_2\delta < 0$. В силу условия $\delta > 0$ их можно записать как

$$\frac{\Delta}{\lambda_1} < 0, \quad \frac{\Delta}{\lambda_2} < 0.$$

Приняв во внимание, что знак инварианта $S = \lambda_1 + \lambda_2$ совпадает со знаком и λ_1 , и λ_2 , оба условия можно объединить одним:

$$\Delta S < 0 \quad (24.47)$$

(см. табл. 3, I.1).

Чтобы получить уравнение второй кривой, нужно потребовать, как и в предыдущем случае, чтобы выполнялось условие $\lambda_1\lambda_2 = \delta > 0$, а уравнение (24.42) следует разделить на $(-\Delta) \neq 0$, что дает

$$\frac{(x'')^2}{-\Delta/\lambda_1\delta} + \frac{(y'')^2}{-\Delta/\lambda_2\delta} = -1. \quad (24.48)$$

Это уравнение — уравнение мнимого эллипса и не представляет ни одну точку (\emptyset), если величины $\Delta/\lambda_1\delta$ и $\Delta/\lambda_2\delta$ положительны, т.е.

$$\frac{\Delta}{\lambda_1} > 0, \quad \frac{\Delta}{\lambda_2} > 0.$$

Оба условия можно объединить:

$$\Delta S > 0 \quad (24.49)$$

(см. табл. 3, I.2).

Чтобы получить уравнение третьей кривой, нужно потребовать, как и ранее, чтобы выполнялось условие $\lambda_1\lambda_2 = \delta > 0$, при этом величина Δ принимает третье возможное значение: $\Delta = 0$. В результате получим уравнение

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 = 0,$$

описывающее единственную точку $x'' = y'' = 0$ или, как говорят, две мнимые прямые, пересекающиеся в этой точке.

Все три уравнения имеют одну и ту же левую часть, совпадающую с левой частью уравнения эллипса и характеризуемую величиной $\delta > 0$.

◆ Уравнения (24.42) с $\delta > 0$ называют уравнениями *эллиптического типа*, а определяемые ими кривые — *эллиптическими*.

◇ Следует подчеркнуть, что из трех кривых содержательной является только эллипс, остальные две таковыми не являются, что и отмечено в табл. 3, I.1–3.

Потребуем теперь, чтобы λ_1 и λ_2 имели разные знаки. Это соответствует условию $\lambda_1\lambda_2 = \delta < 0$, которому отвечают кривые № 4 и № 5. При выполнении этого условия инвариант Δ может быть или отличен от нуля, или равен нулю. Если $\Delta \neq 0$, то из уравнения (24.42) получим

$$\frac{(x'')^2}{-\Delta/\lambda_1\delta} + \frac{(y'')^2}{-\Delta/\lambda_2\delta} = 1. \quad (24.50)$$

В силу различия знаков величин λ_1 и λ_2 это уравнение либо самой гиперболы, либо сопряженной ей, и обе кривые содержательны. Действительно, если $-\Delta/\lambda_1\delta > 0$, то $-\Delta/\lambda_2\delta < 0$, и уравнение (24.42) определяет гиперболу с действительной полуосью $a = \sqrt{-\Delta/\lambda_1\delta}$ и мнимой полуосью $b = \sqrt{\Delta/\lambda_2\delta}$. Если же $-\Delta/\lambda_1\delta < 0$, то $-\Delta/\lambda_2\delta > 0$, и уравнение (24.42) определяет сопряженную гиперболу.

При $\Delta = 0$ получим уравнение кривой № 5:

$$(x'')^2 - \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}(y'')^2 = 0, \quad (24.51)$$

которая является распадающейся и представляет собой две пересекающиеся прямые

$$x'' - \sqrt{\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|}y'' = 0, \quad x'' + \sqrt{\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|}y'' = 0.$$

◆ Кривые № 4 и № 5, характеризующиеся величиной $\delta < 0$, называются кривыми *гиперболического типа*, и обе являются содержательными кривыми.

◆ Кривые, относящиеся к случаям II и III, характеризуются величиной $\delta = \lambda_1 \lambda_2 = 0$ и называются кривыми *параболического типа*.

Случай II. Кривая представляет собой параболу, описывается уравнением (24.43) и особых пояснений не требует.

Случай III. Кривые № 7, 8, 9 получаются из (24.44), когда условный инвариант μ меньше нуля, больше нуля и равен нулю, соответственно.

Как следует из табл. 3, вычисление инвариантов по коэффициентам исходного уравнения второго порядка позволяет найти его канонический вид и установить, является ли кривая содержательной. В практических приложениях этого зачастую достаточно. Более того, для некоторых канонических форм, как, например мнимый эллипс, задача о нахождении канонической системы координат вообще не имеет смысла, поскольку решение уравнения задает пустое множество. Для других канонических форм задача о нахождении канонической системы корректна. В этом случае по формулам (23.16) или (23.27), (23.28) можно найти угол поворота φ , определяющий направление координатных осей канонической системы координат, а затем с помощью параллельного переноса найти положение ее начала. На самом деле, если необходимо найти каноническую систему координат, удобнее сначала определить положение начала координат канонической системы в старой системе координат, а уже затем — угол поворота, связывающий старую и новую системы координат. Ниже мы покажем, как это можно сделать, рассмотрев прежде несколько примеров, иллюстрирующих возможность использования табл. 2 и 3.

Пример 24.1. Определить типы следующих кривых и привести их уравнения к каноническому виду:

1. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$,
2. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 2 = 0$,
3. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + \frac{11}{8} = 0$.

Решение. 1. Кривая описывается матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (24.52)$$

содержащей матрицу квадратной формы

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (24.53)$$

Вычислим инварианты кривой:

$$\text{Sp } G = 3 + 3 = 6 > 0; \quad (24.54)$$

$$\det G = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 > 0; \quad (24.55)$$

$$\det Q = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0. \quad (24.56)$$

Так как $\delta = 8 > 0$, то матрица (24.52) определяет кривую эллиптического типа, а поскольку $S\Delta = 6(-3) = -18 < 0$, то кривая представляет собой эллипс. Для определения его полуосей решаем уравнение (23.18)

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0.$$

Его корни равны $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Каноническое уравнение эллипса, согласно (24.42), имеет вид

$$2(x'')^2 + 4(y'')^2 + \frac{-3}{8} = 0$$

или

$$\frac{(x'')^2}{3/16} + \frac{(y'')^2}{3/32} = 1, \quad (24.57)$$

полуоси этого эллипса равны

$$a = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,4, \quad b = \sqrt{\frac{3}{32}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 0,3.$$

2. Кривая описывается матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

содержащей матрицу квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Как и в предыдущем случае, инварианты кривой $\text{Sp} G = 6$, $\det G = 8 > 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, а величина Δ имеет другое значение:

$$\det Q = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0.$$

Тогда $S\Delta = 6 \cdot 5 = 30 > 0$ и, согласно табл. 3, уравнение описывает кривую эллиптического типа, представляющую собой мнимый эллипс

$$2(x'')^2 + 4(y'')^2 + \frac{5}{8} = 0$$

т.е. пустое множество точек.

3. Кривая описывается матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 11/8 \end{pmatrix},$$

содержащей матрицу квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

как и в предыдущих случаях. Поэтому инварианты равны $\text{Sp } G = 6$, $\det G = 8 > 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, а величина Δ обращается в нуль:

$$\det Q = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 11/8 \end{vmatrix} = 0. \quad (24.58)$$

Таким образом, согласно табл. 3, уравнение $2(x'')^2 + 4(y'')^2 = 0$ определяет кривую эллиптического типа, представляющую собой единственную точку M_0 . Нетрудно убедиться, что эта точка M_0 имеет координаты $x_0 = -1/8$, $y_0 = 5/8$. В следующем разделе мы покажем, как можно найти эти координаты, не выделяя полный квадрат.

Подводя итог, отметим, что все три уравнения описывают кривые эллиптического типа. Более того, имея одинаковые квадратичные и линейные части и различаясь только свободными членами уравнения, они представляют три возможных варианта канонической формы кривых эллиптического типа.

Пример 24.2. Определить типы кривых второго порядка и привести их уравнения к каноническому виду:

1. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$,
2. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y + 17 = 0$.

Решение. 1. Уравнению кривой отвечает матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -11 & -6 & -19 \end{pmatrix}, \quad (24.59)$$

содержащая матрицу квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24.60)$$

Вычислим инварианты кривой:

$$\begin{aligned} S &= \text{Sp } G = 5 + 0 = 5 > 0; \\ \delta &= \det G = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0; \\ \det Q &= \begin{vmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -11 & -6 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & -30 \end{vmatrix} = 1296 \neq 0. \end{aligned} \quad (24.61)$$

Поскольку $\delta < 0$, уравнение определяет кривую гиперболического типа. Значение $\Delta = 1296 \neq 0$ указывает на то, что кривая является гиперболой. Для определения его полуосей запишем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0.$$

Его корни равны $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$. С учётом этого и согласно (24.42), запишем каноническое уравнение гиперболы:

$$9(x'')^2 - 4(y'')^2 + \frac{1296}{-36} = 9(x'')^2 - 4(y'')^2 - 36 = 0$$

или

$$\frac{(x'')^2}{4} - \frac{(y'')^2}{9} = 1. \quad (24.62)$$

2. Уравнению кривой отвечает матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -11 & -6 & 17 \end{pmatrix}, \quad (24.63)$$

содержащая, как и в предыдущем случае, матрицу квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}. \quad (24.64)$$

Вычислив инварианты кривой, получим

$$S = \text{Sp } G = 5 + 0 = 5 > 0;$$

$$\delta = \det G = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0; \quad (24.65)$$

$$\det Q = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -11 & -6 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\delta < 0$, уравнение описывает кривую гиперболического типа. Значение $\Delta = 0$ указывает на то, что кривая является распадающейся, т.е. представляет собой две пересекающиеся прямые. Чтобы их найти, исходное уравнение перепишем в виде

$$5x^2 + x(12y - 22) - 12y + 17 = 0$$

и найдём его корни:

$$x_{1,2} = \frac{-(12y - 22) \pm \sqrt{(12y - 22)^2 - 4 \cdot 5(-12y + 17)}}{2 \cdot 5} =$$

$$= \frac{-6y + 11 \pm \sqrt{36(y - 1)^2}}{5} = \frac{-6y + 11 \pm 6(y - 1)}{5},$$

т.е.

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-12y + 17}{5}.$$

С учётом этого исходное уравнение запишется в распадающемся виде:

$$F(x, y) = (x - 1)(5x + 12y - 17) = 0 \quad (24.66)$$

и определяет две прямые

$$\begin{aligned} x &= 1; \\ 5x + 12y - 17 &= 0, \end{aligned} \quad (24.67)$$

пересекающиеся в точке с координатами $x_0 = 1, y_0 = 1$.

Подводя итог, отметим, что оба уравнения описывают кривые гиперболического типа. Более того, имея одинаковые квадратичные и линейные части и различаясь только свободными членами уравнения, они представляют оба возможных варианта кривых гиперболического типа. Интересно, что точка пересечения прямых $x_0 = 1, y_0 = 1$ совпадает с центром гиперболы (24.62), в чём мы убедимся ниже.

Пример 24.3. Определить типы кривых второго порядка и привести их уравнения к каноническому виду:

1. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0,$
2. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y - 3 = 0,$
3. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 = 0,$
4. $x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 2 = 0.$

Решение. 1. Уравнению кривой соответствует матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3/2 \\ 2 & -3/2 & -7 \end{pmatrix}, \quad (24.68)$$

содержащая матрицу квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (24.69)$$

Вычислив инварианты кривой, найдём

$$\begin{aligned} S &= \text{Sp } G = 1 + 4 = 5 > 0; \\ \delta &= \det G = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; \\ \det Q &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3/2 \\ 2 & -3/2 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3/2 \\ -2 & 5/2 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4} < 0. \end{aligned} \quad (24.70)$$

Поскольку $\delta = 0$, уравнение определяет кривую параболического типа. Значение $\Delta = -25/4 \neq 0$ указывает на то, что кривая не распадается, а является параболой. Ее каноническое уравнение, согласно (24.43), имеет вид

$$(y'')^2 - \frac{2}{S} \sqrt{-\frac{\Delta}{S}} x'' = 0,$$

а учётom (24.70)

$$(y'')^2 = \frac{2}{5} \sqrt{-\frac{25}{4 \cdot 5}} x'' = \frac{x''}{\sqrt{5}},$$

т.е.

$$(y'')^2 = \frac{1}{\sqrt{5}} x''. \quad (24.71)$$

2. Уравнению кривой отвечает матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad (24.72)$$

содержащая матрицу квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (24.73)$$

Вычислив инварианты кривой, найдём

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{Sp} G = 1 + 4 = 5; \\ \delta &= \det G = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; \\ \det Q &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (24.74)$$

Поскольку $\delta = \Delta = 0$, то вычислим ещё и условный инвариант

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -4 - 16 = -20 < 0.$$

Так как $\delta = 0$, уравнение определяет кривую параболического типа. Значение $\Delta = 0$ указывает на то, что кривая является распадающейся, а значение $\mu = -20 < 0$ — на то, что она представляет собой две параллельные прямые, которые можно найти, записав исходное уравнение в виде

$$x^2 + 2x(2y - 1) + 4y^2 - 4y - 3 = 0$$

и решив его как квадратное уравнение:

$$x_{1,2} = \frac{-2(2y - 1) \pm \sqrt{4(2y - 1)^2 - 4(4y^2 - 4y - 3)}}{2} = -2y + 1 \pm 2,$$

т.е.

$$x_1 = -2y + 3, \quad x_2 = -2y - 1.$$

С учётом этого запишем уравнение в виде произведения

$$(x + 2y - 3)(x + 2y + 1) = 0,$$

откуда имеем систему двух уравнений, определяющую две параллельные прямые:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3 &= 0, \\ x + 2y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

3. Уравнению кривой отвечает матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (24.75)$$

содержащая матрицу квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислив инварианты кривой, найдём

$$\begin{aligned} S &= \operatorname{Sp} G = 1 + 4 = 5; \\ \delta &= \det G = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0; \end{aligned} \quad (24.76)$$

$$\det Q = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\delta = \Delta = 0$, то вычислим еще и условный инвариант

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\delta = 0$, уравнение определяет кривую параболического типа. Значение $\Delta = 0$ указывает на то, что кривая является распадающейся, а значение $\mu = 0$ — на то, что она состоит из двух совпадающих прямых, которые можно найти, записав исходное уравнение в виде

$$x^2 + 2x(2y - 1) + 4y^2 - 4y + 1 = x^2 + 2x(2y - 1) + (2y - 1)^2 = (x + 2y - 1)^2 = 0,$$

откуда

$$x + 2y - 1 = 0.$$

4. Уравнению кривой отвечает матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Все инварианты кривой совпадают с инвариантами, вычисленными для кривых 2 и 3. Отличается только условный инвариант, поскольку

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 > 0.$$

Последнее означает, что уравнение определяет две мнимые параллельные прямые, т.е. пустое множество точек. В этом можно убедиться и непосредственно, представив исходное уравнение в виде

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + 1 + 1 = (x + 2y - 1)^2 + 1 = 0.$$

25. Каноническая система координат

Вид канонического уравнения мы научились определять с помощью инвариантов. Кроме того, мы умеем приводить кривые второго порядка к каноническому виду с помощью подбора угла поворота системы координат и выделения полных квадратов и тем самым, наряду с каноническим видом, устанавливаем каноническую систему координат. Более того, мы можем сделать это с помощью собственных значений и собственных векторов матрицы квадратичной формы.

Сейчас мы рассмотрим другой, более универсальный алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду, который, например, применим и для поверхностей. Предварительно оговоримся, что этот алгоритм особенно полезен для построения содержательных нераспадающихся кривых, т.е. эллипсов, гипербол и парабол, поскольку уравнение прямой в старой системе координат не сложнее уравнения прямой в новой системе координат.

Итак, в отличие от уже рассмотренных алгоритмов опишем сначала параллельный перенос системы координат $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$, подчинив его

условию упрощения не квадратичной, а линейной части. Как следует из леммы 23.1, матрица Q заданной кривой приведет к виду (23.31), т.е.

$$Q' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a'_1 \\ a_{12} & a_{22} & a'_2 \\ a'_1 & a'_2 & F(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \quad (25.1)$$

где

$$\begin{aligned} a'_1 &= a_1 + a_{11}x_0 + a_{12}y_0, \\ a'_2 &= a_2 + a_{12}x_0 + a_{22}y_0. \end{aligned} \quad (25.2)$$

Далее рассмотрим два случая:

- а) $\delta \neq 0$ — центральная кривая: $\delta > 0$ — эллипс и $\delta < 0$ — гипербола;
 б) $\delta = 0$ — парабола.

Для центральной кривой ($\delta \neq 0$), согласно следствию 23.1.1, существует точка $O'(x_0, y_0)$, в которой коэффициенты a'_1 и a'_2 обращаются в нуль. Координаты x_0 и y_0 находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 &= -a_1, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 &= -a_2. \end{aligned} \quad (25.3)$$

Таким образом, в системе координат

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0 \quad (25.4)$$

с началом в точке $O'(x_0, y_0)$ матрица центральной кривой будет иметь вид

$$Q' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (25.5)$$

с неизменной матрицей квадратичной части G . Величина $F(x_0, y_0)$ вычисляется подстановкой x_0, y_0 в левую часть уравнения кривой 2-го порядка, т.е.

$$F(x_0, y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + a_1x_0 + a_2y_0 + a_0. \quad (25.6)$$

Впрочем, вычислять $F(x_0, y_0)$ по формуле (25.6) вовсе не обязательно, поскольку

$$F(x_0, y_0) = \frac{\Delta}{\delta} \quad (25.7)$$

в силу инвариантности Δ и δ .

Теперь поворотом на угол φ , определяемый из соотношения (23.27):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}},$$

по формуле

$$X' = PX''$$

или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}, \quad (25.8)$$

переходим от системы координат $x'O'y'$ к канонической системе координат $x''O''y''$, в которой исходное уравнение примет канонический вид

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0. \quad (25.9)$$

Разрешив (25.8) относительно x и y , получим связь (23.1) между исходной и канонической системами координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (25.10)$$

◇ Преимущество такого алгоритма заключается в том, что угол поворота и вектор параллельного переноса можно найти независимо друг от друга, как, впрочем, и каноническую форму кривой.

Пример 25.1. В заданной системе координат построить кривые 2-го порядка из примера 24.1.

Решение. 1. В декартовой системе координат уравнение имеет вид

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$$

Каноническая форма этого уравнения в примере 22.1 уже найдена:

$$\frac{(x'')^2}{3/16} + \frac{(y'')^2}{3/32} = 1. \quad (25.11)$$

Теперь в координатах xOy найдём начало канонической системы координат — точку $O'(x_0, y_0)$. Для этого следует решить систему (25.3), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} 3x_0 - y_0 + 1 = 0, \\ -x_0 + 3y_0 - 2 = 0. \end{cases} \quad (25.12)$$

Решив эту систему, получим $x_0 = -1/8$, $y_0 = 5/8$.

Угол поворота, приводящий к канонической системе координат $x''O'y''$, даётся соотношением (23.27)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{2 - 3}{-1} = 1, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}. \quad (25.13)$$

Этот же результат следует из равенства коэффициентов: $a_{11} = a_{22} = 3$. Таким образом, итоговое преобразование координат (25.10) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/8 \\ 5/8 \end{pmatrix}. \quad (25.14)$$

Это означает, что каноническая система координат $x''O'y''$ имеет своим началом точку $O'(-1/8, 5/8)$, а ее координатные оси повернуты на угол $\varphi = \pi/4$ против часовой стрелки (см. рис. 141, а).

Для сравнения различных алгоритмов решим эту же задачу без использования инвариантов кривой. В этом случае от ортонормированного базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 в системе координат xOy перейдём в новую систему координат $x'Oy'$ с новым ортонормированным базисом \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 . Для этого, согласно теореме 24.1, следует решить задачу на собственные значения и собственные векторы (24.14) матрицы G , которая в данном случае имеет вид

$$G\mathcal{E}' = \lambda\mathcal{E}' \quad (25.15)$$

или

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = 0. \quad (25.16)$$

Нетривиальное решение этой однородной системы уравнений существует при выполнении условия

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (25.17)$$

Это характеристическое уравнение определяет собственные значения λ . Вычислив определитель (25.17), получим квадратное уравнение

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

с корнями $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$. Подставив $\lambda_1 = 2$ в (25.16), найдём

$$\mathcal{E}'_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix},$$

где

$$m_1 - n_1 = 0,$$

тогда

$$\mathcal{E}'_1 = m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и с учётом нормировки $\mathcal{E}'_1{}^T \mathcal{E}'_1 = 1$ получим $2m_1^2 = 1$, т.е. $m_1 = 1/\sqrt{2}$ и

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25.18)$$

Подставив в (25.16) $\lambda_2 = 4$, найдём

$$\mathcal{E}'_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

где

$$m_2 + n_2 = 0,$$

тогда

$$\mathcal{E}'_2 = m_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

и с учётом нормировки получим

$$\mathcal{E}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25.19)$$

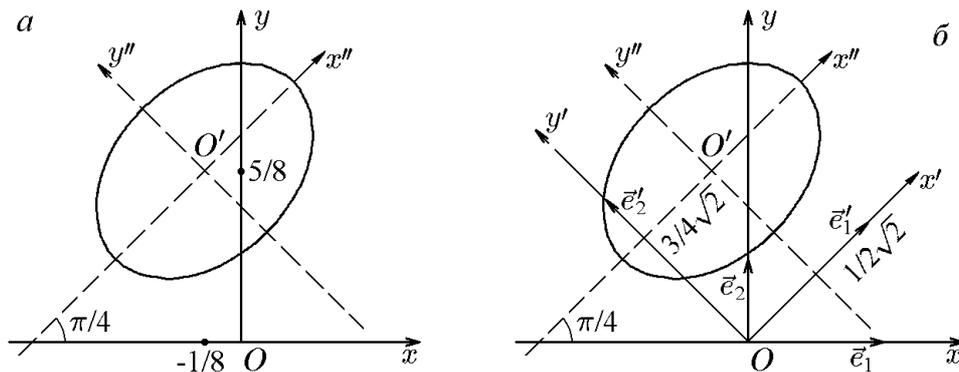


Рис. 141.

Матрицы (25.18) и (25.19) определяют координаты нового базиса:

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \\ \vec{e}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2),\end{aligned}\tag{25.20}$$

и связь между старыми и новыми координатами, согласно (24.9):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x'\mathcal{E}'_1 + y'\mathcal{E}'_2 = x'\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y'\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\tag{25.21}$$

или

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').\end{aligned}\tag{25.22}$$

Подставив (25.22) в исходное уравнение, запишем

$$\frac{3}{2}(x' - y')^2 - \frac{2}{2}(x' - y')(x' + y') + \frac{3}{2}(x' + y')^2 + \frac{2}{\sqrt{2}}(x' - y') - \frac{4}{\sqrt{2}}(x' + y') + 1 = 0,$$

откуда

$$2(x')^2 + 4(y')^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 1 = 0.$$

Выделив полный квадрат, приведём это уравнение к виду

$$2\left(x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{3}{8} = 0.$$

Параллельным переносом

$$\begin{aligned}x'' &= x' - x'_0 = x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ y'' &= y' - y'_0 = y' - \frac{3}{4\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{25.23}$$

приходим к канонической системе координат $x''O'y''$ с началом в точке $O'(1/2\sqrt{2}, 3/4\sqrt{2})$, в которой кривая запишется в канонической форме

$$\frac{(x'')^2}{3/16} + \frac{(y'')^2}{3/32} = 1,$$

определяющей эллипс, изображенный на рис. 141,б. Из сравнения рис. 141,а и 141,б видно, что положение начала канонической системы координат в первом решении задаётся в старой системе координат xOy как $x_0 = -1/8$, $y_0 = 5/8$, а во втором — в системе координат $x'Oy'$ как $x'_0 = 1/2\sqrt{2}$, $y'_0 = 3/4\sqrt{2}$. Координаты x_0, y_0 и x'_0, y'_0 связаны общим соотношением (25.21) (или (25.22)):

$$\begin{aligned}-\frac{1}{8} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right), \\ \frac{5}{8} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\right).\end{aligned}\tag{25.24}$$

2. В декартовой системе координат уравнение имеет вид

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 3x - 4y = 2 = 0.$$

Этот случай наглядно иллюстрирует преимущество решения с помощью инвариантов. Действительно, как показано в примере 24.1, простое вычисление инвариантов говорит о том, что кривая является мнимым эллипсом:

$$2(x'')^2 + 4(y'')^2 + \frac{5}{8} = 0, \quad (25.25)$$

т.е. уравнение (25.25) не описывает ни одну точку вещественной плоскости. Это означает, что находить каноническую систему координат в данном случае просто не имеет смысла.

Иначе обстоит дело, если задачу решать другим способом. В этом случае конечный результат не очевиден, и следует найти каноническую систему координат. Для этого нужно решить задачу на собственные значения и собственные векторы матрицы квадратичной формы G , а затем на основании нового базиса \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 перейти в новую систему координат $x'Oy'$. Далее, выполнив параллельный перенос с помощью выделения полного квадрата, мы получим каноническую форму исходного уравнения и только теперь сможем убедиться в том, что оно не определяет ни одну точку вещественной плоскости. Реализуем эту схему для заданного уравнения.

Итак, решаем задачу

$$G\mathcal{E}' = \lambda\mathcal{E}'$$

или

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = 0. \quad (25.26)$$

Поскольку матрицы квадратичной формы для данной кривой и уже рассмотренной кривой № 1 совпадают, то и задача (25.26) совпадает с уже решенной задачей (25.16). Это позволяет нам воспользоваться соотношением (25.22) (в противном случае нам пришлось бы решать задачу (25.26) целиком и заново). Подставив (25.22) в исходное уравнение, запишем

$$2(x')^2 + 4(y')^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{6}{\sqrt{2}}y' + 2 = 0.$$

Выделив в этом уравнении полный квадрат, приведём его к виду

$$2\left(x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{5}{8} = 0,$$

совпадающему с (25.25) и говорящему о том, что кривую, соответствующую рассматриваемому уравнению, построить нельзя, поскольку оно не определяет ни одну кривую. Очевидно, что недостатком такого алгоритма является необходимость построения канонической системы координат, что не всегда обязательно для решения задачи.

3. В декартовой системе координат уравнение имеет вид

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + \frac{11}{8} = 0.$$

Простое вычисление инвариантов этой кривой, как показано в примере 24.1, приводит исходное уравнение к каноническому виду:

$$2(x'')^2 + 4(y'')^2 = 0, \quad (25.27)$$

из которого следует, что уравнение определяет единственную точку, совпадающую с началом канонической системы координат. Эта точка находится из системы уравнений (25.3), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} 3x_0 - y_0 + 1 &= 0, \\ -x_0 + 3y_0 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

и совпадает с аналогичной системой уравнений для кривой № 1, т.е. с (25.12). Решение этой системы определяет точку $O'(x_0, y_0)$, $x_0 = -1/8$, $y_0 = 5/8$, которая является началом канонической системы координат (см. рис. 141,а), при этом находить эту систему координат вовсе не обязательно.

Иначе обстоит дело, если задачу решать другим способом. В этом случае конечный результат не очевиден, и следует найти каноническую систему координат. Для этого нужно решить задачу на собственные значения и собственные векторы матрицы квадратичной формы G , а затем на основании нового базиса \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 перейти в новую систему координат $x'Oy'$. Далее, выполнив параллельный перенос с помощью выделения полного квадрата, мы получим каноническую форму исходного уравнения и только тогда сможем убедиться в том, что уравнение определяет единственную точку и найти ее координаты.

Реализуем эту схему для заданного уравнения. Решаем задачу на собственные значения и собственные векторы

$$G\mathcal{E}' = \lambda\mathcal{E}'$$

или

$$\begin{pmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25.28)$$

Поскольку матрица квадратичной формы G совпадают с матрицей квадратичной формы уже рассмотренной кривой № 1, то и задача (25.28) совпадает с уже решенной задачей (25.16). Это позволяет нам воспользоваться соотношением (25.22) (в противном случае нам пришлось бы задачу (25.28) решать заново). Подставив (25.22) в исходное уравнение, запишем

$$2(x')^2 + 4(y')^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' - \frac{6}{\sqrt{2}}y' + \frac{11}{8} = 0.$$

Выделив в этом уравнении полный квадрат, приведём его к виду

$$2\left(x' - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(y' - \frac{3}{4\sqrt{2}}\right)^2 = 0,$$

говорящему о том, что оно определяет единственную точку $O'(x'_0, y'_0)$, $x'_0 = 1/2\sqrt{2}$, $y'_0 = 3/4\sqrt{2}$ в системе координат $x'Oy'$ (рис. 141,б). Из сравнения рис. 141,а и 141,б видно, что положение точки в первом решении задается в старой системе координат xOy как $x_0 = -1/8$, $y_0 = 5/8$, а во втором — в системе координат $x'Oy'$ как $x'_0 = 1/2\sqrt{2}$, $y'_0 = 3/4\sqrt{2}$. Координаты x_0, y_0 и x'_0, y'_0 связаны общим соотношением (25.21).

Пример 25.2. В заданной системе координат построить кривые второго порядка из примера 24.2.

Решение.

1. В декартовой системе координат уравнение кривой имеет вид

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

Каноническая форма этого уравнения

$$\frac{(x'')^2}{4} - \frac{(y'')^2}{9} = 1 \quad (25.29)$$

уже получена в примере 24.2 простым вычислением инвариантов. Чтобы построить эту кривую в заданной системе координат, найдём начало канонической системы координат — точку $O'(x_0, y_0)$. Для этого следует решить систему (25.3), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} 5x + 6y - 11 &= 0, \\ 6x - 6 &= 0. \end{aligned} \quad (25.30)$$

Решение этой системы дает $x_0 = 1, y_0 = 1$. Угол поворота, приводящий к канонической системе координат $x''O'y''$, задается соотношением (23.27):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{9 - 5}{6} = \frac{2}{3}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} \approx 33,6^\circ. \quad (25.31)$$

Вычислив

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4/9}} = \frac{3}{\sqrt{13}}, \\ \sin \varphi &= \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{9}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \end{aligned} \quad (25.32)$$

можем записать преобразование координат (25.10), приводящее к канонической форме (25.29), в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (25.33)$$

Это означает, что каноническая система координат имеет своим началом точку $O'(1, 1)$, а её координатные оси повернуты на угол $\varphi = \operatorname{arctg}(2/3)$ против часовой стрелки (см. рис. 142, а).

Решим эту же задачу без использования инвариантов. Для этого от ортонормированного базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 в системе координат xOy перейдём в новую систему координат $x'O'y'$ с новым ортонормированным базисом \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 . Согласно теореме 24.1, чтобы их найти, следует решить задачу на собственные значения и собственные векторы (24.14) матрицы G :

$$G\mathcal{E}' = \lambda\mathcal{E}',$$

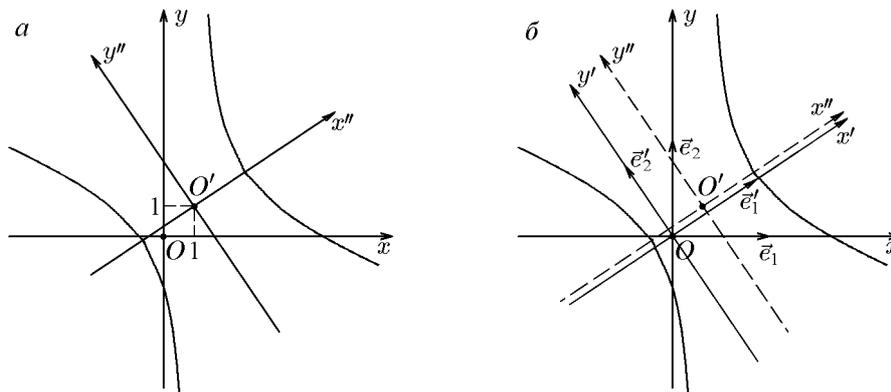


Рис. 142.

которая в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda & 6 \\ 6 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25.34)$$

Решив характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 6 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0,$$

найдем собственные значения $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$. Подставив $\lambda_1 = 9$ в (25.34), получим

$$\mathcal{E}'_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix},$$

где

$$-4m_1 + 6n_1 = 0$$

или

$$n_1 = \frac{2}{3}m_1.$$

Тогда

$$\mathcal{E}'_1 = m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix},$$

а с учётом нормировки $\mathcal{E}'_1 \mathcal{E}'_1 = 1$ получим $m_1^2(1 + 4/9) = 1$, т.е. $m_1 = 3/\sqrt{13}$ и

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (25.35)$$

Подставив в (25.34) $\lambda_2 = -4$, найдём

$$\mathcal{E}'_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

где

$$9m_2 + 6n_2 = 0$$

или

$$n_2 = -\frac{3}{2}m_2.$$

Тогда

$$\mathcal{E}'_2 = m_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \end{pmatrix},$$

и с учётом нормировки получим

$$\mathcal{E}'_2 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (25.36)$$

Матрицы (25.35) и (25.36) определяют координаты нового базиса

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{13}}(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2), \\ \vec{e}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{13}}(-2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2). \end{aligned} \quad (25.37)$$

Старые и новые координаты, согласно (24.9), связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x' \mathcal{E}'_1 + y' \mathcal{E}'_2 = x' \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y' \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad (25.38)$$

или

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' - 2y'), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y'). \end{aligned} \quad (25.39)$$

Подставив (25.22) в исходное уравнение, запишем

$$\frac{5}{13}(3x' - 2y')^2 + \frac{12}{13}(3x' - 2y')(2x' + 3y') - \frac{22}{\sqrt{13}}(3x' - 2y') - \frac{12}{\sqrt{13}}(2x' + 3y') - 19 = 0,$$

или

$$9(x')^2 - 4(y')^2 - \frac{90}{\sqrt{13}}x' + \frac{8}{\sqrt{13}}y' - 19 = 0.$$

Выделив полный квадрат в этом уравнении, получим

$$9\left(x' - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 - 4\left(y' - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 - 36 = 0.$$

С помощью параллельного переноса

$$\begin{aligned} x'' &= x' - x'_0 = x' - \frac{5}{\sqrt{13}}, \\ y'' &= y' - y'_0 = y' - \frac{1}{\sqrt{13}} \end{aligned} \quad (25.40)$$

приходим к канонической системе координат $x''O'y''$ с началом в точке $O'(5/\sqrt{13}, 1/\sqrt{13})$, в которой кривая запишется в канонической форме

$$\frac{(x' - 5/\sqrt{13})^2}{4} - \frac{(y' - 1/\sqrt{13})^2}{9} = 1. \quad (25.41)$$

Уравнение (25.41) описывает гиперболу, изображенную на рис. 142,б. Из сравнения рис. 142,а и 142,б видно, что положение начала канонической системы координат в первом случае задается в старой системе координат xOy как $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, а во втором — в системе координат $x'Oy'$ как $x'_0 = 5/\sqrt{13}$, $y'_0 = 1/\sqrt{13}$. Координаты x_0, y_0 и x'_0, y'_0 связаны общим соотношением (25.21) (или (25.22)):

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{\sqrt{13}} \left(\frac{15}{\sqrt{13}} - \frac{2}{\sqrt{13}} \right), \\ 1 &= \frac{1}{\sqrt{13}} \left(\frac{10}{\sqrt{13}} + \frac{3}{\sqrt{13}} \right). \end{aligned} \quad (25.42)$$

2. В декартовой системе координат уравнение кривой имеет вид

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y + 17 = 0.$$

Вычислив инварианты кривой, с учётом результатов примера 24.2 убеждаемся в том, что кривая является распадающейся и соответствует двум прямым

$$x = 1, \quad 5x + 12y - 17 = 0. \quad (25.43)$$

Для их построения совершенно не требуется каноническая система координат, поскольку они легко строятся в системе xOy (см. рис. 143, *a*).

Прямые (25.43) пересекаются в точке $O'(1, 1)$, т.е. в точке, которая является центром гиперболы, найденной в предыдущем примере; более того, эти прямые являются ее асимптотами. Это объясняется тем, что уравнения кривых из этих двух примеров обладают одинаковыми квадратичными и линейными частями, различаясь лишь свободным членом. Таким образом, к заданной квадратичной и линейной частям всегда можно подобрать свободный член, который обращает инвариант Δ в нуль и делает кривую распадающейся на прямые, являющиеся асимптотами (см. пример 24.2) соответствующей гиперболы.

Решим эту же задачу без использования инвариантов. Поскольку без инвариантов заранее установить, распадается кривая или нет, невозможно, то следует найти каноническую систему координат. Для этого следует решить задачу на собственные значения и собственные векторы матрицы квадратичной формы. Поскольку матрица квадратичной формы данной кривой совпадает с матрицей квадратичной формы рассмотренной выше кривой, мы можем воспользоваться новым базисом (25.37):

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{13}}(3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2), \\ \vec{e}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{13}}(-2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2)\end{aligned}\tag{25.44}$$

и новой системой координат $x'Oy'$. Связь между старыми координатами x, y и новыми координатами x', y' задается соотношениями (24.9):

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{13}}(3x' - 2y'), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{13}}(2x' + 3y'),\end{aligned}\tag{25.45}$$

подставив которые в исходное уравнение, приведём его к виду

$$9(x')^2 - 4(y')^2 - \frac{90}{\sqrt{13}}x' + \frac{8}{\sqrt{13}}y' + 17 = 0.$$

Выделив полный квадрат в этом уравнении, получим

$$9\left(x' - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 - 4\left(y' - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 = 0.$$

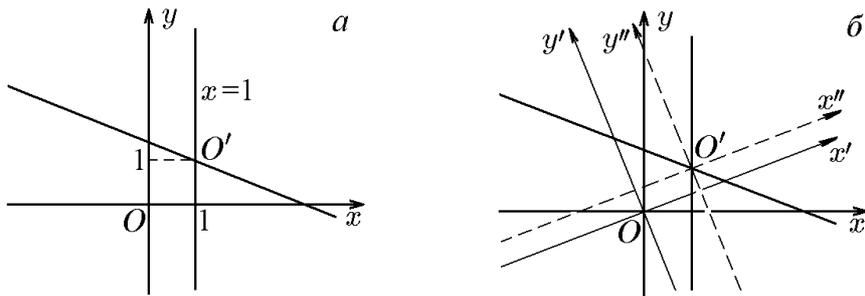


Рис. 143.

С помощью параллельного переноса

$$\begin{aligned}x'' &= x' - x'_0 = x' - \frac{5}{\sqrt{13}}, \\y'' &= y' - y'_0 = y' - \frac{1}{\sqrt{13}}\end{aligned}\tag{25.46}$$

приходим к канонической системе координат $x''O'y''$ с началом в точке $O'(5/\sqrt{13}, 1/\sqrt{13})$ и базисом (25.44), в которой уравнение кривой запишется в канонической форме

$$9(x'')^2 - 4(y'')^2 = 0,\tag{25.47}$$

допускающей представление

$$(3x'' - 2y'')(3x'' + 2y'') = 0$$

и дающей в канонической системе координат две прямые, проходящие через ее начало — точку $O'(5/\sqrt{13}, 1/\sqrt{13})$:

$$\begin{aligned}3x'' - 2y'' &= 0, \\3x'' + 2y'' &= 0\end{aligned}\tag{25.48}$$

(см. рис. 143, б).

Подставив (25.46) в (25.48), получим уравнения этих прямых в системе координат $x'Oy'$:

$$\begin{aligned}3x' - 2y' - \sqrt{13} &= 0, \\3x' + 2y' - \frac{17}{\sqrt{13}} &= 0.\end{aligned}\tag{25.49}$$

Возвратившись к исходным переменным (25.45), найдём

$$x = 1, \quad 5x + 12y - 17 = 0,$$

что совпадёт с уравнением (25.43), полученным с помощью инвариантов.

Перейдём теперь к параболическим кривым, когда $\delta = 0$.

В этом случае система (25.3) примет вид

$$\begin{aligned}a_{11}x_0 + a_{12}y_0 &= -a_1, \\a_{12}x_0 + a_{22}y_0 &= -a_2.\end{aligned}\tag{25.50}$$

Определитель δ этой системы обращается в нуль:

$$\delta = \det G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0,\tag{25.51}$$

и, следовательно, система (25.50) несовместна и не позволяет найти начало канонической системы координат.

С геометрической точки зрения, отсутствию решения соответствует случай параллельных прямых (25.50) с угловыми коэффициентами

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}},$$

совпадающими в силу (25.51) и равными тангенсу (23.27) угла поворота оси Ox (или Ox' , что то же самое), приводящего к канонической системе координат:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}. \quad (25.52)$$

Повернём систему координат $xO'y$ на угол φ , определяемый соотношением (25.52). Такой поворот приводит к канонической системе координат $x''O'y''$, в которой параметры x_0, y_0 , определяющие параллельный перенос, пока произвольны. Матрица Q'' , согласно (25.2), (25.5), имеет вид

$$Q'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1'' \\ 0 & \lambda_2 & a_2'' \\ a_1'' & a_2'' & F(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \quad (25.53)$$

где

$$\begin{aligned} a_1'' &= a_1' \cos \varphi + a_2' \sin \varphi = \\ &= (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) \cos \varphi + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) \sin \varphi, \\ a_2'' &= -a_1' \sin \varphi + a_2' \cos \varphi = \\ &= -(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) \sin \varphi + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (25.54)$$

и

$$F(x_0, y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0. \quad (25.55)$$

Теперь параметры параллельного переноса выберем так, чтобы коэффициенты a_2'' и $F(x_0, y_0)$ обращались в нуль. Для этого нам нужно решить систему

$$\begin{aligned} -(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) \sin \varphi + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) \cos \varphi &= 0, \\ F(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \quad (25.56)$$

Если x_0 и y_0 есть решения системы (25.56), то матрица (25.53) приводится к виду

$$Q'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1'' \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ a_1'' & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (25.57)$$

что соответствует уравнению параболы в канонической форме

$$\lambda_2(y'')^2 + 2a_1''x'' = 0. \quad (25.58)$$

Заметим, что первое уравнение из (25.56) с учётом (25.52) можно записать в виде

$$a_{11}(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + a_{12}(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) = 0,$$

и тогда систему (25.56) можно записать через исходные коэффициенты уравнения как

$$\begin{aligned} a_{11}(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + a_{12}(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2) &= 0, \\ a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_1x_0 + 2a_2y_0 + a_0 &= 0. \end{aligned} \quad (25.59)$$

Таким образом, как и в предыдущих случаях, мы можем независимо друг от друга найти начало канонической системы координат, решив (25.59), и угол ее поворота относительно исходной системы координат, воспользовавшись (25.52). Для уравнения параболы в канонической форме можно воспользоваться соотношением (24.43):

$$(y'')^2 \pm \frac{2}{S} \sqrt{-\frac{\Delta}{S}} x'' = 0, \quad (25.60)$$

выбрав знак, противоположный знаку инварианта S .

Пример 25.3. В заданной системе координат построить кривые второго порядка из примера 24.3.

Решение.

1. В декартовой системе координат уравнение кривой имеет вид

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0.$$

Каноническая форма этого уравнения

$$(y'')^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}x'' = 0 \quad (25.61)$$

получена в примере 24.3 методом инвариантов:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5, \quad s = \text{Sp } G = \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = 5, \quad \delta = \det G = 0, \\ \Delta = \det Q = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3/2 \\ 2 & -3/2 & -7 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4} < 0. \end{aligned} \quad (25.62)$$

Чтобы построить эту параболу, найдём начало канонической системы координат — точку $O'(x_0, y_0)$. Для этого следует решить систему (25.59), которая в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} 1 \cdot (x_0 - 2y_0 + 2) - 2 \left(-2x_0 + 4y_0 - \frac{3}{2} \right) &= 0, \\ x_0^2 - 4x_0y_0 + 4y_0 + 4x_0 - 3y_0 - 7 &= 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned} x_0 - 2y_0 &= -1, \\ (x_0 - 2y_0)^2 + 4x_0 - 3y_0 - 7 &= 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x_0 - 2y_0 &= -1, \\ 4x_0 - 3y_0 &= 6, \end{aligned}$$

откуда координаты x_0 и y_0 находятся как

$$x_0 = 3, \quad y_0 = 2. \quad (25.63)$$

Угол поворота, приводящий к канонической системе координат $x''O'y''$, дается соотношением (25.52):

$$\text{tg } \varphi = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{2}{(-2)} = \frac{1}{2}, \quad \varphi = \arctg \frac{1}{2} \approx 26,5^\circ. \quad (25.64)$$

Вычислив

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}; \\ \sin \varphi &= \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \end{aligned} \quad (25.65)$$

запишем преобразования координат, приводящие исходное уравнение к канонической форме, в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (25.66)$$

Это означает, что каноническая система координат $x''O'y''$ имеет своим началом точку $O'(3, 2)$, а ее координатные оси повернуты на угол $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ против часовой стрелки (см. рис. 144, а).

Для построения параболы вычислим, согласно (25.54),

$$\begin{aligned} a_1'' &= (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) \cos \varphi + (a_{12}x_0 + a_{22} + a_2) \sin \varphi = \\ &= (1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 2) \frac{2}{\sqrt{5}} + \left(-2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

и воспользовавшись формулой (25.58), получим

$$\lambda_2(y'')^2 + 2a_1''x'' = 5(y'')^2 + \sqrt{5}(x'') = 0$$

или

$$(y'')^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}x'', \quad (25.67)$$

что соответствует параболе, изображенной на рис. 144, а (ее ветви направлены против оси Ox'').

Вместо формулы (25.58) можно воспользоваться канонической формой (25.60), записанной через инварианты:

$$(y'')^2 \pm \frac{2}{s} \sqrt{-\frac{\Delta}{s}} x'' = (y'')^2 \pm \frac{2}{5} \sqrt{-\frac{25}{4 \cdot 5}} x' = (y'')^2 \pm \frac{1}{\sqrt{5}} x' = 0.$$

Недостатком этой формулы является то, что знак второго слагаемого не определен и, следовательно, не определено направление ветвей параболы в канонической системе координат. Направление ветвей параболы можно выяснить, если учесть, что ось y'' или, в силу (25.66), прямая $y = 2x + 8$ является касательной к параболе в ее вершине. Если теперь провести любую прямую, параллельную ей, и эта прямая пересечёт параболу, то парабола будет расположена в той же полуплоскости, что и секущая прямая. Поэтому выберем, например, прямую $y = -2x$, расположенную в отрицательной полуплоскости $x'' < 0$ (см. рис. 144, а). Подставив $y = -2x$ в исходное уравнение, найдём

$$\begin{aligned} (x - 2y)^2 + 4x - 3y - 7|_{y=-2x} &= (5x)^2 + 10x - 7 = (5x + 1)^2 - 8 = 0; \\ x_{1,2} &= \frac{1}{5}(-1 \pm \sqrt{8}). \end{aligned}$$

Это означает, что прямая $y = -2x$ пересекает параболу в двух точках и, следовательно, парабола расположена в отрицательной полуплоскости $x'' < 0$. Это соответствует выбору знака «+», что приводит к уравнению

$$(y'')^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}x' = 0,$$

совпадающему с (25.67).

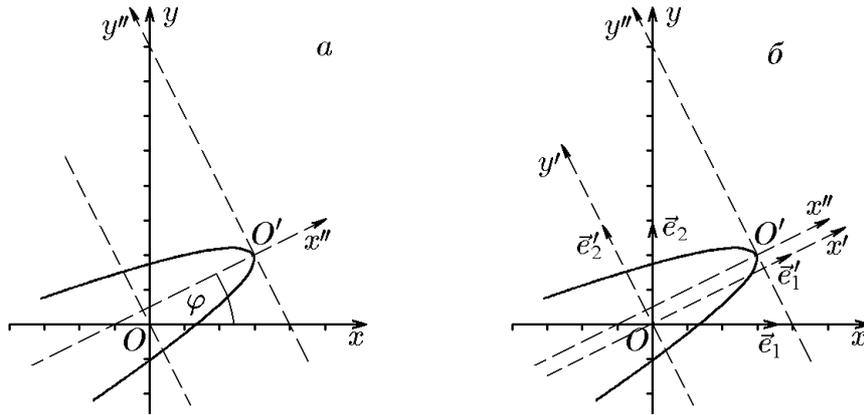


Рис. 144.

◇ Без использования вспомогательных формул каноническое уравнение можно получить непосредственной подстановкой (25.66) в исходное уравнение.

Решим эту же задачу без использования инвариантов. Для этого от ортонормированного базиса \vec{e}_1, \vec{e}_2 в системе координат xOy перейдём в новую систему координат $x'Oy'$ с новым ортонормированным базисом \vec{e}'_1, \vec{e}'_2 . Согласно теореме 24.1, чтобы их найти, следует решить задачу на собственные значения и собственные векторы (24.14) матрицы G :

$$G\mathcal{E}' = \lambda\mathcal{E}',$$

которая в данном случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = 0. \tag{25.68}$$

Решив характеристическое уравнение этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 5) = 0,$$

найдем собственные значения $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$.

Подставив $\lambda_1 = 0$ в (25.68), получим

$$\mathcal{E}'_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ n_1 \end{pmatrix},$$

где

$$m_1 - 4n_1 = 0$$

или

$$m_1 = 2n_1.$$

Тогда

$$\mathcal{E}'_1 = n_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а с учётом нормировки $\mathcal{E}'_1{}^T \mathcal{E}'_1 = 1$ получим $n_1^2(1 + 4) = 1$, т.е. $n_1 = 1/\sqrt{5}$ и

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{25.69}$$

Подставив в (25.68) $\lambda_2 = 5$, найдём

$$\mathcal{E}'_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

где

$$-4m_2 - 2n_2 = 0$$

или

$$n_2 = -2m_2.$$

Тогда

$$\mathcal{E}'_2 = m_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

и с учётом нормировки получим

$$\mathcal{E}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (25.70)$$

Матрицы (25.69) и (25.70) определяют координаты нового базиса

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \\ \vec{e}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2). \end{aligned} \quad (25.71)$$

Старые и новые координаты, согласно (24.9), связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x'\mathcal{E}'_1 + y'\mathcal{E}'_2 = x'\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y'\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y'), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y'). \end{aligned} \quad (25.72)$$

Подставив выражения (25.72) в исходное уравнение, запишем

$$(x - 2y)^2 + 4x - 3y - 7 = \frac{1}{5}(2x' - y' - 2x' - 4y')^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}(2x' - y') - \frac{3}{\sqrt{5}}(x' + 2y') - 7 = 0,$$

или

$$5(y')^2 - 2\sqrt{5}y' + \sqrt{5}x' - 7 = 0.$$

Выделив полный квадрат в этом уравнении, получим

$$5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right) = 0.$$

Теперь с помощью параллельного переноса

$$\begin{aligned} x'' &= x' - \frac{8}{\sqrt{5}}, \\ y'' &= y' - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned} \quad (25.73)$$

приходим к канонической системе координат $x''O'y''$ с началом в точке $O'(8/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, в которой кривая запишется в канонической форме

$$(y'')^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}x'' \tag{25.74}$$

Уравнение (25.74) описывает параболу, изображенную на рис. 144,б. Из сравнения рис. 144,а и 144,б видно, что положение начала канонической системы координат в первом случае задается в старой системе координат xOy как $x_0 = 3, y_0 = 2$, а во втором — в системе координат $x'Oy'$ как $x'_0 = 8/\sqrt{5}, y'_0 = 1/\sqrt{5}$. Координаты x_0, y_0 и x'_0, y'_0 связаны общим соотношением (25.72).

Кривые 2,3,4 объединены одним уравнением в декартовой системе координат:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 2x - 4y + a_0 = 0, \tag{25.75}$$

которое при $a_0 = -3$ описывает кривую 2, при $a_0 = 1$ — кривую 3 и при $a_0 = 2$ — кривую 4.

Все три кривые описываются матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & a_0 \end{pmatrix} \tag{25.76}$$

и матрицей квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \tag{25.77}$$

Поскольку оба инварианта δ и Δ равны нулю:

$$\delta = \det G = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\Delta = \det Q = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & a_0 \end{vmatrix} = 0,$$

то эти кривые относятся к параболическому типу и представляют собой параллельные, совпадающие и мнимые (\emptyset) прямые, полученные в примере 24.3:

№ 2, $a_0 = -3, \quad \begin{matrix} x + 2y + 1 = 0, \\ x + 2y - 3 = 0; \end{matrix} \quad F(x, y) = (x + 2y + 1)(x + 2y - 3) = 0;$

№ 3, $a_0 = 1, \quad \begin{matrix} x + 2y + 1 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0; \end{matrix} \quad F(x, y) = (x + 2y + 1)^2 = 0;$

№ 4, $a_0 = 2, \quad \begin{matrix} x + 2y - 1 = i, \\ x + 2y - 1 = -i; \end{matrix} \quad F(x, y) = (x + 2y - 1)^2 + 1 = 0,$

соответственно.

Построение кривых 2,3,4 не вызывает затруднений и не требует использования канонической системы координат (рис. 145), поскольку эти кривые являются прямыми.

Иначе обстоит дело, если не используются инварианты кривой. В этом случае конечный результат не очевиден, и следует найти каноническую систему координат. Поскольку все три уравнения имеют одну и ту же матрицу квадратичной формы, то можно воспользоваться одной задачей на собственные значения:

$$G\mathcal{E}' = \lambda\mathcal{E}' \tag{25.78}$$

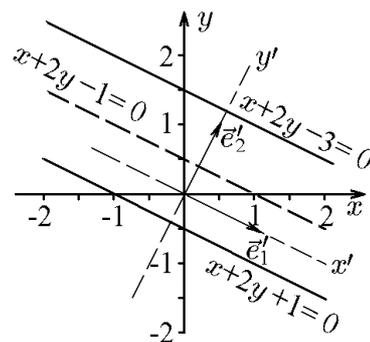


Рис. 145.

или, в нашем случае,

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} \mathcal{E}' = 0.$$

Собственные значения задачи (25.78) определены уравнением $\lambda^2 - 5\lambda = 0$ и равны $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$. Каждому из этих собственных значений соответствуют собственные ортонормированные векторы

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (25.79)$$

определяющие новый базис

$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_1 - \vec{e}_2), \\ \vec{e}'_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \end{aligned}$$

и связь новых и старых координат

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x' \mathcal{E}'_1 + y' \mathcal{E}'_2 = \frac{x'}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{y'}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y'). \end{aligned} \quad (25.80)$$

Подставив (25.80) в (25.75), найдём

$$5(y')^2 - 2\sqrt{5}y' + a_0 = 0.$$

Выделив полный квадрат, приведём уравнение к виду

$$\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \frac{a_0 - 1}{5} = 0$$

или

$$\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{1 - a_0}}{\sqrt{5}}\right) \left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{1 - a_0}}{\sqrt{5}}\right) = 0. \quad (25.81)$$

Отсюда найдём (см. рис. 145)

при $a = -3$

$$\left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0;$$

при $a = 1$

$$\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 0, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

при $a = 2$

$$\left(y' - \frac{1 - i}{\sqrt{5}}\right) \left(y' - \frac{1 + i}{\sqrt{5}}\right) = 0, \quad \emptyset.$$

◇ Из (25.81) следует, что кривая (25.75) распадается на две параллельные прямые при $a_0 < 1$; на две совпадающие прямые при $a_0 = 1$ и, наконец, представляет собой пустое множество при $a_0 > 1$ (мнимые прямые).

26. Пересечение кривой второго порядка с прямыми

Рассмотрим кривую второго порядка, заданную в некоторой системе координат уравнением

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \quad (26.1)$$

и прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$ с направляющим вектором $\vec{s} = (m, n)$, заданную параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt. \end{aligned} \quad (26.2)$$

Чтобы найти точки пересечения заданных линий, подставим (26.1) в (26.2). Такая подстановка приведёт к квадратному уравнению для определения параметра t , соответствующего точкам пересечения:

$$F(x, y) = F_0 + 2F_1t + F_2t^2 = 0, \quad (26.3)$$

где

$$\begin{aligned} F_0 &= F(x_0, y_0), \\ F_1 &= m(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1) + n(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2), \\ F_2 &= a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2. \end{aligned} \quad (26.4)$$

С помощью уравнения (26.3) можно проследить особенности пересечения кривых второго порядка и прямых.

Если $F_2 \neq 0$, то квадратное уравнение (26.3) имеет либо два решения — различных или совпадающих, либо решений не имеет. Геометрически это означает, что кривая второго порядка и прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в двух точках: различных при $t_1 \neq t_2$ и совпадающих при $t_1 = t_2$ (точку касания будем рассматривать как две совпадающие).

Если же $F_2 = 0$, то уравнение (26.3) вырождается в линейное:

$$F_0 + 2F_1t = 0. \quad (26.5)$$

Отсюда при $F_1 \neq 0$ уравнение будет иметь единственное решение t_1 , соответствующее единственной точке пересечения, которая ни в коем случае не может быть точкой касания. Если же $F_1 = 0$, то при $F_0 \neq 0$ уравнение (26.5) решений не имеет, а при $F_0 = 0$ оно превращается в тождество, т.е. имеет бесконечное множество решений. Геометрически это соответствует в первом случае отсутствию точек пересечения, а во втором тому, что кривая распадается на прямые, одна из которых является заданной.

◆ Направление, задаваемое вектором $\vec{s} = (m, n)$, координаты которого удовлетворяют уравнению

$$F_2 = a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0 \quad (26.6)$$

называется *асимптотическим направлением* кривой 2-го порядка.

Пример 26.1. Показать, что асимптотическое направление является характеристикой самой кривой и не меняет своей ориентации относительно осей симметрии кривой при ортонормированных преобразованиях системы координат.

Решение. Запишем уравнение (26.6), определяющее асимптотическое направление кривой, в матричной форме:

$$F_2 = (m \ n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}^\top G \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = 0. \quad (26.7)$$

Поскольку направление вектора $\vec{s} = (m, n)$ не меняется при параллельном переносе системы координат, достаточно рассмотреть ортогональное преобразование, соответствующее ее повороту:

$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}, \quad (26.8)$$

при котором матрица G квадратичной формы кривой, согласно теореме 23.1, преобразуется к виду

$$G' = P^\top G P. \quad (26.9)$$

Подставив (26.7) в (26.6), получим

$$\begin{aligned} F_2(m, n) &= \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}^\top G \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \left(P \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} \right)^\top G P \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}^\top P^\top G P \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}^\top G' \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = F_2'(m', n') = 0. \end{aligned} \quad (26.10)$$

Таким образом, квадратичная часть (26.7) не зависит от выбора системы координат. Это и означает, что асимптотическое направление является характеристикой самой кривой, это направление удобнее всего установить в канонической системе координат.

Пример 26.2. Показать, что кривая второго порядка гиперболического типа имеет два асимптотических направления, совпадающих с направлениями ее асимптот; кривая параболического типа — одно асимптотическое направление, совпадающее с направлением ее оси симметрии, а кривая эллиптического типа асимптотических направлений не имеет. Результат проиллюстрировать графически.

Решение. Согласно определению (26.7), уравнение для нахождения асимптотических направлений кривых второго порядка имеет вид

$$a_{11}m^2 + 2a_{12}mn + a_{22}n^2 = 0.$$

Если $a_{11} \neq 0$, то $n \neq 0$, так как иначе и $m = 0$. Разделим уравнение на n^2 :

$$a_{11} \left(\frac{m}{n} \right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{m}{n} \right) + a_{22} = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{m}{n} \right)_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{-\delta}}{a_{11}}. \quad (26.11)$$

Из (26.11) следует, что кривые параболического типа, для которых $\delta < 0$, имеют два асимптотических направления (26.11).

Кривые параболического типа, для которых $\delta = 0$, имеют одно асимптотическое направление

$$\frac{m}{n} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}. \quad (26.12)$$

Кривые эллиптического типа, для которых $\delta > 0$, асимптотических направлений не имеют.

Для геометрической интерпретации удобнее (и достаточно) воспользоваться канонической системой координат, в которой матрица G имеет диагональный вид. Рассмотрим последовательно все три типа.

I. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ее асимптотические направления находятся из уравнения (26.7):

$$\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = \left(\frac{m}{a} - \frac{n}{b}\right)\left(\frac{m}{a} + \frac{n}{b}\right) = 0$$

или

$$\frac{m}{n} = \pm \frac{a}{b} \quad (26.13)$$

и, как следует из (26.13), асимптотические направления гипербола — это направления ее асимптот. На рис. 146,а изображено взаимное расположение гипербола и прямых асимптотических направлений. Две прямые, представляющие асимптоты гипербола, не имеют точек пересечения с ней. Любые параллельные асимптотам прямые, т.е. прямые асимптотического направления, пересекаются с гипербола только в одной точке.

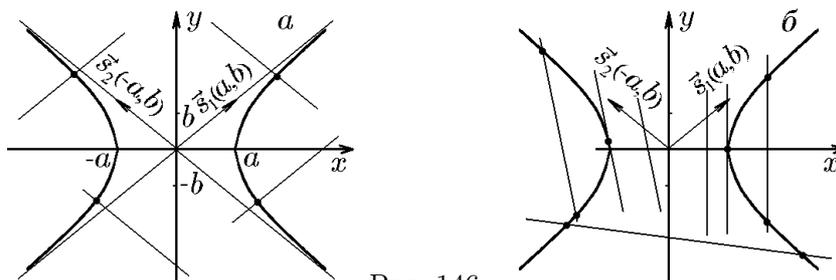


Рис. 146.

На рис. 146,б изображено взаимное расположение гипербола и прямых неасимптотических направлений. Любая прямая неасимптотического направления либо не пересекается с гипербола, либо пересекается с ней в двух точках (точка касания рассматривается как две совпадающие).

II. Парабола

$$y^2 - 2a_1x = 0, \quad a_1 > 0.$$

Ее асимптотические направления находятся из уравнения $n^2 = 0$, которое задает направление $\vec{s} = (m, 0)$, совпадающее с направлением оси Ox , являющейся осью симметрии данной параболы. На рис. 147,а изображено взаимное расположение параболы и прямых асимптотических направлений, т.е. прямых, параллельных оси Ox . Каждая прямая асимптотического направления пересекает параболу только в одной точке (точки касания отсутствуют).

На рис. 147,б изображено взаимное расположение параболы и прямых неасимптотических направлений. Любая прямая неасимптотического направления либо не пересекается с параболой, либо пересекается с ней в двух точках (точка касания рассматривается как две совпавшие).

III. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

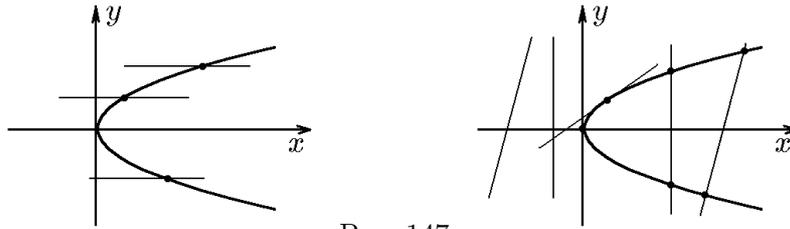


Рис. 147.

асимптотических направлений не имеет, поскольку уравнение

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} = 0$$

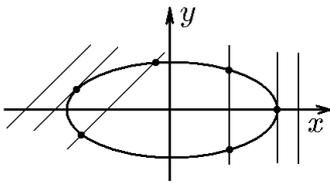


Рис. 148.

не имеет действительных корней. На рис. 148 показано, что любая прямая либо не пересекается с эллипсом, либо пересекает его в двух точках (точка касания рассматривается как две совпавшие).

Прямая и плоскость в пространстве

27. Плоскость

27.1. Параметрические уравнения и общее уравнение плоскости

Из курса элементарной геометрии известно, что плоскость в пространстве можно задать, например, точкой и прямой или тремя точками. Последнее утверждение с помощью векторной алгебры можно интерпретировать как задание точки и двух неколлинеарных векторов.

Пусть M_0 — точка, через которую проходит плоскость и \vec{s}_1 и \vec{s}_2 — два линейно независимых (неколлинеарных) вектора, параллельных плоскости π (если заданы три точки, то $\vec{s}_1 = \overrightarrow{M_0M_1}$, $\vec{s}_2 = \overrightarrow{M_0M_2}$). Выберем на плоскости произвольную точку M . Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ принадлежит этой плоскости и, следовательно, три вектора $\overrightarrow{M_0M}$, \vec{s}_1 и \vec{s}_2 являются компланарными. Это означает, что вектор $\overrightarrow{M_0M}$ можно разложить по векторам \vec{s}_1 и \vec{s}_2 :

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{s}_1 t_1 + \vec{s}_2 t_2,$$

или

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}_1 t_1 + \vec{s}_2 t_2, \quad (27.1)$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ — радиус-векторы точек M и M_0 , соответственно, а t_1 и t_2 — некоторые числа или параметры, представляющие координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$ в базисе \vec{s}_1, \vec{s}_2 . Изменяя в (27.1) параметры t_1 и t_2 от $-\infty$ до $+\infty$ независимо друг от друга, мы переберём все точки M , лежащие на плоскости.

◆ Уравнение (27.1) называется *параметрическим уравнением плоскости π в векторной форме*.

◇ Нетрудно показать, что плоскость π является аффинным пространством, поэтому плоскость, проходящую через точку M_0 параллельно векторам \vec{s}_1 и \vec{s}_2 , будем обозначать так: $\pi = \{M_0, \vec{s}_1, \vec{s}_2\}$.

Уравнение (27.1) можно записать в координатной форме.

Пусть в пространстве с репером $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ заданы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и векторы $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, определяющие положение плоскости π . Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости с радиус-вектором $\vec{r} = (x, y, z)$. Тогда из (27.1) следует

$$\begin{aligned} x &= x_0 + m_1 t_1 + m_2 t_2, \\ y &= y_0 + n_1 t_1 + n_2 t_2, \\ z &= z_0 + p_1 t_1 + p_2 t_2. \end{aligned} \quad (27.2)$$

◆ Уравнения (27.2) называются *параметрическими уравнениями плоскости*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно векторам \vec{s}_1 и \vec{s}_2 , в координатной форме. Векторы \vec{s}_1 и \vec{s}_2 называются *направляющими векторами плоскости*.

Система (27.2) эквивалентна утверждению: столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} x - x_0 & m_1 & m_2 \\ y - y_0 & n_1 & n_2 \\ z - z_0 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} = 0$$

линейно зависимы. Последнее будет справедливо, если

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (27.3)$$

Разложив определитель по первой строке, получим

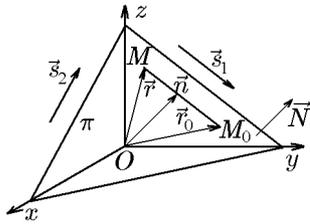
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (27.4)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \quad B = - \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, \quad (27.5)$$

Теперь можно ввести вектор $\vec{N} = (A, B, C)$. Особенностью этого вектора является его ортогональность направляющим векторам \vec{s}_1 и \vec{s}_2 , поскольку, согласно (27.5),

$$\vec{N} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2. \quad (27.6)$$



Если вектор $\vec{N} = (A, B, C)$ в (27.4) задан, то это уравнение является уравнением плоскости в векторной форме. Геометрически уравнение (27.4) означает, что любой вектор $\overrightarrow{M_0M}$ плоскости ортогонален к вектору \vec{N} (рис. 149):

$$(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}) = 0. \quad (27.7)$$

Рис. 149. \blacklozenge Уравнения (27.4) и (27.7) называются уравнением плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданному вектору \vec{N} , в координатной и векторной форме, соответственно. Вектор \vec{N} называется *вектором нормали* к плоскости.

Раскрыв скобки в уравнении (27.4), получим

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (27.8)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 = (\vec{N}, \vec{r}_0)$.

\blacklozenge Уравнение (27.8) называется *общим уравнением плоскости*.

Теорема 27.1. *Плоскости в пространстве — это в точности поверхности первого порядка.*

Доказательство. При выводе уравнения (27.8) векторы \vec{s}_1 и \vec{s}_2 предполагались неколлинеарными, в силу чего их координаты непропорциональны, и, согласно (27.5), хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля. Значит, уравнение плоскости есть уравнение 1-ой степени (27.8).

Покажем теперь, что всякое уравнение первой степени (27.8) является уравнением плоскости. Предположим, что $A \neq 0$ (в противном случае будем рассматривать коэффициенты B или C). Возьмём точку $M_0(-D/A, 0, 0)$ и направляющие векторы $\vec{s}_1 = (-B/A, 1, 0)$ и $\vec{s}_2 = (-C/A, 0, 1)$. Покажем, что плоскость π , проходящая через точку M_0 , с направляющими векторами \vec{s}_1 и \vec{s}_2 совпадает с множеством решений уравнения (27.8). Действительно, уравнение плоскости π , записанное через определитель (27.3), имеет вид

$$\begin{vmatrix} x + D/A & y & z \\ -B/A & 1 & 0 \\ -C/A & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x + D/A) + (C/A)z + (B/A)y = 0$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 27.1.1. Общее уравнение плоскости инвариантно относительно преобразования системы координат, представляющего параллельный перенос на любой вектор, перпендикулярный её вектору нормали.

Действительно, общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz = -D$$

можно записать в виде

$$(\vec{N}, \vec{r}) = -D, \quad (27.9)$$

где $\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ плоскости.

Переход к новой системе координат (O', x', y', z') определяется равенством

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}. \quad (27.10)$$

Подставив (27.10) в (27.9), с учётом $(\vec{N}, \vec{a}) = 0$ получим

$$(\vec{N}, \vec{r}' + \vec{a}) = (\vec{N}, \vec{r}') = -D,$$

т.е.

$$Ax' + By' + Cz' = -D$$

— уравнение, совпадающее с исходным.

27.2. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки

Пусть точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ не лежат на одной прямой (рис. 150). В этом случае векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ компланарны тогда и только тогда, когда

$$(\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

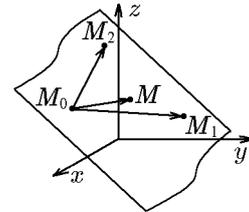


Рис. 15(27.11)

Уравнение (27.11) задаёт плоскость, проходящую через три точки. Очевидно, что его можно было получить исходя из уравнения (27.3), положив в качестве направляющих векторов $\vec{s}_1 = \overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{s}_2 = \overrightarrow{M_0M_2}$.

Кроме этого, от несимметричной по координатам x_i, y_i, z_i форме определителя (27.11) можно перейти к симметричной, не зависящей от порядка выбора точки M_i . Действительно, воспользовавшись свойствами определителя, определитель (27.11) можно записать как

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 & 0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 & 0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Теперь, вычтя последнюю строку из первых трёх, получим

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство определителя нулю позволяет переставить его строки в любом порядке, в том числе и следующем:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (27.12)$$

27.3. Нормированное уравнение плоскости

Поставим задачу получить уравнение плоскости, перпендикулярной заданному единичному вектору \vec{n} и проходящей на расстоянии p от начала координат. Обозначим (см. рис. 149)

$$\vec{r}_0 = p\vec{n}. \quad (27.13)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) &= 0; \\ (\vec{r}, \vec{n}) - p &= 0. \end{aligned} \quad (27.14)$$

Обозначив $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, получим

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (27.15)$$

Уравнения (27.14) и (27.15) — нормированное уравнение плоскости в векторной и координатной форме соответственно. Общее уравнение плоскости можно привести к виду (27.15), домножив его на нормирующий множитель λ :

$$\lambda = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (27.16)$$

Знак λ противоположен знаку C .

27.4. Уравнение плоскости в отрезках

В общем уравнении (27.7) плоскости перенесём свободный член $D \neq 0$ в правую часть:

$$Ax + By + Cz = -D.$$

Поделим обе части уравнения на $-D$:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1$$

или

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Введя обозначения

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C},$$

получим уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (27.17)$$

которое принято называть уравнением плоскости в отрезках. Числа a, b, c суть ориентированные длины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях (считая от начала координат). Пусть $y = 0, z = 0$. Тогда точка пересечения плоскости с осью Ox определится из уравнения плоскости:

$$\frac{x}{a} + \frac{0}{b} + \frac{0}{c} = 1,$$

т.е. $x = a$. Таким образом, длина отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Ox , действительно равна $|a|$, а знак a характеризует расположение плоскости относительно начала координат.

Пример 27.1. Построить плоскость, заданную уравнением в общем виде

$$x - y + 2z - 2 = 0.$$

Решение. Запишем уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{1} = 1.$$

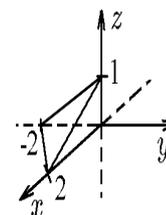


Рис. 151.

Здесь $a = 2$ – отрезок, который плоскость отсекает на оси Ox , $b = -2$ – на оси Oy , $c = 1$ – на оси Oz .

♦ Прямая, являющаяся пересечением заданной плоскости с координатной плоскостью, называется её *следом*.

Треугольник на рис. 151 образован следами плоскости из примера 27.1.

27.5. Неполные уравнения плоскости

Исследуем, какие частные положения относительно осей координат занимает плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, если некоторые коэффициенты этого уравнения обращаются в нуль.

1. Если $D = 0$, плоскость $Ax + By + Cz = 0$, у которой отсутствует свободный член, проходит через начало координат, так как его координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости:

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0.$$

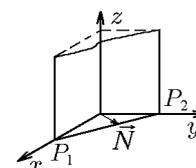


Рис. 152.

2. Если $C = 0$, то нормальный вектор $\vec{N} = (A, B, 0)$ плоскости $Ax + By + D = 0$ перпендикулярен оси Oz , так как проекция его на ось Oz равна нулю. Следовательно, плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси Oz (рис. 152). Эта плоскость пересекает ось Ox ($y = 0, z = 0$, а x находим из уравнения плоскости) в точке $P_1(-D/A, 0, 0)$, а ось Oy ($x = 0, z = 0$, а y находим из уравнения плоскости) – в точке $P_2(0, -D/B, 0)$.

3. Аналогично, если в общем уравнении плоскости $B = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz + D = 0$$

параллельна оси Oy , нормальный вектор $\vec{N} = (A, 0, C)$ перпендикулярен оси Oy (и здесь, если в уравнении плоскости отсутствует член с y , то плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy) (рис. 153).

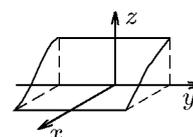


Рис. 153.

4. Если $A = 0$, то плоскость $Bu + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox (в уравнении отсутствует член с x).

5. Если $A = B = 0$, получим уравнение $Cz + D = 0$. По предыдущему эта плоскость проходит параллельно оси Ox ($A = 0$) и оси Oy ($B = 0$). Следовательно, плоскость $Cz + D = 0$ параллельна плоскости xOy и пересекает ось Oz в точке $P(0, 0, -D/C)$ (рис. 154,а).

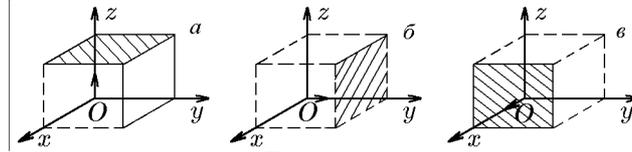


Рис. 154.

6. Аналогично, если $A = C = 0$, то плоскость $Bu + D = 0$ параллельна плоскости xOz (рис. 154,б).

7. Если $B = C = 0$, то плоскость $Ax + D = 0$ параллельна плоскости yOz (рис. 154,в).

8. Если $A = D = 0$, то плоскость $Bu + Cz = 0$ параллельна оси Ox ($A = 0$) и проходит через начало координат ($D = 0$). Следовательно, эта плоскость проходит через ось Ox .

9. Аналогично, если $B = D = 0$, то плоскость $Ax + Cz = 0$ содержит ось Oy (все точки оси лежат в этой плоскости).

10. Если $C = D = 0$, то плоскость $Ax + Bu = 0$ проходит через ось Oz .

11. Если $A = B = D = 0$, то уравнение $Cz = 0$ или $z = 0$, поскольку $C \neq 0$, определяет координатную плоскость xOy .

12. Если $A = C = D = 0$, то уравнение $Bu = 0$ или $u = 0$ определяет координатную плоскость xOz .

13. Аналогично, если $B = C = D = 0$, то уравнение $Ax = 0$ или $x = 0$ определяет координатную плоскость yOz .

27.6. Взаимное расположение двух плоскостей

Лемма 27.1. Вектор $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ параллелен плоскости π , задаваемой уравнением $Ax + Bu + Cz + D = 0$, тогда и только тогда, когда

$$(\vec{N}, \vec{a}) = A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \quad (27.18)$$

Доказательство. Вектор параллелен плоскости тогда и только тогда, когда вместе с его началом плоскости принадлежит и его конец. Отложим вектор $\vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma)$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости π . Тогда его конец будет иметь координаты $M_1(x_0 + \alpha, y_0 + \beta, z_0 + \gamma)$. Таким образом, параллельность вектора плоскости π эквивалентна равенству

$$A(x_0 + \alpha) + B(y_0 + \beta) + C(z_0 + \gamma) + D = 0,$$

которое с учётом условия $Ax + Bu + Cz + D = 0$ принадлежности точки M_0 плоскости π совпадает с уравнением (27.18).

Теорема 27.2. Плоскости π_1 и π_2 , заданные уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (27.19)$$

параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ коллинеарны, т.е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (27.20)$$

Плоскости π_1 и π_2 совпадают, когда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}, \quad (27.21)$$

и не пересекаются в противном случае:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}. \quad (27.22)$$

Доказательство. Достаточность (27.20) вытекает из леммы 27.1. Действительно, из (27.18) и (27.20) следует, что плоскостям π_1 и π_2 параллельны одни и те же множества векторов, а значит, плоскости π_1 и π_2 параллельны.

Докажем обратное утверждение. Один из коэффициентов первого уравнения (27.19) должен быть отличен от нуля. Без ограничения общности будем считать, что это A_1 . Тогда неколлинеарные векторы

$$\vec{a}_1 = (-B_1, A_1, 0), \quad \vec{a}_2 = (-C_1, 0, A_1)$$

параллельны плоскости π_1 , а значит, они параллельны и плоскости π_2 . Согласно условию параллельности вектора плоскости (27.18), имеем

$$A_2(-B_1) + B_2A_1 = 0, \quad A_2(-C_1) + C_2A_1 = 0,$$

откуда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

что эквивалентно условию (27.20).

Перейдём теперь к соотношению (27.21). Достаточность очевидна, и в проверке нуждается только необходимость. Из пропорции (27.21) следует $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$. Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка совпадающих плоскостей $\pi_1 = \pi_2$. Так как

$$0 = \lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) - (A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = \lambda D_1 - D_2,$$

то

$$D_2 = \lambda D_1.$$

Пропорциональность четвёрок (27.21) установлена.

Параллельные несовпадающие плоскости не пересекаются, и, следовательно, справедливо соотношение (27.22).

Следствие 27.2.1. Плоскости π_1 и π_2 (27.19) пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ коллинеарны.

◇ Задачу о взаимном расположении двух плоскостей можно свести к задаче исследования системы из двух уравнений (27.19).

27.7. Взаимное расположение трёх плоскостей

Пусть плоскости π_1 , π_2 и π_3 задаются, соответственно, уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0. \end{aligned} \quad (27.23)$$

Векторы нормалей к плоскостям: $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ и $\vec{N}_3 = (A_3, B_3, C_3)$.

В этом случае задачу о взаимном расположении трёх плоскостей удобнее свести к исследованию решений системы (27.23). Если обозначить через P матрицу и через \bar{P} расширенную матрицу системы (27.23):

$$P = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \bar{P} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix},$$

то возможны следующие случаи:

1) если $\det P \neq 0$, то три заданные плоскости имеют только одну точку пересечения, так как в этом случае система (27.23) имеет единственное решение;

2) если $\text{rang } P = 2$, $\text{rang } \bar{P} = 3$ и среди векторов \vec{N}_1 , \vec{N}_2 , \vec{N}_3 нет коллинеарных, то система (27.23) несовместна, плоскости попарно пересекаются, причём прямые пересечения попарно различны (плоскости образуют треугольную призму);

3) если $\text{rang } P = 2$, $\text{rang } \bar{P} = 3$ и среди векторов \vec{N}_1 , \vec{N}_2 , \vec{N}_3 есть два коллинеарных, то система (27.23) несовместна, две плоскости параллельны, а третья их пересекает;

4) если $\text{rang } P = 2$, $\text{rang } \bar{P} = 2$ и среди векторов \vec{N}_1 , \vec{N}_2 , \vec{N}_3 нет коллинеарных, то система (27.23) имеет бесконечное множество решений, плоскости попарно различны и проходят через одну прямую;

5) если $\text{rang } P = 2$, $\text{rang } \bar{P} = 2$ и среди векторов \vec{N}_1 , \vec{N}_2 , \vec{N}_3 есть два коллинеарных, то две плоскости совпадают, а третья их пересекает;

6) если $\text{rang } P = 1$, но коэффициенты любой пары уравнений не пропорциональны, то плоскости попарно параллельны;

7) если $\text{rang } P = 1$, но среди уравнений есть только два, коэффициенты которых пропорциональны, то две плоскости совпадают, а третья им параллельна;

8) если $\text{rang } \bar{P} = 1$, то три плоскости совпадают.

27.8. Пучок и связка плоскостей

Пусть π_1 и π_2 — две плоскости, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (27.24)$$

пересекаются по прямой ℓ .

◆ Уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (27.25)$$

называется *уравнением пучка плоскостей*, проходящих через линию пересечения плоскостей π_1 и π_2 .

Пусть π_1 , π_2 и π_3 — три плоскости, заданные уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0, \end{aligned} \quad (27.26)$$

пересекаются в точке M .

◆ Уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 \quad (27.27)$$

называется *уравнением связки плоскостей*, проходящих через точку пересечения плоскостей π_1 , π_2 и π_3 .

Теорема 27.3. *Плоскость π принадлежит пучку плоскостей (27.24) тогда и только тогда, когда ее уравнение можно представить в виде (27.25) при условии, что α и β не равны нулю одновременно.*

Доказательство полностью аналогично доказательству для пучка прямых на плоскости.

Следствие 27.3.1. Три любые плоскости, не принадлежащие одному пучку, однозначно определяют связку.

Теорема 27.4. *Плоскость π принадлежит связке плоскостей (27.26) тогда и только тогда, когда ее уравнение можно представить в виде (27.27) при условии, что α , β и γ не равны нулю одновременно.*

Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 27.3.

Пример 27.2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2, 1, 1)$ параллельно плоскости $\beta: 2x - 3y - z - 4 = 0$.

Решение. Запишем уравнение связки плоскостей, проходящих через заданную точку M_1 :

$$A(x - 2) + B(y - 1) + C(z - 1) = 0.$$

Пусть $\vec{N} = (A, B, C)$ — нормальный вектор искомой плоскости, который пока нам не известен. Искомая плоскость α должна быть параллельна данной плоскости β . Поэтому в качестве нормального вектора \vec{N} искомой плоскости можно взять вектор, равный вектору нормали $\vec{N}_1 = \{2, -3, 1\}$ данной плоскости

$$\vec{N} = \vec{N}_1 = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k},$$

т.е. $A = 2$, $B = -3$, $C = -1$. Таким образом, уравнение искомой плоскости есть

$$2(x - 2) - 3(y - 1) - (z - 1) = 0$$

или

$$2x - 3y - z = 0.$$

Пример 27.3. Записать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{aligned} \pi_1 : x + 2y + 3z + 4 &= 0, \\ \pi_2 : 3x + 2y + z - 4 &= 0, \end{aligned} \quad (27.28)$$

и точку $M_0(2, 2, 2)$.

Решение. Существует несколько способов решения этой задачи. Рассмотрим два из них.

1-й способ. Поскольку линией пересечения плоскостей π_1 и π_2 является прямая, не параллельная ни одной координатной плоскости, то можно найти точки пересечения этой прямой с плоскостями, например $z = 0$ и $x = 0$. Это даст нам три точки, через которые проходит искомая плоскость. Уравнение этой плоскости задаёт формула (27.12).

Итак, положив в (27.28) $z = 0$, имеем систему

$$\begin{aligned}x + 2y + 4 &= 0, \\3x + 2y - 4 &= 0,\end{aligned}$$

решение которой: $x = 4$, $y = -4$. Таким образом, точка пересечения прямой (27.28) с плоскостью $z = 0$ имеет координаты $M_1(4, -4, 0)$.

Положив теперь в (27.28) $x = 0$, получим систему

$$\begin{aligned}2y + 3z + 4 &= 0, \\2y + z - 4 &= 0,\end{aligned}$$

решение которой: $y = 4$, $z = -4$. Это означает, что точка пересечения прямой (27.28) с плоскостью $x = 0$ имеет координаты $M_2(0, 4, -4)$.

Имеем три точки: $M_0(2, 2, 2)$, $M_1(4, -4, 0)$ и $M_2(0, 4, -4)$, через которые проходит искомая плоскость. Её уравнение определяется формулой (27.12):

$$\begin{vmatrix}x & y & z & 1 \\2 & 2 & 2 & 1 \\4 & -4 & 0 & 1 \\0 & 4 & -4 & 1\end{vmatrix} = 0.$$

Вычтя последнюю строку определителя из трёх первых, найдём

$$\begin{vmatrix}x & y - 4 & z + 4 & 0 \\2 & -2 & 6 & 0 \\4 & -8 & 4 & 0 \\0 & 4 & -4 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x & y - 4 & z + 4 \\2 & -2 & 6 \\4 & -8 & 4\end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по первой строке, получим искомое уравнение плоскости:

$$x(-8 + 48) - (y - 4)(8 - 24) + (z + 4)(-16 + 8) = 0$$

или

$$5x + 2y - z - 12 = 0. \quad (27.29)$$

2-й способ. Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (27.28):

$$\alpha(x + 2y + 3z + 4) + \beta(3x + 2y + z - 4) = 0. \quad (27.30)$$

Искомой плоскостью является одна из плоскостей (27.30). Подставив в (27.30) координаты точки $M_0(2, 2, 2)$, получим

$$\alpha(2 + 4 + 6 + 4) + \beta(6 + 4 + 2 - 4) = 0$$

или

$$\beta = -2\alpha.$$

Положив $\alpha = 1$, имеем $\beta = -2$. Подставив их в (27.30), найдём искомое уравнение плоскости:

$$(x + 2y + 3z + 4) - 2(3x + 2y + z - 4) = 0$$

или

$$5x + 2y - z - 12 = 0,$$

совпадающее с уравнением (27.29), полученным первым способом.

Как видим, использование уравнения пучка прямых позволяет существенно сократить число арифметических выкладок.

Пример 27.4. Записать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{aligned} \pi_1 : x + 2y + 3z + 4 &= 0, \\ \pi_2 : 3x + 2y + z - 4 &= 0, \end{aligned} \quad (27.31)$$

параллельно вектору $\vec{a} = (1, 0, -2)$.

Решение. Приведём два решения: без и с использованием уравнения пучка плоскостей.

1-й способ. Поскольку прямая (27.31) совпадает с прямой (27.29) из предыдущего примера, то ей принадлежат две точки: $M_1(4, -4, 0)$ и $M_2(0, 4, -4)$. Теперь в качестве одного направляющего вектора плоскости выберем вектор \vec{a} , т.е. $\vec{s}_1 = \vec{a} = (1, 0, -2)$, а в качестве другого направляющего вектора — вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, т.е. $\vec{s}_2 = \overrightarrow{M_1M_2} = (-4, 8, -4)$. Зная направляющие векторы плоскости, можно найти нормальный к ней вектор

$$\vec{N} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ -4 & 8 & -4 \end{vmatrix} = 16\vec{i} + 12\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Тогда, выбрав в качестве точки, принадлежащей плоскости, например точку $M_1(4, -4, 0)$, запишем искомое уравнение плоскости

$$16(x - 4) + 12(y + 4) + 8z = 0$$

или

$$4x + 3y + 2z - 4 = 0. \quad (27.32)$$

2-й способ. Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (27.31):

$$\alpha(x + 2y + 3z + 4) + \beta(3x + 2y + z - 4) = 0 \quad (27.33)$$

или

$$(\alpha + 3\beta)x + (2\alpha + 2\beta)y + (3\alpha + \beta)z + 4(\alpha - \beta) = 0$$

с нормалью к плоскости

$$\vec{N} = (\alpha + 3\beta, 2\alpha + 2\beta, 3\alpha + \beta). \quad (27.34)$$

Плоскость (27.33) с нормалью (27.34) будет параллельна вектору \vec{a} , если будет выполняться условие

$$\vec{N} \cdot \vec{a} = 0,$$

т.е.

$$(\alpha + 3\beta) - 2(3\alpha + \beta) = 0,$$

откуда

$$\beta = 5\alpha.$$

Положив $\alpha = 1$, имеем $\beta = 5$. Подставив их в (27.33), получим искомое уравнение плоскости

$$(x + 2y + 3z + 4) + 5(3x + 2y + z - 4) = 0$$

или

$$4x + 3y + 2z - 4 = 0,$$

совпадающее с уравнением (27.32), найденным первым способом.

Пример 27.5. Трёхгранный угол, образованный плоскостями

$$\begin{aligned} \pi_1 : x + 2y + 3z + 4 &= 0, \\ \pi_2 : 3x + 2y + z - 4 &= 0, \\ \pi_3 : x + 2y + z - 1 &= 0, \end{aligned} \quad (27.35)$$

пересекает плоскость

$$\pi_4 : x - y + z = 0. \quad (27.36)$$

Найти уравнение плоскости π , проходящей через вершину трёхгранного угла параллельно плоскости π_4 .

Решение. Можно решить систему (27.35) и тем самым найти точку пересечения плоскостей π_1, π_2, π_3 . Далее, зная уравнение нормали к плоскости π_4 , легко записать уравнение искомой плоскости. Решение можно найти и проще, если воспользоваться уравнением связки плоскостей

$$\alpha(x + 2y + 3z + 4) + \beta(3x + 2y + z - 4) + \gamma(x + 2y + z - 1) = 0$$

в виде

$$(\alpha + 3\beta + \gamma)x + (2\alpha + 2\beta + 2\gamma)y + (3\alpha + \beta + \gamma)z + (4\alpha - 4\beta + \gamma) = 0. \quad (27.37)$$

В связке плоскостей (27.37) коэффициенты α, β, γ следует выбрать так, чтобы её вектор нормали $\vec{N} = (\alpha + 3\beta + \gamma, 2\alpha + 2\beta + 2\gamma, 3\alpha + \beta + \gamma)$ был параллелен вектору нормали к плоскости π_4 : $\vec{N}_4 = (1, -1, 1)$. Условием параллельности \vec{N} и \vec{N}_4 является пропорциональность их координат:

$$\frac{\alpha + 3\beta + \gamma}{1} = \frac{2\alpha + 2\beta + 2\gamma}{-1} = \frac{3\alpha + \beta + \gamma}{1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta + \gamma &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma; \\ \alpha + 3\beta + \gamma &= 3\alpha + \beta + \gamma, \end{aligned}$$

откуда $\beta = \alpha$, $\gamma = -8\alpha/3$ или, если положить $\alpha = 3$, то $\beta = 3$, $\gamma = -8$. Подставив эти значения в (27.37), получим искомое уравнение плоскости:

$$x - y + z + 2 = 0.$$

Геометрически найденная плоскость представляет собой плоскость, параллельную основанию треугольной пирамиды, боковые грани которой образуют плоскости π_1, π_2, π_3 (27.35), а основанием является плоскость π_4 (27.36).

28. Прямая линия в пространстве

28.1. Уравнение прямой в общем виде

Прямую линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей (рис. 155)

$$\begin{aligned} \alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (28.1)$$

Уравнение (28.1) называется *общим уравнением прямой в пространстве*. Например, уравнения оси Oz можно задать как результат пересечения двух координатных плоскостей xOz и yOz :

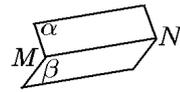


Рис. 155.

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

а уравнения оси Ox — как результат пересечения координатных плоскостей xOz и xOy :

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

и уравнения оси Oy — как результат пересечения координатных плоскостей yOx и yOz :

$$\begin{cases} z = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

28.2. Параметрические и канонические уравнения прямой

Как и для прямой на плоскости, для того чтобы записать уравнение прямой в заданном аффинном репере, необходимо задать точку, через которую эта прямая проходит, и её направление. Направление можно задать либо вектором, параллельным этой прямой, либо еще одной точкой на прямой.

Пусть в пространстве с репером $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ заданы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\vec{s} = (m, n, p)$ — направляющий вектор прямой (28.2) (если задана вторая точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то $\vec{s} = \overrightarrow{M_0M_1}$). Пусть M_0 — точка, через которую проходит прямая. Выберем на прямой произвольную точку M , тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ принадлежит этой прямой и, следовательно, коллинеарен вектору \vec{s} , т.е.

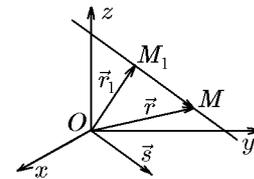


Рис. 156.

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}, \tag{28.2}$$

где t — некоторое число или параметр, связывающий коллинеарные векторы. Изменяя в (28.2) параметр t от $-\infty$ до $+\infty$, мы переберём все точки M , лежащие на прямой. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ есть разность: $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$, где $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ — радиус-векторы точек M и M_0 , соответственно (см. рис. 156). Тогда уравнение (28.2) можно записать в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}. \tag{28.3}$$

◆ Уравнение (28.2), (28.3) называется *параметрическим уравнением прямой в пространстве в векторной форме*.

От векторной формы (28.2) можно перейти к координатной.

$$\begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \\ z &= z_0 + pt. \end{aligned} \tag{28.4}$$

◆ Уравнения (28.4) называются *параметрическими уравнениями прямой*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m, n, p)$.

Исключив в (28.4) параметр t , получим уравнение

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{28.5}$$

◆ Уравнения (28.5) называются *каноническими уравнениями прямой*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{s} = (m, n, p)$, или *уравнениями прямой в канонической форме*.

◇ Для обозначения прямой ℓ , проходящей через точку M_0 параллельно вектору \vec{s} , будем использовать символ $\ell = \{M_0, \vec{s}\}$.

◇ Если одна из координат вектора $\vec{s} = (m, n, p)$ равна нулю, то запись

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

понимается в смысле пропорции, т.е. в смысле (28.4), откуда следует, что координата x не меняется и равна x_0 , т.е. $x = x_0$.

От канонического уравнения прямой (28.5) можно перейти к уравнению прямой в общем виде (28.4), например, из (28.5) запишем

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{z - z_0}{p},$$

откуда

$$\begin{aligned} nx - my + D_1 &= 0, & D_1 &= nx_0 - my_0, \\ px - mz + D_2 &= 0, & D_2 &= px_0 - mz_0, \end{aligned} \quad (28.6)$$

Уравнение (28.6) определяет прямую, которая является линией пересечения плоскостей с нормальными $\vec{N}_1 = (n, -m, 0)$ и $\vec{N}_2 = (p, 0, -m)$ и проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

28.3. Переход от уравнения прямой общего вида к каноническим

Пусть прямая определяется уравнением в общем виде (28.2):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (28.7)$$

Требуется написать уравнение этой прямой в канонической форме (28.5). Решение этой задачи можно получить, по меньшей мере, двумя способами. Один из них опирается на определение канонических уравнений, а другой на понятие пучка плоскостей. Рассмотрим последовательно оба способа.

1 способ. Нужно найти координаты какой-либо точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей на прямой. Координаты такой точки можно найти из системы (28.7), положив $z = z_1$, где z_1 — любое действительное число, x и y найдём из системы двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_1 - D_1, \\ A_2x + B_2y = -C_2z_1 - D_2. \end{cases} \quad (28.8)$$

Пусть $x = x_1$, $y = y_1$. Тогда координаты фиксированной точки на прямой будут (x_1, y_1, z_1) , а уравнение прямой в канонической форме запишется как

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}, \quad (28.9)$$

где $\vec{s} = (m, n, p)$ — направляющий вектор прямой (28.7), координаты которого пока неизвестны.

На следующем этапе определим координаты m, n, p вектора \vec{s} . Прямая лежит в заданных плоскостях

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (\alpha),$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (\beta),$$

и, следовательно, \vec{s} перпендикулярен нормальным векторам $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ этих плоскостей: $\vec{s} \perp \vec{N}_1$ и $\vec{s} \perp \vec{N}_2$. Поэтому можно взять направляющий вектор \vec{s} прямой равным векторному произведению векторов \vec{N}_1 и \vec{N}_2 :

$$\vec{s} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}, \quad (28.10)$$

где обозначено

$$m = B_1C_2 - B_2C_1, \quad n = A_2C_1 - A_1C_2, \quad p = A_1B_2 - A_2B_1.$$

Наконец, подставив полученные значения m, n и p в (28.9), получим уравнение прямой (28.7) в канонической форме.

2-й способ. Запишем уравнение пучка плоскостей (11.15), проходящих через прямую (28.7):

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2)z + (\alpha D_1 + \beta D_2) = 0. \quad (28.11)$$

Так как вектор нормали в (28.11) имеет координаты

$$\vec{N} = (\alpha A_1 + \beta A_2, \alpha B_1 + \beta B_2, \alpha C_1 + \beta C_2), \quad (28.12)$$

то, выбрав последовательно $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$ и $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$, получим общие уравнения прямой в форме (28.6), из которых следуют канонические уравнения прямой.

Пример 28.1. Привести к каноническому виду уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0. \end{cases} \quad (28.13)$$

Решение. 1. Найдём, например, точку M_1 , через которую данная прямая проходит, положив $z = -3$. Тогда система (28.13) переписется так:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

Определитель матрицы этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - (-3) = -1 \neq 0.$$

Тогда однородная система имеет единственное решение

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Итак, точка на прямой имеет координаты $M_1(0, 0, -3)$.

2. Уравнения прямой в канонической форме запишутся так:

$$\frac{x - 0}{m} = \frac{y - 0}{n} = \frac{z - 3}{p},$$

т.е.

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z - 3}{p},$$

где m, n, p – координаты направляющего вектора искомой прямой, которые следует определить.

Согласно (28.10) и (28.13):

$$\vec{s} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k},$$

т.е. $m = -9, n = -5, p = -1$.

3. Запишем теперь искомое уравнение прямой:

$$\frac{x}{-9} = \frac{y}{-5} = \frac{z + 3}{-1},$$

откуда

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z + 3}{1}.$$

Пример 28.2. Привести к каноническому виду уравнения прямой из предыдущего примера с использованием уравнения пучка плоскостей.

Решение. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую, имеет вид

$$\alpha(2x - 3y - 3z - 9) + \beta(x - 2y + z + 3) = 0$$

или

$$(2\alpha + \beta)x + (-3\alpha - 2\beta)y + (-3\alpha + \beta)z + (-9\alpha + 3\beta) = 0. \quad (28.14)$$

Положив

$$-3\alpha + \beta = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = 1, \quad \beta = 3,$$

из (28.14) найдём

$$5x - 9y = 0. \quad (28.15)$$

Положив же

$$-3\alpha - 2\beta = 0 \quad \text{или} \quad \alpha = 2, \quad \beta = -3,$$

из (28.14) найдём

$$x - 9(z + 3) = 0. \quad (28.16)$$

Выразив из (28.15) и (28.16) переменную x , получим канонические уравнения прямой

$$x = \frac{9}{5}y = 9(z + 3)$$

или

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z + 3}{1},$$

совпадающие с найденными в предыдущем примере.

28.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Запишем уравнение прямой, проходящей через эти точки. Примем любую из данных точек, например M_1 , за фиксированную («направляющую») точку искомой прямой, а за направляющий вектор \vec{s} – вектор

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

где $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Тогда прямая в канонической форме, согласно (28.5), запишется так:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (28.17)$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через две точки.

Пример 28.3. Даны три вершины треугольника: $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 2)$ и $C(2, -1, -3)$. Написать уравнения сторон треугольника.

Решение. Подставив в (28.17) $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = 3$ и $x_2 = -1$, $y_2 = 0$, $z_2 = 2$, получим уравнение прямой (AB) :

$$\frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 2}{-2} = \frac{z - 3}{-1}.$$

Аналогично для прямых (AC) и (CB) соответственно получим

$$\begin{aligned} \frac{x - 1}{1} &= \frac{y - 2}{-3} = \frac{z - 3}{-6}, \\ \frac{x - 2}{-3} &= \frac{y + 1}{1} = \frac{z + 3}{-1}. \end{aligned}$$

29. Основные задачи о плоскости и прямой в пространстве**29.1. Уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую и не лежащую на этой прямой точку**

Даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и прямая

$$\ell: \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую ℓ и точку M_0 , при условии, что она не принадлежит этой прямой.

Обозначим через \vec{r}_0 радиус-вектор точки M_0 , а через \vec{r} – радиус-вектор точки M , где $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{s} = (m, n, p)$ и $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ компланарны, следовательно, приходим к уравнению

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0. \quad (29.1)$$

Уравнение (29.1) – уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую ℓ и не лежащую на этой прямой точку M_0 .

Пример 29.1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и пересекающей каждую из прямых $\ell_1: x = t, y = 1 - t, z = 3 + t$ и $\ell_2: x = 2 + 2t, y = 3 - t, z = 4 + 3t$.

Решение. *1-й способ.* Искомая прямая является линией пересечения двух плоскостей, каждая из которых проходит через начало координат и одну из прямых. Согласно (29.1), первая плоскость определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4x + 3y - z = 0,$$

а вторая — уравнением

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 13x + 2y - 8z = 0.$$

Таким образом, искомая прямая определяется общими уравнениями

$$\begin{aligned} 4x + 3y - z &= 0, \\ 13x + 2y - 8z &= 0. \end{aligned} \quad (29.2)$$

Общие уравнения прямой (29.2) можно привести к каноническому и параметрическому виду. Для этого запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (29.2):

$$(4\alpha + 13\beta)x + (3\alpha + 2\beta)y + (-\alpha - 8\beta)z = 0, \quad (29.3)$$

и потребуем

$$-\alpha - 8\beta = 0$$

или $\alpha = -8, \beta = 1$. Подставив эти значения в (29.2), найдём

$$x = -\frac{22y}{19}. \quad (29.4)$$

Теперь положим

$$3\alpha + 2\beta = 0$$

или $\alpha = 2, \beta = -3$. Подставив эти значения в (29.2), получим

$$x = \frac{22z}{31}. \quad (29.5)$$

Приравняв (29.4) и (29.5), получим уравнения прямой (29.2) в канонической форме:

$$x = -\frac{22y}{19} = \frac{22z}{31}$$

или

$$\frac{x}{22} = \frac{y}{-19} = \frac{z}{31}$$

и, соответственно, уравнения в параметрической форме:

$$x = 22t, \quad y = -19t, \quad z = 31t. \quad (29.6)$$

2-й способ. Так как прямая проходит через начало координат $O(0, 0, 0)$, то для составления её уравнения достаточно определить координаты её направляющего вектора $\vec{s} = (m, n, p)$. Записав условия пересечения этой прямой

$$x = mt, \quad y = nt, \quad z = pt$$

с заданными:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0.$$

найдем $m = 22$, $n = -19$, $p = 31$. В результате получим уравнения

$$x = 22t, \quad y = -19t, \quad z = 31t,$$

совпадающие с найденным первым способом уравнением (29.6).

29.2. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум данным прямым

Пусть даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и прямые

$$\ell_k : \frac{x - x_k}{m_k} = \frac{y - y_k}{n_k} = \frac{z - z_k}{p_k} \quad k = 1, 2.$$

Записать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно прямым ℓ_1 и ℓ_2 .

Векторы $\overrightarrow{MM_0}$, \vec{s}_1 и \vec{s}_2 должны быть компланарны. Следовательно,

$$(\overrightarrow{MM_0}, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (29.7)$$

Уравнение (29.7) — уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум данным прямым.

29.3. Угол между плоскостями

Пусть даны две плоскости: плоскость α , определяемая уравнением

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

где $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ — нормальный вектор, и плоскость β , определяемая уравнением

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

где $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — нормальный вектор. Требуется определить угол между этими плоскостями.

Углом φ между плоскостями будем считать угол между их нормальными векторами, если этот угол не превышает $\pi/2$, и дополнительный до π к этому

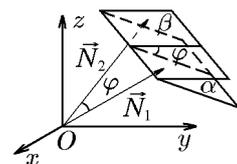


Рис. 157.

углу в противном случае (рис. 157). Если $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, то

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| |\vec{N}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (29.8)$$

Это и есть формула для определения угла между плоскостями.

Если плоскость (α) параллельна плоскости (β) , то их нормальные векторы $\vec{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ коллинеарны. Из векторной алгебры известно, что если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны или равны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (29.9)$$

Это и есть условие параллельности двух плоскостей, совпадающее с (27.20).

Если же плоскости перпендикулярны, то перпендикулярны и их нормальные векторы: $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$, и, следовательно, скалярное произведение их равно нулю:

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0 \quad (29.10)$$

или в координатной форме

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \quad (29.11)$$

Это и есть условие перпендикулярности двух плоскостей.

Пример 29.2. В декартовой системе координат даны уравнения граней трёхгранного угла:

$$\begin{aligned} 4x + 3y - 5z + 16 &= 0; \\ 3x - 2y - 4z + 7 &= 0; \\ x + 4y - 2z + 5 &= 0. \end{aligned}$$

Написать уравнение плоскости, которая проходит через одно из рёбер и перпендикулярна противоположащей грани.

Решение. В качестве ребра, через которое проходит искомая плоскость, выберем прямую, образованную пересечением граней (плоскостей)

$$\begin{aligned} 4x + 3y - 5z + 16 &= 0; \\ 3x - 2y - 4z + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую, имеет вид

$$(4\alpha + 3\beta)x + (3\alpha - 2\beta)y + (-5\alpha - 4\beta)z + (16\alpha + 7\beta). \quad (29.12)$$

Для того чтобы плоскость (29.12) была перпендикулярна плоскости (грани) $x + 4y - 2z + 5 = 0$, должно выполняться условие ортогональности нормалей $\vec{N} = (4\alpha + 3\beta, 3\alpha - 2\beta, -5\alpha - 4\beta)$ и $\vec{N}_1 = (1, 4, -2)$, т.е.

$$(4\alpha + 3\beta) + 4(3\alpha - 2\beta) - 2(-5\alpha - 4\beta) = 0.$$

Тогда

$$26\alpha + 3\beta = 0 \quad \alpha = 3, \beta = -26.$$

Подставив эти значения в (29.12), получим уравнение плоскости

$$-66x + 61y + 89z - 134 = 0.$$

29.4. Угол между двумя прямыми в пространстве

Углом между прямыми в пространстве будем называть один из углов, образованных прямыми, проведёнными через произвольную точку P параллельно данным прямым ℓ_1 и ℓ_2 (рис. 158, а, б).

Пусть даны уравнения прямых в канонической форме:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad (\ell_1)$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}, \quad (\ell_2)$$

где m_1, n_1, p_1 — координаты вектора $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$; m_2, n_2, p_2 — координаты вектора $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

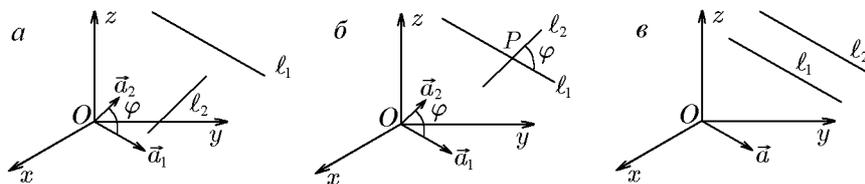


Рис. 158.

Угол между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 можно выразить через угол между векторами \vec{s}_1 и \vec{s}_2 векторами определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| |\vec{s}_2|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (29.13)$$

Это и есть формула для определения угла между двумя прямыми.

Если прямые ℓ_1 и ℓ_2 параллельны (рис. 158, в), то направляющие векторы этих прямых тоже параллельны, т.е.

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1) \parallel \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2),$$

а условием параллельности двух векторов является пропорциональность их координат:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (29.14)$$

Это соотношение есть условие параллельности двух прямых в пространстве.

Если прямые перпендикулярны, то направляющие векторы $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ также перпендикулярны, а скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю:

$$\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$$

или

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (29.15)$$

Формула (29.15) задает условие перпендикулярности двух прямых.

Пример 29.3. Через точку $M_1(1, -2, 1)$ провести прямую, параллельную оси Oz

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем канонические уравнения прямой, проходящей через точку M_1 :

$$\frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-1}{p}.$$

В качестве направляющего вектора $\vec{s} = (m, n, p)$ выберем вектор

$$\vec{s} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 1 \cdot \vec{k},$$

так как прямая параллельна оси Oz .

Получим уравнения

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{1},$$

которые удобнее записать в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ y &= -2, \\ z &= 1 + t. \end{aligned}$$

29.5. Угол между прямой и плоскостью

♦ Углом между прямой ℓ и плоскостью π называется угол между этой прямой и её проекцией на эту плоскость.

Угол между прямой и плоскостью заключён в пределах от нуля до $\pi/2$.

Пусть даны уравнения прямой в канонической форме:

$$\ell : \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p},$$

и плоскости

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Найти угол между прямой и плоскостью.

Пусть $\vec{s} = (m, n, p)$ — направляющий вектор прямой ℓ и $\vec{N} = (A, B, C)$ — нормаль к плоскости π . Тогда угол между прямой и плоскостью определяется соотношением

$$\sin \varphi = \sin[\angle(\ell, \pi)] = |\cos(\widehat{\vec{s}, \vec{N}})| = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{s}|}{|\vec{N}| |\vec{s}|}.$$

Следовательно, $(\vec{N} \cdot \vec{s}) = 0$ или $Am + Bn + Cp = 0$ — условие параллельности прямой и плоскости, а $\vec{N} \cdot \vec{s} = |\vec{N}| |\vec{s}|$ или

$$\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

— условие перпендикулярности прямой и плоскости.

29.6. Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а плоскость π задана относительно декартовых координат уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

или

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{29.16}$$

где

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0). \quad (29.17)$$

Найдём расстояние от точки M_1 до плоскости π . Для этого построим вектор $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. Из курса векторной алгебры известно, что расстояние d от точки M_1 до точки M_0 можно найти как проекцию этого вектора на вектор нормали $\vec{N} = (A, B, C)$, т.е.

$$d = \text{пр}_{\vec{N}} \overrightarrow{M_0M_1} = \frac{|\vec{N} \cdot \overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{N}|} = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Эту формулу с учётом (29.17) можно записать как

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (29.18)$$

Формула (29.18) задаёт правило нахождения расстояния от точки до плоскости: чтобы найти расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, следует подставить координаты точки в уравнение плоскости. Эта величина, взятая по абсолютному значению и делённая на длину вектора нормали к плоскости, и даёт искомое расстояние.

Пример 29.4. Найти расстояние от точки $M_1(1, 2, -1)$ до плоскости $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

Решение. Согласно (29.18), имеем

$$d = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 4|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{6}{\sqrt{14}}.$$

Пример 29.5. Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранный угол между плоскостями

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4 &= 0, \\ 3x + 2y + z - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Искомая плоскость представляет собой множество точек, равноудалённых от обеих заданных плоскостей, т.е.

$$\frac{|x + 2y + 3z + 4|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{|3x + 2y + z - 4|}{\sqrt{9 + 4 + 1}}.$$

Отсюда получим уравнения двух плоскостей для двух смежных углов:

$$x + 2y + 3z + 4 = \pm(3x + 2y + z - 4)$$

или

$$x - z - 4 = 0$$

и

$$x + y + z = 0.$$

29.7. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть даны точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и прямая ℓ :

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Расстояние d равно отношению площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$ и \vec{s} , делённой на модуль вектора \vec{s} , т.е.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & z_1 - z_0 \\ m & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \end{aligned} \quad (29.19)$$

С помощью определителя Грама (4.66) последнее равенство можно записать в виде

$$d = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{s}, \overrightarrow{M_0M_1})}{\Gamma(\vec{s})}}, \quad (29.20)$$

Выражения (29.19) и (29.20) задают кратчайшее расстояние от точки M_1 до прямой ℓ .

29.8. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми. Пересечение прямых

Пусть прямые

$$\ell_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$$

и

$$\ell_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}, \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

скрещиваются, т.е. $|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| \neq 0$. Кратчайшее расстояние между ними есть проекция вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ на прямую, перпендикулярную прямой ℓ_1 и перпендикулярную прямой ℓ_2 , т.е. параллельную вектору $\vec{s}_3 = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$. Но

$$|(\vec{s}_3 \cdot \overrightarrow{M_1M_2})| = |\vec{s}_3| \cdot |\text{пр}_{\vec{s}_3} \overrightarrow{M_1M_2}| = |\vec{s}_3|d.$$

Следовательно,

$$d = \frac{|(\vec{s}_3 \cdot \overrightarrow{M_1M_2})|}{|\vec{s}_3|}$$

или

$$d = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2})|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|} = \frac{\text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}. \quad (29.21)$$

С помощью соотношений (4.66) и (5.9), позволяющих выразить векторное и смешанное произведения векторов через определитель Грама, последнее равенство можно записать в виде

$$d = \sqrt{\frac{\Gamma(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_0})}{\Gamma(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}}, \quad (29.22)$$

Выражение (29.21) и (29.22) определяют кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми.

Если кратчайшее расстояние между скрещивающимися прямыми равно нулю ($d = 0$), то эти прямые имеют общую точку, т.е. пересекаются. Таким образом, согласно (29.21), условием пересечения скрещивающихся прямых является условие

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (29.23)$$

Пусть прямые

$$\begin{aligned} \ell_1 : \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}, \quad \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1) \\ \ell_2 : \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}, \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2) \end{aligned}$$

параллельны, т.е. $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = 0$ или

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Тогда расстояние между ними можно найти, взяв любую точку одной прямой, и по формуле (29.19) вычислить расстояние от этой точки до второй прямой. Это и будет расстоянием между параллельными прямыми ℓ_1 и ℓ_2 .

Если расстояние между параллельными прямыми равно нулю, то эти прямые совпадают. Таким образом, согласно (29.19), условием совпадения прямых в пространстве является условие

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{s}_1 = 0$$

или

$$\frac{x_2 - x_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{n_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}. \quad (29.24)$$

Пример 29.6. Найти расстояние между прямыми

$$\begin{aligned} \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 1}{3}, \\ \frac{x + 1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z + 3}{-2}. \end{aligned}$$

Решение. Выпишем характеристики каждой прямой:

$$M_1(1, 2, -1), \quad \vec{s}_1 = (2, 1, 3); \quad M_2(-1, 0, 3), \quad \vec{s}_2 = (3, 1, -2).$$

Поскольку

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k} \neq 0,$$

то прямые являются скрещивающимися. Вычислив $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, -2, 4)$ и далее

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -15; \quad |(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2})| = 15;$$

$$|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2| = \sqrt{9 + 49 + 1} = \sqrt{59},$$

по формуле (29.21) найдём

$$d = \frac{15}{\sqrt{59}}.$$

Пример 29.7. Исследовать взаимное расположение прямых

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3},$$

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}.$$

Решение. Выпишем характеристики каждой прямой:

$$M_1(1, 2, -1), \quad \vec{s}_1 = (2, 1, 3); \quad M_2(-5, 0, 3), \quad \vec{s}_2 = (3, 1, -2).$$

Вычислив $\overrightarrow{M_1M_2} = (-6, -2, 4)$ и далее

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

заключаем, что прямые являются пересекающимися. Чтобы найти координаты точки пересечения прямых, уравнение второй прямой представим в параметрической форме:

$$x = -5 + 3t, \quad y = t, \quad z = 3 - 2t, \quad (29.25)$$

и подставим (29.25) в уравнение первой прямой:

$$\frac{-6 + 3t}{2} = \frac{t - 2}{1} = \frac{4 - 2t}{3}.$$

Отсюда следует, что пропорция сохранится при $t = 2$. Подставив $t = 2$ в (29.25), получим координаты точки пересечения:

$$x = -5 + 6 = 1, \quad y = 2, \quad z = 3 - 4 = -1.$$

29.9. Пересечение прямой и плоскости

Пусть прямая ℓ и плоскость π заданы уравнениями

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt, \quad \vec{s} = (m, n, p) \quad (29.26)$$

и

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{N} = (A, B, C). \quad (29.27)$$

Если прямая ℓ не параллельна плоскости π , т.е.

$$Am + Bn + Cp \neq 0, \quad (29.28)$$

то они пересекаются. Координаты точки их пересечения находятся следующим образом. Подставим (29.26) в (29.21):

$$A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0,$$

откуда

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{Am + Bn + Cp}. \quad (29.29)$$

В силу (29.28) величина t определяется однозначно, и подстановка (29.29) в (29.26) даёт координаты точки пересечения.

Если прямая (29.26) задана общими уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \quad (29.30)$$

то точка пересечения прямой (29.30) и плоскости (29.27) найдётся из решения системы

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ Ax + By + Cz + D &= 0. \end{aligned}$$

Пример 29.8. Показать, что прямая

$$x = 1 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = -2 + t \quad (29.31)$$

пересекает плоскость

$$2x - y + z + 1 = 0 \quad (29.32)$$

и найти координаты точки их пересечения.

Решение. Выпишем направляющий вектор прямой: $\vec{s} = (2, 3, 1)$ и вектор нормали к плоскости: $\vec{N} = (2, -1, 1)$. Поскольку

$$(\vec{s}, \vec{N}) = 4 - 3 + 1 = 2 \neq 0,$$

то прямая и плоскость пересекаются. Чтобы найти координаты точки пересечения, подставим (29.31) в (29.32):

$$2(1 + 2t) - 3t - 2 + t + 1 = 0.$$

Отсюда $t = -1/2$. Подставив значение параметра $t = -1/2$, соответствующее точке пересечения, в (29.31), найдём координаты точки пересечения:

$$x = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad y = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}, \quad z = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

29.10. Проекция точки на плоскость

Проекцией точки на плоскость является основание перпендикуляра, опущенного на эту плоскость.

Пусть даны точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и плоскость

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \vec{N} = (A, B, C). \quad (29.33)$$

Найдём уравнение прямой, проходящей через точку M_1 перпендикулярно плоскости. Для этого в качестве направляющего вектора прямой следует взять вектор нормали к плоскости, т.е. $\vec{s} = \vec{N} = (A, B, C)$. Тогда параметрическое уравнение прямой будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= x_1 + At, \\ y &= y_1 + Bt, \\ z &= z_1 + Ct. \end{aligned} \quad (29.34)$$

Подставив (29.34) в уравнение плоскости (29.33):

$$A(x_1 + At) + B(y_1 + Bt) + C(z_1 + Ct) + D = 0,$$

найдём значение параметра, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости:

$$t = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (29.35)$$

Теперь из (29.34) получим координаты точки пересечения перпендикуляра и плоскости, т.е. координаты проекции точки на плоскость.

Пример 29.9. Найти точку, симметричную точке $M_1(2, 1, 2)$ относительно плоскости

$$x + 2y + 3z + 4 = 0.$$

Решение. Параметрические уравнения прямой, перпендикулярной плоскости, согласно условию задачи, имеют вид

$$x = 2 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 2 + 3t. \quad (29.36)$$

Подставив их в уравнение плоскости, получим

$$(2 + t) + 2(1 + 2t) + 3(2 + 3t) + 4 = 0,$$

откуда $t = 1$ (это значения параметра можно получить сразу из (29.35)). Подстановка $t = 1$ в (29.36) даёт координаты проекции точки M_1 на плоскость, т.е. координаты точки $M_2(1, -1, -1)$. Обозначим через M точку, симметричную точке M_1 относительно заданной плоскости. Если задать направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$, то точка M делит его в отношении $\lambda = -2$. Следовательно, координаты точки $M(x, y, z)$ можно найти по формулам (2.7):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{2 - 2 \cdot 1}{1 - 2} = 0, \quad y = \frac{1 - 2 \cdot (-1)}{-1} = -3, \quad z = \frac{2 - 2 \cdot (-1)}{-1} = -4.$$

29.11. Уравнение перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую

Пусть даны точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и прямая

$$\ell : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (29.37)$$

Тогда уравнение плоскости, перпендикулярной этой прямой и проходящей через точку M_1 , имеет вид

$$m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0. \quad (29.38)$$

Уравнение плоскости, проходящей через эту прямую и точку M_1 имеет вид (29.1). Их пересечение и даст уравнение искомого перпендикуляра, т.е.

$$\begin{cases} m(x - x_1) + n(y - y_1) + p(z - z_1) = 0, \\ \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0. \end{cases} \quad (29.39)$$

29.12. Проекция точки на прямую

Согласно определению, *проекцией точки на прямую* является основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на заданную прямую, или же точка пересечения заданной прямой с перпендикулярной ей плоскостью, проходящей через данную точку.

В первом случае можно воспользоваться уравнением перпендикуляра (29.39) из предыдущего раздела и найти точку его пересечения с прямой (29.37). Во втором случае количество вычислений можно сократить, поступив следующим образом.

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и прямую ℓ , которую зададим не каноническими уравнениями (29.37), а параметрическими:

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt. \quad (29.40)$$

Поскольку перпендикулярная ей плоскость, проходящая через точку M_1 , задаётся уравнениями (29.38), то, подставив туда выражения (29.40), получим

$$m(x_0 + mt - x_1) + n(y_0 + nt - y_1) + p(z_0 + pt - z_1) = 0.$$

Отсюда найдём значение параметра, соответствующее точке пересечения прямой (29.40) с перпендикулярной ей плоскостью (29.38):

$$t = \frac{m(x_1 - x_0) + n(y_1 - y_0) + p(z_1 - z_0)}{m^2 + n^2 + p^2}. \quad (29.41)$$

Подстановка (29.41) в (29.40) даёт координаты точки пересечения, т.е. координаты проекции данной точки на прямую.

◇ Заметим, что, зная координаты двух точек, принадлежащих прямой, можно найти её уравнение. Поскольку эти точки принадлежат перпендикуляру, опущенному из заданной точки на прямую, то это будет уравнение перпендикуляра, которое выше найдено в виде системы (29.39).

Пример 29.10. Для точки $M_1(2, -1, 4)$ и прямой

$$\ell: \quad x = 1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = -1 + 3t \quad (29.42)$$

найти:

- а) точку, симметричную точке M_1 относительно прямой;
- б) уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на прямую ℓ .

Решение. Поскольку направляющий вектор прямой имеет координаты $\vec{s} = (2, 1, 3)$, то, согласно (29.38), уравнение плоскости, перпендикулярной прямой ℓ и проходящей через точку $M_1(2, -1, 4)$, имеет вид

$$2(x - 2) + (y + 1) + 3(z - 4) = 0$$

или

$$2x + y + 3z - 15 = 0. \quad (29.43)$$

Подставив (29.43) в (29.42), получим

$$2(1 + 2t) + (2 + t) + 3(-1 + 3t) - 15 = 0.$$

Отсюда найдём значение параметра $t = 1$, соответствующее точке пересечения прямой (29.42) и плоскости (29.43). Подстановка $t = 1$ в (29.42) даёт координаты этой точки пересечения $M_2(3, 3, 2)$. Эта же точка является проекцией точки M_1 на прямую. Это позволяет найти ответ на оба вопроса примера.

а) Обозначим через $M(x, y, z)$ точку, симметричную точке M_1 относительно прямой ℓ . Если задать направленный отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$, то точка M делит его в отношении $\lambda = -2$. Следовательно, координаты точки $M(x, y, z)$ можно найти по формулам (2.7):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{1 - 2 \cdot 3}{1 - 2} = 5, \quad y = \frac{2 - 2 \cdot 3}{-1} = 4, \quad z = \frac{-1 - 2 \cdot 2}{-1} = 5.$$

б) Мы знаем координаты двух точек $M_1(2, -1, 4)$ и $M_2(3, 3, 2)$, через которые проходит перпендикуляр. Следовательно, его уравнение имеет вид

$$\frac{x - 2}{3 - 2} = \frac{y + 1}{3 + 1} = \frac{z - 4}{2 - 4}$$

или

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y + 1}{4} = \frac{z - 4}{-2}.$$

29.13. Проекция прямой на плоскость

Пусть прямая ℓ и плоскость π заданы уравнениями

$$\begin{aligned} \ell : \quad & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \\ \pi : \quad & A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{aligned}$$

Согласно определению, *проекцией прямой на плоскость* является совокупность проекций всех точек этой прямой на плоскость. Этой совокупностью является прямая, по которой пересекается плоскость π с другой плоскостью π_\perp , проходящей через прямую ℓ перпендикулярно π . Уравнение этой прямой можно найти, записав уравнение пучка плоскостей

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2)z + \alpha D_1 + \beta D_2 = 0 \quad (29.44)$$

и потребовав, чтобы вектор нормали $\vec{N}_{\alpha\beta} = (\alpha A_1 + \beta A_2, \alpha B_1 + \beta B_2, \alpha C_1 + \beta C_2)$ был перпендикулярен вектору нормали заданной плоскости π :

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)A_3 + (\alpha B_1 + \beta B_2)B_3 + (\alpha C_1 + \beta C_2)C_3 = 0. \quad (29.45)$$

Определив из (29.45) α и β и подставив их в (29.44), получим уравнение плоскости π_\perp . В результате искомого проекция прямой ℓ найдётся как прямая пересечения плоскостей π_\perp и π .

Пример 29.11. Составить уравнение проекции прямой ℓ

$$\begin{aligned} 5x - 4y - 2z - 5 &= 0, \\ x + 2z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

на плоскость π

$$2x - y + z - 1 = 0.$$

Решение. Уравнение (29.44) пучка плоскостей, проходящих через прямую ℓ , имеет вид

$$(5\alpha + \beta)x - 4\alpha y + (-2\alpha + 2\beta)z - (5\alpha + 2\beta) = 0, \quad (29.46)$$

а условие (29.45) перпендикулярности плоскостей, соответственно,

$$2(5\alpha + \beta) + 4\alpha - \alpha + 2\beta = 0$$

или

$$3\alpha + \beta = 0.$$

Положив $\alpha = 1$, получим $\beta = -3$. Подставив эти значения в (29.46), найдём

$$2x - 4y - 8z + 1 = 0.$$

Таким образом, уравнение проекции прямой ℓ на плоскость π задаётся общими уравнениями

$$\begin{aligned} 2x - 4y - 8z + 1 &= 0, \\ 2x - y + z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Пример 29.12. Составить уравнение проекции прямой

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z - 1 &= 0, \\ 2x - y + z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

на координатную плоскость $z = 0$.

Решение. Уравнение (29.44) пучка плоскостей, проходящих через заданную прямую, имеет вид

$$(\alpha + 2\beta)x + (2\alpha - \beta)y + (-3\alpha + \beta)z - 5\alpha + 2\beta = 0,$$

а условие (29.45) перпендикулярности плоскостей с учётом $\vec{N} = (0, 0, 1)$, соответственно,

$$-3\alpha + \beta = 0.$$

Положив $\alpha = 1$, получим $\beta = 3$. Их подстановка в уравнение пучка плоскостей даёт

$$7x - y + 1 = 0.$$

Таким образом, уравнение проекции прямой на плоскость $z = 0$ задаётся общими уравнениями

$$\begin{cases} 7x - y + 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

выражающим линейную зависимость (30.1) вектора $\overrightarrow{M_0M}$ и системы направляющих векторов плоскости $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_{n-1}$.

Разложив определитель (30.3) по первой строке, можем записать

$$(x_1 - x_{01})A_{11} + (x_2 - x_{02})A_{12} + \dots + (x_n - x_{0n})A_{1n} = 0, \quad (30.4)$$

где $A_{1l}, l = \overline{1, n}$, — алгебраические дополнения к элементам первой строки определителя (30.3), или

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n = A_1, \quad (30.5)$$

где

$$A_1 = A_{11}x_{01} + A_{12}x_{02} + \dots + A_{1n}x_{0n}. \quad (30.6)$$

Поскольку плоскость размерности $k = n - 2$ будет описываться двумя уравнениями вида

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n &= A_1, \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n &= A_2, \end{aligned} \quad (30.7)$$

то ее можно рассматривать как плоскость пересечения двух гиперплоскостей. Плоскость размерности $k = n - 3$ будет определяться как плоскость пересечения трех гиперплоскостей и т.д., вплоть до прямой, которая будет определяться как плоскость пересечения $(n - 1)$ -й гиперплоскости:

$$\frac{x_1 - x_{01}}{s_1} = \frac{x_2 - x_{02}}{s_2} = \dots = \frac{x_n - x_{0n}}{s_n}, \quad (30.8)$$

где $s_j, j = \overline{1, n}$, — координаты единственного направляющего вектора прямой $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$.

◆ Уравнение (30.8) называется *каноническим уравнением прямой* и получается из (30.2) исключением единственного параметра t_1 .

С такой точки зрения любую систему линейных уравнений можно рассматривать как задачу о пересечении соответствующих гиперплоскостей. Наряду с этим само уравнение гиперплоскости можно рассматривать как уравнение, связывающее координаты точек, лежащих на концах векторов, исходящих из точки $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ и перпендикулярных некоторой прямой с направляющим вектором $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. Такой вектор называется *вектором нормали к гиперплоскости*. Положив вектор нормали заданным: $\vec{N} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, уравнение гиперплоскости можно записать с помощью скалярного произведения

$$(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}) = 0, \quad (30.9)$$

где $\overrightarrow{M_0M} = (x_1 - x_{01}, x_2 - x_{02}, \dots, x_n - x_{0n})$.

Если точка $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ совпадает с началом координат ($x_{01} = x_{02} = \dots = x_{0n} = 0$), то и гиперплоскость проходит через начало координат. В этом случае линейное уравнение (30.5), описывающее гиперплоскость, будет однородным. Отсюда следует, что любую однородную систему линейных уравнений можно рассматривать как задачу о пересечении гиперплоскостей, проходящих через начало координат. Причём фундаментальная система решений однородной системы будет соответствовать системе направляющих векторов гиперплоскости, которые, согласно свойству фундаментальной системы, будут перпендикулярны одному n -мерному вектору, координаты которого составлены из коэффициентов при неизвестных (координатах) $x_i, i = \overline{1, n}$, и представляющему вектор нормали к гиперплоскости.

ГЛАВА 5

Поверхности и кривые в пространстве

31. Поверхности и кривые в пространстве и их уравнения в декартовой системе координат

В курсе элементарной геометрии поверхность рассматривается или как граница некоторого тела, или как «след» движущейся линии, или как множество точек, удовлетворяющих некоторым условиям. Например, поверхность шара, или сфера, рассматривается как множество точек, равноудаленных от заданной точки, а цилиндрические и конические поверхности — как результат вращения прямоугольника и треугольника вокруг одной из его сторон и т.д.

В аналитической геометрии поверхность в пространстве определяется уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \quad (31.1)$$

связывающим координаты точек этой поверхности $M(x, y, z)$ в заданной системе координат $Oxyz$.

Как и для плоской кривой, геометрические свойства пространственной поверхности будем изучать как свойства решения этого уравнения. Однако не всякое уравнение может определять геометрический объект. Например, уравнение $x^2 + 4y^2 + z^2 + 2 = 0$ не определяет ни одну точку, координаты которой удовлетворяли бы этому уравнению. В этом случае для сохранения общности говорят о мнимых поверхностях.

С учётом этого кривая в пространстве определяется как линия пересечения двух поверхностей, т.е. задается системой двух уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (31.2)$$

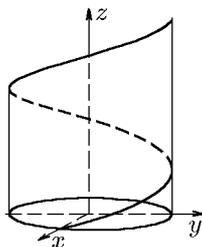
Прямая как линия пересечения двух плоскостей, т.е. как система двух линейных уравнений, естественным образом укладывается в рамки этого определения. Например, прямую линию в пространстве мы задавали как линию пересечения двух плоскостей (поверхностей первого порядка):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Параметризация системы (31.2) позволяет записать уравнения кривой в параметрической форме:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (31.3)$$

Так, например, уравнения винтовой линии, образующейся при движении точки, состоящем из равномерного движения вдоль некоторой прямой (оси) и равномерного движения по окружности против часовой стрелки по отношению к поступательному движению. В параметрической форме уравнение винтовой линии имеет вид



$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= a \sin t, \\ z &= \frac{h}{2\pi} t, \end{aligned}$$

где h — шаг винта.

◆ Если левая часть уравнения (31.1) есть целый полином относительно x, y, z , то поверхность называется *алгебраической*. Степень этого полинома относительно x, y, z дает порядок алгебраической поверхности.

Так, плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ есть алгебраическая поверхность первого порядка, а сферическая поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ есть поверхность второго порядка.

◆ *Поверхностью второго порядка* называется геометрическое место точек, координаты которых относительно декартовой системы координат удовлетворяют уравнению

$$F_2(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}zx + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0. \quad (31.4)$$

Как и в случае кривых второго порядка, определение (31.4) справедливо при следующих предположениях.

1. Уравнение (31.4) при переходе от репера $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ к реперу $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ остаётся уравнением 2-го порядка.

2. Всякая плоскость может быть описана уравнением как 1-й степени: $Ax + By + Cz + D = 0$, так и 2-ой степени: $(Ax + By + Cz + D)^2 = 0$.

3. Различные уравнения могут описывать одно и то же множество точек. Например, две различные пары плоскостей из одного пучка определяют одну и ту же прямую; аналогично каждое из уравнений $x^2 + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ описывает пустое множество в вещественном пространстве, хотя в комплексном пространстве множества решений этих уравнений различны.

В аналитическом определении поверхности (31.1) важную роль играет выбор системы координат. Одна из задач аналитической геометрии и состоит в нахождении системы координат, в которой уравнение (31.1) имеет наиболее простой вид, удобный для его изучения. Это же относится и к системе (31.2), определяющей кривую.

32. Основные задачи на поверхность и кривую

Рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. Дан закон образования поверхности или кривой. Составить уравнение этой поверхности.

◆ Составить уравнение линии или поверхности в выбранной системе координат – это значит составить такое уравнение, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на этой кривой или поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, которые на этих объектах не лежат.

◆ Для вывода уравнения линии поступают так: 1) выбирают на плоскости систему координат; 2) на линии, уравнение которой необходимо получить, выбирают произвольную точку. Координаты этой точки обозначают через x и y для прямоугольной системы координат или через ρ и φ для полярной. Основываясь на заданном свойстве всех точек, лежащих на линии, составляют уравнение, связывающее координаты произвольной точки с некоторыми постоянными величинами, данными в задаче. Найденное уравнение и будет искомым.

Пример 32.1. Составить уравнение сферы радиуса R с центром в точке $O(a, b, c)$.

Решение. Закон образования этой поверхности нам известен: сфера есть геометрическое место точек пространства, равноудаленных от заданной точки – центра. На сфере выберем точку $M(x, y, z)$ (текущая точка сферы) и соединим ее с центром сферы вектором \overrightarrow{OM} . Вектор \overrightarrow{OM} имеет координаты $\overrightarrow{OM} =$

$(x - a, y - b, z - c)$. Эта точка перемещается в трехмерном пространстве так, что все время

$$|\overrightarrow{OM}| = R. \quad (32.1)$$

Но длина вектора \overrightarrow{OM} определяется соотношением

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}.$$

Тогда равенство (32.1) перепишется так:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = R$$

или

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \quad (32.2)$$

Это и есть уравнение сферы (шаровой поверхности) радиуса R с центром в точке $O(a, b, c)$ в канонической форме.

В частном случае, когда центр сферы находится в начале координат, $a = b = c = 0$, и уравнение сферы приобретает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (32.3)$$

Раскрыв скобки, уравнение (32.2) можно переписать так:

$$x^2 + y^2 + z^2 + C_1x + C_2y + C_3z + D = 0, \quad (32.4)$$

где обозначено $C_1 = -2a$, $C_2 = -2b$, $C_3 = -2c$, $D = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$. Укажем признаки того, что уравнение (32.4) есть уравнение шаровой поверхности: 1) коэффициенты при x^2, y^2, z^2 равны между собой; 2) уравнение не содержит слагаемые с произведением xy или yz или zx .

Пример 32.2. Записать уравнения поверхности, каждая точка которой:

- а) отстоит от начала координат на расстояние $R = 4$;
- б) расположена вдвое ближе к точке $A(2, 0, 0)$, чем к точке $B(-4, 0, 0)$.

Решение. Если S — поверхность, заданная условиями задачи, то точка $M(x, y, z)$ принадлежит S в том и только в том случае, если:

а) $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 4$

или

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16; \quad (32.5)$$

б) $2|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{BM}|$,

т.е.

$$2\sqrt{(x - 2)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x + 4)^2 + y^2 + z^2}$$

или

$$3x^2 - 24x + 3y^2 + 3z^2 = 0.$$

Выделив полный квадрат, найдём

$$(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = 16. \quad (32.6)$$

Уравнения (32.5) и (32.6) описывают сферы радиуса $R = 4$, однако центр одной расположен в точке $O(0, 0, 0)$, а другой — в точке $C(4, 0, 0)$. Система координат, в которой сфера описывается уравнением (32.5), является более предпочтительной и называется *канонической системой координат*.

Пример 32.3. Найти уравнение поверхности, модуль разности расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0, -5, 0)$ и $F_2(0, 5, 0)$ равен 6.

Решение. Если S — поверхность, заданная условиями задачи, то точка $M(x, y, z)$ принадлежит S в том и только в том случае, если

$$|\overrightarrow{MF_1}| - |\overrightarrow{MF_2}| = 6,$$

т.е.

$$|\sqrt{x^2 + (y + 5)^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + (y - 5)^2 + z^2}| = 6$$

или

$$\sqrt{x^2 + (y + 5)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y - 5)^2 + z^2} \pm 6.$$

Двукратное возведение в квадрат дает

$$9x^2 + 9z^2 - 16y^2 + 144 = 0,$$

откуда получим искомое уравнение поверхности

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1, \quad (32.7)$$

называемой двуполостным гиперболоидом. Кроме того, записав уравнение (32.7) в виде

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2 + z^2}{16} = 1, \quad (32.8)$$

можно утверждать, что эта поверхность получается при вращении гиперболы

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

вокруг оси Oy .

Пример 32.4. Найти уравнение поверхности, сумма расстояний от каждой точки которой до точек $F_1(0, 0, -4)$ и $F_2(0, 0, 4)$ равна 10.

Решение. Если S — поверхность, заданная условиями задачи, то точка $M(x, y, z)$ принадлежит S в том и только в том случае, когда

$$|\overrightarrow{MF_1}| + |\overrightarrow{MF_2}| = 10,$$

т.е.

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 4)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 4)^2} = 10.$$

Двукратное возведение в квадрат дает

$$25x^2 + 25y^2 + 9z^2 - 225 = 0,$$

откуда получим искомое уравнение поверхности

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1, \quad (32.9)$$

называемой эллипсоидом. Кроме того, записав уравнение (32.9) в виде

$$\frac{x^2 + y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1, \quad (32.10)$$

можно утверждать, что эта поверхность получается при вращении эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$

вокруг оси Oz .

Задача 2. Дано уравнение поверхности. Исследовать форму этой поверхности.

Одним из наиболее распространенных методов исследования формы поверхности является метод сечений. Сущность этого метода состоит в том, что рассматриваются линии пересечения данной поверхности с различными плоскостями. На приведённом ниже примере проиллюстрируем схему исследования формы поверхности.

Пример 32.5. Исследовать форму конической поверхности

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (32.11)$$

Решение. 1. Найдём точки пересечения поверхности с осями координат. Если $x = 0$, $y = 0$, то из уравнения следует, что $z = 0$, т.е. конус проходит через начало координат.

2. Рассекая конус координатной плоскостью xOy ($z = 0$), в сечении получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

– точку, так как сумма квадратов равна нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$, $y = 0$.

3. Рассекая конус координатной плоскостью xOz ($y = 0$)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

в сечении получим пару прямых:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0,$$

откуда

$$z = \frac{c}{a}x, \quad z = -\frac{c}{a}x.$$

4. Рассекая конус координатной плоскостью yOz ($x = 0$)

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

в сечении получим пару прямых:

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0$$

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0,$$

откуда

$$y = \frac{b}{c}z, \quad y = -\frac{b}{c}z.$$

5. Рассекая конус плоскостью $z = h$, в сечении получим эллипс:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} &= 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{h^2}{c^2}, \\ \frac{x^2}{(ah/c)^2} + \frac{y^2}{(bh/c)^2} &= 1. \end{aligned}$$

Аналогично исследуется форма эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

однополостного гиперболоида и т.д.

Пример 32.6. Исследовать форму кривой, заданной уравнениями

$$\begin{aligned} (x-1)^2 + y^2 + z^2 &= 36, \\ y + z &= 0. \end{aligned} \tag{32.12}$$

Найти ее проекцию на плоскость xOy .

Решение. Кривая задана как линия пересечения сферы (см. пример 32.2) и плоскости и, следовательно, может быть только окружностью. Так как центр сферы $C(1, 0, 0)$ лежит в плоскости $y + z = 0$, то центр окружности совпадает с центром сферы, т.е. точкой C , и, следовательно, радиус окружности совпадает с радиусом сферы, т.е. $R = 6$.

Выясним теперь, какой вид имеет проекция этой окружности на плоскость xOy . Исключив z из системы (32.12), получим $(x-1)^2 + 2y^2 = 36$ или

$$\frac{(x-1)^2}{36} + \frac{y^2}{18} = 1, \tag{32.13}$$

т.е. искомая проекция есть эллипс, главными осями которого являются оси Ox и Oy , центр находится в точке $C'(1, 0)$, а полуоси равны $a = 6$, $b = 3\sqrt{2}$ (для сравнения: линия пересечения плоскости xOy с заданной сферой есть окружность $(x-1)^2 + y^2 = 36$).

Пример 32.7. Найти центр и радиус окружности

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 10y, \\ x + 2y + 2z - 19 &= 0. \end{aligned}$$

Решение. Выделив полный квадрат в первом уравнении системы, преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned} x^2 + (y-5)^2 + z^2 &= 25, \\ x + 2y + 2z - 19 &= 0. \end{aligned} \tag{32.14}$$

Система задает линию пересечения сферы радиусом $R = 5$, центр которой лежит в точке $C(0, 5, 0)$, и плоскости с вектором нормали $\vec{N} = (1, 2, 2)$. Центр сферы не принадлежит плоскости, в чём можно убедиться, подставив его координаты в уравнение плоскости. Поэтому координаты центра окружности следует искать как проекцию точки C на секущую плоскость. Решение этой задачи хорошо известно (см. разд. «Уравнение перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную прямую»). Составим параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $C(0, 5, 0)$ в направлении вектора $\vec{N} = (1, 2, 2)$:

$$x = t, \quad y = 5 + 2t, \quad z = 2t. \quad (32.15)$$

Теперь найдём точку пересечения прямой (32.15) с секущей плоскостью. Для этого подставим равенства (32.15) в уравнение плоскости:

$$t + 2(5 + 2t) + 4t - 19 = 0$$

и найдём значение $t = 1$, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости. Подставив $t = 1$ в (32.15), найдём координаты $x = 1, y = 7, z = 2$ проекции центра сферы на секущую плоскость. Таким образом, координаты центра окружности $C'(1, 7, 2)$. Вычислим теперь расстояние d между центром сферы и центром окружности: $d = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$. Тогда радиус окружности r можно найти по теореме Пифагора: $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$.

Таким образом, линией пересечения заданных сферы и плоскости является окружность с центром в точке $C'(1, 7, 2)$ и радиусом $r = 4$.

Пример 32.8. Определить координаты центра и радиус шаровой поверхности

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 11 = 0$$

и сделать построение.

Решение. Чтобы решить эту задачу, следует заданное уравнение шаровой поверхности привести к каноническому виду (32.2), выделив полные квадраты. Получим

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) + (z - 0)^2 = 11 + 1 + 4,$$

т.е.

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 0)^2 = r^2,$$

где координаты центра $O(1, 2, 0)$, $a = 1, b = 2, c = 0, R = 4$.

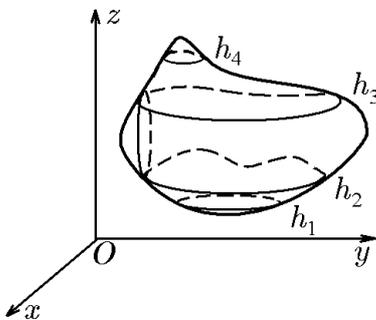


Рис. 159.

Из рассмотренных выше примеров видно, что нахождение сечения поверхности произвольной плоскостью — задача, вообще говоря, достаточно громоздкая. Она упрощается, если в качестве секущих плоскостей использовать координатные. В этом случае найти линии пересечения достаточно просто, а, кроме того, их совокупность дает представление о самой поверхности (рис. 159).

Такой метод называется *методом сечений* и широко используется не только в аналитической геометрии, но и в других разделах математики и их приложениях.

Пример 32.9. Методом сечений исследовать и построить поверхность, полученную в примере 32.3.

Решение. В примере 32.3 получена поверхность, описываемая уравнением (32.7), т.е.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = -1. \quad (32.16)$$

Для удобства запишем его в виде

$$\frac{x^2 + z^2}{16} = \frac{y^2}{9} - 1 \quad (32.17)$$

и отметим, что поверхность обладает центральной симметрией относительно начала координат, поскольку все три координатные плоскости $x = y = z = 0$ являются плоскостями симметрии. Далее, сечение поверхности вертикальной плоскостью $y = h$ (аналогично и для $y = -h$) есть кривая L_h , проекция которой на плоскость xOz определится уравнением

$$\frac{x^2 + z^2}{16} = \frac{h^2}{9} - 1. \quad (32.18)$$

Уравнение (32.18) при $|h| < 3$ не имеет решений относительно (x, z) . Это означает, что соответствующее сечение пусто, т.е. рассматриваемая поверхность целиком расположена в полупространстве $y \geq 3$ (в силу симметрии $y \leq -3$). При $h \geq 3$ уравнение (32.18) определяет окружность

$$x^2 + z^2 = \frac{16}{9}(h^2 - 9) \quad (32.19)$$

с радиусом

$$R = \frac{4}{3}\sqrt{h^2 - 9}, \quad (32.20)$$

которая вырождается в точку $x = z = 0$ при $h = 3$. заметим, что с ростом h радиус R , согласно (32.20), растет.

Полученной информацией достаточно, чтобы построить эскиз поверхности (см. рис. 160). Для дальнейшего уточнения ее формы рассмотрим ее сечение координатной плоскостью yOz , т.е. $x = 0$. Сечением поверхности (32.16) плоскостью $x = 0$ является кривая, проекция которой на плоскость yOz описывается уравнением

$$\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1, \quad (32.21)$$

Это уравнение определяет гиперболу с действительной осью Oy и мнимой Oz , с полуосями $a = 3$, $b = 4$.

Таким образом, исследуемая поверхность представляет собой след от окружностей (32.19), концы диаметров которых в плоскости $x = 0$ движутся по гиперболу (32.21). Такая поверхность называется *двулоостным гиперболоидом*, а точнее — *двулоостным гиперболоидом вращения*.

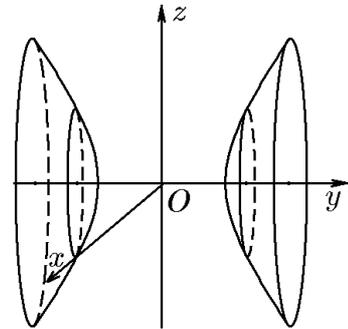


Рис. 160.

33. Основная теорема о поверхности второго порядка

Теорема 33.1. Для любой поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат $Oxuz$, в которой уравнение поверхности имеет один из следующих 17 видов (см. табл. 4), называемых каноническими.

Таблица 4

| № | Название поверхности | Уравнение поверхности | Группа |
|-----|-------------------------------------|--|--------|
| 1. | Эллипсоид | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ | I |
| 2. | Мнимый эллипсоид | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ | I |
| 3. | Однополостный гиперболоид | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ | I |
| 4. | Двуполостный гиперболоид | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ | I |
| 5. | конус | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ | I |
| 6. | Мнимый конус | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ | I |
| 7. | Эллиптический параболоид | $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ | II |
| 8. | Гиперболический параболоид | $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ | II |
| 9. | Эллиптический цилиндр | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ | III |
| 10. | Мнимый эллиптический цилиндр | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ | III |
| 11. | Две мнимые пересекающиеся плоскости | $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ | III |
| 12. | Гиперболический цилиндр | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ | III |
| 13. | Две пересекающиеся плоскости | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ | III |
| 14. | Параболический цилиндр | $x^2 = 2py$ | IV |
| 15. | Две параллельные плоскости | $x^2 = a^2, a \neq 0$ | V |
| 16. | Две мнимые параллельные плоскости | $x^2 = -a^2, a \neq 0$ | V |
| 17. | Две совпадающие плоскости | $x^2 = 0$ | V |

Доказательство будет приведено ниже.

Следствие 33.1.1. Пересечением поверхности второго порядка плоскостью является лежащая в этой плоскости линия не более чем второго порядка.

Действительно, выберем такую систему координат, в которой данная плоскость имеет уравнение $z = 0$. Получим уравнение линии пересечения на этой плоскости

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0,$$

являющейся линией второго порядка.

Из уравнений поверхностей, приведённых в табл. 4, рассмотрим более подробно те, решения которых не являются пустыми множествами, а также не определяют совокупность плоскостей.

34. Эллипсоид

Согласно табл. 4, уравнение вещественного эллипсоида (поверхность № 1) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Положительные числа a, b, c называются *полуосями эллипсоида*. Выбором системы координат можно добиться выполнения условий $a \geq b \geq c$. Эллипсоид является ограниченной поверхностью, поскольку расположен в прямоугольном параллелепипеде $|x| \leq a, |y| \leq b, |z| \leq c$ (рис. 161). Уравнение эллипсоида не меняется при заменах $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$. Это означает, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат — центром симметрии.

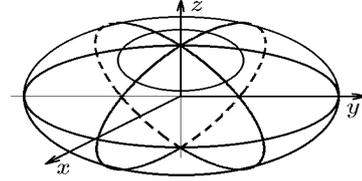


Рис. 161.

При $a = b$ уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Такой эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*. Его можно получить вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$$

вокруг оси Oz , что будет показано в примере 39.6.

При $a = b = c = R$ эллипсоид является сферой с радиусом R :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Теорема 34.1. Любое плоское сечение эллипсоида является кривой эллиптического типа.

Доказательство очевидно, если секущей плоскостью является координатная плоскость. Например, линией пересечения эллипсоида с плоскостью $z = \pm h$ является эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{[a\sqrt{1 - (h/c)^2}]^2} + \frac{y^2}{[b\sqrt{1 - (h/c)^2}]^2} = 1. \quad (34.1)$$

Полуоси эллипса (34.1) $a\sqrt{1 - (h/c)^2}$ и $b\sqrt{1 - (h/c)^2}$ являются максимальными при $h = 0$ и обращаются в нуль при $h = \pm c$. В последнем случае плоскость $z = c$ касается эллипсоида в точке $(0, 0, c)$, т.е. линия пересечения вырождается в точку. Аналогичные выводы можно сделать для секущих плоскостей $x = \pm h, y = \pm h$.

Рассмотрим теперь произвольную плоскость π с направляющими векторами $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Воспользуемся параметрическими уравнениями этой плоскости:

$$\begin{aligned} \pi : \quad x &= x_0 + m_1 t_1 + m_2 t_2, \\ y &= y_0 + n_1 t_1 + n_2 t_2, \\ z &= z_0 + p_1 t_1 + p_2 t_2. \end{aligned} \quad (34.2)$$

Теперь воспользуемся тем, что линейно независимые трёхмерные векторы \vec{s}_1 и \vec{s}_2 на плоскости π можно рассматривать как базис на этой плоскости, который в совокупности с любой её точкой M_0 образует репер $(M_0; \vec{s}_1, \vec{s}_2)$. Поскольку базис \vec{s}_1, \vec{s}_2 всегда можно выбрать ортонормированным, то параметры t_1 и t_2 можно рассматривать как декартовы координаты в этом репере.

Таким образом, подставив (34.2) в уравнение эллипсоида, получим уравнение его плоского сечения в координатах t_1, t_2 :

$$\frac{(x_0 + m_1 t_1 + m_2 t_2)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + n_1 t_1 + n_2 t_2)^2}{b^2} + \frac{(z_0 + p_1 t_1 + p_2 t_2)^2}{c^2} = 1. \quad (34.3)$$

Квадратичная часть этого уравнения имеет вид

$$\left(\frac{m_1^2}{a^2} + \frac{n_1^2}{b^2} + \frac{p_1^2}{c^2}\right)t_1^2 + \left(\frac{m_1 m_2}{a^2} + \frac{n_1 n_2}{b^2} + \frac{p_1 p_2}{c^2}\right)t_1 t_2 + \left(\frac{m_2^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{p_2^2}{c^2}\right)t_2^2. \quad (34.4)$$

Если ввести вспомогательные векторы

$$\vec{e}_1 = \left(\frac{m_1}{a}, \frac{n_1}{b}, \frac{p_1}{c}\right), \quad \vec{e}_2 = \left(\frac{m_2}{a}, \frac{n_2}{b}, \frac{p_2}{c}\right), \quad (34.5)$$

то с их помощью квадратичная часть (34.4) примет более простой вид:

$$|\vec{e}_1|^2 t_1^2 + 2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) t_1 t_2 + |\vec{e}_2|^2 t_2^2,$$

которому соответствует матрица квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} |\vec{e}_1|^2 & (\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ (\vec{e}_1, \vec{e}_2) & |\vec{e}_2|^2 \end{pmatrix}. \quad (34.6)$$

Вычислим инвариант $\delta = \det G$ уравнения нашего плоского сечения, представляющего линию 2-го порядка:

$$\delta = \det G = |\vec{e}_1|^2 |\vec{e}_2|^2 - (\vec{e}_1, \vec{e}_2)^2 = |\vec{e}_1|^2 |\vec{e}_2|^2 \sin^2 \varphi, \quad (34.7)$$

где φ — угол между векторами \vec{e}_1 и \vec{e}_2 . Но векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 линейно независимы, поскольку их пропорциональность в силу (34.5) влекла бы пропорциональность перпендикулярных векторов \vec{s}_1 и \vec{s}_2 . Поэтому $\sin \varphi \neq 0$ и, следовательно, $\delta > 0$. Как известно, этому условию удовлетворяют кривые эллиптического типа. Таким образом, никаких других линий в плоском сечении эллипсоида быть не может.

◇ Поскольку окружность относится к кривым эллиптического типа, всегда можно указать плоскость, линией пересечения которой с эллипсоидом является окружность. Для эллипсоида вращения таковой будет координатная плоскость, перпендикулярная оси вращения. Оказывается, и для произвольного эллипсоида $a > b > c$ можно указать плоскость, дающую в сечении окружность. Следующий пример показывает нам, как это сделать.

Пример 34.1. Для эллипсоида

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad (34.8)$$

записать уравнение плоскости, которая пересекает его по окружности.

Решение. Согласно теореме 34.1, необходимо найти такие векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , которые диагонализуют матрицу G квадратичной формы (34.4), т.е.

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 0 \quad (34.9)$$

при условии

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2|. \quad (34.10)$$

Уравнение секущей плоскости будем искать в виде

$$\pi : \begin{cases} x = m_1 t_1 + m_2 t_2, \\ y = n_1 t_1 + n_2 t_2, \\ z = p_1 t_1 + p_2 t_2. \end{cases} \quad (34.11)$$

В качестве направляющих векторов $\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$, $\vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ выберем ортонормированную пару векторов

$$\vec{s}_1 = (0, 1, 0), \quad \vec{s}_2 = (m_2, 0, p_2), \quad (34.12)$$

где

$$m_2^2 + p_2^2 = 1. \quad (34.13)$$

В этом случае репер $\{O, \vec{s}_1, \vec{s}_2\}$ определяет на плоскости декартову систему координат $t_1 O t_2$.

Теперь, исходя из (34.12) с учётом (34.2), определим пару векторов

$$\vec{e}_1 = \left(0, \frac{1}{4}, 0\right), \quad \vec{e}_2 = \left(\frac{m_2}{5}, 0, \frac{p_2}{3}\right). \quad (34.14)$$

Подставив их координаты в (34.10), получим уравнение

$$\frac{1}{4} = \sqrt{\frac{m_2^2}{25} + \frac{p_2^2}{9}}$$

или

$$\frac{1}{16} = \frac{m_2^2}{25} + \frac{p_2^2}{9}. \quad (34.15)$$

Выразив из (34.13)

$$p_2^1 = 1 - m_2^2$$

и подставив его в (34.15), найдём

$$\frac{m_2^2}{25} + \frac{1 - m_2^2}{9} = \frac{1}{16},$$

откуда

$$m_2^2 = \frac{175}{256}$$

или

$$m_2 = \frac{5\sqrt{7}}{16}, \quad (34.16)$$

тогда

$$p_2 = \sqrt{1 - m_2^2} = \frac{9}{16}. \quad (34.17)$$

Таким образом, уравнение секущей плоскости (34.11) имеет вид

$$\begin{aligned}x &= \frac{5\sqrt{7}}{16}t_2, \\y &= t_1, \\z &= \frac{9}{16}t_2.\end{aligned}\tag{34.18}$$

Подставив (34.18) в уравнение эллипсоида (34.8), получим уравнение линии их пересечения

$$\frac{(5\sqrt{7}/16)^2 t_2^2}{25} + \frac{t_1^2}{16} + \frac{(9/16)^2 t_2^2}{9} = 1,$$

которое после преобразования примет вид

$$t_1^2 + t_2^2 = 16,$$

что соответствует окружности с радиусом $R = 4$.

Вместо параметрических уравнений плоскости (34.18) можно воспользоваться общим уравнением. Вектор нормали к плоскости (34.18) определится соотношением

$$\vec{N} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 5\sqrt{5}/16 & 0 & 9/16 \end{vmatrix} = \frac{9}{16}\vec{i} - \frac{5\sqrt{7}}{16}\vec{k}.$$

Поскольку плоскость π проходит через точку $O(0, 0, 0)$, её общее уравнение можно записать в виде

$$9x - 5\sqrt{7}z = 0.$$

35. Гиперboloиды

35.1. Двуполостный гиперboloид

Уравнение двуполостного гиперboloида (поверхность № 4 табл. 4) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Положительные числа a, b, c называются *полуосями двуполостного гиперboloида*. Выбором осей координат всегда можно добиться условия $b \geq a$. Поскольку уравнение двуполостного гиперboloида не меняется при заменах $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, $z \rightarrow -z$, то координатные плоскости $x = y = z = 0$ являются *плоскостями симметрии*, а начало координат — *центром симметрии*. Запишем уравнение двуполостного гиперboloида в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1.\tag{35.1}$$

Нетрудно заметить, что это уравнение не имеет решений в области $|z| < c$, где $(z/c)^2 - 1 < 0$. Это означает, что вся поверхность двуполостного гиперboloида разбивается на две симметричных полости (отсюда и название), расположенных в неограниченных областях $|z| \geq c$ (рис. 162).

При $a = b$ уравнение двуполостного гиперboloида имеет вид

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Такой гиперboloид можно получить вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad y = 0 \quad (35.2)$$

с действительной полуосью c вокруг оси Oz , поэтому его называют ещё *гиперboloидом вращения*. Очевидно, что сечениями гиперboloида вращения плоскостью $z = h > c$ являются окружности радиуса $R = \sqrt{(h/c)^2 - 1}$, а сечением плоскостью $y = 0$ — гипербола (35.2).

Структура плоских сечений произвольного двуполостного гиперboloида определяется следующей теоремой.

Теорема 35.1. *Плоским сечением двуполостного гиперboloида может быть содержательная нераспадающаяся линия 2-го порядка любого типа.*

Доказательство. Сечениями двуполостного гиперboloида плоскостями $z = h$, $h \geq c$, являются эллипсы

$$\frac{x^2}{[a\sqrt{(h/c)^2 - 1}]^2} + \frac{y^2}{[b\sqrt{(h/c)^2 - 1}]^2} = 1,$$

полуоси которых равны нулю при $h = c$ и неограниченно возрастают с ростом h . При $h = c$ плоскость $z = c$ является касательной с точкой касания $M(0, 0, c)$.

Сечениями двуполостного гиперboloида плоскостями $y = h$ являются гиперболы

$$\frac{z^2}{[c\sqrt{1 + (h/c)^2}]^2} - \frac{x^2}{[a\sqrt{1 + (h/c)^2}]^2} = 1$$

с действительной полуосью $c\sqrt{1 + (h/c)^2}$ и мнимой $a\sqrt{1 + (h/c)^2}$, длина которых возрастает с ростом h . Аналогичный вывод можно сделать для секущих плоскостей $x = h$. Таким образом, мы показали, что плоскими сечениями двуполостного гиперboloида являются кривые эллиптического и гиперболического типов. Покажем теперь, что линией плоского сечения может быть и парабола.

Рассмотрим плоскость π , проходящую через точку $M_0(0, 0, z_0)$, направляющими векторами которой служит пара ортонормированных векторов

$$\vec{s}_1 = (0, 1, 0), \quad \vec{s}_2 = (m_2, 0, \sqrt{1 - m_2^2}). \quad (35.3)$$

В параметрической форме эта плоскость задаётся уравнениями

$$\pi : \begin{cases} x = m_2 t_2, \\ y = t_1, \\ z = c + \sqrt{1 - m_2^2} t_2, \quad z_0 = c. \end{cases} \quad (35.4)$$

В силу ортонормированности векторов \vec{s}_1, \vec{s}_2 величины t_1 и t_2 в (35.4) можно считать декартовыми координатами системы координат $t_1 M_0 t_2$ на плоскости π .

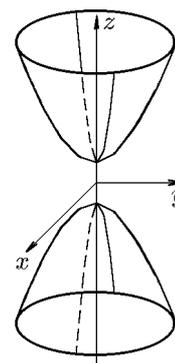


Рис. 162.

Подставив (35.4) в уравнение двуполостного гиперboloида, получим уравнение линии пересечения в координатах t_1, t_2 :

$$\frac{m_2^2}{a^2}t_2^2 + \frac{1}{b^2}t_1^2 - \frac{(c + \sqrt{1 - m_2^2}t_2)^2}{c^2} = -1,$$

которое после упрощения можно записать как

$$\left[\frac{m_2^2}{a^2} - \frac{1 - m_2^2}{c^2} \right] t_2^2 + \frac{1}{b^2}t_1^2 - 2\frac{\sqrt{1 - m_2^2}}{c}t_2 = 0. \quad (35.5)$$

Уравнение (35.5) будет определять кривую параболического типа, если выполняется условие

$$\frac{m_2^2}{a^2} - \frac{1 - m_2^2}{c^2} = 0. \quad (35.6)$$

Разрешив (35.6) относительно m_2 , найдём

$$m_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \quad (35.7)$$

и, соответственно,

$$\sqrt{1 - m_2^2} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}. \quad (35.8)$$

С учётом этого уравнение (35.5) примет вид

$$\frac{1}{b^2}t_1^2 - 2\frac{1}{\sqrt{a^2 + c^2}}t_2 = 0$$

или

$$t_1^2 = 2\frac{b^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}t_2. \quad (35.9)$$

Это и есть каноническое уравнение параболы с фокальным параметром

$$p = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}. \quad (35.10)$$

Теперь мы должны показать, что плоские сечения двуполостного гиперboloида не могут быть распадающимися кривыми. Поскольку содержательная распадающаяся кривая представляет собой совокупность прямых, то нужно показать, что поверхность двуполостного гиперboloида не имеет прямолинейных образующих. В связи с этим заметим, что все пространственные прямые можно разделить на прямые, пересекающие плоскость $z = 0$, и прямые, параллельные этой плоскости. Прямые, пересекающие плоскость $z = 0$, не могут быть прямолинейными образующими, поскольку эта плоскость не пересекается с двуполостным гиперboloидом.

Остальные прямые лежат в плоскостях $z = h$, причём при $|h| < c$ плоскость и двуполостный гиперboloид не пересекаются; при $|h| = c$ плоскость касается гиперboloида; при $|h| > c$ сечения являются эллипсами.

Пример 35.1. Записать уравнение плоскости π , пересекающей двуполостной гиперboloид

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = -1$$

по параболе.

Решение. При доказательстве теоремы 35.1 мы показали, что искомая плоскость описывается параметрическими уравнениями (35.4). Поскольку полуоси двуполостного гиперboloида равны $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$, то из (35.7) и (35.8) найдём

$$m_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{5}{\sqrt{41}}, \quad \sqrt{1 - m_2^2} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{41}}.$$

Следовательно, параметрические уравнения плоскости π имеют вид

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{\sqrt{41}}t_2, \\ y &= t_1, \\ z &= 4 + \frac{4}{\sqrt{41}}t_2. \end{aligned} \tag{35.11}$$

В координатах t_1, t_2 линией пересечения плоскости (35.11) с двуполостным гиперboloидом является, согласно (35.9), парабола

$$t_1^2 = \frac{50}{\sqrt{41}}t_2.$$

◇ Параметрическим уравнениям (35.11) соответствует общее уравнение $4x - 5z + 20 = 0$.

Пример 35.2. Записать уравнение плоскости π , пересекающей двуполостной гиперboloид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad b \geq a,$$

по окружности, проходящей через его вершину $M_0(0, 0, c)$. С его помощью выписать уравнение линии пересечения этой плоскости и двуполостного гиперboloида для случая $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$ (см. предыдущий пример).

Решение. Как и в предыдущем примере, искомое уравнение плоскости запишем в параметрическом виде (35.4):

$$\begin{aligned} x &= m_2t_2, \\ y &= t_1, \\ z &= c + \sqrt{1 - m_2^2}t_2. \end{aligned} \tag{35.12}$$

Подставив (35.12) в уравнения двуполостного гиперboloида, получим уравнение линии пересечения в координатах t_1 и t_2 (35.5), т.е.

$$\left[\frac{m_2^2}{a^2} - \frac{1 - m_2^2}{c^2} \right] t_2^2 + \frac{1}{b^2} t_1^2 - 2 \frac{\sqrt{1 - m_2^2}}{c} t_2 = 0. \tag{35.13}$$

Это уравнение будет описывать окружность при условии

$$\frac{m_2^2}{a^2} - \frac{1 - m_2^2}{c^2} = \frac{1}{b^2}.$$

Разрешив его относительно m_2 , найдём

$$m_2 = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{c^2 + b^2}{a^2 + c^2}} \tag{35.14}$$

и, соответственно,

$$\sqrt{1 - m_2^2} = \frac{c}{b} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2}}. \quad (35.15)$$

Подставив (35.14), (35.15) в (35.12), получим уравнение искомой плоскости

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{b} \sqrt{\frac{c^2 + b^2}{c^2 + a^2}} t_2, \\ y &= t_1, \\ z &= c + \frac{c}{b} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 + a^2}} t_2, \quad b \geq a, \end{aligned} \quad (35.16)$$

а подставив в (35.13) — уравнение линии пересечения

$$t_1^2 + \left[t_2 - b \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 + a^2}} \right]^2 = \left(b \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 + a^2}} \right)^2. \quad (35.17)$$

Формулы (35.14)–(35.17) дают решение первой части задачи.

Переходя ко второй части, заметим, что полуоси конкретного двуполостного гиперboloида

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = -1$$

равны $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$. Подставив эти значения в (35.16), найдём уравнение плоскости

$$\begin{aligned} x &= \frac{3\sqrt{41}}{25} t_2, \\ y &= t_1, \\ z &= 4 + \frac{16}{25} t_2. \end{aligned} \quad (35.18)$$

Подстановка этих значений в уравнение линии пересечения (35.17) даёт уравнение окружности

$$t_1^2 + (t_2 - 4)^2 = 16$$

с радиусом $R = 4$.

◇ Параметрическим уравнениям (35.18) соответствует общее уравнение

$$16x - 3\sqrt{41}(z - 4) = 0.$$

35.2. Однополостный гиперboloид

Согласно табл. 4, уравнение однополостного гиперboloида (поверхность № 3) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Выбором осей координат всегда можно добиться условия $b \geq a$. Для однополостного гиперboloида, как и для двуполостного, координатные плоскости являются *плоскостями симметрии*, а начало координат — *центром симметрии* (рис. 163).

Если $a = b$, т.е.

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (35.19)$$

то однополостный гиперболоид является *гиперболоидом вращения*. Такой гиперболоид можно получить вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

вокруг оси Oz . В отличие от двуполостного гиперболоида, однополостный имеет непустое пересечение с плоскостью $z = 0$. Линией пересечения является эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

называемый *горловым эллипсом однополостного гиперболоида*.

Теорема 35.2. *Плоским сечением однополостного гиперболоида может быть содержательная линия 2-го порядка любого типа.*

Доказательство. Сечениями однополостного гиперболоида плоскостями $z = \pm h$ являются эллипсы

$$\frac{x^2}{[a\sqrt{1 + (h/c)^2}]^2} + \frac{y^2}{[b\sqrt{1 + (h/c)^2}]^2} = 1,$$

полуоси которых совпадают с полуосями горлового эллипса при $h = 0$ и неограниченно возрастают с ростом h , имея тот же эксцентриситет, что и горловой эллипс.

Сечениями однополостного гиперболоида плоскостями $y = \pm h$ являются при $|h| < b$ гиперболы

$$\frac{x^2}{[a\sqrt{1 - (h/b)^2}]^2} - \frac{z^2}{[c\sqrt{1 - (h/b)^2}]^2} = 1,$$

мнимая полуось которых параллельна оси Oz , и при $|h| > b$ гиперболы

$$\frac{z^2}{[c\sqrt{(h/b)^2 - 1}]^2} - \frac{x^2}{[a\sqrt{(h/b)^2 - 1}]^2} = 1$$

действительная полуось которых параллельна оси Oz . При $h = \pm b$ обе гиперболы вырождаются в пересекающиеся прямые

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0.$$

Аналогичный вывод можно сделать для секущих плоскостей $x = \pm h$.

Таким образом, мы показали, что плоскими сечениями однополостного гиперболоида могут являться кривые эллиптического и гиперболического типа, а также линии 2-го порядка, распадающиеся на две пересекающиеся прямые.

Покажем теперь, что линиями плоского сечения могут быть параболы и параллельные прямые. Например, что плоскость

$$cx - a(z - z_0) = 0 \quad (35.20)$$

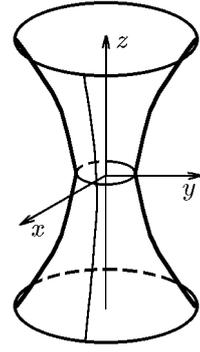


Рис. 163.

при $z_0 \neq 0$ пересекает однополостный гиперболоид по параболе, а при $z_0 = 0$ — по параллельным прямым.

Рассмотрим плоскость π , проходящую через точку $M_0(0, 0, z_0)$, направляющими векторами которой служит пара ортонормированных векторов

$$\vec{s}_1 = (0, 1, 0), \quad \vec{s}_2 = (m_2, 0, \sqrt{1 - m_2^2}).$$

В параметрическом виде эта плоскость задаётся уравнениями

$$\pi : \begin{cases} x = m_2 t_2, \\ y = t_1, \\ z = z_0 + \sqrt{1 - m_2^2} t_2. \end{cases} \quad (35.21)$$

В силу ортонормированности векторов \vec{s}_1, \vec{s}_2 величины t_1 и t_2 в (35.21) можно считать декартовыми координатами системы координат $t_1 M_0 t_2$ на плоскости π . Сама плоскость π (35.21) параллельна оси Oy и образует с осью Oz угол ψ , который определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \psi}{\cos \psi} = \frac{m_2}{\sqrt{1 - m_2^2}}. \quad (35.22)$$

Подставив (35.22) в уравнение однополостного гиперболоида, получим уравнение линии пересечения в координатах t_1, t_2 :

$$\frac{m_2^2}{a^2} t_2^2 + \frac{1}{b^2} t_1^2 - \frac{(z_0 + \sqrt{1 - m_2^2} t_2)^2}{c^2} = 1$$

или

$$\left[m_2^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} \right] t_2^2 + \frac{1}{b^2} t_1^2 - \frac{2z_0}{c^2} \sqrt{1 - m_2^2} t_2 - \frac{z_0^2}{c^2} = 1. \quad (35.23)$$

Потребуем в (35.23) выполнения условия

$$m_2^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} = 0, \quad (35.24)$$

которое сведёт его к уравнению параболического типа.

Разрешив (35.24) относительно m_2 , найдём

$$m_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \quad (35.25)$$

и, соответственно,

$$\sqrt{1 - m_2^2} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}. \quad (35.26)$$

С учётом этого уравнение (35.23) примет вид

$$\frac{1}{b^2} t_1^2 - \frac{2z_0}{c\sqrt{a^2 + c^2}} t_2 - \frac{z_0^2}{c^2} = 1. \quad (35.27)$$

Уравнение (35.27) при $z_0 \neq 0$ описывает параболу, а при $z_0 = 0$ — пару параллельных прямых

$$t_1^2 = b^2; \quad t_1 = -b, \quad t_1 = b, \quad (35.28)$$

пресекающих горловой эллипс, что и требовалось доказать.

Поскольку параметрические уравнения секущей плоскости (35.22) имеют общий вид

$$x - (z - z_0) \operatorname{tg} \psi = 0, \quad (35.29)$$

то при $\operatorname{tg} \psi = a/c$ это уравнение переходит в уравнение (35.21). Это означает, что плоскость (35.29), проходящая параллельно оси Oy под углом $\psi = \operatorname{arctg}(a/c)$ к оси Oz , пересекает однополостный гиперboloид по параболе (35.27) при $z_0 \neq 0$ и по паре параллельных прямых (35.28) при $z_0 = 0$ (плоскость проходит через саму ось Oy).

Интересно, что одна из параллельных прямых (35.28), например $t_1 = b$, совпадает с одной из пересекающихся прямых, получаемых при сечении гиперboloида плоскостью $y = b$. Эту прямую можно рассматривать как линию пересечения двух плоскостей:

$$\begin{aligned} y - b &= 0, \\ cx - az &= 0. \end{aligned} \quad (35.30)$$

Действительно, подставив (35.30) в уравнение однополостного гиперboloида

$$\frac{(az/c)^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

получим тождество

$$1 \equiv 1.$$

Это означает, что, в отличие от двуполостного гиперboloида, однополостный имеет прямолинейные образующие и его поверхность может быть получена при соответствующем движении прямой (35.30). Это свойство однополостного гиперboloида мы рассмотрим ниже в разд. «Линейчатые поверхности».

Пример 35.3. Исследовать сечение однополостного гиперboloида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad b > a,$$

плоскостью π , проходящей через ось Oy , в зависимости от угла её наклона к оси Oz .

Решение. Плоскость π , проходящая через ось Oy под углом ψ к оси Oz , описывается общим уравнением

$$x - z \operatorname{tg} \psi = 0 \quad (35.31)$$

или параметрическими уравнениями

$$\begin{aligned} x &= t_2 \sin \psi, \\ y &= t_1, \\ z &= t_2 \cos \psi \end{aligned} \quad (35.32)$$

с ортонормированной парой направляющих векторов $\vec{s}_1 = (0, 1, 0)$ и $\vec{s}_2 = (\sin \psi, 0, \cos \psi)$. Подставив (35.32) в уравнение однополостного гиперboloида, получим уравнение линии его пересечения с плоскостью (35.32) в декартовой системе координат t_1Ot_2 на плоскости π :

$$\frac{\sin^2 \psi}{a^2} t_2^2 + \frac{1}{b^2} t_1^2 - \frac{\cos^2 \psi}{c^2} t_2^2 = 1. \quad (35.33)$$

Чтобы определить тип линии пересечения (35.33) как кривой 2-го порядка, выпишем матрицу квадратичной формы:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 \psi}{a^2} - \frac{\cos^2 \psi}{c^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \quad (35.34)$$

и вычислим её определитель

$$\delta = \det G = \frac{1}{b^2} \left(\frac{\sin^2 \psi}{a^2} - \frac{\cos^2 \psi}{c^2} \right) = \frac{\cos^2 \psi}{b^2 a^2} \left(\operatorname{tg}^2 \psi - \frac{a^2}{c^2} \right). \quad (35.35)$$

Из (35.35) следует, что

- а) если $\delta = 0$, т.е. $\operatorname{tg} \psi = a/c$, то линией пересечения является парабола;
- б) если $\delta < 0$, т.е. $\operatorname{tg} \psi < a/c$, то линией пересечения является гипербола;
- в) если $\delta > 0$, т.е. $\operatorname{tg} \psi > a/c$, то линией пересечения будет эллипс.

Исследуем возможность получить среди линий эллиптического типа, т.е. при $\operatorname{tg} \psi > a/c$, эллипс с нулевым эксцентриситетом, т.е. окружность.

Линия пересечения (35.33) будет окружностью при условии

$$\frac{\sin^2 \psi}{a^2} - \frac{\cos^2 \psi}{c^2} = \frac{1}{b^2}. \quad (35.36)$$

Из (35.36) с учётом известного соотношения $\cos^2 \psi = 1 - \sin^2 \psi$ найдём

$$\sin \psi = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{c^2 + b^2}{c^2 + a^2}} \quad (35.37)$$

и, соответственно,

$$\cos \psi = \frac{c}{b} \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{c^2 + a^2}}. \quad (35.38)$$

Подставив (35.37), (35.38) или (35.36) в (35.33), получим уравнение

$$t_1^2 + t_2^2 = b^2, \quad (35.39)$$

определяющее окружность радиуса b с центром в начале координат.

Уравнение плоскости, которая пересекает однополостный гиперboloид по окружности (35.39), имеет вид (35.31) и с учётом (35.37), (35.38) запишется как

$$c\sqrt{b^2 - a^2}x - a\sqrt{b^2 + c^2}z = 0. \quad (35.40)$$

Плоскость (35.40) существует при условии $b > a$, которое в нашем случае выполняется. Это означает, что только плоскость, проходящая через большую ось горлового эллипса однополостного гиперboloида, может пересечь его по окружности.

Пример 35.4. Для однополостного гиперboloида

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{16} = 1$$

записать уравнения плоскостей, пересекающих его по окружности, двум параллельным прямым и параболе, а также определить вид линии его пересечения с плоскостями, проходящими через ось Oy под углом 30° и 60° , соответственно.

Решение. Полуоси заданного однополостного гиперboloида равны $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$. Согласно (35.40), плоскость

$$16x - 3\sqrt{41}z = 0, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{3\sqrt{41}}{16}, \quad \psi \approx 50^\circ \quad (35.41)$$

пересекает однополостный гиперboloид по окружности (35.39), т.е.

$$t_1^2 + t_2^2 = 25.$$

Согласно (35.29), плоскость

$$4x - 3z = 0, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{3}{4}, \quad \psi \approx 37^\circ \quad (35.42)$$

пересекает однополостный гиперboloид по двум параллельным прямым

$$t_1 = 5, \quad t_2 = -5.$$

Смещение плоскости (35.42) вверх по оси Oz на величину c даёт плоскость

$$4x - 3(z - 4) = 0, \quad (35.43)$$

которая пересекает однополостный гиперboloид по параболе (35.27)

$$t_1^2 = \frac{18}{\sqrt{41}} t_2.$$

Плоскость, проходящая через ось Oy под углом $\psi = 60^\circ$ к оси Oz ,

$$x - \sqrt{3}z = 0$$

пересекает однополостный гиперboloид, согласно (35.33), по эллипсу

$$\frac{t_1^2}{25} + \frac{t_2^2}{64/13} = 1,$$

а плоскость, проходящая через ось Oy под углом $\psi = 30^\circ$ к оси Oz :

$$x - \frac{1}{\sqrt{3}}z = 0$$

— по гиперболе

$$\frac{t_1^2}{25} - \frac{t_2^2}{288} = 1.$$

36. Конусы второго порядка

Согласно табл. 4, уравнение конуса 2-го порядка (поверхность № 5) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (36.1)$$

Выбором координатных осей можно добиться выполнения условия $b \geq a$.

Как и для рассмотренных выше поверхностей, для конуса координатные плоскости являются плоскостями симметрии, а начало координат — точка O — центром симметрии. Ось Oz выделена из трёх координатных осей, поскольку она является *осью конуса*.

Уравнение конуса 2-го порядка обладает отличительной особенностью — оно однородно, т.е.

$$\frac{(\lambda x)^2}{a^2} + \frac{(\lambda y)^2}{b^2} - \frac{(\lambda z)^2}{c^2} = \lambda^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) = 0.$$

Геометрически это означает, что любая прямая, содержащая точку O и некоторую другую точку конуса, является его прямолинейной образующей. Если учесть, что поверхность конуса не относится к распадающимся поверхностям, то все прямолинейные образующие конуса пересекаются в точке O , называемой его *вершиной*.

Если $a = b$, т.е.

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

то конус называется *круговым конусом*. Его можно получить вращением прямой

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \quad \left(\text{или } \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \right), \quad y = 0$$

вокруг оси Oz .

Теорема 36.1. *Плоским сечением конуса 2-го порядка может быть любая линия 2-го порядка за исключением двух несовпадающих прямых.*

Доказательство. В силу однородности уравнения (36.1) несовпадающие параллельные прямые не могут быть плоскими сечениями конуса 2-го порядка.

Сечением конуса плоскостями $z = \pm h$ являются кривые

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}, \quad (36.2)$$

При $h = 0$ они вырождаются в точку, совпадающую с его вершиной.

При $h \neq 0$ линиями пересечения являются эллипсы

$$\frac{x^2}{(ah/c)^2} + \frac{y^2}{(bh/c)^2} = 1$$

с одним и тем же эксцентриситетом, но возрастающими с ростом h полуосями.

Сечением конуса плоскостями $y = \pm h$ являются кривые

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{h^2}{b^2}, \quad (36.3)$$

При $h = 0$ они вырождаются в пару пересекающихся прямых

$$\frac{z}{c} - \frac{x}{a} = 0, \quad \frac{z}{c} + \frac{x}{a} = 0, \quad y = 0.$$

При $h \neq 0$ линиями пересечения являются гиперболы

$$\frac{z^2}{(ch/b)^2} - \frac{x^2}{(ah/b)^2} = 1$$

с одним и тем же эксцентриситетом, но возрастающими с ростом h полуосями.

Аналогичные выводы получаются для сечений $x = \pm h$.

Рассмотрим теперь секущую плоскость

$$x - (z - z_0) \operatorname{tg} \psi = 0, \quad (36.4)$$

проходящую через ось Oy под углом ψ к оси Oz и пересекающую её в точке z_0 .
Общему уравнению (36.4) соответствуют параметрические уравнения

$$\begin{aligned} x &= t_2 \sin \psi, \\ y &= t_1, \\ z &= t_2 \cos \psi \end{aligned} \quad (36.5)$$

с ортонормированной парой направляющих векторов $\vec{s}_1 = (0, 1, 0)$ и $\vec{s}_2 = (\sin \psi, 0, \cos \psi)$.
Подставив (36.5) в уравнение конуса (36.1), получим уравнение линии его пересечения с секущей плоскостью (36.4) в декартовой системе координат $\{M_0(0, 0, z_0), t_1 t_2\}$ на плоскости π :

$$\frac{\sin^2 \psi}{a^2} t_2^2 + \frac{1}{b^2} t_1^2 - \frac{\cos^2 \psi}{c^2} t_2^2. \quad (36.6)$$

Чтобы определить тип линии пересечения (36.6) как кривой 2-го порядка, выпишем матрицу квадратичной формы:

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\sin^2 \psi}{a^2} - \frac{\cos^2 \psi}{c^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}$$

и вычислим её определитель:

$$\delta = \det G = \left(\operatorname{tg}^2 \psi - \frac{a^2}{c^2} \right) \frac{\cos^2 \psi}{b^2 a^2}. \quad (36.7)$$

Из (36.7) следует, что

- а) если $\delta = 0$, т.е. $\operatorname{tg} \psi = a/c$, то линией пересечения является парабола;
- б) если $\delta < 0$, т.е. $\operatorname{tg} \psi < a/c$, то линией пересечения является гипербола;
- в) если $\delta > 0$, т.е. $\operatorname{tg} \psi > a/c$, то линией пересечения будет эллипс.

Среди линий параболического типа, т.е. при $\operatorname{tg} \psi = a/c$ и $z_0 = 0$ параболы (36.6) вырождаются в пару совпадающих прямых $t_{1,2} = 0$, которые в переменных x, y, z определяются как пересечения плоскостей

$$cx - az = 0, \quad y = 0.$$

Среди линий эллиптического типа, т.е. при $\operatorname{tg} \psi > a/c$ для угла

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{a}{c} \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{b^2 + a^2}}, \quad b \geq a, \quad (36.8)$$

линия пересечения (36.6) является окружностью.

Следствие 36.1.1. Поверхность

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

называемую конусом 2-го порядка, можно получить как множество прямых, проходящих через точки кривой (36.6) и начало координат.

Заметим, что кривые 2-го порядка (36.6) различных типов могут образовывать один и тот же конус.

Конус 2-го порядка является частным случаем *конической поверхности*.

Такие поверхности мы рассмотрим ниже.

37. Параболоиды

37.1. Эллиптический параболоид

Согласно табл. 4, уравнение эллиптического параболоида (поверхность № 7) имеет вид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Выбором координатных осей можно добиться выполнения условия $p \geq q > 0$.

Если $p = q$, т.е.

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

то такой параболоид называется *параболоидом вращения*. Его можно получить вращением параболы

$$x^2 = 2pz, \quad y = 0,$$

вокруг оси Oz .

Линией пересечения эллиптического параболоида и плоскости $y = 0$ является парабола

$$x^2 = 2pz, \quad y = 0, \quad (37.1)$$

а плоскость $x = h$ пересекает его по параболам

$$y^2 = 2qz - \frac{qh^2}{p}, \quad x = h. \quad (37.2)$$

Отсюда вытекает простое правило геометрического построения эллиптического параболоида.

Эллиптический параболоид получается параллельным перемещением подвижной параболы (37.2), когда её вершина движется по неподвижной параболе (37.1). При этом параболы находятся в перпендикулярных плоскостях, а их оси параллельны и направлены в одну сторону (рис. 164).

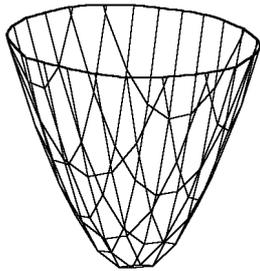


Рис. 164.

Если фокальные параметры этих парабол выбрать равными, то мы получим параболоид вращения.

Из уравнения эллиптического параболоида следует, что его поверхность расположена в области $z \geq 0$ канонической системы координат. Как и в случае двуполостного гиперболоида, можно показать, что прямолинейные образующие у эллиптического параболоида отсутствуют.

Эллиптический параболоид не имеет центра симметрии, поскольку для него плоскостями симметрии являются только две координатные плоскости: $x = 0$ и $y = 0$. В свою очередь, из трёх координатных осей только ось Oz является осью симметрии, называемой ещё *осью эллиптического параболоида*.

Секущую плоскость, параллельную оси эллиптического параболоида, будем называть *вертикальной*.

Теорема 37.1. Любое вертикальное плоское сечение эллиптического параболоида является параболой, все остальные его плоские сечения являются эллипсами.

Доказательство. Как известно, произвольная вертикальная плоскость π описывается общим уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (37.3)$$

Не уменьшая общности, можно предполагать, что $A^2 + B^2 = 1$. Эта плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, 0)$, имеет единичный вектор нормали $\vec{N}(A, B, 0)$, которому соответствует ортонормированная пара направляющих векторов $\vec{s}_1 = (0, 0, 1)$ и $\vec{s}_2 = (-B, A, 0)$. Записав уравнения вертикальной плоскости π (37.3) в параметрическом виде

$$\begin{aligned} x &= x_0 - Bt_1, \\ y &= y_0 + At_1, \\ z &= t_2 \end{aligned} \quad (37.4)$$

и подставив их в уравнения эллиптического параболоида, получим уравнение плоского вертикального сечения эллиптического параболоида в прямоугольных координатах $t_1 M_0 t_2$ на плоскости π :

$$\frac{(x_0 - Bt_1)^2}{p} + \frac{(y_0 + At_1)^2}{q} = 2t_2. \quad (37.5)$$

Уравнение (37.5) является уравнением параболы, ось которой, совпадая с осью t_2 , параллельна оси Oz ($t_2 = z$) и направлена вверх. Фокальный параметр этой плоскости равен

$$p' = \frac{pq}{pA^2 + qB^2} = \frac{pq}{(p - q)A^2 + q}$$

и, следовательно, изменяется от $p' = q$ при $A = 1$ до $p' = p$ при $A = 0$.

Перейдём ко второй части теоремы. Произвольная неvertикальная плоскость π описывается общим уравнением

$$Ax + By + (z - z_0) = 0. \quad (37.6)$$

Эта плоскость проходит через точку $M_0(0, 0, z_0)$, имеет вектор нормали $\vec{N} = (A, B, 1)$, которому соответствует ортонормированная пара направляющих векторов $\vec{s}_1 = (1, 0, -A)$ и $\vec{s}_2 = (0, 1, -B)$. Записав уравнения секущей плоскости π (37.6) в параметрической форме

$$\begin{aligned} x &= t_1, \\ y &= t_2, \\ z &= z_0 - At_1 - Bt_2 \end{aligned} \quad (37.7)$$

и подставив их в уравнения эллиптического параболоида, получим уравнение плоского сечения эллиптического параболоида в прямоугольных координатах $t_1 M_0 t_2$ на плоскости π :

$$\frac{t_1^2}{p} + \frac{t_2^2}{q} = 2(z_0 - At_1 - Bt_2). \quad (37.8)$$

При фиксированных A и B и изменении z_0 полученное уравнение (37.8) из всех содержательных кривых 2-го порядка может определять только эллипс, который вырождается в точку для касательной плоскости, что и требовалось доказать.

37.2. Гиперболический параболоид

Согласно табл. 4, уравнение гиперболического параболоида (кривая № 8) имеет вид

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \quad (37.9)$$

Выбором координатных осей можно добиться выполнения условия $p \geq q > 0$. Эту поверхность не является поверхностью вращения ни при каких соотношениях между параметрами p и q .

Плоскость $y = 0$ пересекает гиперболический параболоид по параболе

$$x^2 = 2pz, \quad y = 0, \quad (37.10)$$

а плоскость $x = h$ пересекает его по параболам

$$y^2 = -2q\left(z - \frac{h^2}{2p}\right). \quad (37.11)$$

Но оси этих парабол направлены противоположно осям парабол (37.2).

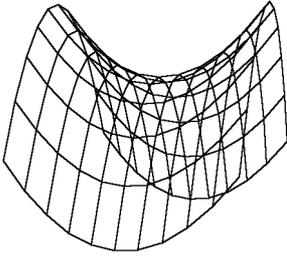


Рис. 165.

Отсюда следует, что гиперболический параболоид, как и эллиптический, может быть получен параллельным перемещением одной подвижной параболы (37.11), когда её вершина скользит по неподвижной параболе (37.10). При этом параболы находятся в перпендикулярных плоскостях, а их оси параллельны и направлены в разные стороны (рис. 165).

Гиперболический параболоид не имеет центра симметрии, поскольку для него плоскостями симметрии являются только две координатные плоскости: $x = 0$ и $y = 0$. Ось Oz , будучи линией их пересечения, является осью симметрии и называется *вертикальной осью гиперболического параболоида*.

Теорема 37.2. *Любое вертикальное плоское сечение гиперболического параболоида является параболой или прямой, все остальные его плоские сечения являются гиперболами, которые могут вырождаться в пару пересекающихся прямых.*

Доказательство. Произвольная вертикальная плоскость π , как известно, описывается общим уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (37.12)$$

Не уменьшая общности, будем предполагать, что $A^2 + B^2 = 1$. Эта плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, 0)$, имеет единичный вектор нормали $\vec{N} = (A, B, 0)$, которому соответствует ортонормированная пара направляющих векторов $\vec{s}_1 = (0, 0, 1)$ и $\vec{s}_2 = (-B, A, 0)$. Записав уравнения вертикальной плоскости π (37.12) в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= x_0 - Bt_1, \\ y &= y_0 + At_1, \\ z &= t_2 \end{aligned} \quad (37.13)$$

и подставив их в уравнения гиперболического параболоида, получим уравнение плоского вертикального сечения гиперболического параболоида в прямоугольных координатах $t_1 M_0 t_2$ на плоскости π :

$$\frac{(x_0 - Bt_1)^2}{p} + \frac{(y_0 + At_1)^2}{q} = 2t_2$$

или в развёрнутом виде:

$$(qB^2 - pA^2)t_1^2 - 2(x_0Bq + y_0Ap)t_1 + (x_0^2 - y_0^2) = 2t_2pq. \quad (37.14)$$

При

$$qB^2 - pA^2 = 0 \quad (37.15)$$

линия пересечения вырождается в прямую:

$$(x_0Bq + y_0Ap)t_1 + pqt_2 - \frac{x_0^2 - y_0^2}{2} = 0. \quad (37.16)$$

Из (37.15) с учётом $A^2 + B^2 = 1$ найдём

$$A = \sqrt{\frac{q}{p+q}}, \quad B = \sqrt{\frac{p}{p+q}}. \quad (37.17)$$

Тогда уравнение плоскости (37.12) примет вид

$$\sqrt{q}(x - x_0) + \sqrt{p}(y - y_0) = 0. \quad (37.18)$$

Сечением гиперболического параболоида плоскостью (37.18) является прямая (37.16).

При

$$qB^2 - pA^2 \neq 0 \quad (37.19)$$

линия пересечения (37.15) является параболой, ось которой совпадает с осью t_2 , параллельна оси Oz и направлена вверх или вниз в зависимости от знака величины (37.19).

Перейдём ко второй части теоремы. Произвольная невертикальная плоскость π описывается общим уравнением

$$Ax + By + (z - z_0) = 0. \quad (37.20)$$

Эта плоскость проходит через точку $M_0(0, 0, z_0)$, имеет вектор нормали $\vec{N} = (A, B, 1)$, которому соответствует ортонормированная пара направляющих векторов $\vec{s}_1 = (1, 0, -A)$ и $\vec{s}_2 = (0, 1, -B)$. Записав уравнения секущей плоскости π (37.20) в параметрической форме:

$$x = t_1, \quad y = t_2, \quad z = z_0 - At_1 - Bt_2 \quad (37.21)$$

и подставив их в уравнения гиперболического параболоида, получим уравнение плоского сечения гиперболического параболоида в прямоугольных координатах $t_1M_0t_2$ на плоскости π :

$$\frac{t_1^2}{p} + \frac{t_2^2}{q} = 2(z_0 - At_1 - Bt_2),$$

которое после тождественных преобразований можно записать в виде

$$\frac{(t_1 + Ap)^2}{p} - \frac{(t_2 - Bq)^2}{q} - (2z_0 - A^2p - B^2q) = 0. \quad (37.22)$$

При фиксированных A и B и изменении z_0 полученное уравнение (37.22) из всех содержательных кривых 2-го порядка может определять только гиперболу, которая при единственном значении

$$z_0 = \frac{1}{2}(qB^2 - pA^2)$$

вырождается в пару пересекающихся прямых

$$\frac{t_1 + Ap}{\sqrt{p}} \pm \frac{t_2 - Bq}{\sqrt{q}} = 0, \quad (37.23)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, гиперболический параболоид является наряду с однополостным гиперболоидом и конусом ещё одной поверхностью, содержащей прямолинейные образующие. Более подробно этот вопрос мы рассмотрим ниже в разд. «Линейчатые поверхности».

38. Цилиндры второго порядка

Девять последних уравнений табл. 4 описывают поверхности, называемые *цилиндрами второго порядка*. Все эти уравнения не содержат переменную z и могут быть объединены одним уравнением

$$F(x, y) = 0, \quad (38.1)$$

где $F(x, y)$ определяет все канонические формы кривой 2-го порядка, приведённые в табл. 1. Отсюда следует простое правило построения цилиндрической поверхности второго порядка.

Из каждой точки содержательной кривой 2-го порядка на плоскости $z = 0$ проводится прямая, параллельная оси Oz . Множество этих прямых и образует цилиндрическую поверхность.

Другими словами, цилиндрическую поверхность 2-го порядка можно получить движением прямой, параллельной оси Oz и называемой *образующей*, по содержательной кривой 2-го порядка (38.1), расположенной в плоскости $z = 0$ и называемой *направляющей цилиндра*.

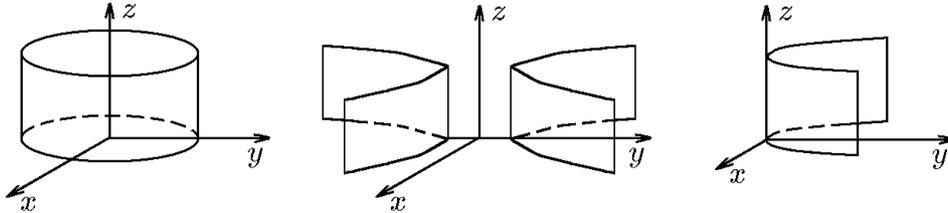


Рис. 166.

Поэтому вид и название всех поверхностей цилиндров определяется характером этой кривой 2-го порядка. На рис. 166 показаны основные виды цилиндров 2-го порядка: эллиптический, гиперболический и параболический.

От сечения $z = 0$ перейдём к произвольным сечениям. Их характер определяется следующей теоремой.

Теорема 38.1. *Всякое невертикальное плоское сечение цилиндра (38.1) является линией второго порядка, имеющей то же название, что и его направляющая. Произвольная вертикальная плоскость либо не пересекает цилиндр, либо целиком в нём содержится, либо пересекает его по паре параллельных прямых, различных или совпадающих.*

Доказательство. Всякая невертикальная плоскость, как мы знаем, может быть задана параметрическими уравнениями

$$x = t_1, \quad y = t_2, \quad z = z_0 - At_1 - Bt_2. \quad (38.2)$$

Подставив эти уравнения в уравнение цилиндра (38.1)

$$F(x, y) = 0,$$

мы получим точно такое же уравнение в переменных t_1, t_2 :

$$F(t_1, t_2) = 0,$$

определяющее сечение цилиндра плоскостью (38.2). Это и означает, что название направляющей и сечения совпадают.

Рассмотрим теперь вертикальную плоскость. Следом от неё на плоскости $z = 0$ является прямая ℓ , поэтому количество прямых пересечения цилиндра с плоскостью и их характер будут определяться числом точек пересечения прямой ℓ с направляющей цилиндра. Ранее мы установили, что прямая и кривая 2-го порядка могут на плоскости и не пересекаться, в этом случае не пересекаются плоскость и цилиндр; они могут пересекаться в двух точках, различных или совпадающих, что соответствует пересечению плоскости и цилиндра по двум прямым, различным или совпадающим. Наконец, если кривая 2-го порядка является распадающейся, то след вертикальной плоскости может совпадать с одной из её прямых. В этом случае секущая плоскость целиком принадлежит цилиндру, что и требовалось доказать.

Мы рассмотрели цилиндры, направляющими которых являются кривые 2-го порядка. Цилиндрические поверхности более высоких порядков мы рассмотрим ниже.

39. Поверхности цилиндрические, конические и вращения

Как мы уже отмечали, поверхности в аналитической геометрии задаются уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \quad (39.1)$$

В зависимости от выбора критерия сравнения поверхностей (39.1) существуют различные их классификации. Здесь мы рассмотрим классификацию по типу преобразований симметрии. Среди всевозможных поверхностей мы выделим по типу симметрии три класса: цилиндрические, конические и поверхности вращения. Эти три типа связаны с преобразованиями, соответствующими параллельному переносу, вращению и преобразованию подобия.

39.1. Цилиндрические поверхности

◆ Поверхность (39.1), инвариантная относительно преобразований параллельного переноса на любой вектор $t\vec{s}$, коллинеарный заданному вектору $\vec{s} = (m, n, p)$, $t \in \mathbb{R}$, называется *цилиндрической поверхностью C (цилиндром)*.

◇ Из этого определения следует, что если точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит цилиндру C , то и вся прямая

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad M_0 \in C, \quad (39.2)$$

целиком принадлежит этому цилиндру C .

◆ Прямая, коллинеарная вектору \vec{s} , называется *осью цилиндра*, а все прямые (39.2), целиком принадлежащие цилиндру, — его *образующими*.

◆ Кривая γ , лежащая на цилиндре и пересекающая все его образующие, называется *направляющей* этого цилиндра.

Укажем метод нахождения уравнения цилиндрической поверхности с осью, коллинеарной заданному вектору $\vec{s} = (m, n, p)$, и направляющей γ , заданной уравнениями

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \quad (39.3)$$

Согласно определению, точка $M(x, y, z)$ принадлежит цилиндру C только в том случае, если существует такое t , что точка M_t с координатами $M_t(x + tm, t + tn, z + tp)$ лежит на направляющей L , т.е.

$$\begin{aligned} F_1(x + tm, t + tn, z + tp) &= 0, \\ F_2(x + tm, t + tn, z + tp) &= 0. \end{aligned} \quad (39.4)$$

Исключив параметр t из системы (39.4), получим соотношение вида $F(x, y, z) = 0$, которое и является уравнением заданного цилиндра C .

◇ Если вектор \vec{s} совпадает с одним из координатных ортов, например $\vec{s} = \vec{k}$ (т.е. $\vec{s} = (0, 0, 1)$ — ось цилиндра совпадает с осью Oz), то система (39.4) упрощается к виду

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z + t) &= 0, \\ F_2(x, y, z + t) &= 0. \end{aligned} \quad (39.5)$$

◆ Цилиндрическая поверхность, направляющей которой является аналитическая кривая k -го порядка, называется *цилиндрической поверхностью* или *цилиндром k -го порядка*.

Пример 39.1. Составить уравнение цилиндра, ось которого коллинеарна вектору $\vec{s} = (1, 2, 3)$, а направляющая задана уравнениями

$$\text{а) } y = x^3, \quad z = 0; \quad \text{б) } y = x^2, \quad z = 0; \quad \text{в) } y = 4x, \quad z = 0.$$

Построить полученные поверхности.

Решение. С учётом явного вида вектора $\vec{s} = (1, 2, 3)$ уравнение цилиндрической поверхности можно найти из системы (39.4), которая для случая а) будет иметь вид

$$\begin{aligned} (x + t)^3 - (y + 2t) &= 0, \\ z + 3t &= 0. \end{aligned}$$

Выразив из второго уравнения $t = -z/3$ и подставив его в первое, получим

$$\left(x - \frac{z}{3}\right)^3 - \left(y - \frac{2z}{3}\right) = 0.$$

После простейших преобразований имеем искомое уравнение цилиндрической поверхности (рис. 167,а)

$$(3x - z)^3 - 27y + 18z = 0.$$

Аналогичным образом, исключив в случае б) параметр t из системы

$$\begin{aligned} (x + t)^2 - (y + 2t) &= 0, \\ z + 3t &= 0, \end{aligned}$$

найдем уравнение цилиндрической поверхности (рис. 167,б)

$$(3x - z)^2 - 9y + 6z = 0.$$

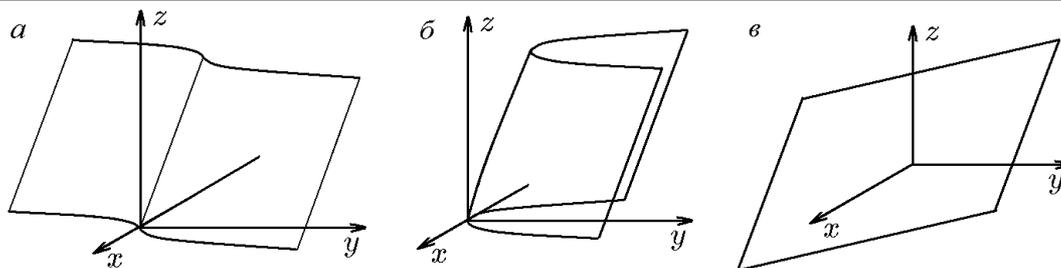


Рис. 167.

И наконец, исключив в случае в) параметр t из системы

$$\begin{aligned} 4(x+t) - (y+2t) &= 0, \\ z + 3t &= 0, \end{aligned}$$

найдём уравнение цилиндрической поверхности (рис. 167, в)

$$12x - 3y - 2z = 0.$$

Таким образом, в случае а) искомая поверхность есть цилиндр третьего порядка, в случае б) — цилиндр второго порядка, а в случае в) — цилиндр первого порядка, т.е. плоскость. Последний результат легко объяснить тем, что в этом случае направляющей является прямая $y = 4x, z = 0$, а плоскость можно рассматривать как цилиндрическую поверхность, направляющей которой является прямая.

Пример 39.2. Составить уравнение цилиндрической поверхности, ось которой коллинеарна вектору $\vec{s} = (1, 1, 1)$, а направляющая задана уравнениями

$$\text{а) } z = e^{-x^2}, y = 0; \quad \text{б) } z = \frac{4}{x^2}, y = 0.$$

Изобразить полученные поверхности.

Решение. Согласно (39.3), для случая а) запишем уравнение направляющей

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= e^{-x^2} - z = 0, \\ F_2(x, y, z) &= y = 0. \end{aligned} \tag{39.6}$$

Тогда искомое уравнение поверхности найдется из системы (39.4), которую с учётом (39.6) и явного вида вектора $\vec{s} = (1, 1, 1)$ можно записать как

$$\begin{aligned} e^{-(x+t)^2} - (z+t) &= 0, \\ y+t &= 0. \end{aligned}$$

Исключив из нее параметр t , найдём уравнение цилиндрической поверхности (рис. 168, а)

$$e^{-(x-y)^2} + y - z = 0.$$

В случае б) параметрическая система (39.5) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{4}{(x+t)^2} - (z+t) &= 0, \\ y+t &= 0. \end{aligned}$$

Исключив параметр t , найдём уравнение цилиндрической поверхности (рис. 168, б)

$$\frac{4}{(x-y)^2} + y - z = 0.$$

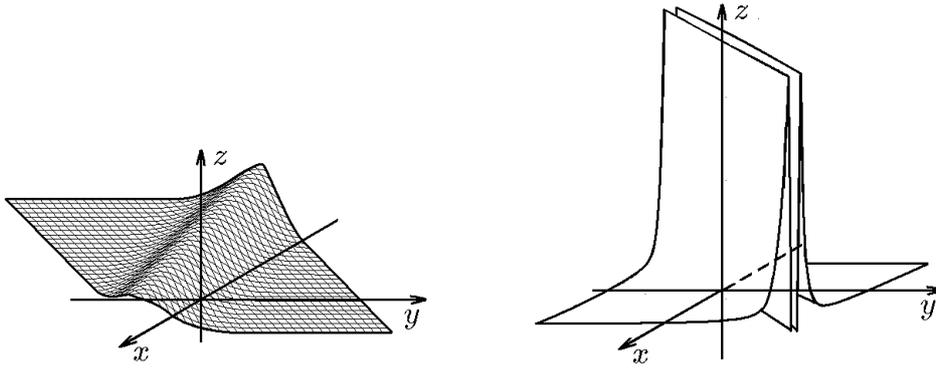


Рис. 168.

Пример 39.3. Найти уравнение цилиндра, направляющей которого является окружность, рассмотренная в примере 32.7, а образующей — ось Oz .

Решение. В примере 32.7 было показано, что линией пересечения сферы

$$x^2 + (y - 5)^2 + z^2 = 25 \quad (39.7)$$

и плоскости

$$x + 2y + 2z - 19 = 0 \quad (39.8)$$

является окружность радиусом $r = 4$ с центром в точке $C'(1, 7, 2)$, расположенная в этой плоскости.

Согласно условию задачи, требуется найти цилиндр, направляющая которого задана уравнениями (39.7), (39.8), а ось совпадает с осью Oz . Последнее означает, что вектор $\vec{s} = \vec{k}$ имеет координаты $\vec{s} = (0, 0, 1)$. С учётом этого параметрическая система (39.4) будет иметь вид

$$\begin{aligned} x^2 + (y - 5)^2 + (z + t)^2 &= 25, \\ x + 2y + 2(z + t) - 19 &= 0. \end{aligned}$$

Исключив параметр t , получим искомое уравнение

$$5x^2 + 8y^2 + 4xy - 38x - 116y + 361 = 0, \quad (39.9)$$

из которого следует, что проекцией окружности (39.7), (39.8) на плоскость xOy является эллипс (39.9). Можно проверить, что его центр $C''(1, 7)$ совпадает с проекцией точки $C'(1, 7, 2)$ на плоскость xOy .

Пример 39.4. Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ освещена лучами, параллельными прямой $x = 0, y = z$. Найти форму тени сферы на плоскости xOy .

Решение. Выделим в уравнении сферы полный квадрат по переменной z :

$$x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4. \quad (39.10)$$

Отсюда следует, что радиус сферы $R = 2$, а её центр расположен в точке $C(0, 0, 2)$ (рис. 169). Из условия задачи следует, что лучи света параллельны прямой с направляющим вектором $\vec{s} = (0, 1, 1)$, поэтому уравнение плоскости, проходящей через центр сферы перпендикулярно вектору $\vec{s} = (0, 1, 1)$, имеет вид

$$y + z - 2 = 0. \quad (39.11)$$

Сечение сферы (39.10) плоскостью (39.11) даёт окружность, которую следует считать направляющей для цилиндра с осью, параллельной вектору \vec{s} . Пересечение именно этого цилиндра с плоскостью $z = 0$ и будет определять форму тени от окружности, а значит, и от сферы, на плоскости xOy . Чтобы найти уравнение цилиндра, составим параметрическую систему (39.4) для кривой (39.10), (39.11):

$$\begin{aligned}x^2 + (y + t)^2 + (z + t - 2)^2 &= 4, \\(y + t) + (z + t) - 2 &= 0.\end{aligned}$$

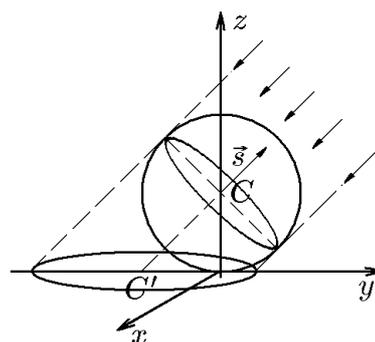


Рис. 169.

Выразив из второго уравнения параметр

$$t = \frac{1}{2}(2 - y - z)$$

и подставив его в первое, получим уравнение цилиндра

$$2x^2 + (y - z + 2)^2 = 8. \quad (39.12)$$

Пересечение цилиндра (39.12) с плоскостью $z = 0$ даёт кривую второго порядка

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(y + 2)^2}{8} = 1,$$

представляющую собой эллипс, центр которого расположен в точке $C'(0, -2)$, малая полуось совпадает с радиусом окружности $R = 2$, а большая полуось $b = 2\sqrt{2} > R$ (см. рис. 169).

Рассмотрим теперь поверхности, полученные в результате вращения геометрических кривых.

39.2. Поверхности вращения

♦ *Поверхностью вращения* называется поверхность, инвариантная относительно поворотов на любой угол вокруг некоторой фиксированной оси, называемой *осью вращения*.

Такую поверхность можно получить вращением вокруг оси заданной кривой, лежащей в плоскости, проходящей через ось вращения. Простейшими примерами поверхностей вращения являются сфера, которую можно получить вращением окружности (или полуокружности) вокруг любого ее диаметра; круглый цилиндр, получаемый вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон; прямой круговой конус, получаемый вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов и т.д.

При рассмотрении поверхностей вращения систему координат удобно выбирать так, чтобы ось вращения совпадала с одной из координатных осей. Пусть, например, ось вращения совпадает с осью Oz , а уравнение плоской кривой, образующей поверхность вращения, в плоскости $y = 0$, проходящей через ось Oz , задается в виде

$$F(x, z) = 0. \quad (39.13)$$

Покажем, как из уравнения плоской кривой (39.13) можно получить уравнение поверхности вращения относительно оси Oz . Пусть точка $M(x, z)$ — произвольная точка кривой вращения, которая в плоскости $z = z_0$ имеет координаты

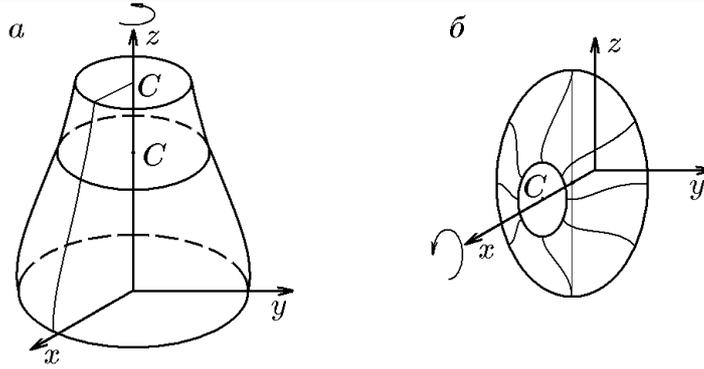


Рис. 170.

$M_0(x_0, z_0)$ (рис. 170,а). При вращении точки M_0 в плоскости $z = z_0$ она опишет окружность с центром в точке $C(0, 0, z_0)$ и радиусом $R = x_0$. Поскольку $F(x_0, z_0) = 0$, то в силу равенств $z_0 = z$ и $x_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$ для произвольной точки $M(x, y, z)$ этой окружности найдём

$$F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \quad (39.14)$$

Уравнение (39.14) и есть искомое уравнение поверхности вращения кривой (39.13) вокруг оси Oz .

◇ Отметим, что в плоскости $y = 0$ лежит ещё одна координатная ось — ось Ox , поэтому вращение кривой (39.13) теперь уже вокруг оси Ox даёт поверхность вращения, описываемую уравнением (рис. 170,б)

$$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0. \quad (39.15)$$

Уравнение поверхности вращения (39.14) допускает очевидную параметризацию

$$x = f(\psi) \cos \varphi, \quad y = f(\psi) \sin \varphi, \quad z = \psi, \quad (39.16)$$

где φ, ψ — два независимых параметра. Этим параметрам можно придать геометрический смысл, если ввести следующие определения.

◆ Линии пересечения поверхности вращения с плоскостями, проходящими через её ось, называются *меридианами*, а с плоскостями, перпендикулярными её оси, — *параллелями*.

Тогда функция $f(\psi)$ в параметрических уравнениях (39.16) определяет форму меридиана, а параметр φ — угол поворота плоскости меридиана относительно плоскости $y = 0$, при этом соотношение $\psi = \text{const}$ задаёт плоскость и лежащую в ней параллель.

◇ Параметрические уравнения поверхности вращения (39.15) имеют вид

$$x = \psi, \quad y = f(\psi) \sin \varphi, \quad z = f(\psi) \cos \varphi. \quad (39.17)$$

Если кривая вращения $F(x, z) = 0$ является кривой второго порядка, то уравнение её поверхности вращения в общем случае можно записать как

$$A(x^2 + y^2) + Bz^2 + Cz + D = 0. \quad (39.18)$$

Пример 39.5. Составить уравнение поверхности, образованной вращением прямой

$$\text{а) } x = a, \quad y = 0; \quad \text{б) } x = z, \quad y = 0$$

вокруг осей Oz и Ox . Записать уравнения в параметрической форме и построить поверхности.

Решение. Для случая а) уравнение поверхности вращения вокруг оси Oz , согласно (39.14), имеет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad (39.19)$$

а вокруг оси Ox , согласно (39.15), соответственно,

$$x = a. \quad (39.20)$$

Уравнение (39.19) определяет круговой цилиндр радиусом $R = a$ с образующей, параллельной оси Oz (рис. 171, а), а уравнение (39.20) — плоскость $x = a$ (рис. 171, б).

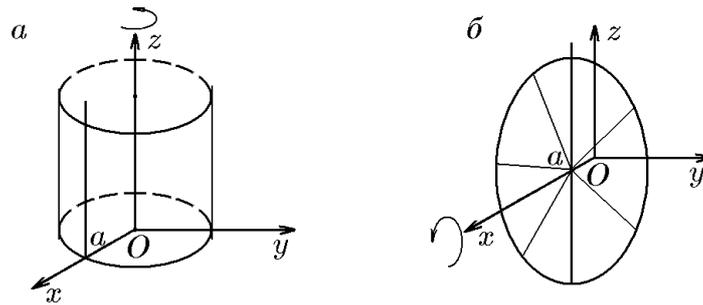


Рис. 171.

Уравнение (39.19) в параметрической форме имеет вид

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = \psi,$$

а уравнение (39.20), соответственно,

$$x = a, \quad y = \psi \cos \varphi, \quad z = \psi \sin \varphi.$$

Для случая б) уравнение поверхности вращения вокруг оси Oz , согласно (39.14), имеет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} = z \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

а вокруг оси Ox , согласно (39.15), соответственно,

$$x = \sqrt{y^2 + z^2} \quad \text{или} \quad -x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Обе поверхности являются прямыми круговыми конусами с взаимно перпендикулярными осями Oz и Ox (рис. 172).

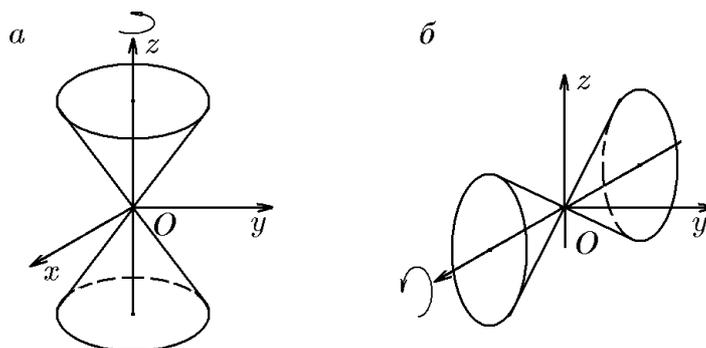


Рис. 172.

Пример 39.6. Составить уравнение поверхностей, образованных вращением вокруг оси Oz кривых второго порядка, заданных в плоскости $y = 0$ своими каноническими уравнениями, и построить эти поверхности.

Решение. 1. Рассмотрим вращение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

Его вращение вокруг оси Oz даст поверхность

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (39.21)$$

а вращение вокруг оси Ox , соответственно,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1. \quad (39.22)$$

Обе поверхности вращения известны в аналитической геометрии как эллипсоиды вращения (рис. 173). В первом случае это «сплюснутый» эллипсоид, а во втором «вытянутый».

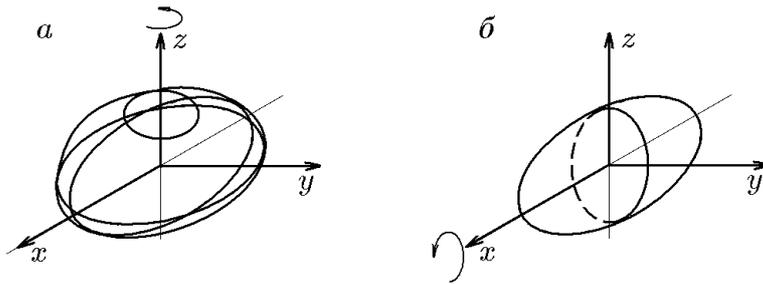


Рис. 173.

2. Рассмотрим теперь вращение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Ее вращение вокруг оси Oz даст поверхность

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (39.23)$$

а вращение вокруг оси Ox , соответственно,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1. \quad (39.24)$$

В аналитической геометрии поверхность (39.23) известна как однополостный гиперболоид вращения, а поверхность (39.24) — как двуполостный (рис. 174).

3. Рассмотрим вращение параболы

$$x^2 = 2pz.$$

Ее вращение вокруг оси Oz даст поверхность

$$x^2 + y^2 = 2pz, \quad (39.25)$$

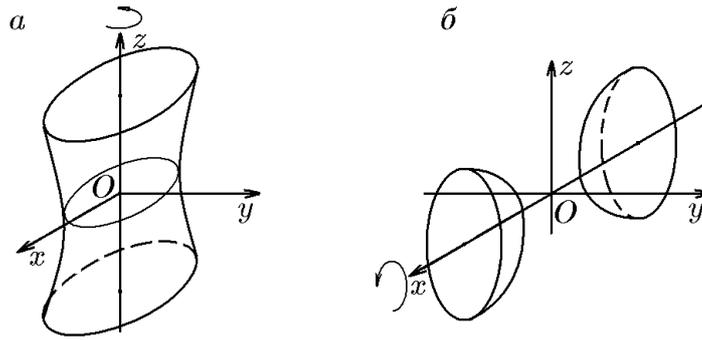


Рис. 174.

а вращение вокруг оси Ox , соответственно,

$$x^2 = 2p\sqrt{z^2 + y^2} \quad \text{или} \quad x^4 = 4p^2(z^2 + y^2). \quad (39.26)$$

Поверхность (39.25) (рис. 175,а) называется *параболоидом вращения*. Поверхности (39.21)–(39.26) представляют собой частные случаи поверхности, определяемой общим уравнением (39.18).

◇ Поверхность вращения (39.26) параболы вокруг оси Ox выходит из класса поверхностей вращения второго порядка, являясь поверхностью вращения четвертого порядка (рис. 175,б), она не может быть получена из (39.18).

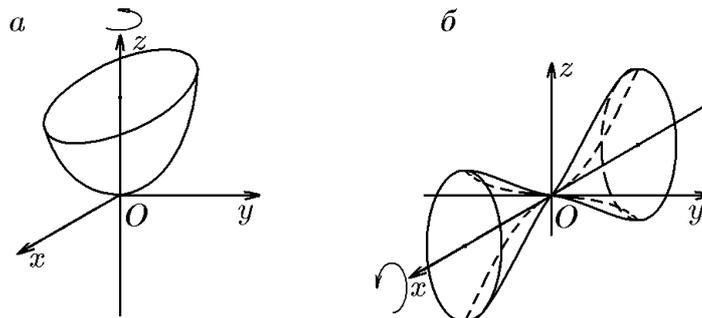


Рис. 175.

Пример 39.7. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz :

а) кривой $x = |\sin z|, y = 0$;

б) кривой $z = 1/x^2, y = 0$,

и построить эти поверхности.

Решение. В случае а) уравнение поверхности вращения имеет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |\sin z| \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = \sin^2 z,$$

а в случае б), соответственно,

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

(см. рис. 176).

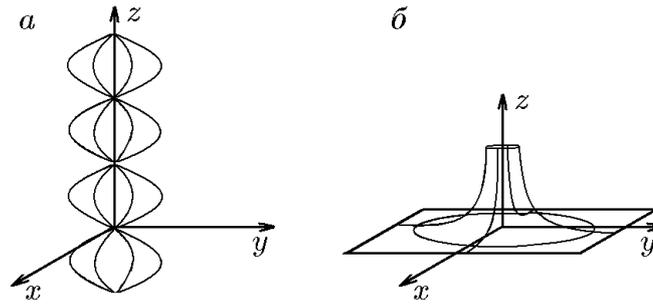


Рис. 176.

39.3. Конические поверхности

Перейдём теперь к рассмотрению конических поверхностей, обусловленных, как уже отмечалось, преобразованием подобия. Частным случаем преобразования подобия является гомотетия (от греческого — равнорасположенный).

♦ *Гомотетией* называется преобразование евклидова пространства, ставящее в соответствие каждому вектору $\overrightarrow{M_0M}$, выходящему из точки M_0 , вектор $\overrightarrow{M_0M'}$ по правилу

$$\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M}, \quad (39.27)$$

где k — постоянное, отличное от нуля число, называемое коэффициентом подобия (гомотетии), а M_0 — фиксированная точка, называемая центром подобия (гомотетии).

♦ При $k = 1$ гомотетия есть тождественное преобразование, а при $k = -1$ — преобразование симметрии относительно центра. Из (39.27) следует, что гомотетия сохраняет все метрические свойства евклидова пространства (рис. 177).

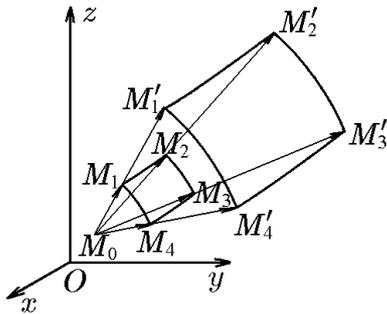


Рис. 177.

♦ *Конической поверхностью \mathcal{K} (конусом)* называется поверхность, инвариантная относительно преобразований гомотетии с произвольным коэффициентом k и центром в заданной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, называемой вершиной конуса.

♦ Из этого определения следует, что если точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит конусу ($M_1 \in \mathcal{K}$), то и вся прямая

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_0}, \quad (39.28)$$

проходящая через точки M_0 и M_1 , целиком лежит на конусе \mathcal{K} .

♦ Все прямые (39.28), целиком принадлежащие конусу, называются его *образующими*, а всякая кривая L , лежащая на конусе и пересекающая все его образующие, называется *направляющей* этого конуса.

Найдём уравнение конической поверхности с заданной вершиной $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющей, описываемой уравнениями

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \quad (39.29)$$

Согласно определению, точка $M(x, y, z)$ принадлежит конусу \mathcal{K} только в том случае, если существует такое t , что точка M_t с координатами $M_t(x + t(x - x_0), y + t(y - y_0), z + t(z - z_0))$ лежит на направляющей L , т.е.

$$\begin{aligned} F_1(x + t(x - x_0), y + t(y - y_0), z + t(z - z_0)) &= 0, \\ F_2(x + t(x - x_0), y + t(y - y_0), z + t(z - z_0)) &= 0. \end{aligned} \quad (39.30)$$

Исключив параметр t из системы (39.30), получим соотношение вида $F(x, y, z) = 0$, которое и является уравнением заданного конуса \mathcal{K} .

◇ Если направляющая конуса лежит в одной из координатных плоскостей, например $z = h$, т.е. задается уравнениями

$$F(x, y) = 0, \quad z = h, \quad (39.31)$$

то система (39.30) примет вид

$$\begin{aligned} f(x + t(x - x_0), y + t(y - y_0)) &= 0, \\ z + t(z - z_0) - h &= 0. \end{aligned}$$

Выразив из второго уравнения

$$t = \frac{h - z}{z - z_0} = \frac{(h - z_0) - (z - z_0)}{z - z_0} = \frac{h - z_0}{z - z_0} - 1$$

и подставив его в первое, найдём уравнение конуса с вершиной в точке M_0 и направляющей (39.31):

$$F\left(x_0 + \frac{h - z_0}{z - z_0}(x - x_0), y_0 + \frac{h - z_0}{z - z_0}(y - y_0)\right) = 0. \quad (39.32)$$

Из (39.32) следует, что для частного случая $x_0 = y_0 = z_0$, когда вершина конуса находится в начале координат, его уравнение имеет вид

$$F\left(h\frac{x}{z}, h\frac{y}{z}\right) = 0. \quad (39.33)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (39.33) однородно относительно x, y и z , т.е. не меняется при замене x, y, z на tx, ty, tz . Аналогично уравнение (39.32) однородно относительно $(x - x_0), (y - y_0), (z - z_0)$.

Пример 39.8. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана кривой, по которой пересекаются сфера $x^2 + y^2 + (z - 6)^2 = 25$ и плоскость $z = 3$; изобразить этот конус.

Решение. В плоскости $z = 3$ направляющая конуса задаётся уравнением $x^2 + y^2 + (3 - 6)^2 = 25$, что соответствует окружности $x^2 + y^2 = 16$. С учётом этого и согласно (39.33), имеем

$$\left(\frac{3x}{z}\right)^2 + \left(\frac{3y}{z}\right)^2 = 16.$$

Отсюда после преобразования получим уравнение конуса (рис. 178)

$$9(x^2 + y^2) = 16z^2.$$

Отметим, что, как и в примере 39.5, это же уравнение можно получить вращением прямой $3x + 4z, y = 0$ вокруг оси Oz .

Пример 39.9. Составить уравнение конуса, вершина которого находится в начале координат, а направляющая задана уравнениями

$$\text{а) } x + y = 1, \quad z = h; \quad \text{б) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = h.$$

Построить эти конусы.

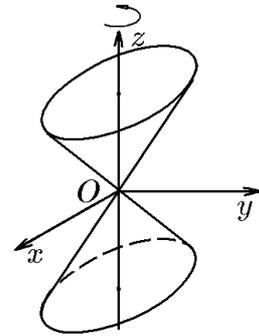


Рис. 178.

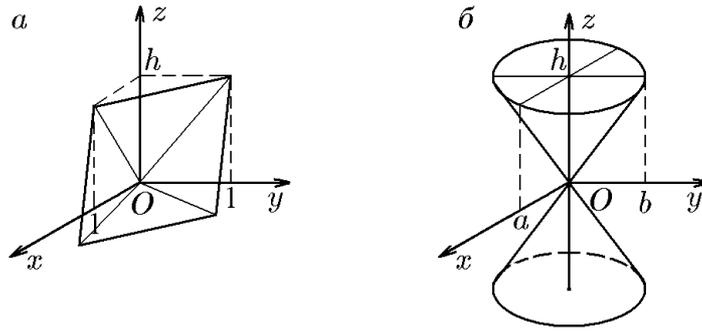


Рис. 179.

Решение. Уравнение (39.33) в случае а) (рис. 179,а) примет вид

$$\frac{4x}{z} + \frac{4y}{z} - 1 = 0 \quad \text{или} \quad x + y - \frac{z}{h} = 0,$$

а в случае б) (рис. 179,б) получим

$$\left(\frac{4x}{za}\right)^2 + \left(\frac{4y}{zb}\right)^2 - 1 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{h^2} = 0.$$

В случае а) конической поверхностью является плоскость.

Пример 39.10. Пусть функция трех переменных $F(x, y, z)$ является однородной функцией относительно x, y, z , т.е. для всех $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ существует такое $t \neq 0$, что

$$F(tx, ty, tz) = t^s F(x, y, z), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (39.34)$$

Показать, что в этом случае уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \quad (39.35)$$

определяет конус с вершиной в начале координат и направляющей

$$F\left(\frac{x}{h}, \frac{y}{h}, 1\right) = 0, \quad z = h. \quad (39.36)$$

Решение. Исходя из (39.36), согласно (39.33), уравнение конической поверхности

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right) = 0$$

в силу однородности (39.34) можно записать в виде

$$\frac{1}{z} F(x, y, z) = 0,$$

откуда и следует (39.35).

Пример 39.11. Точечный источник света, находящийся в точке $M_0(5, 0, 0)$ освещает сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Найти форму тени на плоскости yOz .

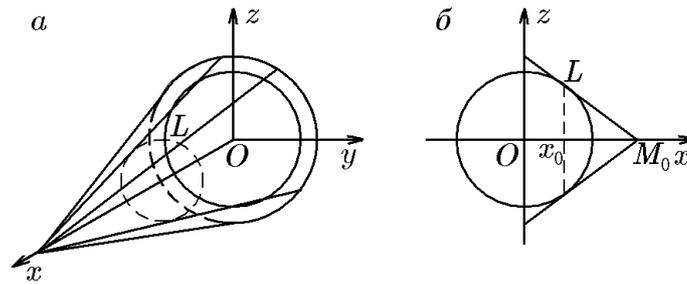


Рис. 180.

Решение. Из точки $M_0(5, 0, 0)$ в плоскости $y = 0$ проведём касательную к шару (рис. 180)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9. \quad (39.37)$$

Эта касательная будет одновременно касательной к окружности, которая получается сечением сферы (39.37) плоскостью $y = 0$, т.е. окружности (рис. 180, б)

$$x^2 + z^2 = 9. \quad (39.38)$$

Пусть $L(x_1, 0, z_1)$ — точка касания. Уравнение касательной к окружности (39.38), проходящей через эту точку, имеет вид

$$xx_1 + zz_1 = 9. \quad (39.39)$$

Из условия, что касательная одновременно проходит через точку $M_0(5, 0, 0)$, найдём абсциссу x_1 точки касания $L(x_1, 0, z_1)$. Действительно, подставив координаты точки M_0 в (39.39), получим

$$5x_1 = 9, \quad x_1 = 9/5.$$

Точка $L(9/5, 0, z_1)$ находится на окружности, получаемой сечением шара (39.34) плоскостью $x = 9/5$. Эту плоскость следует рассматривать как направляющую проектируемого конуса с вершиной в $M_0(5, 0, 0)$, образующие которого являются касательными к шару (39.37).

Таким образом, задача свелась к нахождению уравнения проектирующего конуса с вершиной в точке M_0 и направляющей

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 9, \\ x &= 9/5. \end{aligned}$$

Следуя (39.30), имеем параметрическую систему

$$\begin{aligned} [x + t(x - 5)]^2 + (y + ty)^2 + (z + tz)^2 &= 9, \\ x + t(x - 5) &= 9/5. \end{aligned}$$

Выразив из второго уравнения параметр

$$t = -\frac{16}{5(x - 5)} - 1$$

и подставив его в первое, получим уравнение

$$\left[x - \frac{16}{5} - (x - 5) \right]^2 + \left[\frac{16}{5} \frac{y}{x - 5} \right]^2 + \left[\frac{16}{5} \frac{z}{x - 5} \right]^2 = 9,$$

которое после приведения подобных примет вид

$$16x^2 + 16z^2 - 9(x - 5)^2 = 0. \quad (39.40)$$

Уравнение (39.40) — уравнение проектирующего конуса. Форму тени сферы на плоскости yOz можно найти из (39.40), положив $x = 0$:

$$x^2 + z^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2.$$

Пример 39.12. Показать, что три направляющие

$$L_1 — \text{эллипс: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c; \quad (39.41)$$

$$L_2 — \text{гипербола: } \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \quad y = b; \quad (39.42)$$

$$L_3 — \text{парабола: } x^2 + \frac{4a^2}{b}(y - b) = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 2 = 0, \quad (39.43)$$

пересекающиеся в одной точке $S(O, b, c)$, определяют один и тот же конус с вершиной в начале координат.

Решение. Для эллипса, согласно (39.33), имеем

$$\left(\frac{cx}{za}\right)^2 + \left(\frac{cy}{zb}\right)^2 = 1,$$

откуда найдём уравнение конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (39.44)$$

Аналогично для гиперболы имеем

$$\left(\frac{bz}{yc}\right)^2 - \left(\frac{bx}{ya}\right)^2 = 1,$$

и, следовательно, уравнение конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (39.45)$$

Для параболы воспользуемся системой (39.30):

$$\begin{aligned} (x + xt) + \frac{4a^2}{b}(y - b + ty) &= 0, \\ \frac{y + yt}{b} + \frac{z + zt}{c} - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Выразив из второго уравнения

$$t = \frac{2}{y/b + z/c} - 1$$

и подставив его в первое, найдём

$$\frac{4x^2}{(y/b + z/c)^2} + \frac{4a^2}{b} \left(\frac{2y}{y/b + z/c} - b \right) = 0.$$

Отсюда после упрощения получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \left(y - \frac{zb}{c} \right) \left(y + \frac{zb}{c} \right) = 0,$$

и, следовательно, уравнение конуса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (39.46)$$

Сравнением (39.44), (39.45) и (39.46) убеждаемся, что все три направляющие порождают один и тот же конус. Данное утверждение легко объясняется тем, что заданные направляющие являются различными коническими сечениями плоскостями $z = c$, $y = b$ и $y/b + z/c = 2$, соответственно (см. рис. 185). Ниже мы обсудим свойства конических сечений более подробно.

Пример 39.13. Составить уравнение кругового конуса, для которого оси координат являются его образующими.

Решение. Рассмотрим линию пересечения сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (39.47)$$

и плоскости

$$x + y + z = R. \quad (39.48)$$

Этой линией является окружность, пересекающая координатные оси в точках $A(R, 0, 0)$, $B(0, R, 0)$ и $C(0, 0, R)$ (рис. 182). Чтобы определить ее центр, найдём проекцию $O'(x', y', z')$ точки $O(0, 0, 0)$ на плоскость (39.48). Вектор нормали к этой плоскости $\vec{N} = (1, 1, 1)$ выберем в качестве направляющего вектора для перпендикуляра на эту плоскость из точки $O(0, 0, 0)$. Параметрические уравнения его в таком случае имеют вид

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t. \quad (39.49)$$

Подставив (39.49) в (39.48), получим значение $t = R/3$, соответствующее пересечению перпендикуляра (39.49) с плоскостью (39.48). В свою очередь, подставив $t = R/3$ в (39.49), найдём координаты точки пересечения (39.49) и (39.48), т.е. точки $O'(R/3, R/3, R/3)$. Точка O' равноудалена от точек A, B, C , лежащих на окружности и, следовательно, является ее центром. Радиус этой окружности r можно найти, например, как

$$r = |O'A| = \sqrt{\left(R - \frac{R}{3}\right)^2 + \frac{R^2}{9} + \frac{R^2}{9}} = R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

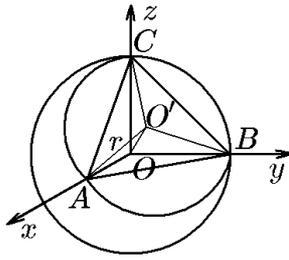


Рис. 182.

Таким образом, если полученную окружность рассматривать как направляющую конуса, то координатные оси будут его образующими (рис. 182). Чтобы найти уравнение этого конуса, для окружности (39.47), (39.48) выпишем систему (39.30):

$$\begin{aligned}x^2(1+t)^2 + y^2(1+t)^2 + z^2(1+t)^2 &= R^2, \\x(1+t) + y(1+t) + z(1+t) &= R.\end{aligned}$$

Выразив из второго уравнения $1+t = R/(x+y+z)$ и поставив его в первое, имеем

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2.$$

Приведя подобные члены в этом выражении, получим уравнение

$$xy + xz + yz = 0 \quad (39.50)$$

конуса, для которого координатные оси являются образующими.

◇ Заметим, что направляющей конуса (39.50) является окружность, центр которой совпадает с проекцией вершины конуса на плоскость (39.48). Это означает, что прямая OO' является осью вращения прямоугольного треугольника $OO'A$. Прямая OO' проходит через первый и седьмой октанты. Если ось конуса провести через второй и восьмой октанты, то его уравнение будет иметь вид

$$xy + xz - yz = 0.$$

Аналогично можно получить уравнение конуса, проводя ось через 3-й и 5-й октанты и т.д.

Пример 39.14. Составить уравнения конусов с вершиной в точке $M_0(0, 1, 0)$ и направляющими, которыми являются направляющие цилиндров из примера 39.2. Построить эти конусы.

Решение. В случае а) для направляющей

$$z = e^{-x^2}, \quad y = 0$$

и вершины $M_0(0, 1, 0)$ имеем параметрическую систему (39.30):

$$\begin{aligned}e^{-(x+xt)^2} - (z + zt) &= 0, \\y + t(y - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Выразив из второго уравнения $t = -y/(y-1)$ и подставив его в первое, найдём уравнение конуса (рис. 183,а)

$$(y-1)e^{-x^2/(y-1)^2} + z = 0.$$

В случае б) для направляющей

$$z = \frac{4}{x^2}, \quad y = 0$$

и вершины $M_0(0, 1, 0)$ имеем систему

$$\begin{aligned}\frac{4}{(x+xt)^2} - (z + zt) &= 0, \\y + t(y - 1) &= 0,\end{aligned}$$

исключив из которой параметр t , получим уравнение конуса третьего порядка (рис. 183,б)

$$4(y-1)^3 + zx^2 = 0.$$

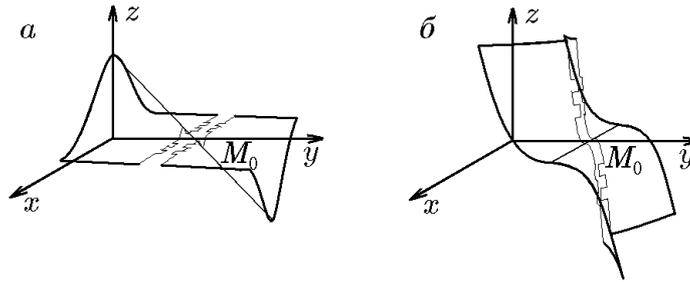


Рис. 183.

Пример 39.15. Построить поверхность, заданную уравнением

$$x^2 = 2yz. \quad (39.51)$$

Решение. Записав (39.51) в виде

$$F(x, y, z) = x^2 - 2yz = 0, \quad (39.52)$$

убеждаемся, что функция (39.52) однородна по переменным x, y, z , поскольку

$$(tx)^2 - 2(ty)(tz) = t^2(x^2 - 2yz) = 0.$$

Это означает (см. пример 39.10), что уравнение (39.51) описывает коническую поверхность с вершиной в начале координат. Кроме того, из уравнения (39.51) следует, что эта коническая поверхность симметрична относительно плоскости $x = 0$. Чтобы построить конус, найдём его сечения плоскостями

$$y = h, \quad z = h. \quad (39.53)$$

Поочередная подстановка (39.53) в (39.51) даёт две параболы (рис. 184,а):

$$\begin{aligned} y = h, \quad x^2 &= 2hz; \\ z = h, \quad x^2 &= 2hy. \end{aligned}$$

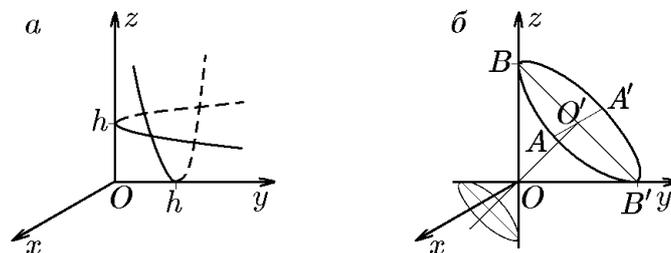


Рис. 184.

Поскольку вершины этих парабол лежат на координатных осях Oy и Oz , то эти оси являются образующими конуса (39.51). Рисунок 184,а, вообще говоря, не даёт наглядного представления об искомой конической поверхности. Для наглядности изображения конуса (39.51) найдём линию его пересечения с плоскостью

$$y + z = 2h. \quad (39.54)$$

Эта плоскость пересекает координатные оси Oy и Oz , которые являются образующими конуса, в точках $B(0, 0, 2h)$ и $B'(2h, 0, 0)$. Это означает, что линией

пересечения конуса и плоскости (39.54) будет эллипс (или его частный случай — окружность). Чтобы определить его характеристики, найдём проекцию O' точки O на плоскость (39.54). Как следует из рис. 184,б, точка O' имеет координаты $O'(0, h, h)$ и, следовательно, является центром эллипса. Полуоси эллипса можно определить, вычислив длину отрезков $O'A'$ и $O'B'$. Поскольку в декартовой системе координаты точек $A'(-h, 0, h)$, $B'(0, 2h, 0)$, то

$$\begin{aligned} |O'A'| &= \sqrt{h^2 + h^2} = h\sqrt{2}, \\ |O'B'| &= \sqrt{h^2 + h^2} = h\sqrt{2}. \end{aligned}$$

В силу равенств $|O'A'| = |O'B'| = h\sqrt{2}$ заключаем, что линией пересечения конуса и плоскости (39.54) является окружность радиуса $\sqrt{2}h$ с центром в точке O' , что характеризует положение конуса в декартовой системе координат xOy (рис. 184,б).

◇ Этот же конус можно получить вращением координатных осей Ox и Oy вокруг оси вращения OO' .

39.4. Конические сечения

Выше мы показали, что геометрические определения эллипса, параболы, гиперболы приводят к каноническим уравнениям и аналитическим выражениям для соответствующих кривых второго порядка. Геометрические и аналитические подходы не являются единственно возможными к определению этих плоских кривых. Эллипс, гипербола и парабола в виде конических сечений (коник) были известны еще математикам античности. Еще в 4 веке до н.э. древнегреческий математик Менехм использовал их для решения задачи об удвоении (объёма) куба, что на современном математическом языке означает решение уравнения $x^3 = 2V$. Наиболее полным сочинением, посвященным этому вопросу, были «Конические сечения» Аполлония Пергского (2 век до н.э.), первые четыре книги которого сохранились в греческом подлиннике, следующие три в арабском переводе, а последняя, восьмая, утеряна.

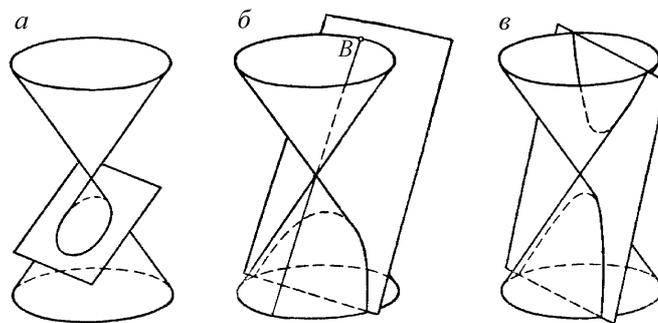


Рис. 185.

В этом сочинении коническим сечением называется линия, которая получается в результате пересечения прямого кругового конуса (получаемого вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов) плоскостью, не проходящей через его вершину. Конические сечения разделяются на три класса (см. рис. 185):

- эллипс — секущая плоскость пересекает все образующие конуса в точках одной его полости. Окружность как частный случай эллипса получается, когда секущая плоскость перпендикулярна оси конуса;
- парабола — секущая плоскость параллельна одной из касательных плоскостей конуса;
- гипербола — секущая плоскость пересекает обе полости конуса.

Заметим, что, в отличие от цилиндров, не бывает эллиптического, гиперболического или параболического конусов, поскольку при сечении конуса различными плоскостями можно получить все кривые второго порядка (см. пример 39.12).

В надлежащей системе координат с помощью параметров p и λ уравнения, определяющие конические сечения, единообразно можно записать в виде

$$y^2 = 2px + \eta\lambda^2 x^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 0 & \text{— парабола;} \\ \eta = -1 & \text{— эллипс;} \\ \eta = +1 & \text{— гипербола.} \end{cases} \quad (39.55)$$

Формула (39.55) отражает современный аналитический подход к коническим сечениям, однако древнегреческие названия удивительно точно характеризуют свойства кривых, описываемых этим уравнением. Действительно, в переводе с греческого «парабола» означает приложение, «эллипс» — недостаток (в смысле приложение с недостатком), а «гипербола» — избыток (в смысле приложение с избытком). Так как в древнегреческой геометрии превращение квадрата y^2 в равновеликий ему прямоугольник с основанием $2p$ называлось «приложением квадрата к данному основанию», то это соответствие на современном языке записывается в виде $y^2 = 2px$, который получается из (39.55) при $\lambda = 0$. Уравнение эллипса $y^2 = 2px - \lambda^2 x^2$ соответствует «приложению с недостатком», а уравнение гиперболы $y^2 = 2px + \lambda^2 x^2$ — «приложению с избытком».

Дальнейшие успехи теории конических сечений связаны с созданием новых геометрических методов, в особенности с введением прямоугольной системы координат (Р. Декарт). Новые методы позволили стереометрическое определение конических сечений заменить планиметрическим определением — как множества точек плоскости, удовлетворяющих определённым требованиям.

Мощным импульсом к развитию теории конических сечений и вообще к созданию теории кривых второго порядка послужили астрономические открытия законов движения небесных тел. В планиметрических определениях конических сечений на первое место выходят такие понятия, как фокус, директриса, эксцентриситет и др. Как понятия они были известны еще древнегреческим математикам, однако их названия имеют уже латинские корни. Так, введённый И. Кеплером термин «фокус» означает «огонь» или «очаг», им же введённый термин «эксцентриситет» составлен из двух слов: «ex» — вне и «центр». Термин «директриса», означающий «направляющая», введён Лопиталем и т.д. И в настоящее время кривые второго порядка играют важную роль в теории гравитации, баллистике, классической электродинамике и др.

Ниже мы докажем теорему о конических сечениях, используя стереометрический метод (Данделен), позволяющий достаточно просто перейти к их планиметрическим определениям.

Следующая теорема методами элементарной геометрии устанавливает связи между коническими сечениями и такими кривыми, как парабола, эллипс и гипербола.

Теорема 39.1. *Сечение прямого кругового (бесконечного в обе стороны) конуса плоскостью, не проходящей через вершину, является либо параболой, либо эллипсом, либо гиперболой.*

Доказательство. I. Пусть π — плоскость сечения конуса, параллельная его образующей, а Π — сфера (Данделена), вписанная в этот конус и касающаяся плоскости сечения π в точке F (рис. 186). Обозначим через C интересующее нас сечение конуса плоскостью π , а через C_1 — окружность касания сферы и конуса, при этом π_1 — плоскость, в которой расположена окружность C_1 . Пусть плоскости π и π_1 пересекаются по прямой D (рис. 186). Далее, пусть X — произвольная точка сечения C (параболы), точка Y — ее проекция на прямую D , а точка X_1 — точка пересечения прямой SX с окружностью C_1 . Отрезки XF и XX_1 двух касательных к сфере, проведённых из одной точки X , равны:

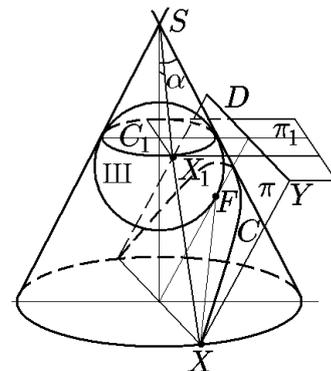


Рис. 186.

$$|FX| = |XX_1|. \quad (39.56)$$

Вообще говоря, равенство (39.56) можно рассматривать в качестве стереометрического определения параболы как линии пересечения двух пространственных поверхностей. Однако от стереометрической формулировки можно перейти к планиметрической, если отрезок XX_1 заменить другим, равным ему, но лежащим в одной плоскости с отрезком XF . Покажем, что таким отрезком является отрезок XU , лежащий в плоскости π перпендикулярно к прямой D (директрисе). Действительно, катет SX_1 , а следовательно, и XX_1 как его продолжение образуют с плоскостью π_1 угол $\pi/2 - \alpha$, где α — угол между образующей конуса и его осью. В свою очередь, отрезок XU параллелен той единственной образующей конуса, которой параллельна плоскость π . Но эта образующая составляет с плоскостью π_1 тоже угол $\pi/2 - \alpha$. Отсюда следует, что отрезки XU и XX_1 равны:

$$|XU| = |XX_1| \quad (39.57)$$

как отрезки, проведённые из одной точки X под одним углом к одной и той же плоскости π_1 .

Таким образом, в плоскости π мы построили кривую, обладающую тем свойством, что расстояние от любой ее точки X до точки F и до прямой D равны. Это является определением плоской кривой, называемой параболой, а F и D — ее фокус и директриса.

II. Пусть π — плоскость сечения конуса, проходящая только через одну полость конуса, а Π_1 и Π_2 — сферы, вписанные в этот конус и касающиеся с разных сторон плоскости π в точках F_1 и F_2 соответственно (рис. 187). Обозначим через π_1 и π_2 плоскости, в которых лежат окружности C_1 и C_2 касания сфер Π_1 и Π_2 с конусом, а через C — интересующее нас сечение плоскости π с конусом. Пусть X — произвольная точка сечения C , а точки X_1 и X_2 — точки пересечения прямой SX с окружностями C_1 и C_2 соответственно.

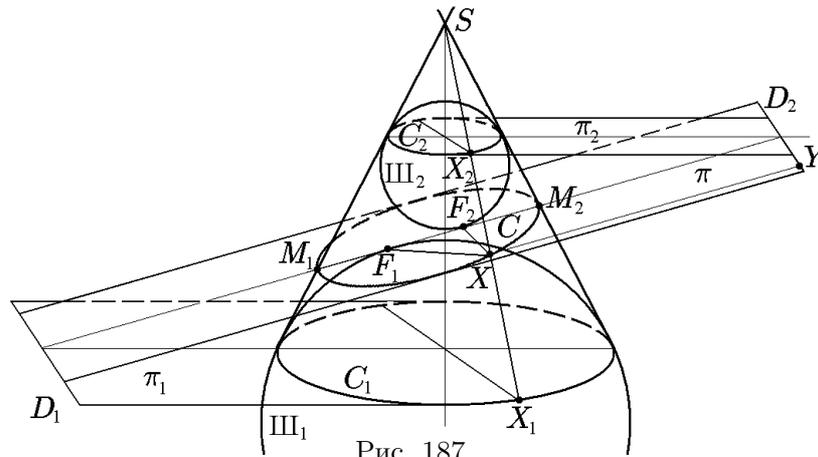


Рис. 187.

Поскольку отрезки касательных, проведённых к шару из одной точки, равны, то

$$|XF_1| = |XX_1|, \quad |XF_2| = |XX_2|. \quad (39.58)$$

Но отрезок $X_1X_2 = XX_1 + XX_2$ является образующей усеченного конуса, и его длина не меняется при движении точки X по кривой C . С учётом этого из (39.58) следует

$$|XF_1| + |XF_2| = \text{const}. \quad (39.59)$$

Таким образом, кривая пересечения конуса и плоскости π обладает тем свойством, что сумма расстояний от любой ее точки X до двух точек F_1 и F_2 остается постоянной, т.е. плоская кривая C является эллипсом с фокусами F_1 и F_2 и фокальной осью $M_1M_2 = X_1X_2$. Кроме того, как следует из рис. 187, плоскость π , пересекаясь с плоскостями π_1 и π_2 , образует две прямые D_1 и D_2 , называемые директрисами. Эти прямые лежат в одной плоскости с эллипсом и могут быть также использованы в качестве планиметрического определения эллипса.

◇ Прежде чем перейти к следующему типу секущих плоскостей, будет уместно и полезно рассмотреть, как изменяется кривая, являющаяся сечением конуса секущей плоскостью, при изменении положения последней и условия, что она по-прежнему будет пересекать только одну полость конуса и не будет проходить через вершину S .

Выше мы ввели такую характеристику эллипса, как его эксцентриситет, равный отношению

$$\varepsilon = \frac{|F_1 F_2|}{|M_1 M_2|}, \quad (39.60)$$

где $|F_1 F_2|$ — межфокусное расстояние эллипса, а $|M_1 M_2|$ — длина его фокальной оси.

Если теперь плоскость π сместить параллельно первоначальному положению, то из простейших геометрических построений (рис. 188) следует, что эллипс, изменив свои абсолютные размеры, не изменит свой эксцентриситет ε . Это говорит о том, что полученный эллипс подобен исходному. Таким образом, сечениями конуса параллельными плоскостями будет множество подобных эллипсов с одинаковым эксцентриситетом.

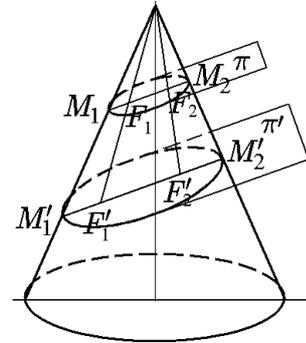


Рис. 188.

Теперь рассмотрим сечения конуса не параллельными друг другу плоскостями (рис. 189). Для этого зафиксируем точку M_2 , а точку M_1 будем перемещать по образующей конуса, приближая её к точке S или удаляя от нее. Из рис. 189,а видно, что плоскость π , перпендикулярная оси конуса, даёт при пересечении с ним эллипс с нулевым эксцентриситетом ($\varepsilon = 0$), т.е. окружность C . Относительно этого сечения все эллипсы, получаемые при сечении конуса другими плоскостями, делятся на два вида: с ограниченными и неограниченными фокальными осями. На рис. 189,а показано, что две плоскости π' и π'' , расположенные под одним углом β к плоскости π , дают в сечении пару подобных эллипсов с равными эксцентриситетами $0 < \varepsilon < 1$ (при повороте на 180° плоскость π'' будет параллельна π'). С увеличением угла наклона секущих плоскостей эксцентриситеты такой пары эллипсов тоже возрастают, как показано на рис. 189,б, стремясь в пределе к единице. При этом «форма» одного из эллипсов приближается к отрезку $M_2 S$, а «форма» другого — к параболе с фокусом F , когда плоскость π'' становится параллельной образующей конуса. Дальнейшее

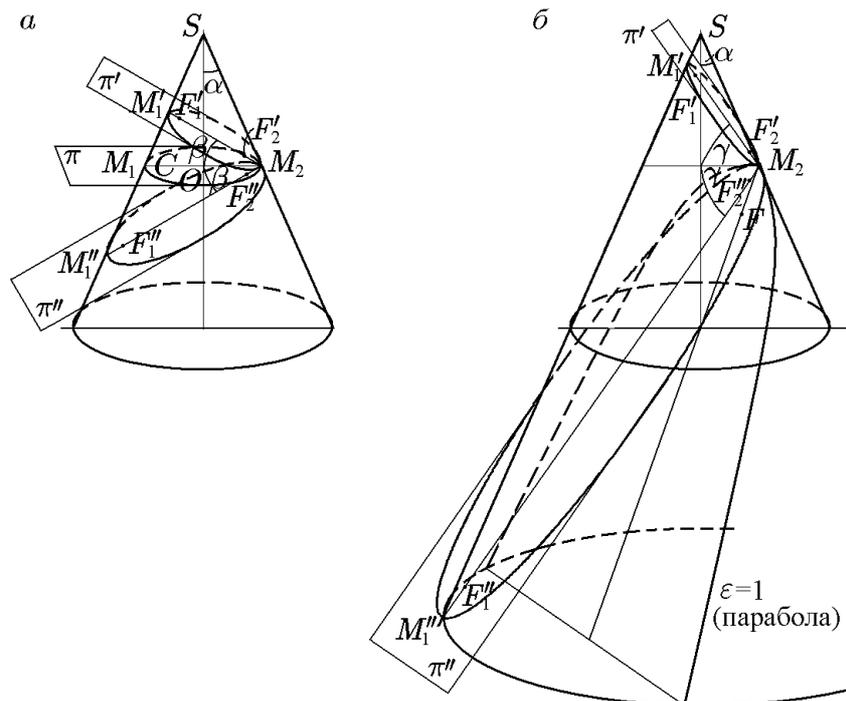


Рис. 189.

увеличение угла γ приводит к тому, что секущая плоскость пересекает обе полости конуса.

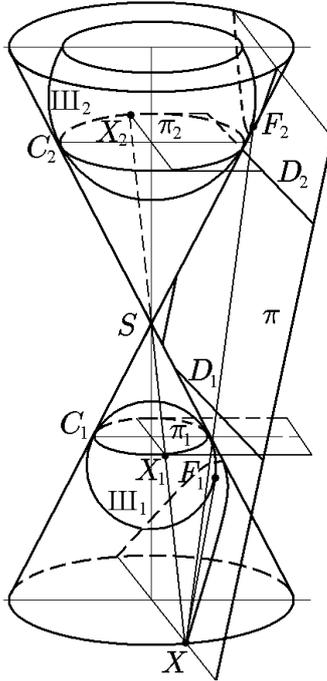


Рис. 190.

III. Пусть теперь π — плоскость сечения конуса, проходящая через обе полости конуса, а Π_1 и Π_2 — сферы, вписанные в разные полости этого конуса и касающиеся π с одной стороны в точках F_1 и F_2 соответственно (рис. 190). Используя те же обозначения, что и в предыдущем случае, с помощью аналогичных рассуждений приходим к равенствам (39.58). Из простейших геометрических построений на рис. 190 следует, что в данном случае постоянной величиной будет их разность:

$$|XF_1| - |XF_2| = \text{const.} \quad (39.61)$$

Таким образом, пересечением плоскости π и конуса является кривая, обладающая тем свойством, что разность расстояний от любой её точки X до двух точек F_1 и F_2 остается постоянной. Эта плоская кривая называется гиперболой с фокусами F_1 и F_2 . Кроме того, как следует из рис. 190, плоскость π , пересекаясь с плоскостями π_1 и π_2 , образует две прямые D_1 и D_2 , называемые директрисами. Эти прямые лежат вне конуса, но в одной плоскости с гиперболой и, таким образом, могут быть также использованы для планиметрического определения эллипса.

◇ Рассмотрим теперь возможные изменения положения секущей плоскости и вытекающие из них изменения сечений. Здесь имеется некоторое сходство с предыдущим случаем, но имеются и различия, обусловленные наличием у гиперболы асимптотических направлений. Действительно, любая секущая плоскость, перпендикулярная оси конуса, даёт в сечении эллипс с нулевым эксцентриситетом $\varepsilon = 0$, т.е. окружность, причём независимо от угла между осью и образующей конуса (у эллипса асимптотические направления отсутствуют). Среди плоскостей, пересекающих обе полости конуса, следует особо отметить плоскости, параллельные его оси. В этом случае все сечения конуса будут подобными гиперболами с одинаковыми эксцентриситетами. Значение эксцентриситета максимально для данного конуса, определяется углом α между его осью и образующей и равно

$$\varepsilon = \frac{1}{\cos \alpha} > 1. \quad (39.62)$$

Согласно (39.62), для малых углов, т.е. при $\alpha \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 1$ и для углов, близких к $\pi/2$, т.е. при $\alpha \rightarrow \pi/2$, $\varepsilon \rightarrow \infty$ (рис. 191).

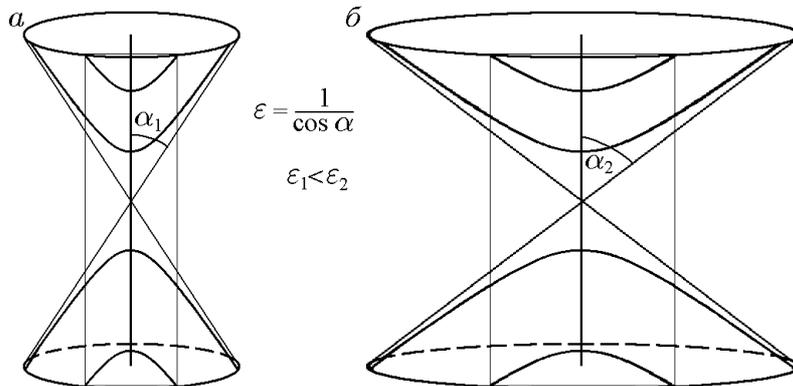


Рис. 191.

Рассмотрим теперь сечения конуса плоскостями, не параллельными его оси (рис. 192). Для этого на конусе с углом раствора α зафиксируем точку M_2 , а точку M_1 будем перемещать по образующей конуса, приближая ее к вершине S или удаляя от нее.

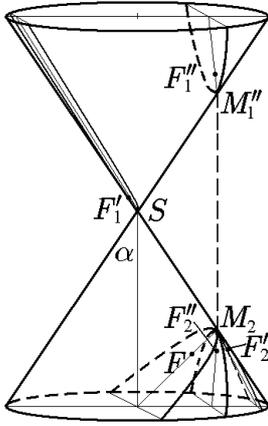


Рис. 192.

Пусть π'' — секущая плоскость, проходящая через точку M_2 параллельно оси конуса. Выше мы отмечали, их пересечение даёт гиперболу с максимальным эксцентриситетом $\varepsilon = 1/\cos \alpha$. Любое изменение положения этой плоскости приводит к изменению сечения, а именно, к уменьшению эксцентриситета гипербол. Две плоскости, проходящие через точку M_2 симметрично под одним углом к плоскости π'' дают пару подобных гипербол с равными эксцентриситетами $\varepsilon_1 < \varepsilon = 1/\cos \alpha$. С увеличением этого угла эксцентриситеты таких пар продолжают уменьшаться, стремясь в пределе к единице. При этом «форма» одной из гипербол приближается к двух полупрямым, а «форма» другой — к параболе с фокусом F , когда секущая плоскость становится параллельной образующей конуса. При дальнейшем увеличении угла между осью конуса и секущей плоскостью мы получим сначала параболу (когда секущая плоскость параллельна образующей конуса), а затем уже рассмотренные выше эллипсы. Таким образом, утверждение теоремы доказано: любое сечение конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, есть либо эллипс, либо парабола, либо гипербола.

◇ Сечениями конуса плоскостями, проходящими через его вершину S , будут так называемые распадающиеся кривые второго порядка: пара пересекающихся прямых, пара совпадающих прямых либо точка.

40. Приведение уравнений поверхностей второго порядка к каноническому виду

40.1. Матричная форма уравнений поверхностей второго порядка и приведение их к каноническому виду

Согласно определению (31.4), уравнение поверхности второго порядка имеет вид

$$F_2(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0. \quad (40.1)$$

В зависимости от задач, в которых используется поверхность (40.1), ее уравнение удобно представлять в следующих матричных формах:

$$\text{I. } F_2(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_0 = 0$$

или

$$F_2(x, y, z) = X^T G X + 2LX + a_0 = 0, \quad (40.2)$$

где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad L = (a_1 \ a_2 \ a_3); \quad (40.3)$$

$$\text{II. } F_2(x, y, z) = (x \ y \ z \ 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = Y^T Q Y = 0, \quad (40.4)$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix}. \quad (40.5)$$

◆ Симметричная вещественная матрица Q называется *матрицей алгебраической поверхности 2-го порядка*, симметричная вещественная матрица G — *матрицей ее квадратичной части* (формы), а матрица-строка L — *матрицей ее линейной части* (формы).

Пример 40.1. Записать в матричной форме уравнение поверхности второго порядка:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \text{б) } \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z; \quad \text{в) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0; \\ \text{г) } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{д) } x^2 - y^2 = 0; \quad \text{е) } x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 0. \end{aligned}$$

Решение. Согласно определению (40.4), матричная форма исходных уравнений имеет вид $Y^T Q Y = 0$. По заданным уравнениям найдём матрицы Q и G :

а) трехосный эллипсоид с центром симметрии в начале координат:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det Q = -\frac{1}{(abc)^2} \neq 0, \\ G = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix}, \quad \det G = \frac{1}{(abc)^2} \neq 0;$$

б) гиперболический параболоид, не имеющий центра симметрии:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det Q = \frac{1}{pq} \neq 0, \\ G = \begin{pmatrix} 1/p & 0 & 0 \\ 0 & -1/q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det G = 0;$$

в) конус второго порядка с вершиной, т.е. центром, в начале координат:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det Q = 0, \\ G = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/c^2 \end{pmatrix}, \quad \det G = -\frac{1}{(abc)^2} \neq 0;$$

г) эллиптический цилиндр с осью симметрии $z = 0$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det Q = 0, \quad G = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det G = 0;$$

д) уравнение можно представить в виде произведения $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$, что соответствует двум пересекающимся плоскостям $x - y = 0$ и $x + y = 0$:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det Q = 0, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det G = 0;$$

е) уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 0$ не определяет ни одну точку трехмерного пространства:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det Q = \frac{1}{a^2 b^2 c^2} \neq 0,$$

$$G = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/c^2 \end{pmatrix}, \quad \det G = \frac{1}{(abc)^2} \neq 0.$$

Обобщая результаты исследований конкретных поверхностей 2-го порядка и учитывая матричную запись (40.2), (40.4) общего уравнения, введём следующую терминологию.

◆ Поверхности, описываемые невырожденной матрицей Q ($\det Q \neq 0$), называются *невырождающимися*, а поверхности, описываемые вырожденной матрицей Q ($\det Q = 0$), — *вырождающимися*.

◇ К вырождающимся относятся все конические и цилиндрические поверхности.

◆ Поверхности, описываемые невырожденной матрицей квадратичной формы G ($\det G \neq 0$), называются *центральными* — имеющими центр симметрии, а поверхности, описываемые вырожденной матрицей G ($\det G = 0$), — *нецентральными*, т.е. не имеющими определенного центра.

◇ К нецентральным относятся все поверхности, за исключением эллиптических, гиперболических и конических.

◇ К вырождающимся нецентральным поверхностям ($\det Q = \det G = 0$) относятся все цилиндрические и поверхности, уравнения которых можно записать в виде $F(x, y, z) = F_1(x, y, z)F_2(x, y, z) = 0$, где $F_i(x, y, z)$ — линейные полиномы. Последние поверхности называются *распадающимися*.

В дополнение к этому определим содержательные и ограниченные поверхности.

◆ Поверхность называется *ограниченной*, если существует сфера конечного радиуса, целиком охватывающая точки поверхности; в противном случае поверхность называется *неограниченной*.

◆ Поверхность второго порядка (40.1), состоящую более чем из одной точки, будем называть *содержательной*.

К содержательным ограниченным поверхностям относятся только эллипсоиды, поскольку их можно заключить в сферу конечного радиуса. Все остальные содержательные поверхности имеют непустое пересечение с любой сферой, радиус которой больше некоторого значения, и, следовательно, являются неограниченными.

Напомним, что линия пересечения содержательной поверхности 2-го порядка (40.1) с плоскостью

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{40.6}$$

является кривой второго порядка.

Теорема 40.1. *Общее уравнение поверхности 2-го порядка (40.2), заданное относительно некоторой системы координат (O, x, y, z) с помощью ортогональных преобразований, состоящих из поворота системы координат*

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = PX' = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad (40.7)$$

и ее параллельного переноса

$$X'' = X' + X'_0, \quad (40.8)$$

можно привести к одному из следующих пяти типов:

- I. $\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 + a''_0 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2a'_3 \neq 0;$
- II. $\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + 2a'_3z'' = 0, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0;$
- III. $\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + a''_0 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2 \neq 0;$
- IV. $\lambda_1(x'')^2 + 2a''_2y'' = 0, \quad \lambda_1a''_2 \neq 0;$
- V. $\lambda_1(x'')^2 + a''_0 = 0, \quad \lambda_1 \neq 0.$

В преобразованиях (40.7), (40.8) матрица

$$P = (\mathcal{E}_1 \ \mathcal{E}_2 \ \mathcal{E}_3), \quad \mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} m_i \\ n_i \\ p_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (40.9)$$

состоит из собственных векторов \mathcal{E}_i матрицы G , соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а

$$X'_0 = \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \\ z'_0 \end{pmatrix} \quad (40.10)$$

— вектор параллельного переноса.

Доказательство. Подставим (40.7) в исходное матричное уравнение (40.2):

$$(X')^\top P^\top G P X' + 2LPX' + a_0 = 0. \quad (40.11)$$

Согласно условиям теоремы, матрица (40.9) состоит из собственных векторов матрицы G , которые находятся из уравнения

$$G\mathcal{E} = \lambda\mathcal{E}. \quad (40.12)$$

В силу вещественности и симметричности матрицы G её собственные значения являются вещественными, а собственные векторы — также вещественными, причём ортогональными. С учётом этого, обозначив

$$LP = L' = (a'_1 \ a'_2 \ a'_3), \quad (40.13)$$

можно записать уравнение (40.11):

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + 2a'_3z' + a_0 = 0. \quad (40.14)$$

Далее рассмотрим все возможные частные случаи уравнения (40.14).

I. При $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ выделение полных квадратов в (40.14) приводит к уравнению

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3\left(z' + \frac{a'_3}{\lambda_3}\right)^2 + \left[a_0 - \frac{(a'_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_2)^2}{\lambda_2} - \frac{(a'_3)^2}{\lambda_3}\right]. \quad (40.15)$$

Это уравнение с помощью параллельного переноса системы координат

$$X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = X' + X'_0 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1/\lambda_1 \\ a'_2/\lambda_2 \\ a'_3/\lambda_3 \end{pmatrix} \quad (40.16)$$

и с использованием обозначения

$$a''_0 = a_0 - \frac{(a'_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_2)^2}{\lambda_2} - \frac{(a'_3)^2}{\lambda_3} \quad (40.17)$$

запишется в виде

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 + a''_0 = 0. \quad (40.18)$$

II. При $\lambda_3 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2a'_3 \neq 0$ из (40.15) имеем

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2a'_3\left[z' + \frac{a_0 - (a'_1)^2/\lambda_1 - (a'_2)^2/\lambda_2}{2a'_3}\right] = 0.$$

Это уравнение с помощью параллельного переноса системы координат

$$X'' = X' + X'_0,$$

где

$$X'_0 = \begin{pmatrix} a'_1/\lambda_1 \\ a'_2/\lambda_2 \\ [a_0 - (a'_1)^2/\lambda_1 - (a'_2)^2/\lambda_2]/2a'_3 \end{pmatrix}, \quad (40.19)$$

запишется в виде

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + 2a'_3z'' = 0. \quad (40.20)$$

III. При $\lambda_3 = a'_3 = 0$ и $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ из (40.15) имеем

$$\lambda_1\left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{a'_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left[a_0 - \frac{(a'_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_2)^2}{\lambda_2}\right] = 0.$$

Это уравнение с помощью параллельного переноса системы координат

$$X'' = X' + X'_0,$$

где

$$X'_0 = \begin{pmatrix} a'_1/\lambda_1 \\ a'_2/\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (40.21)$$

и с использованием обозначения

$$a''_0 = a_0 - \frac{(a'_1)^2}{\lambda_1} - \frac{(a'_2)^2}{\lambda_2} \quad (40.22)$$

запишется в виде

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + a''_0 = 0. \quad (40.23)$$

IV. Пусть $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$ и хотя бы один из параметров a'_2 и a'_3 не равен нулю. Тогда из (40.15) имеем

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 + 2a'_2 y' + 2a'_3 z' + \left[a_0 - \frac{(a'_1)^2}{\lambda_1} \right] = 0.$$

С обозначением

$$a''_2 = \sqrt{(a'_2)^2 + (a'_3)^2} \quad (40.24)$$

это уравнение преобразованием

$$X'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \\ \frac{1}{a''_2} \left[a'_2 y' + a'_3 z' + \frac{1}{2} \left(a_0 - \frac{(a'_1)^2}{\lambda_1} \right) \right] \\ \frac{1}{a''_2} [-a'_3 y' + a'_2 z'] \end{pmatrix} \quad (40.25)$$

приводится к виду

$$\lambda_1 (x'')^2 + 2a''_2 y'' = 0. \quad (40.26)$$

Преобразование (40.25) гарантирует ортогональность матрицы перехода от (x, y, z) к (x'', y'', z'') .

Если же $a'_2 = a'_3 = 0$, то мы сразу имеем уравнение IV типа.

V. При $\lambda_2 = \lambda_3 = a'_2 = a'_3 = 0$ и $\lambda_1 \neq 0$ из (40.15) имеем

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_1}{\lambda_1} \right)^2 + \left[a_0 - \frac{(a'_1)^2}{\lambda_1} \right] = 0.$$

Это уравнение с помощью параллельного переноса системы координат

$$X'' = X' + X'_0,$$

где

$$X'_0 = \begin{pmatrix} a'_1/\lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (40.27)$$

и с использованием обозначения

$$a''_0 = a_0 - \frac{(a'_1)^2}{\lambda_1} \quad (40.28)$$

запишется в виде

$$\lambda_1 (x'')^2 + a''_0 = 0. \quad (40.29)$$

Таким образом, теорема доказана.

Опираясь на только что доказанную теорему 40.1, вернёмся к теореме 33.1 и докажем её в эквивалентной формулировке.

Теорема 40.2. *Общее уравнение поверхности 2-го порядка (40.1) определяет одну из следующих 17 поверхностей:*

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты | I эллиптический эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\Delta = \det Q = -\frac{1}{a^2 b^2 c^2}$, $\delta = \det G = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}$, $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, $T = \frac{1}{(ab)^2} + \frac{1}{(ac)^2} + \frac{1}{(bc)^2}$; |
|---|---|---|

| | | |
|---|--|---|
| 2 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты | I эллиптический мнимый эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ $\Delta = \det Q = \frac{1}{a^2 b^2 c^2}, \delta = \det G = \frac{1}{a^2 b^2 c^2},$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, T = \frac{1}{(ab)^2} + \frac{1}{(ac)^2} + \frac{1}{(bc)^2};$ |
| 3 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты | I гиперболический однополостный гиперboloид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\Delta = \det Q = \frac{1}{(abc)^2}, \delta = \det G = -\frac{1}{(abc)^2},$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}, T = \frac{1}{(ab)^2} - \frac{1}{(ac)^2} - \frac{1}{(bc)^2};$ |
| 4 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты: | I гиперболический двуполостный гиперboloид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1;$ $\Delta = \det Q = -\frac{1}{(abc)^2}, \delta = \det G = -\frac{1}{(abc)^2},$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}, T = \frac{1}{(ab)^2} - \frac{1}{(ac)^2} - \frac{1}{(bc)^2};$ |
| 5 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты | I гиперболический конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = -\frac{1}{(abc)^2},$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}, T = \frac{1}{(ab)^2} - \frac{1}{(ac)^2} - \frac{1}{(bc)^2};$ |
| 6 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты | I гиперболический мнимый конус $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = \frac{1}{(abc)^2},$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, T = \frac{1}{(ab)^2} + \frac{1}{(ac)^2} + \frac{1}{(bc)^2};$ |
| 7 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты | II параболический эллиптический параболоид $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, p > 0, q > 0$ $\Delta = \det Q = -\frac{1}{pq}, \delta = \det G = 0,$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, T = \frac{1}{pq};$ |
| 8 | Тип поверхности | II |

| | | |
|----|---|---|
| | класс название уравнение инварианты | параболический гиперболический параболоид $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, p > 0, q > 0$ $\Delta = \det Q = \frac{1}{pq}, \delta = \det G = 0,$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, T = -\frac{1}{pq};$ |
| 9 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты полуинварианты | III цилиндрический эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = 0,$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, T = \frac{1}{(ab)^2};$ $\Delta' = -T, \Delta'' = -S;$ |
| 10 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты полуинварианты | III цилиндрический мнимый эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = 0,$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, T = \frac{1}{(ab)^2};$ $\Delta' = T, \Delta'' = S;$ |
| 11 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты полуинварианты | III цилиндрический две мнимые пересекающиеся плоскости $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = 0,$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, T = \frac{1}{(ab)^2};$ $\Delta' = 0, \Delta'' = 0;$ |
| 12 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты полуинварианты | III цилиндрический гиперболический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = 0,$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, T = -\frac{1}{(ab)^2};$ $\Delta' = -T, \Delta'' = -S;$ |
| 13 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты полуинварианты | III цилиндрический две пересекающиеся плоскости $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = 0,$ $S = \text{Sp } G = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}, T = -\frac{1}{(ab)^2};$ $\Delta' = 0, \Delta'' = 0;$ |
| 14 | Тип поверхности | IV |

| | | |
|----|---|--|
| | класс название уравнение инварианты полуинварианты | цилиндрический параболический цилиндр $x^2 = 2py$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = 0, S = \text{Sp } G = 1, T = 0;$ $\Delta' = -p^2, \Delta'' = 0;$ |
| 15 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты полуинварианты | V цилиндрический две параллельные плоскости $x^2 = a^2, a \neq 0$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = 0, S = \text{Sp } G = 1 - a^2, T = 0;$ $\Delta' = 0, \Delta'' = -a^2;$ |
| 16 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты полуинварианты | V цилиндрический две мнимые параллельные плоскости $x^2 = -a^2, a \neq 0$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = 0, S = \text{Sp } G = 1 + a^2, T = 0;$ $\Delta' = 0, \Delta'' = a^2;$ |
| 17 | Тип поверхности класс название уравнение инварианты полуинварианты | V цилиндрический две совпадающие плоскости $x^2 = 0$ $\Delta = \det Q = 0, \delta = \det G = 0, S = \text{Sp } G = 1, T = 0;$ $\Delta' = 0, \Delta'' = 0.$ |

Доказательство. Начнём с уравнений типа I. Если все $\lambda_i, i = 1, 2, 3$, имеют один и тот же знак, а a_0'' — противоположный, то делением на $-a_0''$ и переобозначением (при необходимости) осей уравнение приводится к виду 1 — уравнению эллипсоида.

Если все λ_i и a_0'' имеют один и тот же знак, то делением на a_0'' и переобозначением (при необходимости) осей уравнение приводится к виду 2 — уравнению мнимого эллипсоида.

Если все λ_i имеют один и тот же знак, а $a_0'' = 0$, то переобозначением осей уравнение приводится к виду 6 — уравнению мнимого конуса.

Если λ_i имеют разные знаки, а $a_0'' = 0$, то переобозначением осей уравнение приводится к виду 5 — уравнению конуса.

Если λ_i имеют разные знаки, причём один из них имеет тот же знак, что и a_0'' , то переобозначением осей и делением на $-a_0''$ уравнение приводится к виду 3 — уравнению однополостного гиперболоида.

Если λ_i имеют разные знаки, причём два из них имеют тот же знак, что и a_0'' , то переобозначением осей и делением на $-a_0''$ уравнение приводится к виду 4 — уравнению двуполостного гиперболоида.

Таким образом, уравнения типа I приводят к уравнениям 1–6. Аналогично доказывается утверждение и для уравнений других типов (см. также доказательство теоремы 40.1 для двумерного случая).

Пример 40.2. Привести к каноническому виду и построить поверхность второго порядка

$$6x^2 + 5y^2 + 7z^2 - 4xy + 4xz - 9 = 0.$$

Решение. Для данного уравнения поверхности второго порядка матрицы квадратичной формы G и линейной формы L имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad (40.30)$$

$$L = (0 \ 0 \ 0). \quad (40.31)$$

Для матриц (40.30) решаем задачу на собственные значения и собственные векторы:

$$G\mathcal{E} = \lambda\mathcal{E}$$

или

$$(G - \lambda\mathbb{I})\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7 - \lambda \end{pmatrix} \mathcal{E} = 0, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}. \quad (40.32)$$

Собственные значения λ находятся, как известно, из условия

$$\det \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -2 & 2 \\ -2 & 5 - \lambda & 0 \\ 2 & 0 & 7 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0. \quad (40.33)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что $\lambda_1 = 3$ является корнем уравнения (40.33). С учётом этого уравнение (40.33) можно переписать в виде

$$(\lambda - 3)(\lambda^2 - 15\lambda + 54) = 0.$$

Из квадратного уравнения найдём $\lambda_2 = 6$ и $\lambda_3 = 9$. Подставив поочередно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в систему (40.32), найдём собственные векторы

$$\mathcal{E}_1 = m_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = m_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_3 = m_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Из условия нормировки $\mathcal{E}_i^\top \mathcal{E}_i = 1$ определим $m_1 = m_2 = m_3 = 1/\sqrt{4 + 4 + 1} = 1/3$. С учётом этого получим ортонормированную систему собственных векторов

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (40.34)$$

По векторам (40.34) найдём новый ортонормированный базис в системе координат $x'Oy'$:

$$\vec{e}'_1 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 - \frac{1}{3}\vec{e}_3, \quad \vec{e}'_2 = -\frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3, \quad \vec{e}'_3 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{2}{3}\vec{e}_3 \quad (40.35)$$

(здесь для удобства принято $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$) и матрицу перехода

$$P = (\mathcal{E}_1 \ \mathcal{E}_2 \ \mathcal{E}_3) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}. \quad (40.36)$$

В базисе (40.35) квадратичная форма уравнения поверхности примет вид

$$X^\top GX = (X')^\top \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} X' = 3(x')^2 + 6(y')^2 + 9(z')^2 \quad (40.37)$$

и соответственно преобразования координат, с учётом (40.36),

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = PX' = (\mathcal{E}_1 \ \mathcal{E}_2 \ \mathcal{E}_3) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x' - y' + 2z' \\ 2x' + 2y' - z' \\ -x' + 2y' + 2z' \end{pmatrix}. \quad (40.38)$$

Поскольку

$$L' = LP = (0 \ 0 \ 0)P = (0 \ 0 \ 0),$$

то исходное уравнение запишется в виде

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 - 9 = 3(x')^2 + 6(y')^2 + 9(z')^2 - 9 = 0$$

или

$$\frac{(x')^2}{3} + \frac{(y')^2}{3/2} + (z')^2 = 1. \quad (40.39)$$

Уравнение (40.39) является канонической формой исходного уравнения поверхности и определяет трехосный эллипсоид с полуосями $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3/2}$, $c = 1$ (рис. 193).

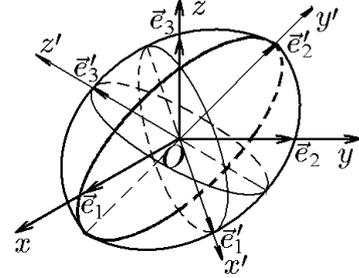


Рис. 193.

Пример 40.3. Привести к каноническому виду и построить поверхность второго порядка

$$4x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 10xy + 4yz + 4zx - 16x - 16y - 8z + 72 = 0.$$

Решение. Для данного уравнения поверхности матрицы квадратичной формы G и линейной формы L имеют вид

$$G = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \quad (40.40)$$

$$L = (-8 \ -8 \ -4). \quad (40.41)$$

Для матриц (40.40) решаем задачу на собственные значения и собственные векторы:

$$G\mathcal{E} = \lambda\mathcal{E}$$

или

$$(G - \lambda\mathbb{I})\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -5 & 2 \\ -5 & 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & -8 - \lambda \end{pmatrix} \mathcal{E} = 0, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}. \quad (40.42)$$

Собственные значения λ находятся, как известно, из условия

$$\det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & -5 & 2 \\ -5 & 4 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & -8 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 81)\lambda = 0, \quad (40.43)$$

откуда $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = 0$.

Подставив поочередно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в систему (40.42), найдём собственные векторы

$$\mathcal{E}_1 = m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = m_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_3 = m_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из условия нормировки $\mathcal{E}_i^T \mathcal{E}_i = 1$ определим $m_1 = 1/\sqrt{2}$, $m_2 = 1/3\sqrt{2}$, $m_3 = 1/3$. С учётом этого получим ортонормированную систему собственных векторов

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (40.44)$$

По векторам (40.44) найдём новый ортонормированный базис в системе координат $x'Oy'$:

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{e}_2 - \frac{4}{3\sqrt{2}}\vec{e}_3, \quad \vec{e}'_3 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3 \quad (40.45)$$

и матрицу перехода

$$P = (\mathcal{E}_1 \ \mathcal{E}_2 \ \mathcal{E}_3) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ -3 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & -4 & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (40.46)$$

В базисе (40.45) квадратичная форма уравнения поверхности примет вид

$$X^T G X = (X')^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} X' = 9(x')^2 - 9(y')^2 \quad (40.47)$$

и соответственно преобразования координат, с учётом (40.46),

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P X' = (\mathcal{E}_1 \ \mathcal{E}_2 \ \mathcal{E}_3) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3x' + y' + 2\sqrt{2}z' \\ -3x' + y' + 2\sqrt{2}z' \\ -4y' + \sqrt{2}z' \end{pmatrix}. \quad (40.48)$$

Поскольку, согласно (40.41),

$$L' = LP = (-8 \ -8 \ -4)P = \frac{1}{3\sqrt{2}}(0 \ 0 \ -12), \quad (40.49)$$

то исходное уравнение с учётом (40.47) запишется в виде

$$9(x')^2 - 9(y')^2 - 24z' + 72 = 0$$

или

$$\frac{(x')^2}{8/3} + \frac{(y')^2}{8/3} = z' - 3. \quad (40.50)$$

С помощью параллельного переноса

$$x'' = x', \quad y'' = y', \quad z'' = z' - 3 \quad (40.51)$$

из (40.50) получим каноническое уравнение гиперболоидического параболоида (рис. 194)

$$\frac{(x'')^2}{8/3} + \frac{(y'')^2}{8/3} = z''. \quad (40.52)$$

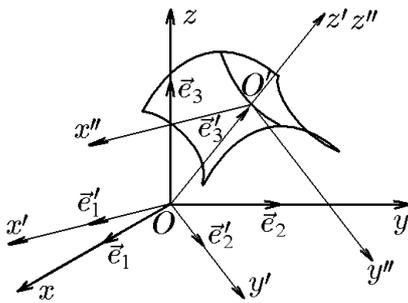


Рис. 194.

Резльтирующее преобразование запишется как

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(3x'' + y'' + 2\sqrt{2}x'') + 2, \\ y &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-3x'' + y'' + 2\sqrt{2}x'') + 2, \\ z &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4y'' + \sqrt{2}x'') + 1. \end{aligned} \quad (40.53)$$

а каноническая система координат, соответственно, имеет базис (40.45) и начало в точке $O'(2, 2, 1)$.

Пример 40.4. Привести к каноническому виду и построить поверхность второго порядка

$$x^2 - 2yz = 0.$$

Решение. Для данного уравнения поверхности имеем матрицу квадратичной формы

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (40.54)$$

и нулевую матрицу линейной формы:

$$L = (0 \ 0 \ 0). \quad (40.55)$$

Для матриц (40.54) решаем задачу на собственные значения и собственные векторы:

$$G\mathcal{E} = \lambda\mathcal{E}$$

или

$$(G - \lambda\mathbb{I})\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \mathcal{E} = 0, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} m \\ n \\ p \end{pmatrix}. \quad (40.56)$$

Собственные значения λ находятся из условия

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2(1 + \lambda) = 0, \quad (40.57)$$

откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

Подставив поочередно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в систему (40.56), найдём собственные векторы:

$$\mathcal{E}_1 = m_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = m_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_3 = m_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из условия нормировки $\mathcal{E}_i^T \mathcal{E}_i = 1$ определим $m_1 = 1$, $m_2 = 1/\sqrt{2}$, $m_3 = 1/\sqrt{2}$. С учётом этого получим ортонормированную систему собственных векторов

$$\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (40.58)$$

По векторам (40.58) найдём новый ортонормированный базис в системе координат $x'Oy'$:

$$\vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_3, \quad (40.59)$$

матрицу перехода

$$P = (\mathcal{E}_1 \ \mathcal{E}_2 \ \mathcal{E}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (40.60)$$

и, соответственно, преобразования координат:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} P X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - z') \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + z') \end{pmatrix}. \quad (40.61)$$

В базисе (40.59) квадратичная форма и, следовательно, само уравнение поверхности примет вид

$$X^T G X = (X')^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X' = 0$$

или

$$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0. \quad (40.62)$$

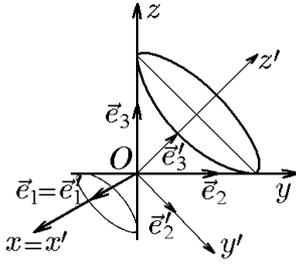


Рис. 195.

Уравнение (40.62) определяет круговой конус, ось Oz' которого, согласно матрице перехода (40.60), располагается в плоскости $x = x' = 0$ и является диагональю первой четверти плоскости yOz (рис. 195).

Из рис. 195 и явного вида матрицы P (40.60) следует, что система координат $x'Oy'$ получается из xOy поворотом на угол $\varphi = \pi/2$ ($\cos \pi/4 = \sin \pi/4 = 1/\sqrt{2}$) вокруг оси Ox . Покажем, что в общем случае переход от одной системы координат к другой можно осуществить с помощью трёх поворотов вокруг некоторых осей в $Oxyz$.

Рассмотрим переход от прямоугольной системы координат с репером $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к прямоугольной системе $\{O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ той же ориентации. Если $\vec{e}_3 = \vec{e}'_3$, то этот переход сводится к преобразованию координат на плоскости, перпендикулярной вектору \vec{e}_3 . Пусть векторы \vec{e}_3 и \vec{e}'_3 не коллинеарны. Каждый из векторов \vec{e}_3 и \vec{e}'_3 ортогонален к плоскости $\pi = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\pi' = \{O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, соответственно. Тогда вектор

$$\vec{f} = \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}'_3]}{||[\vec{e}_3, \vec{e}'_3]||} \quad (40.63)$$

является направляющим вектором прямой ℓ , по которой пересекаются эти плоскости: $\ell = \pi \cap \pi'$.

Выделим углы, на которые мы будем производить повороты вокруг выбранных осей:

- а) угол $\varphi \in [0, 2\pi[$ — угол от \vec{e}_1 к \vec{f} (40.63);
- б) угол $\psi \in [0, 2\pi[$ — угол от \vec{f} к \vec{e}'_1 ;
- в) угол $\theta \in [0, \pi[$ — угол от \vec{e}_3 к \vec{e}'_3 .

Углы φ, ψ, θ называются *углами Эйлера*.

Произведём первый переход от исходного репера $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к реперу $\{O, \vec{f}, \vec{g}, \vec{e}_3\}$, имеющему ту же ориентацию. Это соответствует повороту системы координат вокруг \vec{e}_3 на угол φ от \vec{e}_1 к \vec{f} .

Матрица этого перехода имеет вид

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (40.64)$$

Теперь проведём поворот вокруг вектора \vec{f} так, чтобы вектор \vec{e}_3 совместился с вектором \vec{e}'_3 . В силу выбора \vec{f} это вращение на угол θ от \vec{e}_3 к \vec{e}'_3 . Получим переход от

репера $\{O, \vec{f}, \vec{g}, \vec{e}'_3\}$ к реперу $\{O, \vec{f}, \vec{h}, \vec{e}'_3\}$, причём плоскость $O\vec{f}\vec{h}$ совпадает с плоскостью $O\vec{e}'_1\vec{e}'_2$, а матрица этого перехода равна

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (40.65)$$

Осталось осуществить поворот вокруг вектора \vec{e}'_3 , т.е. в плоскости $O\vec{f}\vec{h} = O\vec{e}'_1\vec{e}'_2$, чтобы совместить \vec{f} с \vec{e}'_1 . При этом, в силу согласованности ориентаций, \vec{e}'_2 перейдет в вектор \vec{e}'_2 . Соответствующая матрица перехода имеет вид

$$P_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (40.66)$$

Таким образом, результирующая матрица перехода от репера $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ к новому реперу $\{O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ есть

$$\begin{aligned} P &= P_1 P_2 P_3 = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \cos \theta \sin \psi & -\cos \varphi \sin \psi - \sin \varphi \cos \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \cos \theta \sin \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (40.67)$$

Пример 40.5. Найти углы Эйлера при переходе к новому базису из примера 40.3.

Решение. В примере 40.3 исходный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ связан с новым $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ соотношениями (40.45)

$$\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2, \quad \vec{e}'_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{3\sqrt{2}}\vec{e}_2 - \frac{4}{3\sqrt{2}}\vec{e}_3, \quad \vec{e}'_3 = \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3.$$

Согласно определению, для нахождения углов Эйлера найдём сначала вектор

$$[\vec{e}_3, \vec{e}'_3] = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2$$

и его модуль

$$|[\vec{e}_3, \vec{e}'_3]| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

после чего запишем вектор (40.63):

$$\vec{f} = \frac{[\vec{e}_3, \vec{e}'_3]}{|[\vec{e}_3, \vec{e}'_3]|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2. \quad (40.68)$$

Зная \vec{f} , найдём

- $\cos \varphi = (\vec{e}_1, \vec{f}) = -1/\sqrt{2}$ и, следовательно, $\varphi = 3\pi/4$, $\sin \varphi = 1/\sqrt{2}$;
- $\cos \psi = (\vec{f}, \vec{e}'_1) = -1$ и, следовательно, $\psi = \pi$, $\sin \psi = 0$;
- $\cos \theta = (\vec{e}_3, \vec{e}'_3) = 1/3$, $\theta = \arccos(1/3)$; $\sin \theta = \sqrt{1 - 1/9} = 2\sqrt{2}/3$.

Таким образом, в примере 40.3 переход к новому базису осуществляется тремя поворотами: поворотом вокруг \vec{e}_3 на угол $\varphi = 3\pi/4$, поворотом вокруг \vec{f} на угол $\psi = \pi$ и, наконец, поворотом вокруг \vec{e}'_3 на угол $\theta = \arccos(1/3)$. Подставив найденные углы в (40.67), получим выражение (40.46) из примера 40.3.

40.2. Инварианты уравнения поверхности второго порядка

Выше мы рассмотрели возможность приведения общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду с помощью собственных векторов матрицы G , т.е. нахождением канонической системы координат, в которой матрица G диагонализуется. Диагональными элементами являются собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, которые находятся из условия

$$\det(G - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (40.69)$$

Раскрыв определитель (40.69), получим кубическое уравнение для определения параметра λ :

$$\lambda^3 - \lambda^2 S + \lambda T - \delta = 0, \quad (40.70)$$

где

$$\delta = \det G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (40.71)$$

$$S = \text{Sp } G = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad (40.72)$$

и если через δ_{ii} , $i = 1, 2, 3$, обозначить алгебраические дополнения матрицы G к элементам a_{ii} , т.е.

$$\delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \delta_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (40.73)$$

то

$$T = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}. \quad (40.74)$$

◆ Уравнение (40.70) называется *характеристическим уравнением* поверхности 2-го порядка.

Оно соответствует аналогичному квадратному характеристическому уравнению (23.18), коэффициенты которого, согласно теореме 23.1, являются ортогональными инвариантами. Коэффициенты уравнения (40.70) также ортогональные инварианты, т.е. они не изменяются при ортогональных преобразованиях системы координат.

Теорема 40.3. *Следующие величины, характеризующие уравнения поверхности второго порядка:*

$$\Delta = \det Q, \quad \delta = \det G, \quad S = \text{Sp } G, \quad T = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}, \quad (40.75)$$

являются ортогональными инвариантами, а величины

$$\Delta' = \Delta_{11} + \Delta_{22} + \Delta_{33}, \quad (40.76)$$

где Δ_{ii} — алгебраические дополнения к элементу a_{ii} в матрице Q , и

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix} \quad (40.77)$$

— ее полуинвариантами (или инвариантами при условии $\Delta = \delta = 0$).

Доказательство для инвариантов аналогично доказательству теоремы 23.1, а для полуинвариантов — теоремы 23.2.

В следствии 40.2 вычислены все инварианты для всех поверхностей 2-го порядка в их канонических системах координат. На основе этих значений получим табл. 5, где приведена классификация поверхностей 2-го порядка по их инвариантам.

Таблица 5

| | | Невырождающиеся поверхности $\Delta \neq 0$ | | Вырождающиеся поверхности $\Delta = 0$ |
|--|---------------------------------|---|----------------------------------|---|
| | | $\Delta < 0$ | $\Delta > 0$ | |
| Центральные поверхности $\delta \neq 0$ | $\delta S > 0$ $T > 0$ | № 1 – эллипсоид | № 2 – мнимый эллипсоид | № 6 – мнимый конус |
| | $\delta S \leq 0$ $T \leq 0$ | № 4 – двуполостный гиперboloид | № 3 – однополостный гиперboloид | № 5 – конус |
| Нецентральные поверхности $\delta = 0$ | | № 7 – эллиптический параболоид | № 8 – гиперболический параболоид | № 9–№ 17 – Цилиндрические и распадающиеся поверхности (табл. 6) |

Чтобы определить, являются ли поверхности, у которых инварианты $\Delta = \delta = 0$, цилиндрическими и распадающимися, требуются полуинварианты (см. табл. 6).

Таблица 6

| | Цилиндрические поверхности $\Delta' \neq 0$ | Распадающиеся поверхности $\Delta' \neq 0$ | |
|---------|---|---|---|
| $T > 0$ | Эллиптические цилиндры | № 11 – две мнимые пересекающиеся плоскости | |
| | № 9 – действительный $\Delta'S < 0$ | | |
| $T > 0$ | № 12 – гиперболический цилиндр | № 13 – две пересекающиеся плоскости | |
| $T = 0$ | № 14 – параболический цилиндр | № 15 – две параллельные плоскости $\Delta'' < 0$ | № 17 – две совпадающие плоскости $\Delta'' = 0$ |
| | | № 16 – две мнимые параллельные плоскости $\Delta'' > 0$ | |

Пример 40.6. Показать, что для всех поверхностей 2-го порядка, за исключением цилиндрических ($\Delta = \delta = 0$), каноническое уравнение имеет вид: для типа I ($\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$) – центральных

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 + \frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = 0; \quad (40.78)$$

для типа II ($\lambda_1 \lambda_2 a_3'' \neq 0, \lambda_3 = 0$) – нецентральных

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 - 2\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}} z'' = 0. \quad (40.79)$$

Решение. Рассмотрим центральную поверхность, для которой

$$\delta = \det G = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta = \det Q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (40.80)$$

В канонической системе координат уравнения типа I имеют вид

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 + a_0'' = 0 \quad (40.81)$$

или в матричной форме

$$(Y'')^T Q'' Y'' = (x'' \ y'' \ z'' \ 1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (40.82)$$

Из (40.81) следует, что в канонической системе координат

$$\det Q'' = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 a_0'' = \Delta = \det Q. \quad (40.83)$$

В силу инвариантности величины Δ из (40.83) найдём

$$a_0'' = \frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Подстановка этого выражения в (40.81) приводит к (40.78), что и требовалось показать.

Рассмотрим теперь уравнения типа II, которые в канонической системе координат имеют вид

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 + 2a_3'' z'' = 0 \quad (40.84)$$

или в матричной форме

$$(Y'')^\top Q'' Y'' = (x'' \ y'' \ z'' \ 1) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_3'' \\ 0 & 0 & a_3'' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (40.85)$$

Из (40.85) следует, что в канонической системе координат

$$\det Q'' = -\lambda_1 \lambda_2 (a_3'')^2 = \Delta = \det Q. \quad (40.86)$$

В силу инвариантности величины Δ из (40.86) найдём

$$a_3'' = \pm \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1 \lambda_2}}.$$

Подстановка этого выражения в (40.84) приводит к (40.79), что и требовалось показать.

Пример 40.7. С помощью инвариантов записать каноническую форму уравнения поверхности из примера 40.2.

Решение. Как следует из примера 40.2, уравнение поверхности задается матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

определитель которой равен $\det Q = -1458 < 0$. Это означает, что данная поверхность является невырождающейся. Вычислим другие инварианты:

$$\delta = \det \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 162 > 0; \quad S = \text{Sp} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 18 > 0;$$

$$T = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 99 > 0.$$

С их помощью можно записать характеристическое уравнение (40.70):

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Это уравнение, естественно, совпадает с уравнением (40.33) для собственных значений матрицы G и, следовательно, имеет те же корни: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = 9$. С учётом этого каноническое уравнение поверхности будет иметь вид (40.78):

$$3(x'')^2 + 6(y'')^2 + 9(z'')^2 - \frac{1458}{3 \cdot 6 \cdot 9} = 0$$

или

$$\frac{(x'')^2}{3} + \frac{(y'')^2}{3/2} + (z'')^2 = 1.$$

Это уравнение определяет трехосный эллипсоид и совпадает с (40.39), полученным в примере 40.2.

◇ Тот факт, что исходное уравнение определяет эллипсоид, следует сразу из табл. 6, поскольку $\Delta = -1458 < 0$ и $T = 99 > 0$ ($\delta S = 2916 > 0$).

Пример 40.8. С помощью инвариантов записать каноническую форму уравнения поверхности из примера 40.3.

Решение. Как следует из примера 40.3, уравнение поверхности задается матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 & -8 \\ -5 & 4 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & -8 & -4 \\ -8 & -8 & -4 & 72 \end{pmatrix},$$

определитель которой равен

$$\begin{aligned} \det Q &= \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 & -8 \\ -5 & 4 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & -8 & -4 \\ -8 & -8 & -4 & 72 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -9 & 2 & -8 \\ -5 & 9 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & -8 & -4 \\ -8 & 0 & -4 & 72 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 & -16 \\ -5 & 9 & 2 & -8 \\ 2 & 0 & -8 & -4 \\ -8 & 0 & -4 & 72 \end{vmatrix} = \\ &= 9 \begin{vmatrix} -1 & 4 & -16 \\ 2 & -8 & -4 \\ -8 & -4 & 72 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} -1 & 4 & -16 \\ 0 & 0 & -36 \\ -8 & -4 & 72 \end{vmatrix} = 9 \cdot 36 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = 9 \cdot 36^2 = 11664 > 0. \end{aligned}$$

Это означает, что данная поверхность является невырождающейся. Вычислим другие инварианты:

$$\begin{aligned} \delta = \det G &= \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -5 & 9 & 2 \\ 2 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 0; \quad S = \text{Sp} \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} = 0; \\ T &= \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = -81 < 0. \end{aligned}$$

С их помощью можно записать характеристическое уравнение (40.70):

$$\lambda^3 - 81\lambda = 0.$$

Это уравнение, естественно, совпадает с уравнением (40.43) для собственных значений матрицы G и, следовательно, имеет те же корни: $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = 0$. С учётом этого каноническое уравнение поверхности будет иметь вид (40.79):

$$9(x'')^2 - 9(y'')^2 - 2\sqrt{-\frac{11664}{9 \cdot (-9)}}z'' = 0$$

или

$$9(x'')^2 - 9(y'')^2 - 24z'' = 0.$$

Это уравнение определяет гиперболический параболоид и совпадает с (40.52), полученным в примере 40.3.

◇ То, что исходное уравнение определяет гиперболический параболоид, следует сразу из табл. 6, поскольку $\Delta = 11664 > 0$ и $\delta = 0$.

Пример 40.9. С помощью инвариантов записать каноническую форму уравнения поверхности из примера 40.4.

Решение. Как следует из примера 40.4, уравнение поверхности задается матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

определитель которой равен

$$\det Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Это означает, что данная поверхность является вырождающейся центральной поверхностью. Вычислим другие инварианты:

$$\delta = \det G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0; \quad S = \text{Sp} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0; \quad T = -1 < 0.$$

С их помощью можно записать характеристическое уравнение (40.70):

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (40.57) для собственных значений матрицы G и, следовательно, имеет те же корни: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. С учётом этого каноническое уравнение поверхности будет иметь вид (40.78):

$$(x'')^2 + (y'')^2 - (z'')^2 = 0.$$

Это уравнение определяет конус и совпадает с (40.62), полученным ранее в примере 40.4.

◇ Что исходное уравнение определяет конус, следует сразу из табл. 6, поскольку $\Delta = 0$ и $T = -1 < 0$ ($\delta S = -1 < 0$).

40.3. Линейчатые поверхности второго порядка

◆ *Линейчатой поверхностью* называется поверхность, которую описывает прямая, называемая *образующей*, при движении по некоторой линии, называемой *направляющей*.

Выше мы уже рассмотрели два вида линейчатых поверхностей: цилиндрические и конические. Существуют и другие способы образования линейчатых поверхностей, но их рассмотрение требует понятий дифференциальной геометрии и выходит за рамки нашего курса.

Интерес к таким поверхностям обусловлен тем, что «кривая» поверхность, представляющая собой совокупность прямых, может быть достаточно просто реализована в технических приложениях. Здесь мы рассмотрим линейчатые поверхности второго порядка. К ним относятся уже рассмотренные цилиндры и конусы 2-го порядка, простейшие примеры применения которых в строительстве и технике приведены на рис. 196.

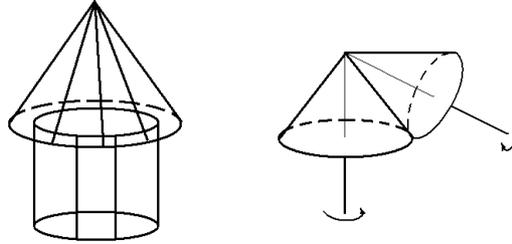


Рис. 196.

Помимо цилиндров и конусов 2-го порядка существуют еще две поверхности 2-го порядка, являющиеся линейчатыми: однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Других линейчатых поверхностей 2-го порядка не существует, в чём мы убедимся ниже. А сейчас рассмотрим однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (40.87)$$

Его уравнение можно записать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{y}{b}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right). \quad (40.88)$$

Отсюда видно, что уравнение (40.88) и, следовательно, уравнение однополостного гиперболоида (40.87) можно представить двумя системами 1-го порядка:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \begin{array}{l} u\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = v\left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = u\left(1 - \frac{y}{b}\right) \end{array} \\ & \text{или} \\ & \begin{array}{l} \frac{u}{a}x - \frac{v}{b}y + \frac{u}{c}z - v = 0, \\ \frac{v}{a}x + \frac{u}{b}y - \frac{v}{c}z - u = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{N}_1 = \left(\frac{u}{a}, -\frac{v}{b}, \frac{u}{c}\right), \\ \vec{N}_2 = \left(\frac{v}{a}, \frac{u}{b}, -\frac{v}{c}\right); \end{array} \\ \text{II.} & \begin{array}{l} u\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = v\left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = u\left(1 + \frac{y}{b}\right) \end{array} \\ & \text{или} \\ & \begin{array}{l} \frac{u}{a}x + \frac{v}{b}y + \frac{u}{c}z - v = 0, \\ \frac{v}{a}x - \frac{u}{b}y - \frac{v}{c}z - u = 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \vec{N}_1 = \left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}, \frac{u}{c}\right), \\ \vec{N}_2 = \left(\frac{v}{a}, -\frac{u}{b}, -\frac{v}{c}\right), \end{array} \end{array}$$

где u, v — произвольные вещественные числа, не обращающиеся в нуль одновременно, т.е. $u^2 + v^2 > 0$.

Обратимся к системе I. Рассматривая здесь каждое уравнение как уравнение плоскости с нормальными \vec{N}_1, \vec{N}_2 , убедимся, что эти плоскости пересекаются. Для этого вычислим вектор

$$\vec{S}_1 = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = i\frac{v^2 - u^2}{bc} + j\frac{2uv}{ac} + k\frac{u^2 + v^2}{ab} \neq 0. \quad (40.89)$$

Поскольку вектор (40.89) ни при каких u, v не обращается в нуль, он является направляющим вектором прямой пересечения l_1 этих плоскостей.

Стало быть, при заданных u, v система I действительно определяет одну прямую. Меняя параметры u, v , мы получим совокупность, или семейство, прямых l_I . В силу (40.88) любая точка $M(x, y, z)$, координаты которой удовлетворяют системе I, лежит на поверхности этого гиперboloида. Следовательно, каждая прямая семейства l_I также целиком лежит на поверхности однополостного гиперboloида. Такие прямые, как уже отмечалось, называются *прямолинейными образующими*.

Проведя аналогичные рассуждения для системы II, убеждаемся, что она порождает еще одно семейство прямолинейных образующих l_{II} с направляющими векторами

$$\vec{S}_{II} = [\vec{N}_1, \vec{N}_2] = -i \frac{v^2 - u^2}{bc} + j \frac{2uv}{ac} - k \frac{u^2 + v^2}{ab} \neq 0. \quad (40.90)$$

Покажем теперь, что через каждую точку гиперboloида (40.87) проходит ровно одна прямая каждого семейства.

Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит гиперboloиду. Тогда, положив в семействе l_I параметры $u = 1 + y_0/b, v = x_0/a + z_0/c$, а в семействе l_{II} $u = 1 - y_0/b, v = x_0/a + z_0/c$, получим две прямые, проходящие через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. В этом нетрудно убедиться, подставив параметры в системы уравнений I и II.

Поскольку одно из чисел $1 - y_0/b$ или $1 + y_0/b$ отлично от нуля, то пара (u, v) определена в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ однозначно (с точностью до множителя) для каждого семейства. Это и означает, что через точку M_0 проходит по одной прямой каждого семейства. Векторы \vec{S}_I (40.89) и \vec{S}_{II} (40.90) однозначно определяют направляющие векторы этих прямых. Поскольку $u^2 + v^2 \neq 0$, образующие не могут быть параллельны плоскости xOy . Следовательно, все прямолинейные образующие пересекают ось Oz , а значит, и горловой эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (рис. 197, а).

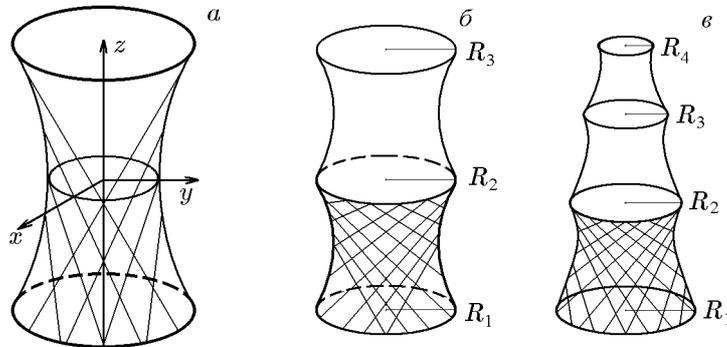


Рис. 197. Горловой эллипс (а), $R_1 = R_2 = R_3 = a = b$ (б), $R_1 > R_2 > R_3 > R_4$ (в)

Рассуждая аналогичным образом, можно убедиться, что две прямые из одного семейства скрещиваются, а из разных — либо пересекаются, либо параллельны.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 40.4. *Однополостный гиперboloид (40.87) имеет два семейства прямолинейных образующих l_I и l_{II} . Через каждую точку проходит ровно одна прямая каждого семейства, и эти прямые пересекаются ровно в одной точке. Две различные прямые из одного семейства скрещиваются, а из разных — пересекаются или параллельны.*

Наличие прямоугольных образующих у однополостного гиперboloида используется в строительной технике. Идея такого использования и практическое

ее осуществление принадлежит известному инженеру В. Г. Шухову. Он создал конструкции мачт, башен и опор, составленных из металлических балок, располагающихся по прямолинейным образующим однополостного гиперboloида вращения ($a = b = R$, рис. 197, б).

Первая такая конструкция была реализована В. Г. Шуховым при сооружении водонапорной башни высотой 26 м в 1896 г. Высокая прочность таких конструкций при их сравнительно небольшом весе позволили в 1922 г. возвести в Москве на Шаболовке радиомачту высотой 148,3 м. Подобные конструкции находят своё применение и в настоящее время, например, в Чехии, Швейцарии и других странах Европы. Но самая высокая из них, высотой 610 м, введена в строй в 2006 г. в г. Гуаньчжоу (Китай).

Обратимся теперь к гиперболическому параболоиду

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, \quad q > 0. \quad (40.91)$$

При помощи рассуждений, аналогичных приведённым выше, можно убедиться, что на его поверхности располагаются два семейства прямолинейных образующих l_I и l_{II} :

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = u, \\ & u \left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2z; \\ \text{II.} \quad & \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = u, \\ & u \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} \right) = 2z, \end{aligned}$$

свойства которых определяются следующей теоремой.

Теорема 40.5. *Гиперболический параболоид (40.91) имеет два семейства прямолинейных образующих l_I и l_{II} , проходящих через каждую его точку. Образующие одного семейства попарно скрещиваются, а разных — пересекаются.*

Конструкции по типу гиперболического параболоида также используются в строительстве в качестве специальных перекрытий.

У остальных поверхностей 2-го порядка: эллипсоида, двуполостного гиперboloида и эллиптического параболоида, образующие отсутствуют. Действительно, эллипсоид не может иметь прямолинейные образующие по причине своей ограниченности. Что касается двуполостного гиперboloида, то его прямолинейная образующая (если она существует) не может пересекать плоскость $z = 0$. Значит, она лежит в плоскости $z = z_0$, но соответствующее плоское сечение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1$$

ограничено (эллипс, точка или пустое множество) и не может содержать прямую. Точно по этой же причине отсутствуют прямолинейные образующие у эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

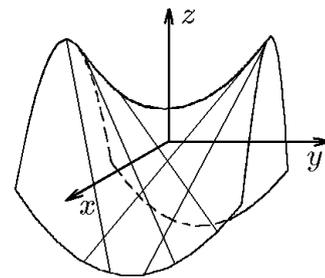


Рис. 198.

Задания для самоконтроля

Теоретические вопросы

1. Скаляры и векторы. Классификация векторов. Линейные операции над векторами
2. Линейные зависимости между векторами. Теоремы о линейной зависимости коллинеарных, компланарных и пространственных векторов. Является ли система из одного нулевого вектора линейно зависимой?
3. Векторная и скалярная проекции вектора на ось и их свойства
4. Базис и компоненты вектора. Аффинный репер и декартова система координат. Линейные операции над векторами в координатной форме
5. Простейшие задачи векторной алгебры. Деление направленного отрезка в данном отношении. Геометрический смысл отрицательного значения отношения
6. Переход от одного базиса к другому
7. Преобразование координат вектора при преобразовании базиса
8. Переход от одной аффинной системы координат к другой
9. Ортогональная матрица и преобразование прямолинейных координат на плоскости
10. Ориентация прямой, плоскости и пространства
11. Непрерывная деформация базиса. Теорема об ориентации непрерывно деформированного базиса
12. Скалярное произведение двух векторов, его свойства и приложения. Возможность деления скаляра на вектор
13. Скалярное произведение векторов в координатной форме. Метрические коэффициенты базиса и матрица Грама. Скалярное произведение векторов в декартовой системе координат
14. Косоугольный базис и косоугольная система координат
15. Метод ортогонализации Грама–Шмидта
16. Преобразование прямоугольных координат в пространстве. Углы Эйлера
17. Ориентированные длина, площадь и объём. Индикаторы линейной зависимости векторов
18. Векторное произведение двух векторов и его приложения. Векторное произведение и непрерывная деформация одного из сомножителей. Возможность деления вектора на вектор
19. Свойства векторного произведения. Векторное произведение векторов ортонормированного базиса
20. Векторное произведение в координатной форме
21. Связь между скалярным и векторным произведениями векторов. Определитель Грама
22. Смешанное произведение векторов, его геометрический смысл и свойства
23. Смешанное произведение векторов в координатной форме и определитель Грама
24. Двойное векторное произведение двух векторов и его свойства
25. Определение основных характеристик треугольника методами векторной алгебры
26. Определение основных характеристик тетраэдра методами векторной алгебры
27. Решение системы векторных уравнений

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= \beta.\end{aligned}$$

28. Решение векторного уравнения

$$\alpha \vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}.$$

29. Разложение заданного вектора по трём некопланарным векторам с помощью их смешанных произведений

30. Некоторые произведения четырёх векторов
31. Векторное произведение векторов в произвольном базисе
32. Векторное уравнение прямой на плоскости и плоскости в пространстве
33. Параметрическое, каноническое и общее уравнение прямой на плоскости. Вектор нормали и направляющий вектор как базис этой плоскости и базис этой прямой
34. Исследование общего уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках
35. Уравнение прямой с угловым коэффициентом; уравнение прямой, проходящей через две точки, в симметричной форме
36. Уравнение прямой в нормальной форме. Пучок прямых
37. Расстояние от точки до прямой. Угол между прямыми, угол от одной прямой до другой
38. Уравнение прямой, составляющей заданный угол с другой прямой. Уравнения биссектрис углов, образованных данными прямыми
39. Кривые на плоскости. Геометрические и аналитические определения. Классификация кривых. Примеры
40. Окружность и эллипс. Геометрические и аналитические определения, канонические уравнения, симметрия, директрисы и эксцентриситет
41. Геометрические и аналитические определения гиперболы. Каноническое уравнение, симметрия, асимптоты, директрисы и эксцентриситет. Сопряжённая гипербола
42. Геометрические и аналитические определения параболы. Каноническое уравнение, симметрия, директрисы и эксцентриситет
43. Директориальные свойства кривых второго порядка
44. Фокальные свойства кривых второго порядка
45. Плоские кривые в полярной системе координат. Уравнение прямой в полярной системе координат
46. Канонические уравнения кривых второго порядка в полярной системе координат, естественно связанной с декартовой
47. Уравнения кривых второго порядка в полярной системе координат, полюс которой совпадает с фокусом кривой
48. Уравнения плоской кривой в параметрической форме. Параметризация канонических уравнений окружности и эллипса
49. Параметризация уравнений гиперболы и параболы
50. Классификация плоских кривых третьего порядка. Примеры
51. Примеры кривых четвёртого порядка. Овалы Декарта и Кассини. Лемнискаты и лемниската Бернулли. Четырёхлепестковая роза
52. Некоторые трансцендентные кривые. Циклоиды, укороченная и удлинённая циклоиды
53. Гипоциклоиды и эпициклоиды и их частные случаи
54. Спирали и их частные случаи
55. Матричная форма уравнений кривых второго порядка
56. Инварианты уравнения кривой второго порядка
57. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью инвариантов
58. Приведение кривой второго порядка к главным осям с помощью собственных векторов квадратичной формы
59. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью нахождения канонической системы координат
60. Параметрические и общие уравнения плоскости в пространстве. Нормаль и направляющие векторы плоскости как базис этого пространства. Трёхмерная пара направляющих векторов как базис самой плоскости в пространстве
61. Исследование общего уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках
62. Уравнение плоскости, проходящей через три данных точки, в симметричной форме и нормальное уравнение плоскости

63. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве. Угол между плоскостями
64. Взаимное расположение трёх плоскостей в пространстве
65. Пучок и связка плоскостей, их применение при решении задач, примеры
66. Параметрические и канонические уравнения прямой в пространстве. Прямая как линия пересечения плоскостей — общие уравнения прямой в пространстве. Переходы между различными видами уравнений
67. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве, взаимное расположение двух прямых в пространстве.
68. Расстояние от точки до плоскости и от точки до прямой в пространстве. Расстояние между параллельными плоскостями и скрещивающимися прямыми
69. Ортогональная проекция точки на прямую и плоскость, проекция прямой на плоскость
70. Поверхности и кривые в пространстве, их классификация. Основные задачи на поверхности и кривые в пространстве. Параметрическое задание и метод сечений
71. Поверхности второго порядка. Основная теорема о поверхностях второго порядка
72. Эллипсоиды: симметрия, формы плоских сечений, наличие прямолинейных образующих
73. Двуполостный гиперболоид: симметрия, формы плоских сечений, наличие прямолинейных образующих
74. Однополостный гиперболоид: симметрия, формы плоских сечений, наличие прямолинейных образующих
75. Конусы второго порядка: однородность уравнения, симметрия, формы плоских сечений, направляющие и образующие
76. Эллиптический параболоид: симметрия, формы плоских сечений, наличие прямолинейных образующих
77. Гиперболический параболоид: симметрия, формы плоских сечений, наличие прямолинейных образующих
78. Цилиндры второго порядка. Образующая и направляющая цилиндра. Классификация плоских сечений
79. Классификация поверхностей по типу их симметрии. Цилиндрические поверхности: общее уравнение
80. Конические поверхности: общее уравнение и сечения кругового конуса
81. Поверхности вращения и линейчатые поверхности
82. Матричная форма уравнений поверхностей второго порядка. Инварианты уравнения
83. Классификация поверхностей второго порядка по их инвариантам
84. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду с помощью инвариантов
85. Приведение поверхности второго порядка к главным осям с помощью собственных векторов квадратичной формы

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -1/2$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

1.2. Решить задачу 1.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(4, -1)$, $B(-2, 1)$, $C(0, -5)$.

1.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 6\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 0,5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

1.4. Решить задачу 1.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(4, -1, 3)$, $B(-2, 1, 0)$, $C(0, -5, 1)$.

1.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1, 1, 4)$, $\vec{b} = (-3, 0, 2)$, $\vec{c} = (1, 2, -1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (-13, 2, 18)$ в этом базисе.

1.6. Решить векторное уравнение

$$2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 1.5.

1.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 2, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 1.5 и $\vec{b} = (2, 2, -1)$.

1.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 2$, $DB = 3$, $DC = 4$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/4$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

1.9. Решить задачу 1.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(3, 2, -6)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 1.4.

1.10. Для треугольника ABC из задачи 1.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

1.11. Для пирамиды из задачи 1.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярной плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

1.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$;
- б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
- в) $y = 9 - 2\sqrt{x^2 + 4x + 8}$;
- г) $y = 4 - x^2$;
- д) $y^2 - 4y - 20x + 24 = 0$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

1.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
- б) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

1.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{4}{\cos(\varphi - \pi/4)}$;
- б) $\rho^2 = \frac{9}{9 - \cos^2 \varphi}$;
- в) $\rho = 3\varphi$;
- г) $x = 1 + \cos t, y = 1 + \sin t$.

1.15. Рассматривая кривую б) из примера 1.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(1, -2, 1)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(1, -2, 1)$.

Изобразить их.

1.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $y = 2x^2 - 1, y = 1, z = x^2 - 5y^2 - 3, z = x^2 - 5y^2 - 6$;
- б) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = x^2 + y^2$.

1.17. Для поверхности второго порядка

$$7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 2

2.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 1/3$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -3$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

2.2. Решить задачу 2.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(1, -1)$, $B(2, 1)$, $C(1, 1)$.

2.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 3\vec{a} + \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

2.4. Решить задачу 2.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 2)$, $C(1, 1, 4)$.

2.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (5, 1, 0)$, $\vec{b} = (2, -1, 3)$, $\vec{c} = (1, 0, -1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (13, 2, 7)$ в этом базисе.

2.6. Решить векторное уравнение

$$\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 2.5.

2.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 3, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 2.5 и $\vec{b} = (-1, 5, 3)$.

2.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 3$, $DB = 4$, $DC = 5$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/3$, $\angle BDC = \pi/4$, $\angle CDA = \pi/6$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между ребрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

2.9. Решить задачу 2.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(6, -3, 8)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 2.4.

2.10. Для треугольника ABC из задачи 2.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

2.11. Для пирамиды из задачи 2.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

2.12. Кривые второго порядка

- а) $y = 3 + \sqrt{9 - x^2}$;
- б) $2x^2 + 4x + y^2 - 4 = 0$;
- в) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$;
- г) $x^2 + 16x - 18y + 100 = 0$;
- д) $y^2 - 10y - 10x + 5 = 0$

- а) построить в канонической системе координат;
- б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

2.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$;
- б) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$.

2.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}$;
- б) $\rho^2 = \frac{9}{4 \cos^2 \varphi - 1}$;
- в) $\rho = \frac{2}{\varphi}$;
- г) $x = 1 + \operatorname{ch} t, y = 1 + \operatorname{sh} t$.

2.15. Рассматривая кривую б) из примера 2.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

- а) конуса с вершиной в точке $M_0(1, 2, 1)$;
- б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(1, 2, 1)$.

Изобразить их.

2.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0, x = \pm 1, y = \pm 1$;
- б) $y = 5x^2 - 1, y = -3x^2 + 1, z = -2 + \sqrt{3x^2 + y^2}, z = \sqrt{3x^2 + y^2} - 5$.

2.17. Для поверхности второго порядка

$$2x^2 - 7y^2 - 4z^2 + 4xy + 20yz - 16zx + 60x - 12y + 12z - 90 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 3

3.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 0,5$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 3$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

3.2. Решить задачу 3.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(3, 10)$, $B(-2, 3)$, $C(-6, 0)$.

3.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{a} + 4\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}\vec{b}) = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

3.4. Решить задачу 3.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(3, 10, -1)$, $B(-2, 3, -5)$, $C(-6, 0, 3)$.

3.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (0, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (-1, 2, 4)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (-2, 4, 7)$ в этом базисе.

3.6. Решить векторное уравнение

$$-2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 3.5.

3.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 4, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 3.5 и $\vec{b} = 2, -2, 1$.

3.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 3$, $DB = 4$, $DC = 2$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/3$, $\angle BDC = \pi/4$, $\angle CDA = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

3.9. Решить задачу 3.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-1, -1, 2)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 3.4.

3.10. Для треугольника ABC из задачи 3.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

3.11. Для пирамиды из задачи 3.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

3.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$;
- б) $3x^2 - 6x + 2y^2 + 4y = 0$;
- в) $x^2 - y^2 + 6x + 4y - 4 = 0$;
- г) $x^2 - 4x - 16y + 68 = 0$;
- д) $y = 3 + 4\sqrt{x+1}$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

3.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $x^2 - 8xy + 7y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$;
- б) $8x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x - 10y - 319 = 0$.

3.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{2}{\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi}$;
- б) $\rho = 4 \cos \varphi$;
- в) $\rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$;
- г) $x = 2 \cos t, y = 3 \sin t$.

3.15. Рассматривая кривую б) из примера 2.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(-1, 2, -1)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(-1, 2, -1)$.

Изобразить их.

3.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $y = -2x^2 + 7, y = 5, z = 1 - 2x^2 + 3y^2, 2x^2 - 3y^2 = 4 - z$;
- б) $x = 5 - 2y^2, x = 3, z = 5 - \sqrt{x^2 + 25y^2}, \sqrt{x^2 + 25y^2} = 2 - z$.

3.17. Для поверхности второго порядка

$$2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 4y - 4z + 2 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 4

4.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -2$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

4.2. Решить задачу 4.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(1, 3)$, $B(2, 2)$, $C(-1, 0)$.

4.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 2\vec{a} - \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 3\pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

4.4. Решить задачу 4.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(1, 3, 6)$, $B(2, 2, 1)$, $C(-1, 0, 1)$.

4.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (0, 2, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$, $\vec{c} = (5, -3, 2)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (-15, -20, -1)$ в этом базисе.

4.6. Решить векторное уравнение

$$-2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 4.5.

4.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -2, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 4.5 и $\vec{b} = (1, 1, -1)$.

4.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 2$, $DB = 3$, $DC = 5$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/2$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

4.9. Решить задачу 4.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-4, 6, -3)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 4.4.

4.10. Для треугольника ABC из задачи 4.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

4.11. Для пирамиды из задачи 4.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

4.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$;
- б) $6x^2 + 4y^2 - 6y + 9 = 0$;
- в) $4x^2 - 25y^2 + 50y - 24x + 89 = 0$;
- г) $x^2 - 6y + 9 = 0$;
- д) $y = 3 + 2\sqrt{1 - x}$

- а) построить в канонической системе координат;
- б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

4.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;
- б) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$

4.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{1}{\sin \varphi}$;
- б) $\rho = 4 \sin \varphi$;
- в) $\rho = 2e^\varphi$;
- г) $x = 2 \operatorname{ch} t, y = 3 \operatorname{sh} t$.

4.15. Рассматривая кривую б) из примера 4.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

- а) конуса с вершиной в точке $M_0(2, 3, -1)$;
- б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(2, 3, -1)$.

Изобразить их.

4.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z - 10 = -x^2 - y^2$;
- б) $y = 3 - 5x^2, y = -2, z = 2x^2 - 3y + 6y^2 - 1, z - 2x^2 - 2 = -3(y - 2y^2)$.

4.17. Для поверхности второго порядка

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8zx - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 5

5.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 0,25$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

5.2. Решить задачу 5.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(5, 2)$, $B(2, 5)$, $C(1, 2)$.

5.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 6\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 5\vec{a} + \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 0,5$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 5\pi/6$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

5.4. Решить задачу 5.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(5, 2, 0)$, $B(2, 5, 0)$, $C(1, 2, 4)$.

5.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$, $\vec{c} = (4, 2, 1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (3, 1, 3)$ в этом базисе.

5.6. Решить векторное уравнение

$$3\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 5.5.

5.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -3, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 5.5 и $\vec{b} = 1, -2, 1$.

5.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 2$, $DB = 4$, $DC = 5$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/2$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

5.9. Решить задачу 5.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-1, 1, 1)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 5.4.

5.10. Для треугольника ABC из задачи 5.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

5.11. Для пирамиды из задачи 5.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

5.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 - 10x + y^2 + 6y + 9 = 0$;
- б) $x^2 + 2y^2 + 2x - 8y + 5 = 0$;
- в) $3x^2 - 4y^2 - 12x + 24 = 0$;
- г) $x^2 - 2x - y - 8 = 0$;
- д) $y = -5 + \sqrt{-3x - 21}$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

5.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$;
- б) $x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x + 4 = 0$.

5.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{4}{\cos \varphi - \sqrt{3} \sin \varphi}$;
- б) $\rho = 2 \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin \varphi}$;
- в) $\rho = -3\varphi$;
- г) $x = 4 \operatorname{ctg}^2 t$, $y = 4 \operatorname{ctg} t$.

5.15. Рассматривая кривую б) из примера 5.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(2, 1, 2)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(2, 1, 2)$.

Изобразить их.

5.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $y = x^2 - 2$, $y + 4x^2 = 3$, $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}$, $z + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- б) $z = 4 - 6[(x - 1)^2 + y^2]$, $z = 12x - 8$.

5.17. Для поверхности второго порядка

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz + 2yz + 2x - 10y - 2z - 1 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 6

6.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -3$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 0,25$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

6.2. Решить задачу 6.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(2, -2)$.

6.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - 2\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

6.4. Решить задачу 6.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(1, 1, 2)$, $B(-1, 1, 3)$, $C(2, -2, 4)$.

6.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (3, 0, 2)$, $\vec{c} = (-1, 1, 1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (8, 1, 12)$ в этом базисе.

6.6. Решить векторное уравнение

$$-3\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 6.5.

6.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -4, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 6.5 и $\vec{b} = (3, 0, 3)$.

6.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 3$, $DB = 2$, $DC = 5$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = 2\pi/3$, $\angle BDC = \pi/2$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

6.9. Решить задачу 6.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-1, 0, -2)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 6.4.

6.10. Для треугольника ABC из задачи 6.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

6.11. Для пирамиды из задачи 6.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

6.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 4x + 5y + 4 = 0$;
- б) $9x^2 + 4y^2 + 18y + 8x = 0$;
- в) $y = 6 - \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 13}$;
- г) $4y = 12x - 3x^2$;
- д) $x = 2y^2 - 4y + 3$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

6.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
- б) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 230x + 110y - 475 = 0$.

6.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{7}{\cos(\varphi - 5\pi/6)}$;
- б) $\rho = \frac{2 \cos \varphi}{1 - 4 \cos^2 \varphi}$;
- в) $\rho = e^{-2\varphi}$;
- г) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$.

6.15. Рассматривая кривую б) из примера 6.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(4, 2, -1)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(4, 2, -1)$.

Изобразить их.

6.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $z = x^2, z = 0, x + y = 6, y = 2x$;
- б) $y = 6x^2 - 1, y = 5, z + y^2 = 2x^2 + x, z - 4 = x - y^2 + 2x^2$.

6.17. Для поверхности второго порядка

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 2yz - 10xz + 2x + 6y + 2z = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 7

7.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 2$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -1/3$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

7.2. Решить задачу 7.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(-2, 0)$, $B(-1, 7)$, $C(4, -8)$.

7.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 3\vec{a} - \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/63$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

7.4. Решить задачу 7.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(-2, 0, -4)$, $B(-1, 7, 1)$, $C(4, -8, -4)$.

7.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1, -2, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1, 3)$, $\vec{c} = (1, 0, 4)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (6, -1, 7)$ в этом базисе.

7.6. Решить векторное уравнение

$$2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 7.5.

7.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 5, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 7.5 и $\vec{b} = (2, 1, 3)$.

7.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 4$, $DB = 3$, $DC = 6$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/6$, $\angle BDC = \pi/6$, $\angle CDA = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

7.9. Решить задачу 7.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(1, -4, 6)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 7.4.

7.10. Для треугольника ABC из задачи 7.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

7.11. Для пирамиды из задачи 7.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярной плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

7.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + x = 0$;
- б) $2x^2 + 2y^2 + 3x - 4y - 10 = 0$;
- в) $y = 7 + \frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 6x + 2}$;
- г) $x^2 - 2y + 4x + 2 = 0$;
- д) $x + y^2 - 2y - 1 = 0$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

7.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}x + 6 = 0$;
- б) $3x^2 - 8xy - 3y^2 - 6\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y + 1 = 0$.

7.14. Построить кривую

- а) $\rho^2 = \frac{4}{4 - \cos^2 \varphi}$;
- б) $\rho = \frac{3}{\sin(\varphi - 3\pi/4)}$;
- в) $\rho = -\frac{3}{\varphi}$;
- г) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$.

7.15. Рассматривая кривую б) из примера 7.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(-1, 2, -1)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(-1, 2, -1)$.

Изобразить их.

7.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $x = 4y^2 + 2, x = 6, z - 1 - y = x^2 + 4y^2, z - 4 - x^2 = y(4y + 1)$;
- б) $x^2 + y^2 = 1, z = 0, x + y + z = 2$.

7.17. Для поверхности второго порядка

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy + 4yz - 10zx + 2x + 4y - 10z - 1 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 8

8.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 3$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

8.2. Решить задачу 8.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(1, 1)$, $B(2, 3)$, $C(3, 2)$.

8.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + 5\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 0,5$, $(\vec{a}\vec{b}) = 5\pi/6$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

8.4. Решить задачу 8.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(1, 1, -1)$, $B(2, 3, 1)$, $C(3, 2, 1)$.

8.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (0, 5, 1)$, $\vec{b} = (3, 2, -1)$, $\vec{c} = (-1, 1, 0)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (-15, 5, 6)$ в этом базисе.

8.6. Решить векторное уравнение

$$-\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 8.5.

8.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -5, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 8.5 и $\vec{b} = (1, 1, -5)$.

8.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 4$, $DB = 6$, $DC = 2$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/4$, $\angle BDC = \pi/6$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

8.9. Решить задачу 8.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(5, 9, -8)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 8.4.

8.10. Для треугольника ABC из задачи 8.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

8.11. Для пирамиды из задачи 8.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

8.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + y = 0$;
- б) $4x^2 + 8x + 5y^2 + 10y + 1 = 0$;
- в) $x = 9 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$;
- г) $y = -x^2 + 2x - 4$;
- д) $4x + y^2 - 4y = 0$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

8.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $4x^2 - 8xy + 4y^2 - 15\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 6 = 0$;
- б) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 10\sqrt{5}x - 4\sqrt{5}y - 11 = 0$.

8.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{4 \cos \varphi}{4 - \cos^2 \varphi}$;
- б) $\rho = \frac{1}{\cos(\varphi + \pi/4)}$;
- в) $\rho = \sin 2\varphi$;
- г) $x = \frac{t^2}{1 + t^2}, y = \frac{t^3}{1 + t^2}$.

8.15. Рассматривая кривую б) из примера 8.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(1, 5, 3)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(1, 5, 3)$.

Изобразить их.

8.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0, x = \pm 1, y = \pm 1$;
- б) $y + 3 = 2x^2, y + 7x^2 = 6, 1 - z = 5x^2 + 6y^2, z + 3 + 5x^2 = -6y^2$.

8.17. Для поверхности второго порядка

$$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 9

9.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 2$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

9.2. Решить задачу 9.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(2, 1)$, $B(-1, 5)$, $C(-7, -3)$.

9.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 4\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

9.4. Решить задачу 9.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(2, 1, 4)$, $B(-1, 5, -2)$, $C(-7, -3, 2)$.

9.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (0, 3, 2)$, $\vec{c} = (1, -1, 1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (1, -4, 1)$ в этом базисе.

9.6. Решить векторное уравнение

$$\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 9.5.

9.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 2, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 9.5 и $\vec{b} = (0, 3, 3)$.

9.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 3$, $DB = 3$, $DC = 5$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/4$, $\angle BDC = \pi/4$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

9.9. Решить задачу 9.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-6, -3, 6)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 9.4.

9.10. Для треугольника ABC из задачи 9.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

9.11. Для пирамиды из задачи 9.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

9.12. Кривые второго порядка

- а) $y = 3 - \sqrt{16 - x^2}$;
- б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;
- в) $3x^2 - 4y^2 + 16y - 36 = 0$;
- г) $x^2 = 4 + 2y$;
- д) $y^2 - 2y + 4x + 2 = 0$

- а) построить в канонической системе координат;
- б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

9.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $7y^2 + 24xy + 24x + 62y + 199 = 0$;
- б) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 16x + 8y - 16 = 0$.

9.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{1}{\cos \varphi} + 2$;
- б) $\rho = \frac{9}{\sin \varphi - \cos \varphi}$;
- в) $\rho = \frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi$;
- г) $x = \frac{1}{1+t^2}, y = t$.

9.15. Рассматривая кривую б) из примера 9.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

- а) конуса с вершиной в точке $M_0(7, 2, 7)$;
- б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(7, 2, 7)$.

Изобразить их.

9.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $y = x^2 - 5, y = 3 - x^2, z - 4 = \sqrt{5x^2 + 3y^2}, z = \sqrt{5x^2 + 8y^2} + 1$;
- б) $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 1, y = x, y = 2x$.

9.17. Для поверхности второго порядка

$$2x^2 + 5y^2 + 11z^2 - 20xy - 8xz + 16yz - 24x - 6y - 6z - 18 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 10

10.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 3$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -0,2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

10.2. Решить задачу 10.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(1, 5,)$, $B(-3, 6)$, $C(-2, 7)$.

10.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{a} + 3\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 3\vec{a} - \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

10.4. Решить задачу 10.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(1, 5, -7)$, $B(-3, 6, 3)$, $C(-2, 7, 3)$.

10.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (0, -2, 1)$, $\vec{b} = (3, 1, -1)$, $\vec{c} = (4, 0, 1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (0, -8, 9)$ в этом базисе.

10.6. Решить векторное уравнение

$$-2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 10.4.

10.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 3, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 10.5 и $\vec{b} = (3, 1, 2)$.

10.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 4$, $DB = 2$, $DC = 4$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/3$, $\angle BDC = \pi/4$, $\angle CDA = \pi/2$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

10.9. Решить задачу 10.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-4, 8, -12)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 10.4.

10.10. Для треугольника ABC из задачи 10.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

10.11. Для пирамиды из задачи 10.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

10.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$;
- б) $2x^2 + 4x + y^2 - 4y = 0$;
- в) $2x^2 - 2y^2 + 2x = 0$;
- г) $y = 2x^2 - 12x + 4$;
- д) $y = 7 - \sqrt{6 - 2x}$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

10.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x - 110y + 150 = 0$;
- б) $9x^2 + 21xy + 16y^2 - 8\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y + 15 = 0$.

10.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{2}{\cos \varphi} + 1$;
- б) $\rho = \frac{4}{\sqrt{3} \sin \varphi - \cos \varphi}$;
- в) $\rho = 1 + \frac{1}{\varphi}$;
- г) $\begin{cases} x = \frac{6 \cos t}{\sqrt{4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}}, \\ y = \frac{6 \sin t}{\sqrt{4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}}. \end{cases}$

10.15. Рассматривая кривую б) из примера 10.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(3, 4, 5)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(4, 4, 5)$.

Изобразить их.

10.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $9z^2 = 2x^2 + 2y^2$;
- б) $3z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

10.17. Для поверхности второго порядка

$$x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 12xy - 8xz - 4yz + 14x + 16y - 12z + 33 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 11

11.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 1,2$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -1,5$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

11.2. Решить задачу 11.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(-2, -1)$, $B(0, 3)$, $C(3, 1)$.

11.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 4\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

11.4. Решить задачу 11.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(-2, -1, -1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(3, 1, -4)$.

11.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 0)$, $\vec{c} = (4, 1, 2)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (8, 0, 5)$ в этом базисе.

11.6. Решить векторное уравнение

$$2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 11.5.

11.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 4, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 11.5 и $\vec{b} = (1, 1, -2)$.

11.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 5$, $DB = 3$, $DC = 4$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/3$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = \pi/2$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

11.9. Решить задачу 11.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-4, 7, 3)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 11.4.

11.10. Для треугольника ABC из задачи 11.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

11.11. Для пирамиды из задачи 11.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

11.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 2x - 7y - 4 = 0$;
- б) $2x^2 + 4x + y^2 - 4 = 0$;
- в) $16y^2 - 9x^2 - 32y - 72x - 272 = 0$;
- г) $4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0$;
- д) $y = 4 - 2\sqrt{6 + 2x}$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

11.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x + 10y - 50 = 0$;
- б) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 9 = 0$.

11.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{1}{\cos \varphi} + 1$;
- б) $\rho = \frac{4}{\sin \varphi}$;
- в) $\rho = 1 - \frac{1}{\varphi}$;
- г) $\begin{cases} x = \frac{6 \cos t}{\sqrt{4 \sin^2 t - 9 \cos^2 t}}, \\ y = \frac{6 \sin t}{\sqrt{4 \sin^2 t - 9 \cos^2 t}}. \end{cases}$

11.15. Рассматривая кривую б) из примера 11.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(-3, -2, -1)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(-3, -2, -1)$.

Изобразить их.

11.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + y + z = 6$, $z = 0$;
- б) $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $9z = x^2 + y^2$.

11.17. Для поверхности второго порядка

$$3x^2 - 2y^2 - z^2 + 4xy + 8xz - 12yz + 18x - 12y - 6z = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 12

12.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 1,5$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

12.2. Решить задачу 12.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(1, -1)$, $B(-2, 0)$, $C(2, 1)$.

12.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 7\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - 3\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 3\pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

12.4. Решить задачу 12.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(1, -1, 1)$, $B(-2, 0, 3)$, $C(2, 1, -1)$.

12.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (3, 1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 2, 1)$, $\vec{c} = (-1, 0, 2)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (3, 3, -1)$ в этом базисе.

12.6. Решить векторное уравнение

$$3\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 12.5.

12.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 5, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 12.5 и $\vec{b} = (-1, 3, 1)$.

12.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 3$, $DB = 2$, $DC = 4$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/2$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = 2\pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

12.9. Решить задачу 12.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(2, -2, -4)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 12.4.

12.10. Для треугольника ABC из задачи 12.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

12.11. Для пирамиды из задачи 12.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярной плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

12.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 3x = 0$;
- б) $2x^2 - 4x + y^2 - 10y + 15 = 0$;
- в) $y = 6 - \sqrt{x^2 + 6x + 13}$;
- г) $x^2 - 2y + 4x = 0$;
- д) $x = -y^2 + 7y + 1$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

12.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$;
- б) $3x^2 - 10xy + 3y^2 - 12x - 12y + 4 = 0$.

12.14. Построить кривую

- а) $\rho = \cos \varphi + 2$;
- б) $\rho = \frac{\sqrt{2}}{\cos \varphi + \sin \varphi}$;
- в) $\rho = 1 + e^{3\varphi}$;
- г) $x = 2\left(t - \frac{1}{4} \sin t\right)$, $y = 2\left(1 - \frac{1}{4} \cos t\right)$.

12.15. Рассматривая кривую б) из примера 12.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(1, 2, 7)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(1, 2, 7)$.

Изобразить их.

12.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $z = 2 - 12(x^2 + y^2)$, $z = 24x + 2$;
- б) $z = 4 - y^2$, $z = 0$, $2y = x^2$.

12.17. Для поверхности второго порядка

$$4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz - 10x + 4y + 6 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 13

13.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -1,4$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

13.2. Решить задачу 13.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(-3, -5)$, $B(2, 1)$, $C(0, -3)$.

13.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} - 2\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

13.4. Решить задачу 13.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(-3, -5, 6)$, $B(2, 1, -4)$, $C(0, -3, -1)$.

13.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (0, 3, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, $\vec{c} = (2, -1, 0)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (-1, 7, 0)$ в этом базисе.

13.6. Решить векторное уравнение

$$-3\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 13.5.

13.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 6, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 13.5 и $\vec{b} = (1, -1, 3)$.

13.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 5$, $DB = 2$, $DC = 3$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/6$, $\angle BDC = \pi/4$, $\angle CDA = \pi/6$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

13.9. Решить задачу 13.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-5, 2, -8)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 13.4.

13.10. Для треугольника ABC из задачи 13.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

13.11. Для пирамиды из задачи 13.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

13.12. Кривые второго порядка

а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$;

б) $9x^2 + 4y^2 + 30x - 12y - 2 = 0$;

в) $x = -1 + \frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 4y + 5}$;

г) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$;

д) $x = -2y^2 + 4y + 3$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

13.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

а) $x^2 - 6xy + y^2 + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y + 4 = 0$;

б) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y - 10 = 0$.

13.14. Построить кривую

а) $\rho = 2 \cos \varphi + 1$; б) $\rho = \frac{2}{\sin(\varphi + 5\pi/4)}$;

в) $\rho = \sin \frac{\varphi}{2}$; г) $x = 2\left(t - \frac{5}{4} \sin t\right)$, $y = 2\left(1 - \frac{5}{4} \cos t\right)$.

13.15. Рассматривая кривую б) из примера 13.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(5, -5, 5)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(5, -5, 5)$.

Изобразить их.

13.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + x^2 = 16$, $z = x^2 + y^2$;

б) $z = 2 - 4[(x - 1)^2 + y^2]$, $z = 8x - 6$.

13.17. Для поверхности второго порядка

$$y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 14

14.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 4$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -1/2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

14.2. Решить задачу 14.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(1, 2)$, $B(3, 0)$, $C(5, 2)$.

14.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 6\vec{a} - \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 0,5$, $|\vec{b}| = 8$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

14.4. Решить задачу 14.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$, $C(5, 2, 6)$.

14.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (4, 1, 1)$, $\vec{b} = (2, 0, -3)$, $\vec{c} = (-1, 2, 1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (-9, 5, 5)$ в этом базисе.

14.6. Решить векторное уравнение

$$2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 14.5.

14.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 7, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 14.5 и $\vec{b} = (2, 0, -8)$.

14.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 5$, $DB = 2$, $DC = 4$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/6$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

14.9. Решить задачу 14.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(8, 4, -9)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 14.4.

14.10. Для треугольника ABC из задачи 14.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

14.11. Для пирамиды из задачи 14.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

14.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 - 6x + 2 = 0$;
- б) $2x^2 + 5y^2 - 12x + 10y + 13 = 0$;
- в) $x = 7 - 2\sqrt{y^2 - 6y + 13}$;
- г) $y + 2x^2 - 4x - 3 = 0$;
- д) $y^2 + 2y - 4x + 9 = 0$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

14.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 12x - 6y + 3 = 0$;
- б) $8x^2 + 8xy + 2y^2 + 10\sqrt{5}x = 0$.

14.14. Построить кривую

- а) $\rho = 2(\cos \varphi + 1)$;
- б) $\rho = 4 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$;
- в) $\rho = \sin \frac{\varphi}{3}$;
- г) $x = 2 \sin^3 t, y = 3 \cos^3 t$.

14.15. Рассматривая кривую б) из примера 14.12 как направляющую, записать для неё уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(7, 6, 5)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(7, 6, 5)$.

Изобразить их.

14.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 8x + 2$;
- б) $z = 2 - x^2 - y^2, z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

14.17. Для поверхности второго порядка

$$4x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xz - 4yz + 8x - 4y + 8z = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 15

15.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -1/2$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 4$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

15.2. Решить задачу 15.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(2, 1)$.

15.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 3\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

15.4. Решить задачу 15.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(1, 1, 4)$, $B(1, -1, 2)$, $C(2, 1, 2)$.

15.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (0, 1, 3)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$, $\vec{c} = (2, 0, -1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (3, 1, 8)$ в этом базисе.

15.6. Решить векторное уравнение

$$\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 15.5.

15.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 8, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 15.5 и $\vec{b} = (1, 3, -1)$.

15.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 4$, $DB = 3$, $DC = 2$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/4$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между ребрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

15.9. Решить задачу 15.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(6, -3, 8)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 15.4.

15.10. Для треугольника ABC из задачи 15.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

15.11. Для пирамиды из задачи 15.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

15.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 - 5y + 6 = 0$;
- б) $4x^2 + 8x + 5y^2 + 10y = 0$;
- в) $y = 2x^2 - 12x - 9$;
- г) $4x^2 - y^2 - 8x - 6y - 4 = 0$;
- д) $y = 2 - \sqrt{3x - 7}$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

15.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 6x - 8y + 2 = 0$;
- б) $7x^2 - 7y^2 + 48xy + 30x - 40y - 50 = 0$.

15.14. Построить кривую

- а) $\rho^2 = 8 \cos 2\varphi$;
- б) $\rho = \sin(\varphi + \pi/3)$;
- в) $\rho = -2 + \varphi$;
- г) $x = 2 \cos^3 t, y = \sin^3 t$.

15.15. Рассматривая кривую б) из примера 15.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(-2, 2, -3)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(-2, 2, -3)$.

Изобразить их.

15.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $y + 3 = 2x^2, y + 7x^2 = 6, 1 - z = 5x^2 + 6y^2, z + 3 + 5x^2 = -6y^2$;
- б) $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z - 10 = -x^2 - y^2$.

15.17. Для поверхности второго порядка

$$y^2 - z^2 + 4xy - 4xz - 3 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 16

16.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -1,4$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 1/2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

16.2. Решить задачу 16.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(-6, 0)$, $B(3, 10)$, $C(-2, 3)$.

16.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + 4\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

16.4. Решить задачу 16.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(-6, 0, -3)$, $B(3, 10, -1)$, $C(-2, 3, -5)$.

16.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (-1, 2, 4)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (-2, 4, 7)$ в этом базисе.

16.6. Решить векторное уравнение

$$-\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 16.5.

16.7. Решить систему векторных уравнений

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

$$\vec{c} \cdot \vec{x} = 9,$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 16.5 и $\vec{b} = (0, -4, 2)$.

16.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 6$, $DB = 4$, $DC = 3$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/4$, $\angle BDC = \pi/2$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

16.9. Решить задачу 16.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(1, -1, 2)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 16.4.

16.10. Для треугольника ABC из задачи 16.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

16.11. Для пирамиды из задачи 16.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

16.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 - 26x + 30y + 313 = 0$;
- б) $x^2 + 4y^2 - 6x + 8y - 3 = 0$;
- в) $y = 5 - \frac{3}{4}\sqrt{x^2 + 4x - 12}$;
- г) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 6x - 19$;
- д) $4y^2 - 8y - 21x - 1 = 0$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

16.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $23x^2 - 16xy - 7y^2 - 225 = 0$;
- б) $x^2 - 2xy + y^2 - 4\sqrt{2}y + 6 = 0$.

16.14. Построить кривую

- а) $\rho^2 = \frac{9}{9 - \cos^2 \varphi}$;
- б) $\rho = \frac{2}{\varphi}$;
- в) $\rho = \frac{1}{\sin \varphi}$;
- г) $\begin{cases} x = \frac{6 \cos t}{\sqrt{4 \sin^2 t - 9 \cos^2 t}}, \\ y = \frac{6 \sin t}{\sqrt{4 \sin^2 t - 9 \cos^2 t}}. \end{cases}$

16.15. Рассматривая кривую б) из примера 16.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(5, 3, 1)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(5, 3, 1)$.

Изобразить их.

16.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $x = 5 - 2y^2$, $x = 3$, $z = 5 - \sqrt{x^2 + 25y^2}$, $\sqrt{x^2 + 25y^2} = 2 - z$;
- б) $y = x^2 - 5$, $y = 3 - x^2$, $z - 4 = \sqrt{5x^2 + 8y^2}$, $z = -\sqrt{5x^2 + 8y^2} + 1$.

16.17. Для поверхности второго порядка

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 8xz - 4yz - 12x - 12y + 6z = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 17

17.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 3$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -1/3$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

17.2. Решить задачу 17.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(-1, 0)$, $B(1, 3)$, $C(2, 2)$.

17.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 3\pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

17.4. Решить задачу 17.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(-1, 0, 1)$, $B(1, 3, 6)$, $C(2, 2, 1)$.

17.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (5, -3, 2)$, $\vec{b} = (0, 2, 1)$, $\vec{c} = (0, 1, -1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (15, -20, -1)$ в этом базисе.

17.6. Решить векторное уравнение

$$-2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 17.5.

17.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= 10, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 17.5 и $\vec{b} = (0, 2, 3)$.

17.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 2$, $DB = 4$, $DC = 6$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/3$, $\angle BDC = \pi/2$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

17.9. Решить задачу 17.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-4, 6, -3)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 17.4.

17.10. Для треугольника ABC из задачи 17.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

17.11. Для пирамиды из задачи 17.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

17.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$;
- б) $9x^2 - 36x + 16y^2 = 0$;
- в) $5x^2 - 4y^2 + 8y - 36 = 0$;
- г) $x^2 + y - 4 = 0$;
- д) $y = 4 - 3\sqrt{x + 5}$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

17.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y + 4 = 0$;
- б) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 22\sqrt{5}x + 20\sqrt{5}y + 229 = 0$.

17.14. Построить кривую

- а) $\rho^2 = \frac{9}{4 \cos^2 \varphi - 1}$;
- б) $\rho = \frac{1}{\sqrt{\varphi}}$;
- в) $\rho = \frac{1}{\sin \varphi}$;
- г) $x = 2 \sin^3 t, y = 3 \cos^3 t$.

17.15. Рассматривая кривую б) из примера 17.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(-1, -2, -1)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(-1, -2, -1)$.

Изобразить их.

17.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $z = 4 - 6[(x - 1)^2 + y^2], z = 12x - 8$;
- б) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, 9z = 2x^2 + 2y^2$.

17.17. Для поверхности второго порядка

$$7y^2 - 7z^2 - 8xy + 8xz = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 18

18.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -3$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

18.2. Решить задачу 18.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(2, 5)$.

18.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 5\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 6\vec{a} - \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 0,5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 5\pi/6$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

18.4. Решить задачу 18.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(1, 2, 4)$, $B(5, 2, 0)$, $C(2, 5, 0)$.

18.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (4, 2, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 0)$, $\vec{c} = (1, 0, 1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (3, 1, 3)$ в этом базисе.

18.6. Решить векторное уравнение

$$3\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 18.5.

18.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -9, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 18.5 и $\vec{b} = (2, -4, 0)$.

18.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 5$, $DB = 3$, $DC = 3$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/3$, $\angle BDC = 2\pi/3$, $\angle CDA = \pi/2$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

18.9. Решить задачу 18.9 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-1, 1, 1)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 18.4.

18.10. Для треугольника ABC из задачи 18.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

18.11. Для пирамиды из задачи 18.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярной плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

18.12. Кривые второго порядка

- а) $x = -2 - 3\sqrt{-5 - 6y - y^2}$;
- б) $x^2 + y^2 - 13x + 2y - 3 = 0$;
- в) $5y^2 - 4x^2 + 16x - 36 = 0$;
- г) $y = 2y^2 + 8x + 1$;
- д) $x = x^2 - 5y + 6$

- а) построить в канонической системе координат;
- б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

18.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
- б) $5x^2 + 12xy - 22y^2 - 12y - 19 = 0$.

18.14. Построить кривую

- а) $\rho = 4 \cos \varphi$;
- б) $\rho = 2e^\varphi$;
- в) $\rho = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi}$;
- г) $x = 2\left(t - \frac{5}{4} \sin t\right)$, $y = 2\left(1 - \frac{5}{4} \cos t\right)$.

18.15. Рассматривая кривую б) из примера 18.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

- а) конуса с вершиной в точке $M_0(9, 7, -1)$;
- б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(9, 7, -1)$.

Изобразить их.

18.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $y = 6x^2 - 1$, $y = 5$, $z + y^2 = 2x^2 + x$, $z - 4 = x - y^2 + 2x^2$;
- б) $z = x^2$, $z = 0$, $x + y = 6$, $y = 2x$.

18.17. Для поверхности второго порядка

$$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 8xy - 4xz - 4yz = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 19

19.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 3$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -1,5$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

19.2. Решить задачу 19.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(2, -2)$, $B(1, 1)$, $C(-1, 1)$.

19.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

19.4. Решить задачу 19.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(2, -2, 4)$, $B(1, 1, 20)$, $C(-1, 1, 3)$.

19.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 1, 4)$, $\vec{c} = (-3, 0, 2)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (-13, 2, 18)$ в этом базисе.

19.6. Решить векторное уравнение

$$2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 19.5.

19.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -8, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 19.5 и $\vec{b} = (1, 1, 3)$.

19.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 4$, $DB = 4$, $DC = 2$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/4$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = \pi/6$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

19.9. Решить задачу 19.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-1, 0, -2)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 19.4.

19.10. Для треугольника ABC из задачи 19.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

19.11. Для пирамиды из задачи 19.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярной плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

19.12. Кривые второго порядка

- а) $x = -2 - \sqrt{16 - y^2}$;
- б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y + 16 = 0$;
- в) $x^2 - y^2 + 12x - 14y + 85 = 0$;
- г) $y = 2x^2 + 8x + 1$;
- д) $x = -\frac{1}{2}y^2 + y + 1$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

19.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
- б) $2x^2 - 72xy + 23y^2 + 100x - 50y + 50 = 0$.

19.14. Построить кривую

- а) $\rho = 4 \sin \varphi$;
- б) $\rho = -3\varphi$;
- в) $\rho^2 = \frac{4}{4 - \cos^2 \varphi}$;
- г) $x = 2\left(t - \frac{1}{4} \sin t\right)$, $y = 2\left(1 - \frac{1}{4} \cos t\right)$.

19.15. Рассматривая кривую б) из примера 19.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(3, 5, 7)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(3, 5, 7)$.

Изобразить их.

19.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $x + y + z = 2$;
- б) $x = 4y^2 + 2$, $x = 6$, $z - 1 - y = x^2 + 4y^2$, $z - 4 - x^2 = y(4y + 1)$.

19.17. Для поверхности второго порядка

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 36xy + 24xz + 12yz - 49 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 20

20.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -1,5$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

20.2. Решить задачу 20.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(4, -8)$, $B(-2, 0)$, $C(-1, 7)$.

20.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + 2\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/6$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

20.4. Решить задачу 20.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(4, -8, -4)$, $B(-2, 0, -4)$, $C(-1, 7, 1)$.

20.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (5, 1, 0)$, $\vec{c} = (2, -1, 3)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (13, 2, 7)$ в этом базисе.

20.6. Решить векторное уравнение

$$-\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 20.5.

20.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -7, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 20.5 и $\vec{b} = (1, 1, 1)$.

20.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 4$, $DB = 5$, $DC = 3$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/2$, $\angle BDC = \pi/4$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

20.9. Решить задачу 20.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(1, -4, 6)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 20.4.

20.10. Для треугольника ABC из задачи 20.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

20.11. Для пирамиды из задачи 20.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярной плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

20.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 7y + 12 = 0$;
- б) $2x^2 + 4x + 5y^2 + 10y = 0$;
- в) $x = 8 - 2\sqrt{y^2 + 4y + 8}$;
- г) $x^2 + 10x + 8y + 41 = 0$;
- д) $y = -2x^2 + 4x + 3$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

20.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 16x + 16y = 0$;
- б) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 40x + 30y = 0$.

20.14. Построить кривую

- а) $\rho = 2 \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sin \varphi}$;
- б) $\rho = e^{-2\varphi}$;
- в) $\rho = \frac{4}{\cos(\varphi - \pi/4)}$;
- г) $x = 2 \cos^3 t, y = \sin^3 t$.

20.15. Рассматривая кривую б) из примера 20.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(-3, -5, -7)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(-3, -5, -7)$.

Изобразить их.

20.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $y = 3 - 5x^2, y = -2, z = 2x^2 - 3y + 6y^2 - 1, z - 2x^2 - 2 = -3(y - 2y^2)$;
- б) $z = 4 - x^2 - y^2, z = 0, x = \pm 1, y = \pm 1$.

20.17. Для поверхности второго порядка

$$2x^2 + 4y^2 + 3z^2 - 4xz + 4yz - 4x + 8y + 8z = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 21

21.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 0,3$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -1,5$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

21.2. Решить задачу 21.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(0, -5)$, $B(4, -1)$, $C(-2, 1)$.

21.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{a} + 5\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 0,5$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 5\pi/6$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

21.4. Решить задачу 21.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(0, -5, 1)$, $B(4, -1, 3)$, $C(-2, 1, 0)$.

21.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (-1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$, $\vec{c} = (3, 0, 2)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (8, 1, 12)$ в этом базисе.

21.6. Решить векторное уравнение

$$\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 21.5.

21.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -6, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} из условия задачи 21.5.

21.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 4$, $DB = 3$, $DC = 2$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/2$, $\angle BDC = 2\pi/3$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

21.9. Решить задачу 21.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(3, 2, -6)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 21.4.

21.10. Для треугольника ABC из задачи 21.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

21.11. Для пирамиды из задачи 21.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

21.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$;
- б) $4x^2 - 6x + 3y^2 = 0$;
- в) $9x^2 - 15y^2 - 36x + 32y + 20 = 0$;
- г) $y = 2x^2 + 3x + 32$;
- д) $y = -3 + \sqrt{5x - 2}$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

21.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0$;
- б) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

21.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{2 \cos \varphi}{1 - 4 \cos^2 \varphi}$;
- б) $\rho = -\frac{3}{\varphi}$;
- в) $\rho = \frac{2}{\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi}$;
- г) $\begin{cases} x = \frac{6 \cos t}{\sqrt{4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}}, \\ y = \frac{6 \sin t}{\sqrt{4 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}}. \end{cases}$

21.15. Рассматривая кривую б) из примера 21.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(2, -2, -3)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(2, -2, -3)$.

Изобразить их.

21.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

а) $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0, \quad z = 1, \quad y = x, \quad y = 2x$;

б) $y = x^2 - 2, \quad y + 4x^2 = 3, \quad z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z + 1 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

21.17. Для поверхности второго порядка

$$4x^2 + 4y^2 - 10z^2 + 4xy - 4x - 8y - 8z + 4 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 22

22.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 0,5$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -0,4$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

22.2. Решить задачу 22.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(3, 2)$, $B(1, 1)$, $C(2, 3)$.

22.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 4\vec{a} - \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

22.4. Решить задачу 22.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(3, 2, 1)$, $B(1, 1, -1)$, $C(2, 3, 1)$.

22.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1, 0, 4)$, $\vec{b} = (1, -2, 0)$, $\vec{c} = (-1, 1, 3)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (6, -1, 7)$ в этом базисе.

22.6. Решить векторное уравнение

$$-2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 22.5.

22.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -5, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 22.5 и $\vec{b} = (4, -2, -1)$.

22.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 3$, $DB = 5$, $DC = 2$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/3$, $\angle BDC = \pi/6$, $\angle CDA = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

22.9. Решить задачу 22.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(5, 9, -8)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 22.4.

22.10. Для треугольника ABC из задачи 22.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

22.11. Для пирамиды из задачи 22.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

22.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 7x + 9y = 0$;
- б) $9x^2 - 18x + 16y^2 = 0$;
- в) $y^2 - y^2 - 6x + 4y - 4 = 0$;
- г) $y = 6x - x^2$;
- д) $y = -4 - 3\sqrt{y + 5}$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

22.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 5\sqrt{5}y - 10 = 0$;
- б) $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$.

22.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{3}{\sin(\varphi - 3\pi/4)}$;
- б) $\rho = 3\varphi$;
- в) $\rho^2 = 8 \cos 2\varphi$;
- г) $x = \frac{1}{1+t^2}, y = t$.

22.15. Рассматривая кривую б) из примера 22.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(8, 7, 6)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(8, 7, 6)$.

Изобразить их.

22.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $3z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
- б) $y = -2x^2 + 7, \quad y = 5, \quad z = 1 - 2x^2 + 3y^2, \quad 2x^2 - 3y^2 = 4 - z$.

22.17. Для поверхности второго порядка

$$2y^2 - 2z^2 + 8xy - 8xz - 6 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 23

23.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = 0,4$, а точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = -0,5$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

23.2. Решить задачу 23.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(-7, -3)$, $B(2, 1)$, $C(-1, 5)$.

23.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = 3\vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{a} + 3\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 2\pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

23.4. Решить задачу 23.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(-7, -3, 2)$, $B(2, 1, 4)$, $C(-1, 5, -2)$.

23.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (-1, 1, 0)$, $\vec{b} = (0, 5, 1)$, $\vec{c} = (3, 2, -1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (-15, 5, 6)$ в этом базисе.

23.6. Решить векторное уравнение

$$2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 23.5.

23.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -4, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 23.5 и $\vec{b} = (1, 1, 1)$.

23.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 4$, $DB = 5$, $DC = 2$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/4$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = \pi/2$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

23.9. Решить задачу 23.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-6, -3, 6)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 23.4.

23.10. Для треугольника ABC из задачи 23.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

23.11. Для пирамиды из задачи 23.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

23.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 + 12x - y + 24 = 0$;
- б) $6x^2 + 8y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$;
- в) $y^2 - x^2 - x - y - 1 = 0$;
- г) $y = 6x^2 - 18x - 4$;
- д) $y = 1 - \sqrt{7 - 3x}$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

23.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 30x - 40y = 0$;
- б) $23x^2 - 16xy - 7y^2 + 16x + 14y + 218 = 0$.

23.14. Построить кривую

- а) $\rho = 4 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$;
- б) $\rho = \frac{1}{\cos \varphi} - \cos \varphi$;
- в) $\rho = \frac{1}{\cos \varphi} + 2$;
- г) $x = \frac{t^2}{1+t^2}, y = \frac{t^3}{1+t^2}$.

23.15. Рассматривая кривую б) из примера 23.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(-5, -5, 1)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(-5, -5, 1)$.

Изобразить их.

23.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $y = 5x^2 - 1, y = -3x^2 + 1, z = -2 + \sqrt{3x^2 + y^2}, z = \sqrt{3x^2 + y^2} - 5$;
- б) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x + y + z = 6, z = 0$.

23.17. Для поверхности второго порядка

$$2x^2 - 4y^2 + 2z^2 + 8xy + 8yz - 20zx + 4x + 8y - 20z - 2 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 24

24.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -0,6$, а точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 1,2$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

24.2. Решить задачу 24.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(-2, 7)$, $B(1, 5)$, $C(-3, 6)$.

24.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 4\vec{a} + \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

24.4. Решить задачу 24.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(-2, 7, 3)$, $B(1, 5, -7)$, $C(-3, 6, 3)$.

24.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$, $\vec{c} = (0, 3, 2)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (1, -4, 4)$ в этом базисе.

24.6. Решить векторное уравнение

$$3\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 24.5.

24.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -3, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} из условия задачи 24.5.

24.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 2$, $DB = 4$, $DC = 3$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = 2\pi/3$, $\angle BDC = \pi/3$, $\angle CDA = \pi/2$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

24.9. Решить задачу 24.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-4, 8, -12)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 24.4.

24.10. Для треугольника ABC из задачи 24.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

24.11. Для пирамиды из задачи 24.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярную плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

24.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$;
- б) $4x^2 + 8x + y^2 - 4y + 1 = 0$;
- в) $y = 9 + 2\sqrt{x^2 + 4x + 9}$;
- г) $y = -x^2 + 6x - 14$;
- д) $8x = 8 + 8y - y^2$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

24.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $8x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 10y - 319 = 0$;
- б) $7x^2 - 8xy + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$.

24.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{2}{\sin(\varphi + 5\pi/4)}$;
- б) $\rho = 1 + \frac{1}{\varphi}$;
- в) $\rho = \frac{2}{\cos \varphi} + 1$;
- г) $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$.

24.15. Рассматривая кривую б) из примера 24.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(7, 8, -9)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(7, 8, -9)$.

Изобразить их.

24.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $z = 4 - y^2, z = 0, 2y = x^2$;
- б) $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 1, y = x, y = 2x$.

24.17. Для поверхности второго порядка

$$3z^2 + 4x^2 + 2y^2 - 4xz + 4yz + 8x - 4y + 8z = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Вариант № 25

25.1. Дан параллелограмм $CBDA$, в котором $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Точка M_1 делит диагональ \overrightarrow{CD} в отношении $\lambda_1 = -1,2$, а точка M_2 делит диагональ \overrightarrow{AB} в отношении $\lambda_2 = 0,6$. Выразить векторы $\overrightarrow{BM_1}$, $\overrightarrow{AM_1}$, $\overrightarrow{DM_2}$, $\overrightarrow{CM_2}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ через векторы \vec{a} и \vec{b} .

25.2. Решить задачу 25.1, вычислив координаты точек M_1 и M_2 , если точки A, B, C имеют координаты $A(3, 1)$, $B(-2, -1)$, $C(0, 3)$.

25.3. Дан треугольник ABC , построенный на векторах $\overrightarrow{CA} = \vec{a} - 3\vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = 7\vec{a} + \vec{b}$, где $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 3\pi/4$. Методами векторной алгебры найти:

- длины сторон CA , AB и угол между ними;
- площадь треугольника ABC ;
- вектор-высоту \vec{h} , опущенную из точки B , и её длину;
- вектор-медиану \vec{m} , проведённую из угла C , и её длину;
- вектор-биссектрису \vec{n} угла C и её длину.

25.4. Решить задачу 25.3 при условии, что треугольник ABC задан своими вершинами $A(3, 1, -4)$, $B(-2, -1, -1)$, $C(0, 3, 2)$.

25.5. Доказать, что векторы $\vec{a} = (4, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, -2, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, -1)$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{r} = (0, -8, 9)$ в этом базисе.

25.6. Решить векторное уравнение

$$-2\vec{x} + \vec{a} \times \vec{x} = \vec{b},$$

выбрав векторы \vec{a} и \vec{b} из условия задачи 25.5.

25.7. Решить систему векторных уравнений

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{x} &= \vec{b}, \\ \vec{c} \cdot \vec{x} &= -2, \end{aligned}$$

выбрав векторы \vec{a}, \vec{c} из условия задачи 25.5 и $\vec{b} = (0, -2, 0)$.

25.8. Дана пирамида $DABC$. Ребра пирамиды, выходящие из вершины D , равны: $DA = 3$, $DB = 6$, $DC = 4$, а углы между ними, соответственно, $\angle ADB = \pi/6$, $\angle BDC = \pi/4$, $\angle CDA = \pi/3$. Методами векторной алгебры найти:

- длину ребра AB и угол $\angle ABC$;
- двугранный угол при ребре DA и угол между ребром DA и гранью DBC ;
- длину высоты, опущенной из точки A на грань DBC , и кратчайшее расстояние между рёбрами DA и BC ;
- объём пирамиды.

25.9. Решить задачу 25.8 при условии, что вершина D пирамиды задаётся координатами $D(-4, 7, 3)$, а треугольником её основания является треугольник ABC из задачи 25.4.

25.10. Для треугольника ABC из задачи 25.2 найти:

- каноническое уравнение прямой CA , параметрическое уравнение прямой CD и векторное уравнение прямой AB ; одно из полученных уравнений представить уравнением прямой в отрезках, другое — в нормальной форме и третье — уравнением прямой с угловым коэффициентом, построить эти прямые;
- угол между прямыми CB и CA ;
- точку пересечения медиан треугольника;
- уравнения биссектрис смежных углов, образованных пересечением прямых CB и CA ;
- расстояние от точки A до медианы треугольника, проведённой из угла C ;
- уравнения прямых, проходящих через точку A , одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна стороне CB ;
- точку пересечения последней прямой с прямой CB .

25.11. Для пирамиды из задачи 25.9 найти:

- а) параметрическое уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAC ; векторное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DBC ; нормированное уравнение плоскости, совпадающей с гранью DAB ; одно из уравнений представить как уравнение в отрезках, построить эти плоскости;
- б) параметрическое, каноническое и общее уравнения прямых DA и CB ;
- в) угол между плоскостями DAC и DAB , угол между прямой DA и плоскостью DBC , угол между прямыми AB и CB ;
- г) расстояние от точки A до плоскости DBC и расстояние между прямыми DA и CB ;
- д) уравнения плоскости, проходящей через точку B и параллельной плоскости DAC , а также плоскости, проходящей через прямую AB и перпендикулярной плоскости DAC ;
- е) уравнение прямой, проходящей через точку B и параллельной плоскостям DAC и DAB ;
- ж) точку, симметричную точке B относительно плоскости DAC , а также ортогональную проекцию точки B на прямую AC ;
- з) проекцию прямой AB на плоскость DAC .

25.12. Кривые второго порядка

- а) $x^2 + y^2 - x - y - 3,5 = 0$;
- б) $2x^2 + y^2 + 6x - 3y - 2,25 = 0$;
- в) $y = 4 - 3\sqrt{x^2 + 2x + 5}$;
- г) $12x + 36y - 12y^2 = 0$;
- д) $x + \frac{1}{4}y^2 - 2y = 0$

а) построить в канонической системе координат;

б) записать в полярной системе координат и параметрической форме.

25.13. Для кривой второго порядка с помощью инвариантов определить её тип и каноническую форму. Привести к главным осям и построить

- а) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 8x - 16y - 16 = 0$;
- б) $7x^2 + 24xy + 62x + 24y + 199 = 0$.

25.14. Построить кривую

- а) $\rho = \frac{9}{\sin \varphi - \cos \varphi}$;
- б) $\rho = 1 - \frac{1}{\varphi}$;
- в) $\rho = \cos \varphi + 2$;
- г) $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$.

25.15. Рассматривая кривую б) из примера 25.12 как направляющую, записать для нее уравнение линейчатой поверхности:

а) конуса с вершиной в точке $M_0(-1, -2, -1)$;

б) цилиндра с образующей, имеющей направляющий вектор $\vec{s}(-1, -2, -1)$.

Изобразить их.

25.16. Построить тело, ограниченное поверхностями

- а) $z = 2 - 4[(x - 1)^2 + y^2], z = 8x - 6$;
- б) $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + x^2 = 16, z = x^2 + y^2$.

25.17. Для поверхности второго порядка

$$2y^2 - 2z^2 + 8xy - 8xz - 4x + 12y + 4z + 16 = 0$$

определить её тип и каноническую форму, привести к главным осям и построить.

Список литературы

1. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. — М.: Наука, 1987.
2. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. *Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре*. — М.: Наука, 1987.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии*. — М.: Наука, 1988.
4. Головина Л.И. *Линейная алгебра и некоторые ее приложения*. — М.: Наука, 1979.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах*. — М.: Высшая школа, 1980.
6. Ефимов Н.В. *Краткий курс аналитической геометрии*. — М.: Наука, 1969.
7. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики*. Т. I: *Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщённых функций*. — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 672 с.
8. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов. I Линейная алгебра: Учебное пособие*. — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2009.
9. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов. II Аналитическая геометрия: Учебное пособие*. — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2010.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Линейная алгебра*. — М.: Наука, 1984.
11. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*. — М.: Наука, 1988.
12. Кайгородов В.Р. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры*. — Казань: Изд-во Каз. гос. ун-та, 1985.
13. Каплан И.А. *Практические занятия по высшей математике* (в 3-х т.). — Харьков: Изд-во Хар. гос. ун-та, т. 1., 1965.
14. Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*. — М.: Наука, 1987.
15. Кузнецов Л.А. *Сборник индивидуальных заданий по курсу высшей математики*. — М.: Наука, 1964.
16. Минорский В.П. *Сборник задач по высшей математике*. — М.: Наука, 1987.
17. Моденов П.С. *Аналитическая геометрия*. — М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1969.
18. Рублев А.Н. *Курс линейной алгебры и аналитической геометрии*. — М.: Наука, 1972.
19. Терёхина Л.И., Фикс И.И. *Высшая математика. Часть 1. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия: Учебное пособие*. — Томск, Изд-во Томск. политехн. ун-та, 2002. — 224 с.
20. Фадеев Д.К., Соминский И.С. *Сборник задач по высшей алгебре*. — М.: Наука, 1977.

Учебное издание

ЗАДОРЖНЫЙ Валерий Николаевич
ЗАЛЬМЕЖ Владимир Феликсович
ТРИФОНОВ Андрей Юрьевич
ШАПОВАЛОВ Александр Васильевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
для технических университетов
Часть II. Аналитическая геометрия

Учебное пособие

Технический редактор *В.Н. Романенко*
Компьютерная верстка *В.Н. Романенко*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе $TEX - LATEX$
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Подписано к печати . .2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать . Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. .
Заказ . Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru