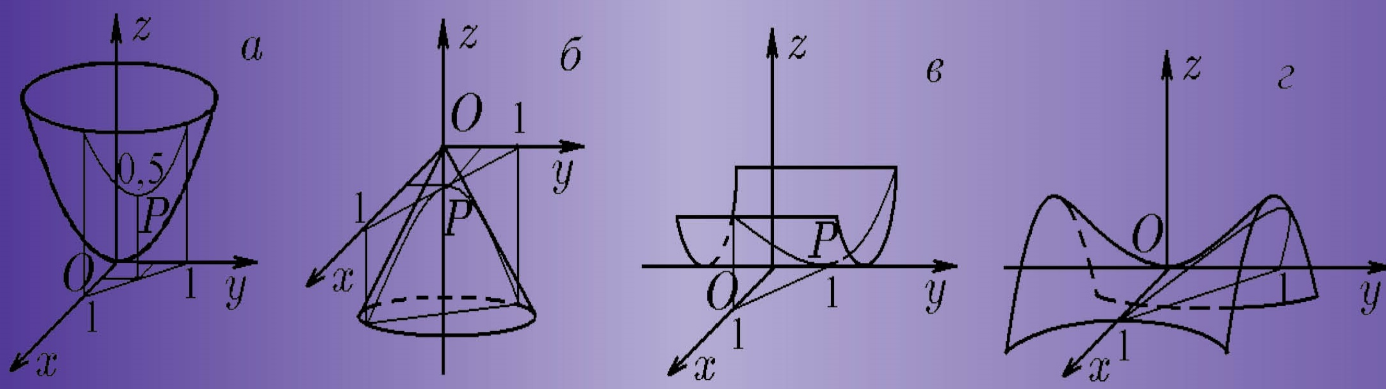
В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов



ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

для технических университетов

Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление
Часть III.2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Учебники Томского политехнического университета

Издательство ТПУ

Министерство образования и науки
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж,
А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
для технических университетов

Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление

Часть III.2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

2-е издание, исправленное

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73
В937

Задорожный В.Н.

В937 Высшая математика для технических университетов. Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление. 2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных: учебное пособие / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов; Томский политехнический университет. 2-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 203 с.

Настоящее пособие представляет собой изложение третьей части курса «Высшая математика» и содержит материал по разделу этого курса: «Дифференциальное и интегральное исчисление»: «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных». Оно содержит теоретический материал в объёме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями для самостоятельного решения по каждому разделу.

Предлагаемое пособие может быть полезно студентам, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

Пособие предназначено для студентов физических, инженерно-физических специальностей и студентов, обучающихся в системе элитного технического образования.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Работа частично поддержана Государственным заданием ВУЗам «Наука», регистрационный номер 1.676.2014/К.

Рецензенты
Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Осетрин К.Е.
Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ
Багров В.Г.

Содержание

ГЛАВА 1

Понятие функции нескольких переменных

1. Общие замечания

При изучении широкого класса явлений и задач приходится встречаться с функциями двух и более переменных. Простейшей такой задачей является, например, вычисление площади прямоугольника со сторонами x и y. В этом случае его площадь S является функцией двух переменных:

$$S = xy. \tag{1.1}$$

Функцией двух переменных является и объём кругового конуса с радиусом основания R и высотой h:

$$V = \frac{\pi}{3}R^2h. \tag{1.2}$$

Эту же функцию можно записать в другом виде, выразив высоту h через длину образующей L:

$$V = \frac{\pi}{3}R^2h = \frac{\pi}{3}R^2\sqrt{L^2 - R^2}. \tag{1.3}$$

Объём прямоугольного параллелепипеда со сторонами x, y, z является функцией трёх переменных:

$$V = xyz. \tag{1.4}$$

В этих простейших примерах число переменных растет вместе с числом измерений рассматриваемого геометрического объекта. Более показательным примером, приводящим к функциям нескольких переменных является, например, детализация некоторого явления. Рассмотрим пример из физики. Пусть источник постоянного электрического тока с ЭДС U подключён к проводнику сопротивлением R, тогда, согласно закону Ома, сила тока, проходящего через проводник, равна

$$I = \frac{U}{R}. \tag{1.5}$$

Если в формуле (1.5) сопротивление считать постоянным, то сила тока является функцией одной переменной U. Напротив, если постоянной считать ЭДС, то сила тока будет зависеть только от сопротивления. При независимом изменении обеих величин U и R сила тока будет функцией двух переменных. Поскольку сопротивление проводника R можно выразить через его удельное сопротивление ρ и его размеры: длину l и поперечное сечение S по формуле

$$R = \frac{\rho l}{S}, \tag{1.6}$$

то после подстановки (1.6) в (1.5) зависимость

$$I = \frac{US}{\rho l} \tag{1.7}$$

определяет силу тока I как функцию уже четырёх переменных U, ρ, l, S.

Далее можно учесть влияние температуры на размеры проводника. В том случае, когда длина проводника l больше его поперечных размеров, эту длину в определённом интервале температур t с помощью коэффициента линейного теплового расширения α можно записать как $l(1+\alpha t)$. Тогда

$$I = \frac{US}{\rho l(1+\alpha t)}, \tag{1.8}$$

и сила тока становится функцией пяти переменных.

Если в дополнение к этому учесть, что реальный источник ЭДС обладает внутренним сопротивлением R_i, то суммарное сопротивление цепи будет равно $R + R_i$, но тогда

$$I = \frac{U}{R_i + R},$$

а следовательно,

$$I = \frac{US}{SR_i + \rho l(1+\alpha t)}, \tag{1.9}$$

и, стало быть, силу тока I можно считать функцией шести переменных.

Далее можно рассматривать зависимость уже внутреннего сопротивления от других характеристик. Однако уже понятно, что стремление к комплексному изучению какого-либо явления всегда приводит к функциональной зависимости исследуемой величины от нескольких переменных. Естественно, что изучение влияния на неё нескольких переменных возможно при фиксации оставшихся постоянными значениями (т.е. при уменьшении числа переменных вплоть до одной).

Обобщение понятия области определения для функции одной переменной приводит к аналогичному понятию для функции многих переменных. Действительно, приведённые выше примеры позволяют сделать следующие заключения. Если зависимость (1.1) рассматривать, абстрагируясь от геометрического смысла величин x и y, то переменные x и y независимо друг от друга могут принимать любые значения: $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Если же их рассматривать как длины сторон прямоугольника, то их значения ограничиваются неравенствами $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Аналогичное замечание справедливо и для переменных R и h в соотношении (1.3). В общем случае $r \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}$, а как радиус и высота цилиндра: $R \geqslant 0$, $h \geqslant 0$. По-другому обстоит дело в соотношении (1.3) для переменных R и L. В этом случае даже для абстрактных величин R и L должно выполняться условие $L^2 - R^2 \geqslant 0$, тогда как с учётом геометрического смысла R и L как радиуса и образующей конуса $R \geqslant 0$, $L \geqslant 0$.

Общие замечания по поводу понятия функции нескольких переменных завершим замечанием о том, что корректная формулировка этого понятия упростится, если использовать обобщение множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ до метрического пространства $\mathbb{R}^n$ (или, более точно, $\mathbb{E}^n$).

В этой связи для дальнейшего изложения полезно рассмотреть следующий пример [9].

Пример 1.1. Для вещественных чисел $a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $i, j \in \mathbb{N}$, доказать справедливость неравенств

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2; \tag{1.10}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2}. \tag{1.11}$$

Неравенство (1.10) называется *неравенством Коши*. Неравенство (1.11) называется *неравенством Минковского*.

Решение. Для доказательства неравенства Коши рассмотрим квадратный трёхчлен

$$P(y) = \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_iy)^2 = A + 2Ty + By^2, \tag{1.12}$$

где

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2; \quad T = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i; \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2. \tag{1.13}$$

Так как $P(y) \geqslant 0$ для всех $y \in \mathbb{R}$, то дискриминант (1.12) удовлетворяет неравенству

$$T^2 - AB \geqslant 0, \tag{1.14}$$

из которого с учётом (1.13) следует оценка

$$T^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leqslant AB = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)^2,$$

представляющая собой неравенство Коши (1.10).

Для доказательства неравенства Минковского воспользуемся соотношением (1.12) при $y = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = A + 2T + B,$$

и в силу (1.14)

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \leqslant A + 2\sqrt{AB} + B = (\sqrt{A}+\sqrt{B})^2.$$

Извлекая из обеих частей неравенства квадратные корни, с учётом (1.13) получим оценку

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{A}+\sqrt{B} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2},$$

совпадающую с неравенством Минковского.

2. Метрические пространства. Евклидова метрика

♦ Множество X называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(\vec{x},\vec{y})$, называемое *расстоянием между элементами* и такое, что для любых элементов $\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in X$ выполняются три условия:
1) $\rho(\vec{x},\vec{y})=0 \Leftrightarrow \vec{x}=\vec{y}$;
2) $\rho(\vec{x},\vec{y})=\rho(\vec{y},\vec{x})$;
3) $\rho(\vec{x},\vec{z})\leqslant\rho(\vec{x},\vec{y})+\rho(\vec{y},\vec{z})$.

Последнее неравенство называется *неравенством треугольника.*

Элементы метрического пространства называются его *точками*, а функция $\rho(\vec{x},\vec{y})$ — *метрикой пространства.* Условия 1–3 из определения зачастую называют *тремя аксиомами метрики.* Природа множеств, на которых можно определить метрику, может быть самой разной. Причём саму метрику на одном и том же множестве можно задавать различными способами, порождая тем самым различные метрические пространства.

Например, определив метрику на множестве вещественных чисел по правилу

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|, \tag{2.1}$$

удовлетворяющему всем трём аксиомам, получим метрическое пространство, обозначаемое $\mathbb{R}$. Именно на нём была определена функция одной переменной $w=f(x)$, $x\in D(f)\subset\mathbb{R}$.

♦ Множество всевозможных упорядоченных совокупностей из n вещественных чисел $\vec{x}=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ с метрикой

$$\rho(\vec{x},\vec{y})=\sqrt{(x^1-y^1)^2+(x^2-y^2)^2+\ldots+(x^n-y^n)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2} \tag{2.2}$$

образует *n-мерное метрическое пространство*, обозначаемое $\mathbb{R}^n$.

Действительно, выполнение двух первых аксиом очевидно, а справедливость третьей вытекает из неравенства Минковского. Пусть $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ — точки $\mathbb{R}^n$. Положив в (1.11) $a^i=x^i-y^i$, $b^i=y^i-z^i$, получим

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y^i-z^i)^2},$$

т.е.

$$\rho(\vec{x},\vec{z})\leqslant\rho(\vec{x},\vec{y})+\rho(\vec{y},\vec{z}),$$

что означает выполнение неравенства треугольника.

Метрику (2.2) называют *евклидовой*, выделяя её изо всех других, которые задаются на множестве вещественных чисел. Евклидову метрику (2.2) можно рассматривать как n-мерное обобщение одномерной метрики (2.1).

2.1. Сходимость в метрическом пространстве. Предел последовательности

Ниже мы будем рассматривать метрические пространства $\mathbb{R}^n$ ($\vec{x}=(x^1,...,x^n)\in\mathbb{R}^n$), однако те формулировки, в которых явно не используется евклидова метрика (2.2), будут справедливы и для других метрических пространств.

В метрических пространствах метрика как расстояние между двумя его точками выполняет роль инструмента, с помощью которого формулируются понятия сходимости и предела. Начнем со сходимости последовательности.

♦ Если каждому натуральному числу $k \in \mathbb{N}$ поставлена в соответствие точка $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, то говорят, что определена *последовательность* $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *точек метрического пространства* $\mathbb{R}^n$: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k, \ldots$

♦ Отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ называется *последовательностью* в $\mathbb{R}^n$ (*многомерной последовательностью*) и обозначается $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$.

♢ Иными словами, *последовательность* — это отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в множество вещественных чисел $\mathbb{R}^n$, т.е. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.

♦ Последовательность точек $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, называется *ограниченной*, если существуют $\varepsilon > 0$ и точка $\vec{a}$, такая что для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\rho(\vec{x}_k, \vec{a}) \leqslant \varepsilon$, или в символьной записи

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ и } \exists \vec{a} \in \mathbb{R}^n : \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \rho(\vec{x}_k, \vec{a}) \leqslant \varepsilon. \tag{2.3}$$

♦ Последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^n$ называется *сходящейся к точке* $\vec{a}$ (имеет предел $\vec{a}$) и обозначается $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_n = \vec{a}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $K(\varepsilon)$ такой, что для всех $k > K(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\rho(\vec{x}_k, \vec{a}) < \varepsilon$, или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) \Rightarrow \rho(\vec{x}_k, \vec{a}) < \varepsilon. \tag{2.4}$$

♢ Из определения сходящейся к точке $\vec{a}$ последовательности следует, что числовая последовательность $\{\rho(\vec{x}_k, \vec{a})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю и наоборот:

$$\Big(\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}\Big) \Leftrightarrow \Big(\lim_{k\to\infty} \rho(\vec{x}_k, \vec{a}) = 0\Big). \tag{2.5}$$

♢ Заметим, что при формулировке ограниченности последовательностей (2.3) для ε используется квантор существования, а при формулировке сходимости (2.4) — квантор всеобщности.

♦ Последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, называется *бесконечно малой*, если её предел равен нулю:

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{0},$$

где $\vec{0}$ — точка, представляющая совокупность $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

♦ Последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, называется *бесконечно большой* и обозначается $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $k > K(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\rho(\vec{x}, \vec{0}) > \varepsilon$. В символьной записи

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) \Rightarrow \rho(\vec{x}_k, \vec{0}) > \varepsilon, \tag{2.6}$$

т.е. последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ является бесконечно большой, если числовая последовательность $\{\rho(\vec{x}_k, \vec{0})\}_{k=1}^{\infty}$ также является бесконечно большой:

$$\Big(\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \infty\Big) \Leftrightarrow \Big(\lim_{k\to\infty} \rho(\vec{x}_k, \vec{0}) = \infty\Big). \tag{2.7}$$

Докажем несколько простых свойств сходящихся последовательностей.

Свойство 1. Если последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ имеет предел, то он единственный.

Действительно, пусть
$$\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k=\vec{a},\qquad \lim_{k\to\infty}\vec{x}_k=\vec{b}.$$
В силу неравенства треугольника для любого $k\in\mathbb{N}$ выполняется неравенство
$$0\leqslant\rho(\vec{a},\vec{b})\leqslant\rho(\vec{a},\vec{x}_k)+\rho(\vec{x}_k,\vec{b}).$$
Так как числовые последовательности $\{\rho(\vec{a},\vec{x}_k)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\rho(\vec{x}_k,\vec{b})\}_{k=1}^{\infty}$ — бесконечно малые, т.е.
$$\lim_{k\to\infty}\rho(\vec{a},\vec{x}_k)=\vec{0},\qquad \lim_{k\to\infty}\rho(\vec{x}_k,\vec{b})=\vec{0},$$
то $\rho(\vec{a},\vec{b})=0$, поэтому $\vec{a}=\vec{b}$.

Свойство 2. Если последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет предел, то она ограничена.

Действительно, пусть
$$\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k=\vec{a}.$$
Тогда в силу (2.5)
$$\lim_{k\to\infty}\rho(\vec{x}_k,\vec{a})=0.$$
Поэтому числовая последовательность $\{\rho(\vec{x}_k,\vec{a})\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена, т.е. существует $\varepsilon\in\mathbb{R}$ такое, что для всех $k\in\mathbb{N}$ выполнено неравенство $\rho(\vec{x}_k,\vec{a})\leqslant\varepsilon$, из которого в силу определения ограниченной последовательности (2.3) следует справедливость утверждения.

Теорема 2.1. *Для того чтобы последовательность точек $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\vec{x}_k=(x_k^1,x_k^2,\ldots,x_k^n)\in\mathbb{R}^n$, сходилась к пределу $\vec{a}=(a^1,a^2,\ldots,a^n)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ сходились к числам a^i, т.е. выполнялись равенства*
$$\lim_{k\to\infty}x_k^i=a^i,\quad i=\overline{1,n}. \tag{2.8}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится:
$$\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k=\vec{a},$$
и, согласно (2.5),
$$\lim_{k\to\infty}\rho(\vec{x}_k,\vec{a})=0.$$
Тогда для каждой последовательности $\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ справедлива оценка
$$0\leqslant|x_k^i-a^i|\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_k^j-a^j)^2}=\rho(\vec{x}_k,\vec{a}),$$
в силу которой
$$\lim_{k\to\infty}x_k^i=a^i.$$

Достаточность. Пусть все последовательности $\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся, т.е. выполняются равенства (2.8):

$$\lim_{k\to\infty} x_k^i = a^i, \quad i=\overline{1,n},$$

но тогда $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k^i - a^i| = 0$ и

$$\lim_{k\to\infty} \rho(\vec{x}_k, \vec{a}) = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_k^j - a^j|^2} = 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}.$$

♦ Последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $k > K(\varepsilon)$ и $m > K(\varepsilon)$ справедливо неравенство $\rho(\vec{x}_k, \vec{x}_m) < \varepsilon$, или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon) \text{ и } \forall m > K(\varepsilon) \Rightarrow \rho(\vec{x}_k, \vec{x}_m) < \varepsilon.$$

Теорема 2.2 (критерий Коши в $\mathbb{R}^n$). *Для того чтобы последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. *Необходимость*. Пусть

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a},$$

тогда, согласно определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $k > K(\varepsilon)$ и $m > K(\varepsilon)$ [т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K(\varepsilon)$ и $\forall m > K(\varepsilon)$] выполняются оба неравенства:

$$\rho(\vec{x}_k, \vec{a}) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \rho(\vec{a}, \vec{x}_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому в силу неравенства треугольника для любого $k > K(\varepsilon)$ и $m > K(\varepsilon)$ [т.е. $\forall k > K(\varepsilon)$ и $\forall m > K(\varepsilon)$] справедливо

$$\rho(\vec{x}_k, \vec{x}_m) \leqslant \rho(\vec{x}_k, \vec{a}) + \rho(\vec{a}, \vec{x}_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная.

Достаточность. Пусть $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $\mathbb{R}^n$. По определению,

$$\vec{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n),$$

то все числовые последовательности $\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$, $i = \overline{1,n}$, — фундаментальные. Действительно, из фундаментальности $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ следует, что для любого $k > K(\varepsilon)$ и $m > K(\varepsilon)$ [т.е. $\forall k > K(\varepsilon)$ и $\forall m > K(\varepsilon)$] выполняется неравенство

$$\rho(\vec{x}_k, \vec{x}_m) < \varepsilon.$$

Но

$$|x_k^i - x_m^i| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_k^i - x_m^i)^2} = \rho(\vec{x}_k, \vec{x}_m) < \varepsilon, \quad i = \overline{1, n}.$$

Это означает, что все последовательности $\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ — фундаментальные, а в силу критерия Коши в $\mathbb{R}$ каждая из них является сходящейся (см. разд. «Теория пределов» части «Дифференциальное исчисление функции одной вещественной переменной» [11]). Но тогда, согласно теореме 2.1, сходящейся является и последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, что и требовалось доказать.

◊ Заметим, что в любом метрическом пространстве сходящаяся последовательность является фундаментальной. Однако не во всех метрических пространствах любая фундаментальная последовательность будет сходящейся. Например, каждый элемент последовательности

$$\left\{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$$

принадлежит множеству рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Множество рациональных чисел образует метрическое пространство. Однако эта последовательность не имеет предела в $\mathbb{Q}$ [11].

⧫ Метрическое пространство, в котором любая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным*.

◊ С учётом вышесказанного теорему 2.2 можно переформулировать так: пространство $\mathbb{R}^n$ полное.

Пример 2.1. Исследовать на сходимость последовательности $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}^2$:

$$1)\ \vec{x}_k = \left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^k, \left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right); \quad 2)\ \vec{x}_k = (\sqrt[k]{2 + 2^k}, \sqrt[k]{2 + 2^{-k}}).$$

Решение. 1) Рассмотрим отдельно последовательности

$$\left\{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e,$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 1\Big/\lim_{k\to\infty}\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = 1/e,$$

то каждая из последовательностей сходится и, согласно теореме 2.1, сходится исходная последовательность:

$$\lim_{k\to\infty}\vec{x}_k = \left(\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k, \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\right) = (e, e^{-1}) \in \mathbb{R}^2.$$

2) Поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{2 + 2^k} = 2\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{1 + 2^{1-k}} = 2,$$

а

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2+2^{-k}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2} \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{1+2^{-k-1}} = 1,$$

то, согласно теореме 2.1, исходная последовательность сходится:

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \big(\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2+2^k}, \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2+2^{-k}}\big) = (2,1) \in \mathbb{R}^2.$$

Пример 2.2. Исследовать на сходимость последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}^5$, где

$$\vec{x}_k = \Big(\frac{k}{2k+1}, \frac{1}{\sqrt[k]{k}}, \frac{1}{3^k}, \frac{\ln k}{k}, \frac{k+\sin k}{4k}\Big).$$

Решение. Поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = 1; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3^k} = 0; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k} = 0; \quad \lim_{k\to\infty} \frac{k+\sin k}{4k} = \frac{1}{4},$$

то, согласно теореме 2.1, исходная последовательность сходится:

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \Big(\frac{1}{2}, 1, 0, 0, \frac{1}{4}\Big).$$

Пример 2.3. Исследовать на сходимость последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{x}_k = \Big(\Big(1+\frac{1}{k^2}\Big)^k, \Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k, \Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{k^2}\Big).$$

Решение. Вычислим предел каждой последовательности:

$$\lim_{k\to\infty}\Big(1+\frac{1}{k^2}\Big)^k = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{e} = 1; \quad \lim_{k\to\infty}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^k = e; \quad \lim_{k\to\infty}\Big(1+\frac{1}{k}\Big)^{k^2} = \lim_{k\to\infty} e^k = \infty.$$

Поскольку последняя последовательность является бесконечно большой, то исходная последовательность также является бесконечно большой в $\mathbb{R}^3$.

Пример 2.4. Пусть последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}^n$ является бесконечно большой. Обязательно ли существование хотя бы одной последовательности $\{x_k^i\}_{k=1}^{\infty}$, стремящейся к бесконечности?

Решение. Нет, не обязательно. Рассмотрим последовательность $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathbb{R}^2$ вида

$$\vec{x}_k = \Big(\frac{[1-(-1)^k]k^3}{k^2+2}, \frac{[1+(-1)^k]k^3}{k^2+2}\Big),$$

для которой

$$\rho(\vec{x}_k, \vec{0}) = \sqrt{\Big(\frac{[1-(-1)^k]k^3}{k^2+2}\Big)^2 + \Big(\frac{[1+(-1)^k]k^3}{k^2+2}\Big)^2} = \frac{2k^3}{k^2+2},$$

а поскольку

$$\lim_{k\to\infty} \rho(\vec{x}_k, \vec{0}) = \lim_{k\to\infty} \frac{2k^3}{k^2+2} = \infty,$$

то исходная последовательность является бесконечно большой в $\mathbb{R}^2$.

Однако каждая из последовательностей

$$\left\{\frac{[1-(-1)^k]k^3}{k^2+2}\right\}, \quad \left\{\frac{[1+(-1)^k]k^3}{k^2+2}\right\}$$

в отдельности бесконечно большой не является, поскольку вообще не имеет предела.

Таким образом, две последовательности, не являясь бесконечно большими, в совокупности образуют последовательность, являющуюся бесконечно большой в $\mathbb{R}^2$.

Заметим, что сформулированные выше определения и теоремы для последовательностей в $\mathbb{R}^n$ используют метрические оценки вида $\rho(\vec{x},\vec{a}) = \varepsilon$ или $\rho(\vec{x},\vec{a}) < \varepsilon$. Первое равенство определяет множество точек, равноудалённых от одной точки, что, согласно элементарной геометрии, является определением сферы. Согласно этой логике, второе соотношение будет определять шар.

♦ *Шаром (открытым шаром) радиуса r с центром в точке $\vec{a}$ в пространстве* $\mathbb{R}^n$ называется множество точек

$$S(\vec{a}, r) = \{\vec{x} | \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \rho(\vec{x},\vec{a}) < r\}. \tag{2.9}$$

♦ *Замкнутым шаром радиуса r с центром в точке $\vec{a}$ в пространстве* $\mathbb{R}^n$ называется множество точек

$$S[\vec{a}, r] = \{\vec{x} | \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \rho(\vec{x},\vec{a}) \leqslant r\}. \tag{2.10}$$

С учётом этих определений теорему 2.1 можно переформулировать следующим образом. Для сходимости последовательности точек $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^n$ к точке $\vec{a}$ необходимо и достаточно, чтобы любой шар $S(\vec{a}, r)$ содержал все точки этой последовательности за исключением, может быть, конечного их числа.

2.2. Геометрия метрического пространства с евклидовой метрикой

Метрические пространства в силу своего определения содержит только такие объекты, между которыми можно измерить расстояния $\rho(\vec{x},\vec{a})$. В метрическом пространстве можно определить точки, сферы, шары, но одно лишь понятие метрики не позволяет определить такие объекты, как вектор, прямая, плоскость и т.д. Однако все они, как следует из линейной алгебры и аналитической геометрии [10], существуют в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$. В пространстве $\mathbb{R}^n$ введём дополнительно операции сложения и умножения на число α:

$$\vec{x} = (x^1, ..., x^n),\ \vec{y} = (y^1, ..., y^n) \in \mathbb{R}^n; \quad \alpha \in \mathbb{R};$$
$$\vec{x} + \vec{y} = (x^1 + y^1, ..., x^n + y^n), \quad \alpha\vec{x} = (\alpha x^1, ..., \alpha x^n),$$

а нулевым элементом будем считать вектор $\vec{0} = (0, ..., 0)$. В связи с этим рассмотрим следующую геометрическую интерпретацию пространства $\mathbb{R}^n$. Каждой точке $P(x^1, ..., x^n) \in \mathbb{E}^n$ поставлен в соответствие радиус-вектор $\vec{x} = (x^1, ..., x^n)$, а для точки $P(x^1, ..., x^n)$ из $\mathbb{R}^n$ мы также используем векторное обозначение $\vec{x} = (x^1, ..., x^n)$. Поэтому каждой точке $\vec{x} = (x^1, ..., x^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ поставим в соответствие точку P из пространства $\mathbb{E}^n$, заданную своими декартовыми координатами: $P(x^1, x^2, ..., x^n)$. Расстояние между точками $P(x^1, ..., x^n)$ и $Q(y^1, ..., y^n)$ в $\mathbb{E}^n$ определяется по правилу

$$|PQ| = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + ... + (x^n - y^n)^2}, \tag{2.11}$$

которое, согласно (2.2), задает метрику пространства $\mathbb{R}^n$. Следовательно, такое соответствие между $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ будет взаимно однозначным и сохраняющим расстояние между точками.

Всюду в дальнейшем, где это не приводит к недоразумению, будем отождествлять пространства $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$.

Это соответствие позволяет метризовать пространство $\mathbb{R}^n$ и перенести на него все геометрические свойства евклидова пространства, а понятия сходимости и предела из $\mathbb{R}^n$ определить для последовательности точек $\{P_k(x_k^1,...,x_k^n)\}_{k=1}^\infty$ евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, обогащая тем самым оба пространства. При таком подходе сфера с центром в точке $\vec{a}=(a^1,...,a^n)$ и радиусом r в $\mathbb{R}^n$ описывается каноническим уравнением

$$(x^1-a^1)^2+(x^2-a^2)^2+...+(x^n-a^n)^2=r^2 \tag{2.12}$$

в декартовых координатах точек пространства $\mathbb{E}^n$, а шар представляет собой множество точек внутри этой сферы.

В случае $n=1$ шар в $\mathbb{R}$ представляет собой интервал на числовой оси: $|x-a|<r$, или $-r<x-a<r$. В случае $n=2$ шар в $\mathbb{R}^2$ представляет собой круг: $(x^1-a^1)^2+(x^2-a^2)^2<r^2$ и т.д.

Проведём классификацию множеств точек в $\mathbb{R}^n$ (и, соответственно, в $\mathbb{E}^n$). Начнём с классификации самих точек и сформулируем важное в дальнейшем понятие — окрестность точки $\vec{x}$.

♦ Точка $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ называется *внешней точкой* множества $X\subset\mathbb{R}^n$, если существует шар с центром с точке $\vec{x}_0$, который не принадлежит множеству X, т.е.

$$\exists S(\vec{x}_0,\varepsilon): S(\vec{x}_0,\varepsilon)\cap X=\emptyset. \tag{2.13}$$

♦ Точка $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^n$ называется *внутренней точкой* множества $X\subset\mathbb{R}^n$, если существует шар с центром с точке $\vec{x}_0$, который целиком принадлежит множеству X, т.е.

$$\exists S(\vec{x}_0,\varepsilon)\subset X. \tag{2.14}$$

♦ Совокупность всех внутренних точек множества $X\subset\mathbb{R}^n$ называется его *внутренностью* и обозначается int X (от латинского *interno* — внутри).

Очевидно, что int $X\subset X$.

♦ Множество $X\subset\mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если $X=\operatorname{int}X$, т.е. все точки множества X внутренние.

♦ *Окрестностью точки* $\vec{x}_0\in X\subset\mathbb{R}^n$ называется любое открытое множество, для которого $\vec{x}_0$ является внутренней точкой. Для обозначения окрестности используется символ $O(\vec{x}_0)$.

Пример 2.5. Показать, что шар $S(\vec{a},r)$ является открытым множеством: $\operatorname{int}S(\vec{a},r)=S(\vec{a},r)$.

Решение. Согласно определению,

$$S(\vec{a},r)=\{\vec{x}|\vec{x}\in\mathbb{R},\rho(\vec{x},\vec{a})<r\}.$$

Пусть $\vec{x}\,'$ — произвольная точка шара $S(\vec{a},r)$. Следовательно, $\rho(\vec{x}\,',\vec{a})<r$. Положим

$$\varepsilon=r-\rho(\vec{x}\,',\vec{a})>0. \tag{2.15}$$

Тогда шар $S(\vec{x}\,', \varepsilon) \subset S(\vec{a}, r)$. В самом деле, если $\vec{x} \in S(\vec{x}\,', \varepsilon)$, то

$$\rho(\vec{x}, \vec{x}\,') < \varepsilon. \tag{2.16}$$

В силу неравенства треугольника и (2.16)

$$\rho(\vec{x}, \vec{a}) \leqslant \rho(\vec{x}, \vec{x}\,') + \rho(\vec{x}\,', \vec{a}) < \varepsilon + \rho(\vec{x}\,', \vec{a}),$$

а в силу (2.15)

$$\rho(\vec{x}, \vec{a}) < r - \rho(\vec{x}\,', \vec{a}) + \rho(\vec{x}\,', \vec{a}) = r.$$

Следовательно, $\vec{x} \in S(\vec{a}, r)$. Так как $\vec{x}$ — произвольная точка шара $S(\vec{x}\,', \varepsilon)$, то $S(\vec{x}, \varepsilon) \subset S(\vec{a}, r)$. Итак, любая точка $\vec{x}\,'$ шара $S(\vec{a}, r)$ принадлежит ему вместе с некоторым шаром $S(\vec{x}\,', \varepsilon)$. Поэтому шар $S(\vec{a}, r)$ есть открытое множество. В декартовых координатах условие $\vec{x} = (x^1, ..., x^n) \in S(\vec{a}, r)$ соответствует строгому неравенству

$$(x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 + ... + (x^n - a^n)^2 < r^2. \tag{2.17}$$

Из примера 2.5 следует, что множество $S(\vec{x}_0, \varepsilon)$ можно рассматривать как шаровую ε-окрестность точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. При $n = 1$, т.е. в $\mathbb{R}$, ε-окрестностью является интервал $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$ (рис. 1,*а*); для $n = 2$, т.е. в $\mathbb{R}^2$, ε-окрестностью является внутренность круга $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2$ радиуса ε с центром в точке $P_0(x_0, y_0)$ (рис. 1,*б*); для $n = 3$, т.е. в $\mathbb{R}^3$, ε-окрестностью является внутренняя часть шара $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \varepsilon^2$ радиуса ε с центром в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 1,*в*) и т.д.

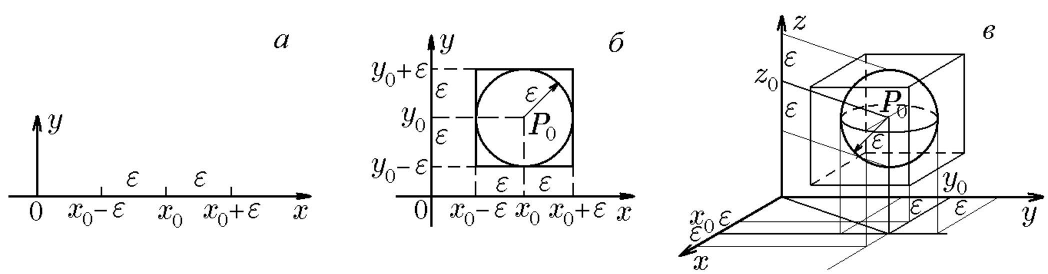


Рис. 1.

Наряду с шаровой окрестностью точки определим прямоугольную окрестность точки $\vec{x}_0$, которой является открытый прямоугольный n-мерный параллелепипед

$$\begin{gathered} \Pi(\vec{x}_0, \vec{\varepsilon}) = \{\vec{x} | \vec{x} \in \mathbb{R}, |x^i - x_0^i| < \varepsilon^i\}, \quad i = \overline{1, n}, \\ \vec{x}_0 = (x_0^1, ..., x_0^n), \quad \vec{\varepsilon} = (\varepsilon^1, ..., \varepsilon^n), \end{gathered} \tag{2.18}$$

который при $n = 1$, как и в случае шаровой окрестности, вырождается в одномерный интервал $\Pi(x_0, \varepsilon) = S(x_0, \varepsilon)$: $-\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon$ (рис. 1,*а*); при $n = 2$ — в открытый прямоугольник $\Pi(\vec{x}_0, \vec{\varepsilon})$: $-\varepsilon^1 < x - x_0 < \varepsilon^1$; $-\varepsilon^2 < y - y_0 < \varepsilon^2$ (рис. 1,*б*, где $\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = \varepsilon$), а при $n = 3$ — в открытый параллелепипед с центром в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 1,*в*, где $\varepsilon^1 = \varepsilon^2 = \varepsilon^3 = \varepsilon$) и т.д.

Пример 2.6. Показать, что любая шаровая окрестность точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ содержит некоторую прямоугольную окрестность (рис. 2,*а*) и наоборот (рис. 2,*б*).

Решение. Пусть $S(\vec{x}_0, \varepsilon)$ — шаровая ε-окрестность точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда параллелепипед $\Pi(\vec{x}_0, \vec{d})$ содержится в ней при $d^i \leqslant \varepsilon/\sqrt{n}$, $i = \overline{1, n}$, поскольку любая точка $\vec{x}$ этого параллелепипеда отстоит от точки $\vec{x}_0$ на расстояние

$$\rho(\vec{x}, \vec{x}_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i - x_0^i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d^i)^2} \leqslant \sqrt{\frac{n\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon,$$

т.е. принадлежит шару $S(\vec{x}_0, \varepsilon)$.

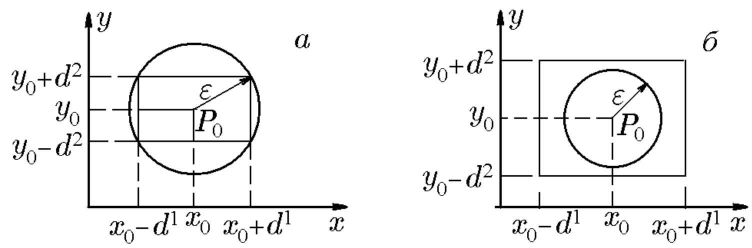


Рис. 2.

Обратно, для прямоугольной окрестности $\Pi(\vec{x}_0, \vec{d})$ точки $\vec{x}_0$ достаточно взять шар $S(\vec{x}_0, \varepsilon)$, радиус которого ε наименьший изо всех d^i $[\varepsilon = \min(d^1, ..., d^n)]$. Для любой точки этого шара $[\vec{x} \in S(\vec{x}_0, \varepsilon)]$ при каждом $i = \overline{1, n}$ справедлива оценка

$$|x^i - x_0^i| \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x^j - x_0^j)^2} < \varepsilon = \min(d^1, ..., d^n),$$

или

$$-\varepsilon < x^i - x_0^i < \varepsilon,$$

из которой в силу произвольности $\vec{x}$ следует, что шар $S(\vec{x}_0, \varepsilon)$ принадлежит параллелепипеду $\Pi(\vec{x}_0, \vec{d})$.

◊ Выбор вида окрестности определяется конкретной задачей и не исчерпывается шаровой и прямоугольной окрестностями. Например, при необходимости окрестность точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ можно выбрать в виде открытого n-осного эллипсоида

$$\frac{(x^1 - x_0^1)^2}{\varepsilon_1^2} + \frac{(x^2 - x_0^2)^2}{\varepsilon_2^2} + ... + \frac{(x^n - x_0^n)^2}{\varepsilon_n^2} < 1$$

и т.д.

♦ Точка $\vec{x}_0$ называется *предельной точкой множества* $X \subset \mathbb{R}^n$, если любая окрестность точки $\vec{x}_0$ содержит по меньшей мере одну точку из множества X, не совпадающую с $\vec{x}_0$, т.е.

$$\forall O(\vec{x}_0) \exists \vec{x} \in O(\vec{x}_0) : \vec{x} \in X, \vec{x} \neq \vec{x}_0.$$

Сама предельная точка может как принадлежать, так и не принадлежать множеству X.

◊ Каждая внутренняя точка множества X является предельной. Например, все точки интервала $]a, b[\subset \mathbb{R}$ будут его предельными точками. Концы интервала a и b — тоже предельные точки, но они не принадлежат интервалу.

♦ Предельную точку множества $X \subset \mathbb{R}^n$, для которой при любом $\varepsilon > 0$ существует точка $\vec{x} \in X$ $(\forall\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists\vec{x} \in X : \rho(\vec{x}, \vec{0}) > \varepsilon)$ такая, что

$$\rho(\vec{x}, \vec{0}) > \varepsilon,$$

обозначают символом ∞.

♦ Множество всех предельных точек множества X обозначается как X'.

♦ Точка $\vec{x}_0 \in X$, не являющаяся предельной точкой множества X, называется *изолированной точкой* множества X, т.е.

$$\exists O(\vec{x}_0) : O(\vec{x}_0) \cap X = \vec{x}_0.$$

◊ Каждая точка множества X является или предельной, или изолированной точкой.

♦ Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельный точки: $X' \subset X$.

Например, отрезок $[a, b]$ замкнут в $\mathbb{R}$, а интервал $]a, b[$ замкнутым в $\mathbb{R}$ не является.

♦ Объединение множества X и всех его предельных точек называется *замыканием множества* X и обозначается $\bar{X}$: $\bar{X} = X \cup X'$; $\bar{X}$ — замкнутое множество.

♦ Точка $\vec{x}_0$ называется *граничной точкой* множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если в любой окрестности точки $\vec{x}_0$ есть как точки, принадлежащие множеству X, так и точки, не принадлежащие множеству X, т.е. для

$$\forall O(\vec{x}_0) \exists\vec{x} : \vec{x} \in X \wedge \exists\vec{x}\,' : \vec{x}\,' \notin X.$$

Сама граничная точка $\vec{x}_0$ может не принадлежать множеству X.

◊ Всякая изолированная точка множества X является граничной точкой.

♦ Совокупность всех граничных точек множества X называется *границей множества* X и обозначается ∂X.

Например, $\partial]a, b[= \{a, b\}$, $\partial[a, b] = \{a, b\}$, $\partial S(\vec{x}_0, \varepsilon) = \{\vec{x} : \rho(\vec{x}, \vec{x}_0) = \varepsilon\}$.

◊ Для любого заданного множества $X \subset \mathbb{R}^n$ всякая точка пространства $\mathbb{R}^n$ является либо внешней, либо внутренней, либо граничной точкой.

♦ Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, целиком лежащей в множестве X.

♦ Открытое и связное множество в $\mathbb{R}^n$ называется *областью*. Замыкание области называется *замкнутой областью.*

3. Определение и геометрический смысл функции нескольких переменных

♦ Переменная w из некоторого множества $E \subset \mathbb{R}$ называется *функцией независимых переменных* $x^1, ..., x^n$, если каждой точке $\vec{x} = (x^1, ..., x^n) \in D \subset \mathbb{R}^n$ ставится в соответствие одно или несколько значений $w \in E \subset \mathbb{R}$. В первом случае функция называется *однозначной*, во втором — *многозначной*. Множество $D = D(w)$ называется *областью определения*, а множество $E = E(w)$ — *областью изменения* функции w.

Тот факт, что w является функцией независимых переменных $x^1, ..., x^n$, записывается как

$$w = f(x^1, ..., x^n) = f(\vec{x}) \quad \text{или} \quad w = w(x^1, ..., x^n) = w(\vec{x}), \tag{3.1}$$

а также
$$f : D \to \mathbb{R} \quad \text{или} \quad f : \mathbb{R}^n \supset D \to E \subset \mathbb{R}. \tag{3.2}$$
В зависимости от размерности пространства $\mathbb{R}^n$, которому принадлежит область D, функциональная зависимость (3.1) принимает вид

$$w = f(x^1, ..., x^n) = f(\vec{x}) =$$
$$= \begin{cases} f(x^1), & \vec{x} = (x^1) \in \mathbb{R}, \text{ функция одной переменной;} \\ f(x^1, x^2), & \vec{x} = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2, \text{ функция двух переменных;} \\ \text{и т.д..} \end{cases}$$

Далее функции двух переменных $w = f(x^1, x^2)$ будет уделено особое внимание, поэтому для удобства будем для неё использовать ещё одно обозначение: $z = f(x, y)$ (аналогично для функции трёх переменных — обозначение $w = f(x, y, z)$). Именно переход от функций одной переменной к функциям двух переменных приводит к некоторым принципиальным изменениям, тогда как дальнейшее увеличение числа переменных представляет собой лишь техническое (количественное) обобщение этого перехода.

Как и функции одной переменной, функции двух переменных могут быть заданы

1) аналитически (формулой), как это было в рассмотренных выше примерах; формула указывает те математические операции, которые нужно проделать над аргументами x и y, чтобы получить соответствующее значение функции z;
2) таблицей: табличное задание состоит в том, что для некоторых пар значений независимых переменных указывается соответствующее им значение функции. Так, для первого примера $S = xy$ можно задать либо системой таблиц с одним входом, либо одной таблицей с двумя входами.

Система таблиц с одним входом

$x = x_1$		
y	y_1	y_2
z	$z_{11} = f(x_1, y_1)$	$z_{12} = f(x_1, y_2)$

$x = x_2$		
y	y_1	y_2
z	$z_{21} = f(x_2, y_1)$	$z_{22} = f(x_2, y_2)$

Таблица с двумя входами

	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$	$y_3 = 1{,}5$	$y_4 = 2$
$x_1 = 1$	$S_{11} = 0$	$S_{12} = 1$	$S_{13} = 1{,}5$	$S_{14} = 2$
$x_2 = 2$	$S_{21} = 0$	$S_{22} = 2$	$S_{23} = 3$	$S_{24} = 4$
$x_3 = 3$	$S_{31} = 0$	$S_{32} = 3$	$S_{33} = 4{,}5$	$S_{34} = 6$
$x_4 = 1$	$S_{41} = 0$	$S_{42} = 4$	$S_{43} = 6$	$S_{44} = 8$

В этой таблице на пересечении строки и столбца, соответствующих определённым значениям x и y, поставлено соответствующее значение функции S.

Как и функции одной переменной, функции нескольких переменных можно задавать как явным выражением (3.1):
$$w = f(x^1, ..., x^n),$$
так и неявным выражением
$$F(w, x^1, ..., x^n) = 0, \tag{3.3}$$

где F — заданная функция $(n+1)$-ой переменной.

Если уравнение (3.3) разрешить относительно величины w, мы придём к явному заданию $w = f(x^1, ..., x^n)$. При необходимости из неявно заданной функции (3.3) можно найти зависимость, например, величины x^1 от аргументов $w, x^2, ..., x^n$:

$$x^1 = f_1(w, x^2, ..., x^n).$$

Заметим, что существует возможность исследовать неявно заданные функции независимо от того, можно их выразить в явном виде или нельзя. Поэтому ниже мы рассмотрим методы, позволяющие изучать функции, заданные неявно.

Для геометрической интерпретации функции нескольких переменных вспомним, что точки $x = (x^1, ..., x^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ геометрически интерпретируются как точки $\vec{x} = (x^1, ..., x^n)$ евклидова пространства $\mathbb{E}^n$. В таком подходе каждой точке в $\mathbb{E}^n$ ставится в соответствие величина w, которую можно рассматривать как $(n+1)$-ую декартову координату точки в пространстве $\mathbb{E}^{n+1}$. В результате функцию $w = f(\vec{x})$ можно трактовать как некоторое множество точек в пространстве $\mathbb{E}^{n+1}$, связанных соотношением $w = f(\vec{x})$ или $F(w, \vec{x}) = 0$.

Действительно, при $n = 1$ функция $w = f(x^1)$ (или $y = f(x)$) геометрически будет представлять плоскую линию — график функции в декартовой системе координат wOx^1 (или xOy), как это принято в анализе функций одной переменной.

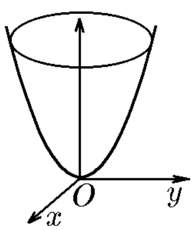


Рис. 3.

При $n = 2$ функция $w = f(x^1, x^2)$ (или $z = f(x, y)$) геометрически будет представлять поверхность в трёхмерном пространстве, описываемую уравнением $z = f(x, y)$ (или $F(x, y, z) = 0$), как это принято в аналитической геометрии. Эту поверхность принято называть *графиком функции двух переменных* $z = f(x, y)$ (рис. 3).

При $n = 3$ функция $w = f(x^1, x^2, x^3)$ (или $w = f(x, y, z)$) будет представлять трёхмерную «гиперповерхность» в четырёхмерном пространстве. Однако в этом случае геометрическая интерпретация функции теряет свою наглядность. Это же относится к функциям с большим количеством переменных. Тем не менее, геометрические интерпретации и терминологию, наглядные в случае функции двух переменных, будем распространять на любое число переменных.

Пример 3.1. Найти и построить область определения, указать область изменения, вычислить частные значения в указанной точке для следующих функций:

$$1)\ z = 4 - x^2 - y^2,\ z = z(x, y)\Big|_{\substack{x=0\\y=1}};\quad 2)\ e^z + x^2 + y^2 - 4 = 0,\ z = z(x, y)\Big|_{\substack{x=1\\y=1}};$$
$$3)\ w^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0,\ w = w(\vec{x}_0),\ \vec{x}_0 = (1, 0, 1).$$

Решение. Для первой функции область определения $D(z) = \mathbb{R}^2$, а поскольку $x^2 + y^2 = 4 - z \geqslant 0$, то $z \leqslant 4$ и, следовательно, $E(z) = [4, -\infty[$. Точка $(x = 0, y = 1)$ принадлежит $D(z)$, поэтому частное значение

$$z = z(x, y)\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = z(0, 1) = (4 - x^2 - y^2)\Big|_{\substack{x=0\\y=1}} = 3.$$

Вторая функция задана неявно, однако допускает представление в явной форме:

$$z = \ln(4 - x^2 - y^2).$$

Из условия $4 - x^2 - y^2 > 0$ следует, что областью определения $D(f) \subset \mathbb{R}^2$ функции является круг $S(\vec{0}, 2)$: $x^2 + y^2 < 4$. Так как при $x = y = 0$ значение функции $z = z(0,0) = \ln 4$, то областью изменения $E(f) \subset \mathbb{R}$ функции является интервал $E(z) = [\ln 4, -\infty[$. Точка $\vec{x}_0 = (1,1)$ принадлежит области определения функции, поэтому

$$z = z(1,1) = \ln(4 - 1 - 1) = \ln 2.$$

Третья функция также задана неявно и допускает представление в явном виде двумя однозначными функциями

$$w_1 = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}, \quad w_2 = -\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2},$$

имеющими одну область определения $D(w) \subset \mathbb{R}^3$, которая представляет собой замкнутый шар $S[\vec{0}, 2]$: $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$. Областью изменения $E(w_1) \subset \mathbb{R}$ является отрезок $[0, 2]$, а область изменения функции w_2 есть $D(w_2) = [-2, 0]$. Точка $\vec{x}_0 = (1, 0, 1)$ принадлежит области определения функции и, следовательно,

$$w = w_1(1,0,1) = \sqrt{2}; \quad w = w_2(1,0,1) = -\sqrt{2}.$$

Пример 3.2. Найти область определения функций

$$1)\ e^z + x^2 + y^2 = 0; \qquad 2)\ \sin z + x^2 + y^2 - z = 0.$$

Решение. 1. Поскольку $e^z > 0$, $x^2 + y^2 \geqslant 0$, то их сумма не может обращаться в нуль. Это означает, что областью определения функции является пустое множество. Другими словами, заданное соотношение не определяет никакую функцию.

2. Второе соотношение определяет неявно заданную функцию, которую не удается записать в явном виде относительно величины $z = z(x, y)$. Однако оно допускает переход к явной форме двузначной функции

$$x = \pm\sqrt{z - \sin z - y^2}$$

с областью определения $z - \sin z \geqslant y^2$ или

$$y = \pm\sqrt{z - \sin z - x^2}$$

с областью определения $z - \sin z \geqslant x^2$.

Пример 3.3. Построить область определения функции

$$z = \ln(x + y).$$

Решение. Функция определена при условии $x + y > 0$ или $y > -x$, т.е. областью определения данной функции является полуплоскость, расположенная выше прямой $y = -x$, не включая саму прямую (рис. 4).

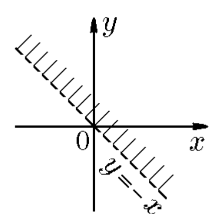


Рис. 4.

Пример 3.4. Найти и построить области определения функций

$$1)\ w = \ln(1 - x - y - z); \quad 2)\ w = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 - 4)(25 - 16x^2 - 9y^2 - 25z^2)}}.$$

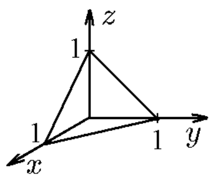


Рис. 5.

Решение. 1) Логарифмическая функция определена для положительных значений аргумента. Следовательно, $1-x-y-z>0$, и для области определения $D(w)$ получим $x+y+z<1$. Это неравенство определяет полупространство над плоскостью $x+y+z=1$ (рис. 5).

2) Вторая функция определена при условии

$$(x^2+y^2+z^2-4)(25-16x^2-9y^2-25z^2)>0,$$

которое эквивалентно двум системам неравенств:

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2-4>0,\\ &25-16x^2-9y^2-25z^2>0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2-4<0,\\ &25-16x^2-9y^2-25z^2<0. \end{aligned}$$

После преобразований первая система примет вид

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2>4,\\ &\frac{x^2}{(4/5)^2}+\frac{y^2}{(3/5)^2}+\frac{z^2}{1^2}<1 \end{aligned}$$

и определяет область вне шара (внешность шара) радиусом $R=2$ с центром в начале координат и внутренность трёхосного эллипсоида с центром в начале координат, полуоси которого меньше, чем радиус шара. Пересечением таких областей является пустое множество.

Вторая система примет вид

$$\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2<4,\\ &\frac{x^2}{(4/5)^2}+\frac{y^2}{(3/5)^2}+\frac{z^2}{1^2}>1 \end{aligned}$$

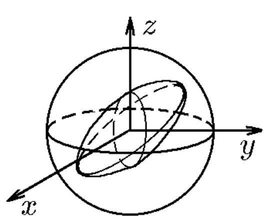


Рис. 6.

и определяет область, являющуюся пересечением внутренности шара радиусом $R=2$ с центром в начале координат и области вне трёхосного эллипсоида с центром в начале координат (внешности эллипсоида), полуоси которого меньше, чем радиус шара. Пересечением этих областей является часть шара радиуса $R=2$ с вырезанным эллипсоидом (рис. 6).

Пример 3.5. Построить графики функций

1) $z=1-x-y$; 2) $z=x^2+y^2$; 3) $e^z+x^2+y^2-4=0$; 4) $x^2+y^2+z^2=4$.

Решение. 1. Как известно из курса аналитической геометрии, первая функция, записанная в виде

$$x+y+z=1,$$

представляет собой уравнение плоскости в отрезках и определяет плоскость, отсекающую на осях координат отрезки, равные единице (см. рис. 5).

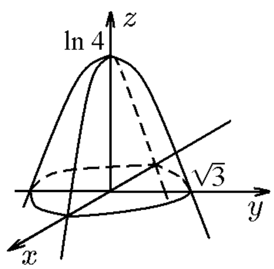


Рис. 7.

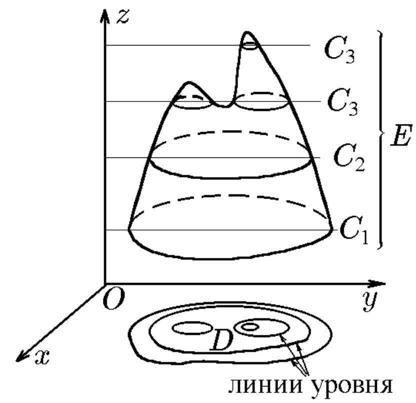


Рис. 8.

2. Вторая функция определяет параболоид вращения с осью симметрии Oz (рис. 9,*а*).

3. Графиком неявно заданной функции $e^z + x^2 + y^2 - 4 = 0$ будет поверхность вращения, полученная вращением вокруг оси Oz кривой $z = \ln(4 - x^2)$ (рис. 7).

4. Функция $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ представляет сферу радиусом $R = 2$ с центром в начале координат (см. рис. 6).

Построить поверхности, представляющие собой графики функций $z = z(x, y)$, как в примере 3.5, возможно лишь в ограниченном числе случаев. Поэтому для определения структуры и основных свойств поверхности нередко используется метод сечений, основанный на сечении заданной поверхности параллельными и равноотстоящими плоскостями, как правило, параллельными координатным плоскостям, например, плоскостями $z = C$, параллельными плоскости xOy (рис. 8), где C — произвольное число из области $E(z)$.

♦ Множество точек (x, y) плоскости xOy, в которых функция $z = f(x, y)$ принимает одно и то же значение C, называется *линией уровня* функции $z = f(x, y)$.

Задавая C различные значения, получим различные линии уровня для данной функции. По взаимному расположению линий уровня функции $z = f(x, y)$ можно получить представление о графике этой функции, т.е. о форме поверхности (рис. 8).

Понятие линии уровня распространяется на любое число переменных.

♦ *C-уровнем функции* $w = f(\vec{x})$ называется множество точек, координаты которых связаны уравнением $C = f(\vec{x})$. При $n = 3$ C-уровни функций называются *поверхностями* уровня, а при $n > 3$ — *гиперповерхностями* уровня.

Пример 3.6. Записать и построить линии уровня функции

$$1)\ 9z = x^2 + 9y^2; \quad 2)\ z = x^y,\ x > 0; \quad 3)\ w = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Решение. 1) Положив в первой функции $z = C$, найдём уравнения линий уровня

$$\frac{x^2}{(3\sqrt{C})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{C})^2} = 1, \tag{3.4}$$

представляющих множество эллипсов с одним центром в начале координат и полуосями $3\sqrt{C}$ и $\sqrt{C}$ (рис. 9,*б*). Поэтому уравнение

$$z = \frac{x^2}{9} + y^2$$

определяет параболоид, а сечения его плоскостями $z = C$ дают линии пересечения, совпадающие с линиями уровня (3.4) (см. рис. 9).

2) Функция $z = x^y$ при $x > 0$ принимает только положительные значения. Пусть $z = C$ — положительное число. Линией уровня будет кривая $C = x^y$. Прологарифмировав это уравнение и разрешив его относительно y, получим уравнение линий уровня в явном виде:

$$y = \frac{\ln C}{\ln x}, \quad x \neq 1,$$

изображённых на рис. 10.

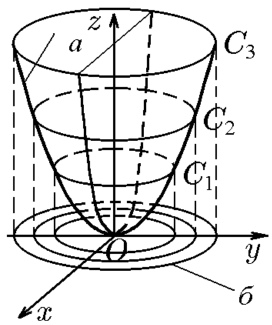


Рис. 9.

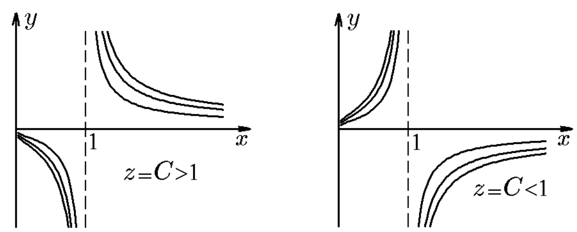


Рис. 10.

3) Функция w — функция трёх переменных — принимает только положительные значения. Пусть $w = C$ — положительное число. Её C-уровни представляют поверхности, определяемые уравнением

$$w = C = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{C^2},$$

из которого следует, что поверхностями уровня являются сферы радиуса $R = 1/C$ с центром в начале координат. Если w рассматривать как потенциал точечного заряда, то в физике эти поверхности называются эквипотенциальными (поверхностями равного потенциала).

Для функций нескольких переменных вводятся понятия supremum, infimum аналогично тому, как эти понятия были определены для функций одной переменной.

ГЛАВА 2

Предел и непрерывность функции нескольких переменных

4. Предел функции в точке

Выше мы ввели понятие окрестности точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ как открытого множества $O(\vec{x}_0)$, для которого точка $\vec{x}_0$ является внутренней. Дополним его понятием проколотой окрестности.

♦ *Проколотая окрестность* $\dot{O}(\vec{x}_0)$ получается из $O(\vec{x}_0)$ удалением самой точки $\vec{x}_0$, т.е.

$$\dot{O}(\vec{x}_0) = O(\vec{x}_0) \setminus \{\vec{x}_0\}. \tag{4.1}$$

Для функции, определённой в $\dot{O}(\vec{x}_0)$, сформулируем определение предела. Как и в случае одной переменной, можно сформулировать два определения предела: по Гейне и по Коши.

♦ (Гейне) Для функции $f(\vec{x})$, определённой в $\dot{O}(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^n$, число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f(\vec{x})$ при $\vec{x} \to \vec{x}_0$ и обозначается

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A \quad \big(f(\vec{x}) \to A \text{ при } \vec{x} \to \vec{x}_0\big), \tag{4.2}$$

если для любой последовательности $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \dot{O}(\vec{x}_0)$ такой, что

$$\lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0,$$

выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = A.$$

С помощью логических символов это определение запишется так:

$$\{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A\} \Leftrightarrow \{\forall \{\vec{x}_k\}_{k=1}^{\infty} \in \dot{O}(\vec{x}_0) : \lim_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{x}_0 \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = A\}. \tag{4.3}$$

♦ (Коши) Для функции $f(\vec{x})$, определённой в окрестности $\dot{O}(\vec{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ точки $\vec{x}_0$, число $A \in \mathbb{R}$ называется *пределом функции* $f(\vec{x})$ при $\vec{x} \to \vec{x}_0$ и обозначается

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\vec{x}$ из проколотой окрестности $\dot{O}(\vec{x})$, удовлетворяющих условию $\rho(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta$, выполняется неравенство $|f(\vec{x}) - A| < \varepsilon$.

В логической символике:

$$\{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A\} \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{x} \in \dot{O}(\vec{x}_0) : \rho(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - A| < \varepsilon\}. \tag{4.4}$$

Эквивалентность двух определений доказывается так же, как и для функции одной переменной.

Наряду с обозначением (4.2) будем использовать обозначение

$$A = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \lim_{\substack{x^1\to x^1_0\\ \cdots\\ x^n\to x^n_0}} f(x^1, ..., x^n). \tag{4.5}$$

Предел (4.5) иногда называют *n-кратным пределом* функции $f(\vec{x})$, или *пределом по совокупности переменных*. Для функции двух переменных $f(x,y)$ при $x\to a$, $y\to b$ выражение (4.5) примет вид

$$A = \lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,y),$$

и число A называют *пределом функции двух переменных* $f(x,y)$, или *двойным пределом*.

Важно заметить, что определения предела функции нескольких переменных (4.3), (4.4) получаются из аналогичных определений для функции одной переменной формальной заменой метрики $|x-x_0|$ для пространства $\mathbb{R}$ на метрику $\rho(\vec{x},\vec{x}_0) = |\vec{x}-\vec{x}_0|$ для пространства $\mathbb{R}^n$. С учётом этого бесконечные пределы и пределы при $\vec{x}\to\infty$ можно сформулировать, исходя из аналогичных определений для функции одной переменной, например:

$$\left\{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}\infty\\ +\infty\\ -\infty\end{pmatrix}\right\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall\vec{x}\in\dot{O}(\vec{x}_0): \rho(\vec{x},\vec{x}_0)<\delta \Rightarrow \begin{pmatrix}|f(\vec{x})|>\varepsilon\\ f(\vec{x})>\varepsilon\\ f(\vec{x})<-\varepsilon\end{pmatrix}\right\} \tag{4.6}$$

и

$$\{\lim_{\vec{x}\to\infty} f(\vec{x}) = A\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon>0\exists\delta>0:\ \forall\vec{x}\in\rho(\vec{x},0)>\delta \Rightarrow |f(\vec{x})-A|<\varepsilon\}. \tag{4.7}$$

Сформулируем понятие предела функции, когда $x\to\infty$, $y\to a$.

♦ Число A называется *пределом функции двух переменных* $f(x,y)$ при $x\to\infty$, $y\to a$ и обозначается

$$A = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} f(x,y),$$

если для любого положительного числа $\varepsilon>0$, в том числе и сколь угодно малого, существуют числа $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ такие, что для всех (x,y), для которых $|x|>\delta_1$, $|y-a|<\delta_2$ выполняется неравенство $|f(x,y)-A|<\varepsilon$, или

$$\{\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} f(x,y) = A\} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{\forall\varepsilon>0, \exists\delta_1>0, \delta_2>0|\forall(x,y): |x|>\delta_1, |y-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x,y)-A|<\varepsilon\}.$$

♢ Аналогично формулируются понятия предела функции нескольких переменных, когда часть переменных стремится к ∞, $\pm\infty$, а оставшаяся часть переменных стремится к конечным пределам.

Все правила вычисления пределов, справедливые для функций одной переменной, справедливы и для функций нескольких переменных:

$$1)\ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}[C_1 f_1(\vec{x}) + C_2 f_2(\vec{x})] = C_1 \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_1(\vec{x}) + C_2 \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_2(\vec{x});$$

$$2)\ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}[f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x})] = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_1(\vec{x}) \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_2(\vec{x});$$

$$3)\ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0}\frac{f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})} = \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_1(\vec{x}) \Big/ \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_2(\vec{x}), \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f_2(\vec{x}) \neq 0,$$

если пределы, стоящие в правой части, существуют. Кроме того, теоремы о пределах, как и свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин, повторяют теоремы о пределах и свойства бесконечно малых и бесконечно больших величин для одной переменной, причём их содержание и доказательства являются дословным повторением доказательств соответствующих теорем для функции одной переменной, как, например, в следующей теореме.

Теорема 4.1. *Пусть функции $f(\vec{x})$ и $\varphi(\vec{x})$ определены для $\vec{x} \in \dot{O}(\vec{x}_0)$ и $|f(\vec{x})| \leqslant \varphi(\vec{x})$ в $\dot{O}(\vec{x}_0)$. Если $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \varphi(\vec{x}) = 0$, то и $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = 0$.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \varphi(\vec{x}) = 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся окрестность $O(\vec{x}_0)$, например шар $S(\vec{x}_0, \delta)$ такой, что для всех $\vec{x} \in \dot{S}(\vec{x}_0, \delta)$ выполнено неравенство $|\varphi(\vec{x})| < \varepsilon$. Тем более для всех $\vec{x} \in \dot{S}(\vec{x}_0, \delta)$ выполнено неравенство $|f(\vec{x})| < \delta$, т.е.

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = 0.$$

Пример 4.1. Показать, что при $a > 0$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2)^a = 0.$$

Решение. Воспользуемся определением Коши и для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \sqrt[a]{\varepsilon}$. Пусть точка $P(x, y)$ принадлежит шару $S(\vec{0}, \delta)$, тогда

$$x^2 + y^2 < \delta^2$$

и, следовательно,

$$(x^2 + y^2)^a < (\sqrt[2a]{\varepsilon})^{2a} = \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2 + y^2)^a = 0.$$

Пример 4.2. Показать, что

$$1)\ \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}} xy^2 = 12; \quad 2)\ \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to 3}} \frac{2xy - y + 7}{2x - 1} = 3.$$

Решение. Воспользуемся определением Коши и выберем прямоугольную окрестность точки $P_0(3,2)$. Пусть точка $P(x,y)$ принадлежит прямоугольнику

$$\Pi(P_0,\delta)\colon |x-3|<\delta,\ |y-2|<\delta. \tag{4.8}$$

Согласно определению предела, нужно найти такое $\delta>0$, зависящее от ε, чтобы выполнялось неравенство

$$|xy^2-12|<\varepsilon.$$

Чтобы определить $\delta(\varepsilon)$, запишем это неравенство в более удобном виде:

$$|xy^2-3y^2+3y^2-12| = |y^2(x-3)+3(y+2)(y-2)| < y^2|x-3|+3|y+2|\,|y-2| < \varepsilon. \tag{4.9}$$

Так как нам нужно рассматривать значения y, достаточно близкие к 2, то можно считать $|y|<3$, $|y+2|<5$. Поэтому неравенство (4.9) удовлетворяется, если будет выполнено неравенство

$$9|x-3|+15|y-2|<\varepsilon.$$

Последнее неравенство выполняется, если в оценках (4.8) выбрать $\delta=\varepsilon/24$, т.е. если

$$|x-3|<\frac{\varepsilon}{24},\quad |y-3|<\frac{\varepsilon}{24}.$$

Это означает, что

$$\lim_{\substack{x\to3\\ y\to2}} xy^2=12.$$

Для второго предела, согласно формулировкам (4.6), (4.7), при любом $\varepsilon>0$ нужно найти такие $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$, зависящие от ε, чтобы неравенство

$$\left|\frac{2xy-y+7}{2x-1}-3\right|<\varepsilon \tag{4.10}$$

выполнялось для всех x и y, удовлетворяющих условиям

$$\forall x: |x|>\delta_1,\quad \forall y: |y-3|<\delta_2. \tag{4.11}$$

Чтобы найти $\delta_1(\varepsilon)$ и $\delta_2(\varepsilon)$, запишем исходное неравенство (4.10) в виде

$$\left|\frac{2xy-y+7}{2x-1}-3\right| = \left|(y-3)+\frac{7}{2x-1}\right|<\varepsilon.$$

Последнее неравенство будет выполняться, если удовлетворяется неравенство

$$|y-3|+\frac{7}{|2x-1|}<\varepsilon. \tag{4.12}$$

Рассматривая достаточно большие по модулю значения x, можно считать, что $|2x-1|>|x|$, и потому неравенство (4.12) будет удовлетворяться, если будет выполнено неравенство

$$\frac{7}{|x|}+|y-2|<2.$$

Последнее, очевидно, выполняется для всех значений x и y, если в оценках (4.11) выбрать $\delta_1=14/\varepsilon$, $\delta_2=\varepsilon/2$, т.е. если

$$|x|>\frac{14}{\varepsilon},\ \text{или}\ \frac{1}{|x|}<\frac{\varepsilon}{14},\ \text{и}\ |y-3|<\frac{\varepsilon}{2},$$

следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}} \frac{2xy - y + 7}{2x - 1} = 3.$$

Пример 4.3. Вычислить двойные пределы

$$1)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}; \quad 2)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}; \quad 3)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} \tag{4.13}$$

или показать, что они не существуют.

Решение. В данном случае удобнее воспользоваться определением предела функции по Гейне. Пусть две не совпадающие последовательности $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\vec{x}'_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$\vec{x}_n = (x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \quad \vec{x}'_n = (x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right), \tag{4.14}$$

сходятся к одной точке $x = 0$, $y = 0$ при $n \to \infty$.

1. Запишем последовательности значений первой функции из (4.13), соответствующие последовательностям (4.14):

$$\{f(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{f(x'_n, y'_n)\}_{n=1}^{\infty}, \tag{4.15}$$

которые сходятся к различным пределам:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2(1/n)(1/n)}{1/n^2 + 1/n^2} = 1;$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2(1/n)(1/n^2)}{1/n^2 + 1/n^4} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^3(n^4+n^2)} = 0.$$

2. Запишем последовательности значений (4.15) второй функции из (4.13), соответствующие последовательностям (4.14):

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)^2(1/n)^2}{(1/n)^2(1/n)^2 + 0} = 1;$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{(1/n)^2(1/n^2)^2}{(1/n)^2(1/n^2)^2 + (1/n - 1/n^2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + n^2(n-1)^2} = 0.$$

3. Запишем последовательности значений (4.15) третьей функции из (4.13), соответствующие последовательностям (4.14):

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2(1/n)^2(1/n)}{(1/n)^4 + (1/n)^2} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^3(1+n^2)} = 0;$$
$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2(1/n)^2(1/n^2)}{(1/n)^4 + (1/n^2)^2} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{2n^4} = 1.$$

Таким образом, согласно определению предела функции по Гейне, пределы (4.13) не существуют.

Пример 4.4. Вычислить двойные пределы

$$1)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad 2)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\Big(\frac{xy}{x^2+y^2}\Big)^{1/x^2};\quad 3)\ \lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2}.$$

Решение. 1. Из очевидного неравенства

$$(x-y)^2\geqslant 0 \tag{4.16}$$

следует

$$x^2+y^2\geqslant 2xy.$$

С учётом неравенства $|\sin\alpha|\leqslant|\alpha|$ имеем оценку

$$0\leqslant|\sin xy|\leqslant|xy|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}$$

и, следовательно,

$$0\leqslant\frac{|\sin xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}.$$

А поскольку, согласно примеру 4.1, при $a=1/2$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\sqrt{x^2+y^2}=0,$$

то в силу теоремы 4.1

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

2. Для второго предела воспользуемся неравенством (4.16) в виде

$$\frac{xy}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$0\leqslant\frac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{1}{2}$$

и, соответственно,

$$0\leqslant\Big|\frac{xy}{x^2+y^2}\Big|^{1/x^2}\leqslant\Big(\frac{1}{2}\Big)^{1/x^2}.$$

Поскольку

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{1/x^2}=\lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{1/x^2}=0,$$

то в силу теоремы 4.1

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\Big(\frac{xy}{x^2+y^2}\Big)^{1/x^2}=0.$$

3. Для третьего предела воспользуемся неравенством (4.16) в виде

$$x^2y^2 \leqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{4}.$$

Тогда в предположении $0 < x^2+y^2 < 1$ из неравенства

$$1 \geqslant (x^2+y^2)^{x^2y^2} \geqslant (x^2+y^2)^{(x^2+y^2)/4}$$

и предела

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{(x^2+y^2)/4} = \lim_{t\to+0} t^{t^2/4} = \lim_{t\to+0} e^{(t^2/4)\ln t} = 1$$

следует, что

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1.$$

5. Предел функции в точке по множеству и по направлению

Для функции одной переменной понятие предела функции в точке было дополнено понятием одностороннего предела: правостороннего и левостороннего. Понятие предела функции нескольких переменных дополним понятием предела функции в точке по множеству.

♦ Число A называется *пределом функции $f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ по множеству* $X \subset D(f)$ и обозначается

$$A = \lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in X}} f(\vec{x}), \tag{5.1}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех $\vec{x} \in \dot{S}(\vec{x}_0, \delta) \cap X$ справедливо $|f(\vec{x}) - A| < \varepsilon$, или

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in \dot{S}(\vec{x}_0, \delta) \cap X \Rightarrow |f(\vec{x}) - A| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

Если множество X представляет собой отрезок луча L:

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{\ell}t, \quad t \geqslant 0,$$

выходящего из точки $\vec{x}_0$ в направлении вектора $\vec{\ell} = (\ell^1, ..., \ell^n)$, $(\ell^1)^2 + ... + (\ell^n)^2 = 1$, то n-кратный предел (5.1) можно свести к однократному пределу по параметру $t \to +0$, называемому *пределом по направлению*.

♦ *Пределом функции $f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ по направлению* $\vec{\ell} = (\ell^1, ..., \ell^n)$, $|\vec{\ell}| = 1$, называется выражение

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in\dot{O}(\vec{x}_0)\cap L}} f(\vec{x}) = \lim_{t\to+0} f(\vec{x}_0 + \vec{\ell}t), \tag{5.3}$$

где L — луч, выходящий из точки $\vec{x}_0$ в направлении вектора $\vec{\ell}$.

При $n = 2$ направление задаётся углом α между вектором $\vec{\ell}$ и осью Ox, т.е. $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ и, следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0\\ (x,y)\in\dot{O}(x_0,y_0)\cap L}} f(x,y) = \lim_{t\to+0} f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha). \tag{5.4}$$

Пример 5.1. Вычислить предел функции

$$u(x,y,z) = \frac{x^2 y\sqrt{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1} \tag{5.5}$$

в точке $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ по направлению $\vec{\ell} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$.

Решение. Пусть L — луч, выходящий из точки $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ в направлении вектора $\vec{\ell}$, тогда координаты точек луча L определяется соотношением

$$x = x_0 + \ell^1 t = \frac{1}{\sqrt{3}}t, \quad y = y_0 + \ell^2 t = \frac{1}{\sqrt{3}}t, \quad z = z_0 + \ell^3 t = \frac{1}{\sqrt{3}}t, \quad t > 0,$$

подстановка которых в (5.3) приводит к пределу по направлению луча L:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0\\ (x,y,z)\in L}} \frac{x^2 y\sqrt{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}-1} = \lim_{t\to+0} \frac{(t^2/3)(t/\sqrt{3})\sqrt{t/\sqrt{3}}}{\sqrt{t^2+1}-1} =$$

$$= \frac{1}{3^{4/4}} \lim_{t\to+0} \frac{t^{7/2}(\sqrt{t^2+1}+1)}{(\sqrt{t^2+1}-1)(\sqrt{t^2+1}+1)} = \frac{1}{3^{7/4}} \lim_{t\to+0} \frac{t^{7/2}(\sqrt{t^2+1}+1)}{t^2} = 0.$$

Пример 5.2. Вычислить предел функции

$$z(x,y) = (x^2+y^2)^a, \quad a > 0,$$

в точке $x_0 = y_0 = 0$ по направлению $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Решение. Пусть L — луч, выходящий из точки $x_0 = y_0 = 0$ под углом α к оси Ox. Тогда координаты его точек связаны соотношением

$$x = t\cos\alpha, \quad y = t\sin\alpha,$$

и, следовательно, согласно (5.4), предел по направлению вектора $\vec{\ell}$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} (x^2+y^2)^a = \lim_{t\to+0} (t^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha)^a = \lim_{t\to+0} t^{2a} = 0.$$

Это означает, что значение предела не зависит от направления и совпадает со значением двойного предела

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)^a = 0,$$

найденным в примере 4.1.

Пример 5.3. Вычислить пределы функций

$$z_1 = \frac{2xy}{x^2+y^2}; \quad z_2 = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}; \quad z_3 = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

в точке $x_0 = y_0 = 0$ по направлению $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Решение. Координаты точек луча L, выходящего из точки $x_0 = y_0 = 0$ в направлении вектора $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, образующего с осью Ox угол α, определяются соотношением

$$x = t\cos\alpha, \quad y = t\sin\alpha,$$

и, следовательно, согласно (5.4), имеем для $z_1(x, y)$ предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} z_1 = \lim_{t\to+0} \frac{(2t\cos\alpha)(t\sin\alpha)}{t^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha} = 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha, \tag{5.6}$$

значение которого зависит от направления, т.е. от угла α.

Для функции $z_2(x, y)$ имеем предел по направлению $\vec{\ell}$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} z_2 = \lim_{t\to+0} \frac{(t^2\cos^2\alpha)(t^2\sin^2\alpha)}{(t^2\cos^2\alpha)(t^2\sin^2\alpha) + t^2(\cos\alpha - \sin\alpha)^2},$$

который при $\alpha \neq \pi/4$ и $\alpha \neq 5\pi/4$ равен

$$\lim_{t\to+0} \frac{t^4(\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha)}{t^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha + t^2(\cos\alpha - \sin\alpha)^2} = \lim_{t\to+0} \frac{t^4(\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha)}{t^2(\cos\alpha - \sin\alpha)^2} = 0,$$

а при $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = 5\pi/4$, т.е. при $\cos\alpha = \sin\alpha = \pm 1/\sqrt{2}$, равен

$$\lim_{t\to+0} \frac{t^4/4}{t^4/4 \pm t^2(1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2})} = 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} z_2 = \lim_{t\to+0} z_2(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \dfrac{\pi}{4},\ \alpha \neq \dfrac{5\pi}{4},\ \text{т.е. } y \neq x; \\ 1, & \alpha = \dfrac{\pi}{4},\ \alpha = \dfrac{5\pi}{4},\ \text{т.е. } y = x \end{cases}.$$

Это означает, что пределы по всем направлениям, за исключением прямой $y = x$, равны между собой и равны нулю. Пределы по направлениям с углами $\alpha = \pi/4$ и $\alpha = 5\pi/4$, т.е. на прямой $y = x$, в отличие от других равны единице.

Для функции $z_3(x, y)$ имеем предел по направлению $\vec{\ell}$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} z_3(x, y) = \lim_{t\to+0} \frac{2t^2(\cos^2\alpha)(t\sin\alpha)}{t^4\cos^4\alpha + t^2\sin^2\alpha} = 2\lim_{t\to+0} \frac{t(\cos^2\alpha)(\sin\alpha)}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha},$$

который при $\alpha = 0$ равен

$$2\lim_{t\to+0} \frac{0}{t^2\cos^4\alpha} = 0,$$

а при $\alpha \neq 0$ имеет то же значение:

$$2\lim_{t\to+0} \frac{t(\cos^2\alpha)(\sin\alpha)}{t^2\cos^4\alpha + \sin^2\alpha} = 2\lim_{t\to+0} \frac{t(\cos^2\alpha)(\sin\alpha)}{\sin^2\alpha} = 0,$$

т.е.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} z_3(x,y) = \lim_{t\to+0} z_3(t\cos\alpha, t\sin\alpha) = 0$$

для всех направлений.

Таким образом, предел первой функции $z_1(x,y)$ меняется в зависимости от направления как $\sin 2\alpha$; пределы функции $z_2(x,y)$ по всем направлениям, за исключением одного, равны между собой и равны нулю. Исключением является прямая $y = x$, при стремлении по которой предел функции $z_2(x,y)$ равен единице. Наконец, для функции $z_3(x,y)$ пределы по всем направлениям без исключения равны между собой и равны нулю.

Возвращаясь к пределу функции в точке $\vec{x}_0$ по множеству M, отметим, что из существования предела

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in M}} f(\vec{x})$$

следует существование предела

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in M'}} f(\vec{x})$$

для любого подмножества $M' \subset M$, для которого точка $\vec{x}_0$ является предельной. В частности, из существования двойного предела функции $f(x,y)$ при $(x,y) \to (x_0,y_0)$ следует существование предела функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) по любому направлению и равенство этих пределов двойному пределу функции $f(x,y)$ при $(x,y) \to (x_0,y_0)$, что и иллюстрируют результаты примеров 4.1 и 5.2.

Обратное утверждение неверно. Из результатов примеров 4.4 и 5.3 следует, что из существования и равенства пределов по любому направлению в точке $(x_0 = 0, y_0 = 0)$ для функции $z_3(x,y)$ не вытекает существование в этой точке её двойного предела. Следующий пример поясняет этот результат.

Пример 5.4. В примере 5.3 было показано, что пределы функции

$$z_3(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

в точке $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ по всем направлениям равны между собой и равны нулю. В примере же 4.4 было показано, что двойной предел этой функции в той же самой точке не существует. Указать множество, по которому предел функции $z_3(x,y)$ в точке $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ отличен от нуля.

Решение. Рассмотрим параболу $\mathcal{L}$: $y = px^2$, $p \neq 0$, проходящую через точку $x_0 = y_0 = 0$. Поскольку значение функции $z_3(x,y)$ на параболе $\mathcal{L}$ постоянно:

$$z_3(x,y)\Big|_{x,y\in\mathcal{L}} = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}\Big|_{y=px^2} = \frac{2x^2px^2}{x^4+p^2x^4} = \frac{2p}{1+p^2},$$

то предел функции $z_3(x,y)$ при стремлении к точке $x_0 = y_0 = 0$ по параболе $\mathcal{L}$ равен этому значению:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in\mathcal{L}}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in\mathcal{L}}} \frac{2p}{1+p^2} = \frac{2p}{1+p^2} \neq 0.$$

Таким образом, парабола $\mathcal{L}$ представляет собой множество, предел по которому в точке $x_0 = y_0 = 0$ отличается от предела по любому направлению. Это означает, что пределы по двум пересекающимся множествам: параболе $\mathcal{L}$: $y = px^2$ и прямой L: $y = kx$, имеют различные значения. Этим и объясняется, что двойной предел функции $z_3(x, y)$ в точке $x_0 = y_0 = 0$ не существует. Этот же результат был получен в примере 4.4 с помощью определения двойного предела функции по Гейне.

Пример 5.5. Вычислить двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y}{x+y}. \tag{5.7}$$

Решение. Пусть L — прямая $y = kx$, тогда предел в этой точке по этой прямой равен

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{x-y}{x+y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{x-kx}{x+kx} \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{1-k}{1+k} = \frac{1-k}{1+k}.$$

Этот предел зависит от углового коэффициента прямой k; следовательно, двойной предел (5.7) не существует.

Пример 5.6. Для пределов

$$1) \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} e^{x/(x^2+y^2)}; \quad 2) \quad \lim_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty\\ (x,y)\in L}} e^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

указать направления луча L: $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, по которым существуют конечные пределы.

Решение. Согласно определению (5.4),

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} e^{x/(x^2+y^2)} = \lim_{t\to +0} e^{t\cos\alpha/(t^2\cos^2\alpha + t^2\sin^2\alpha)} = \lim_{t\to +0} e^{\cos\alpha/t} = e^{\lim\limits_{t\to +0}(\cos\alpha/t)}.$$

Этот предел будет иметь конечное значение при условии $\cos\alpha \leqslant 0$, т.е. если $\pi/2 \leqslant \alpha \leqslant 3\pi/2$, поскольку

$$\lim_{t\to +0} \frac{\cos\alpha}{t} = \begin{cases} 0 & \text{при } \alpha_1 = \dfrac{\pi}{2},\ \alpha_2 = \dfrac{3\pi}{2}; \\ -\infty & \text{при } \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

В силу этого

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} e^{x/(x^2+y^2)} = e^{\lim\limits_{t\to +0}(\cos\alpha/t)} = \begin{cases} 1 & \text{при } \alpha_1 = \dfrac{\pi}{2},\ \alpha_2 = \dfrac{3\pi}{2}; \\ 0 & \text{при } \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Для второй функции предельной точкой является бесконечно удалённая точка. В этом случае предел по направлению $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ вычисляется заменой $x = t\cos\alpha$, $y = t\sin\alpha$ при $t \to +\infty$:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty\\ (x,y)\in L}} e^{x^2-y^2}\sin 2xy = \lim_{t\to+\infty} e^{t^2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}\sin(2t^2\cos\alpha\sin\alpha) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} e^{t^2\cos 2\alpha}\sin(t^2\sin 2\alpha).$$

Поскольку $t^2 \to +\infty$, а $\sin(t^2\sin 2\alpha)$ — ограниченная функция, то предел будет конечным при условии $\cos 2\alpha \leqslant 0$ или $\sin 2\alpha = 0$. Однако, если учесть, что при $\cos 2\alpha = 0$, $\sin 2\alpha = 1$, предел

$$\lim_{t\to+\infty} e^0\sin(t^2)$$

не существует, то остается только условие $\cos 2\alpha < 0$, т.е. $\pi/4 < \alpha < 3\pi/4$ и $5\pi/4 < \alpha < 7\pi/4$, и условие $\sin 2\alpha = 0$, т.е. $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, при которых

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to0\\ (x,y)\in L}} e^{x^2-y^2}\sin 2xy = \lim_{t\to+\infty} e^{t^2\cos 2\alpha}\sin(t^2\sin 2\alpha) = 0.$$

Пример 5.7. Вычислить двойные пределы

$$1)\quad \lim_{\substack{x\to0\\ y\to2}}(1+xy)^{2/(x^2+xy)};\qquad 2)\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}.$$

Решение. Проведём тождественные преобразования:

$$(1+xy)^{2/(x^2+xy)} = \left[(1+xy)^{1/xy}\right]^{2y/(x+y)}$$

и обозначим $t = xy$. Тогда если $x \to 0$, $y \to 2$, то $t \to 0$ и

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to2}}(1+xy)^{1/xy} = \lim_{t\to0}(1+t)^{1/t} = e.$$

Учитывая, что

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to2}}\frac{2y}{x+y} = 2,$$

получим

$$\lim_{\substack{x\to0\\ y\to2}}(1+xy)^{2/(x^2+xy)} = e^2.$$

2. Рассмотрим предел по направлению $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ в бесконечно удалённой точке:

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty\\ (x,y)\in L}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)} = \lim_{t\to+\infty}(t^2\cos^2\alpha+t^2\sin^2\alpha)e^{-t(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \lim_{t\to+\infty} t^2e^{-t(\cos\alpha+\sin\alpha)}.$$

Если $\alpha \in]0, \pi/2[$, то $\cos\alpha + \sin\alpha \neq 0$, поэтому, учитывая, что показательная функция растет быстрее степенной, получим

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t(\cos\alpha+\sin\alpha)} = 0.$$

Если $x = -y$, т.е. $\alpha = 3\pi/4$, то $\cos\alpha + \sin\alpha = 0$ и

$$\lim_{t\to+\infty} t^2 = +\infty.$$

Таким образом, при разных α получим разные предельные значения, и, значит, исходный двойной предел не существует.

Пример 5.8. Вычислить

$$1)\quad \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x^2/(x+y)};\qquad 2)\quad \lim_{\substack{x\to1\\ y\to0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Решение. 1. В силу непрерывности показательной и степенной функций имеем

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x^2/(x+y)} = \lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \exp\Big\{\frac{1}{1+y/x}\ln\Big[\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x\Big]\Big\} = e.$$

2. Пользуясь непрерывностью логарифмической функции и тем, что

$$\lim_{\substack{x\to1\\ y\to0}} \sqrt{x^2+y^2} = 1,$$

получим

$$\lim_{\substack{x\to1\\ y\to0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln 2}{1} = \ln 2.$$

6. Повторные пределы

Выше мы определили n-кратный предел функции $f(\vec{x})$:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$$

по совокупности переменных при одновременном стремлении всех аргументов к их пределам. Кроме того, был определён предел по множеству X:

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in X}} f(\vec{x}), \tag{6.1}$$

и, в частности, предел по направлению $\vec{\ell} = (\ell^1, ..., \ell^n)$ (по лучу L), представляющий собой однократный предел по параметру t (5.4):

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ x\in L}} f(\vec{x}) = \lim_{t\to+0} f(\vec{x}_0 + \vec{\ell}t).$$

Если в качестве множества X в (6.1) выбрать ломаную, соединяющую точки $\vec{x}$ и $\vec{x}_0$, звенья которой параллельны координатным осям, мы получим последовательность предельных переходов по каждой переменной в отдельности в том или ином порядке. Такие пределы называются *повторными*. Сначала рассмотрим повторные пределы для функции двух переменных.

♦ Если функция $f(x,y)$ определена на множестве $\dot{\Pi}(x,y,\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \{(x,y)|0 < |x-x_0| < \varepsilon_1, 0 < |y-y_0| < \varepsilon_2\}$, а функция

$$g(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y) \tag{6.2}$$

определена в $\dot{\rho}(x_0,\varepsilon_1) = (0 < |x-x_0| < \varepsilon_1)$, то предел

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Big) \tag{6.3}$$

называется *повторным*, а предел (6.2) — его *внутренним пределом* (рис. 11,*а*).

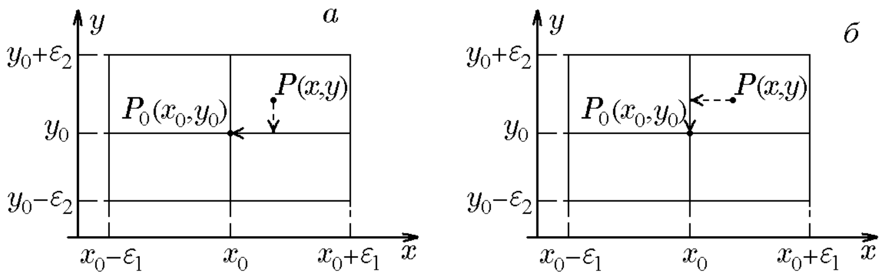


Рис. 11.

Аналогично определяется повторный предел (рис. 11,*б*)

$$\lim_{y\to y_0}\Big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\Big). \tag{6.4}$$

Существование повторных пределов (6.3), (6.4) определяется условиями существования двух пределов по отрезкам ломаной, параллельным координатным осям, в порядке, показанном на рис. 11,*а* и 11,*б*, соответственно.

Пример 6.1. Найти повторные пределы для функций

$$z_1(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}; \quad z_2(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}; \quad z_3(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$

в точке $x_0 = y_0 = 0$.

Решение. Все повторные пределы этих функций равны нулю, поскольку внутренние пределы равны

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ (x\neq 0)}} z_1(x,y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ (x\neq 0)}} z_2(x,y) = \lim_{\substack{y\to 0\\ (x\neq 0)}} z_3(x,y) = 0,$$

а значит,

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} z_1(x,y)\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} z_2(x,y)\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} z_3(x,y)\Big) = 0.$$

В свою очередь, другие внутренние пределы равны:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}} z_1(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}} z_2(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}} z_3(x,y) = 0,$$

а значит,

$$\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} z_1(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} z_2(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} z_3(x,y)\Big) = 0.$$

Напомним, что двойные пределы функций $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ и $z_3(x,y)$, как следует из результатов примеров 4.3, 5.3 и 5.4, не существуют, причём пределы по направлениям, как показано в примере 5.3, имеют различные значения для разных лучей.

Пример 6.2. Найти двойной и повторные пределы в точке $x_0 = y_0 = 0$ функции

$$z(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0;\\ 0, & y = 0.\end{cases}$$

Решение. Чтобы вычислить двойной предел, воспользуемся оценкой

$$\Big|x\sin\frac{1}{y}\Big| \leqslant |x|,$$

а поскольку

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |x| = 0,$$

то в силу теоремы 4.1

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sin\frac{1}{y} = 0.$$

Рассмотрим теперь повторные пределы. Первый из них равен

$$\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}} x\sin\frac{1}{y}\Big) = \lim_{y\to 0} 0 = 0,$$

а второй

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{\substack{y\to 0\\(x\neq 0)}} x\sin\frac{1}{y}\Big)$$

не существует, поскольку при $x\neq 0$ не существует внутренний предел

$$\lim_{\substack{y\to 0\\(x\neq 0)}} x\sin\frac{1}{y}.$$

Эти два примера показывают, что из существования и равенства повторных пределов не следует существование двойного предела (пример 6.1), а из существования двойного предела не следует существование и равенство повторных пределов (пример 6.2). Следующая теорема формулирует условия, при которых из существования двойного предела следует существование и равенство ему повторных пределов.

Теорема 6.1. *Если в проколотой окрестности точки* (x_0, y_0) *существует двойной предел функции* $f(x, y)$:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y),$$

а в проколотой окрестности точки y_0 *существует внутренний предел*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ (y\neq y_0)}} f(x,y),$$

то существует повторный предел, равный двойному, т.е.

$$\lim_{y\to y_0}\Big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\Big) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y). \tag{6.5}$$

Доказательство. Так как для функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) существует двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A,$$

то для всех $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ и $0 < |y - y_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon/2$. Таким образом, в этой прямоугольной области значения функции $f(x, y)$ отличаются от A не более чем на $\varepsilon/2$. Но тогда существующий внутренний предел

$$g(y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ (y\neq y_0)}} f(x,y)$$

отличается от A не более чем на ε, т.е.

$$|g(y) - A| < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{y\to y_0}\Big(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\Big) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y),$$

что и требовалось доказать. Аналогичное утверждение справедливо и для повторного предела

$$\lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\Big) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Пример 6.3. Вычислить повторные пределы функций

$$z_1(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_2(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$$

в точке $x_0 = y_0 = 0$.

Решение. Поскольку для функции $z_1(x,y)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\substack{y\to 0\\(x\neq 0)}} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

то её повторные пределы равны нулю:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big) = 0.$$

Для функции $z_2(x,y)$ найдём

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = \exp\Big[\lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}} x^2y^2\ln(x^2+y^2)\Big] = e^0 = 1.$$

Аналогично

$$\lim_{\substack{y\to 0\\(x\neq 0)}} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1.$$

Следовательно, повторные пределы равны единице:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0}(x^2+y^2)^{x^2y^2}\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0}(x^2+y^2)^{x^2y^2}\Big) = 1.$$

Напомним, что в примере 4.4 были вычислены двойные пределы этих функций, совпадающие с найденными повторными пределами в полном соответствии с теоремой 6.1.

Пример 6.4. Найти повторные пределы функций в указанных точках:

1) $z_1(x,y) = \log_x(x+y),\ x_0 = 1, y_0 = 0;$ 2) $z_2(x,y) = \sin\dfrac{\pi x}{2x+y},\ x_0 = \infty, y_0 = \infty;$

3) $z_3(x,y) = \dfrac{1}{xy}\operatorname{tg}\dfrac{xy}{1+xy},\ x_0 = 0, y_0 = \infty.$

Решение. 1. Так как при $x > 0$, $x+y > 0$, $x \neq 1$

$$z_1(x,y) = \log_x(x+y) = \frac{\ln(x+y)}{\ln x},$$

то из непрерывности логарифмической функции следует

$$\lim_{y\to 0} z_1(x,y) = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x} = \frac{\ln x}{\ln x} = 1$$

и, соответственно,

$$\lim_{x\to 1}\Big(\lim_{y\to 0} z_1(x,y)\Big) = \lim_{x\to 1} 1 = 1.$$

При вычислении повторного предела в другом порядке учтем, что

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x} = \begin{cases} +\infty, & y\in]-1,0[;\\ -\infty, & y\in]0,+\infty[; \end{cases} \qquad \lim_{x\to 1+0}\frac{\ln(x+y)}{\ln x} = \begin{cases} -\infty, & y\in]-1,0[;\\ +\infty, & y\in]0,+\infty[\end{cases}$$

и
$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(x+y)}{\ln x}=1,\quad y=0.$$
Это означает, что
$$\lim_{x\to 1} z_1(x,y),$$
а вместе с ним и
$$\lim_{y\to 0}\Bigl(\lim_{x\to 1} z_1(x,y)\Bigr)$$
не существуют.

2. Так как при каждом фиксированном x функция $z_2(x,y)$ непрерывна по y, если $|y|>2|x|$, а при каждом фиксированном y непрерывна по x, если $|x|>|y|/2$, то
$$\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}=0$$
и
$$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi}{2+y/x}=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$
Это означает, что
$$\lim_{x\to\infty}\Bigl(\lim_{y\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\Bigr)=0,\quad \lim_{y\to\infty}\Bigl(\lim_{x\to\infty}\sin\frac{\pi x}{2x+y}\Bigr)=1.$$

3. Поскольку
$$\lim_{\substack{y\to\infty\\(x\neq 0)}}\frac{xy}{1+xy}=1,$$
то в силу непрерывности тангенса получим
$$\lim_{\substack{y\to\infty\\(x\neq 0)}}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}=\lim_{\substack{y\to\infty\\(x\neq 0)}}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\lim_{\substack{y\to\infty\\(x\neq 0)}}\frac{xy}{1+xy}=0\cdot\operatorname{tg}1=0.$$
В свою очередь, учитывая, что
$$\lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}}\frac{\operatorname{tg}(xy/(1+xy))}{xy/(1+xy)}\frac{1}{1+xy}=$$
$$=\lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}}\frac{\operatorname{tg}(xy/(1+xy))}{xy/(1+xy)}\lim_{\substack{x\to 0\\(y\neq 0)}}\frac{1}{1+xy}=1\cdot 1=1,$$
для повторных пределов найдём
$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\lim_{y\to\infty}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\Bigr)=0,\quad \lim_{y\to\infty}\Bigl(\lim_{x\to 0}\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\frac{xy}{1+xy}\Bigr)=1.$$

Определения повторных пределов (6.3), (6.4) для функции двух переменных естественным образом обобщаются на функции большего числа переменных.

Пример 6.5. Для функции
$$w(x,y,z)=\frac{\sin xy}{xz}$$
в точке $(x_0=0, y_0=2, z_0=3)$ найти тройной предел и какой-либо из повторных.

Решение. Так как
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin xy}{xy}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t},\quad t=xy,$$
то
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2\\ z\to 3}}\frac{\sin xy}{xz}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2\\ z\to 3}}\Big(\frac{\sin xy}{xy}\frac{y}{z}\Big)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2\\ z\to 3}}\frac{\sin xy}{xy}\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2\\ z\to 3}}\frac{y}{z}=1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$
Из повторных пределов рассмотрим, например,
$$\lim_{x\to 0}\Big[\lim_{y\to 2}\Big(\lim_{z\to 3}w(x,y,z)\Big)\Big].$$
Вычисление предела в такой последовательности даёт
$$\lim_{x\to 0}\Big[\lim_{y\to 2}\Big(\lim_{z\to 3}\frac{\sin xy}{xz}\Big)\Big]=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 2}\frac{\sin xy}{x}\Big)=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}.$$

7. Непрерывность функции в точке. Непрерывность функции по множеству и на множестве

Пусть функция $w=f(\vec{x})$ определена в окрестности точки $\vec{x}_0$, т.е. $O(\vec{x}_0)\subset D(f)$, а $\vec{x}$ — произвольная точка из $O(\vec{x}_0)$. Для функции одной переменной существует единственный вариант перемещения из точки $\vec{x}$ в точку $\vec{x}_0$: только по оси Ox. Для функции нескольких переменных количество вариантов возрастает. Перемещение из точки $\vec{x}$ в точку $\vec{x}_0$ возможно при одновременном изменении всех переменных (как в n-кратном пределе) или их поочередном изменении в определённом порядке (как в повторных пределах). В связи с этим различают и характер изменения самой функции, рассматривая полное и частичные приращения функции.

♦ *Полным приращением* функции $w=f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ называется выражение Δw, определяемое разностью
$$\Delta w=f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)=f(\vec{x}_0+\Delta\vec{x})-f(\vec{x}_0),\tag{7.1}$$
где $\vec{x}$ — произвольная точка из $O(\vec{x}_0)\subset D(f)$, а $\Delta\vec{x}=\vec{x}-\vec{x}_0=(x^1-x^1_0,\dots,x^n-x^n_0)$.

♦ *Частичным приращением* функции $w=f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ за счёт приращения переменной x^i называется выражение $\Delta_{x^i}w$, определяемое разностью
$$\Delta_{x^i}w=f(\vec{x})-f(\vec{x}_0)=f(\vec{x}_0+\Delta_i\vec{x})-f(\vec{x}_0),\tag{7.2}$$
где
$$\Delta_i\vec{x}=(0,\dots,\Delta x^i,\dots,0).\tag{7.3}$$
Существуют n возможных частных приращений функции:
$$\begin{aligned}
&\Delta_{x^1}w=f(x^1_0+\Delta x^1,x^2_0,\dots,x^n_0)-f(x^1_0,x^2_0,\dots,x^n_0),\\
&\Delta_{x^2}w=f(x^1_0,x^2_0+\Delta x^2,\dots,x^n_0)-f(x^1_0,x^2_0,\dots,x^n_0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\Delta_{x^n}w=f(x^1_0,x^2_0,\dots,x^n_0+\Delta x^n)-f(x^1_0,x^2_0,\dots,x^n_0).
\end{aligned}\tag{7.4}$$

Аналогично случаю одной переменной сформулируем теперь определение функции нескольких переменных, непрерывной в точке.

♦ Функция $w = f(\vec{x})$, определённая в окрестности точки $\vec{x}_0$, т.е. $O(\vec{x}_0) \subset D(f)$, называется *непрерывной в точке* $\vec{x}_0$, если

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0). \tag{7.5}$$

◊ Определение (7.5) требует выполнения трёх условий: во-первых, функция должна быть определена в точке $\vec{x}_0$; во-вторых, должен существовать предел

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x})$$

и, в-третьих, этот предел должен быть равен значению функции в точке $\vec{x}_0$. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, точка $\vec{x}_0$ называется *точкой разрыва* функции $w = f(\vec{x})$.

Условие (7.5) после тождественного преобразования

$$\lim_{\vec{x}-\vec{x}_0\to 0}[f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)] = 0$$

можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$\lim_{\Delta\vec{x}\to 0} \Delta w = 0, \tag{7.6}$$

выражающей тот факт, что для непрерывной в точке $\vec{x}_0$ функции бесконечно малому приращению аргументов $\Delta\vec{x} = \vec{x}-\vec{x}_0 \to 0$ соответствует бесконечно малое полное приращение функции $\Delta w = f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \to 0$.

Еще одна эквивалентная форма условия (7.5), полезная в приложениях, имеет вид

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f\Big(\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \vec{x}\Big). \tag{7.7}$$

Пример 7.1. Используя определения предела функции $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ по Гейне и по Коши, записать эквивалентное (7.5) определение функции, непрерывной в точке.

Решение. Функция $w = f(\vec{x})$ называется *непрерывной в точке* $\vec{x}_0 \in D(f)$, если выполняется любое из эквивалентных условий:

1) для произвольной последовательности $\{\vec{x}_k\}_{k=1}^\infty$ значений $\vec{x}_k \in D(f)$, сходящейся к $\vec{x}_0$, соответствующая последовательность $\{f(\vec{x}_k)\}_{k=1}^\infty$ сходится при $k \to \infty$ к $f(\vec{x}_0)$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon$, так только $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что образ шара $S(\vec{x}_0, \delta)$ лежит в интервале $]f(\vec{x}_0) - \varepsilon, f(\vec{x}_0) + \varepsilon[$;

4) $f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \alpha(\Delta\vec{x})$, где $\lim\limits_{\Delta\vec{x}\to 0} \alpha(\Delta\vec{x}) = 0$, $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$, $\vec{x} \in O(\vec{x}_0) \subset D(f)$.

Если в соотношении (7.5) предел заменить пределом по множеству X, то такая замена приводит к понятию функции, непрерывной в точке $\vec{x}_0$ по множеству X.

♦ Функция $w = f(\vec{x})$, определённая на множестве $X \subset D(f) \subset \mathbb{R}^n$, для которого $\vec{x}_0$ является предельной точкой, называется *непрерывной по множеству* X в точке $\vec{x}_0$, если

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0 \\ \vec{x}\in X}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0). \tag{7.8}$$

$\Diamond$ Если $\vec{x}_0$ является изолированной точкой множества X, то функция $w = f(\vec{x})$ считается *непрерывной в точке* $\vec{x}_0$ *по множеству* X.

$\Diamond$ Если функция $w = f(\vec{x})$ разрывна в точке $\vec{x}_0$ по некоторому множеству, то точка $\vec{x}_0$ является точкой разрыва этой функции по этому множеству. Но может существовать другое множество, по которому функция в точке $\vec{x}_0$ будет непрерывной.

Введём ещё одну характеристику непрерывной функции.

$\blacklozenge$ Функция $w = f(\vec{x})$ называется *непрерывной на множестве* X, если она непрерывна в каждой точке множества X по этому множеству, т.е. если в каждой предельной точке $\vec{x}_0$ множества X выполняется условие

$$\lim_{\substack{\vec{x}\to\vec{x}_0\\ \vec{x}\in X}} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0). \tag{7.9}$$

Выбрав соответствующее множество X, по которому функция $w = f(\vec{x})$ непрерывна в его предельной точке $\vec{x}_0$, можно выделить функции, непрерывные в точке $\vec{x}_0$: по направлению $\vec{\ell} = (\ell^1, ..., \ell^n)$, когда X есть луч из точки $\vec{x}_0$ в направлении $\vec{\ell}$; по прямой L, когда $X = L$; по кривой $\mathcal{L}$, когда $X = \mathcal{L}$ и т.д.

В свою очередь, выбрав прямую L параллельной одной из координатных осей, например оси Ox^i, мы получим функцию, непрерывную в точке $\vec{x}_0$ по одной переменной x^i. В этом случае условие (7.6) для полного приращения функции Δw заменяется условием для частного приращения:

$$\lim_{\Delta x^i\to 0} \Delta_{x^i} w = 0. \tag{7.10}$$

Аналогично, выбрав множество X, на котором функция $w = f(\vec{x})$ является непрерывной, получим функции, непрерывные вдоль (или на) прямой, кривой и т.д. При этом следует иметь в виду, что если функция разрывна в точке $\vec{x}_0$ некоторой кривой, то точка $\vec{x}_0$ является точкой разрыва этой функции. Однако может найтись другая кривая, проходящая через эту точку, вдоль которой функция будет непрерывной.

Точки разрыва функций нескольких переменных, в отличие от точек разрыва функций одной переменной, могут представлять собой многообразия различной структуры: прямые, плоскости, кривые, поверхности и т.д.

Пример 7.2. Исследовать на непрерывность функции

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad z_2 = \frac{x+y}{x^3+y^3}; \quad z_3 = x^2+y^2; \quad z_4 = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

Решение. 1. Рассуждая, как в примерах 4.1, 4.2, найдём

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x_0^2+y_0^2},$$

откуда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} z_1(x,y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \sqrt{x^2+y^2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, & x_0^2+y_0^2>0;\\ +\infty, & x_0^2+y_0^2=0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что функция $z_1(x,y)$ непрерывна при всех x и y, кроме точки $x=y=0$, т.е. начала координат, в которой она имеет бесконечный разрыв.

2. Поскольку числитель и знаменатель функции $z_2(x,y)$ имеют пределы:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}(x+y)=x_0+y_0,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}(x^3+y^3)=x_0^3+y_0^3,$$

то данная функция может иметь разрыв лишь в тех точках, где знаменатель x^3+y^3 обращается в нуль. Решив уравнение $x^3+y^3=0$ относительно y, найдём $y=-x$. Следовательно, функция $z_2(x,y)$ имеет разрыв на прямой $y=-x$.

Пусть $x_0\neq 0$, $y_0\neq 0$ и $x_0+y_0=0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{x_0^2-x_0y_0+y_0^2}.$$

Значит, все точки прямой $y=-x$, за исключением одной: $x=0$, $y=0$, являются точками устранимого разрыва функции $z_2(x,y)$. Из соотношения

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x+y}{x^3+y^3}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{x^2-xy+y^2}=+\infty,$$

получаемого с учётом соотношения

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2-xy)=+0;\quad x^2+y^2>xy;\quad (x-y)^2>0,$$

следует, что точка $(0,0)$ — точка бесконечного разрыва.

3. Функция $z_3=x^2+y^2$ непрерывна на всей плоскости xOy как по совокупности переменных, так и по каждой из них, поскольку

$$\Delta z_3=2x_0\Delta x+2y_0\Delta y+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$$

и малым приращениям аргументов соответствует малое приращение функции.

4. Вычислим повторные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}z_4=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1,\quad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}z_4=-\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2}=-1.$$

Следовательно, предел функции $z_4(x,y)$ в точке (0,0) не существует и функция не является непрерывной в этой точке.

Отметим, что из непрерывности функции в точке $\vec{x}_0$ по совокупности переменных следует её непрерывность по каждой переменной x^i и вообще по любому подмножеству X, содержащему точку $\vec{x}_0$, например прямой, кривой и т.д. Обратное утверждение в общем случае неверно, что и подтверждают следующие примеры.

Пример 7.3. При каких значениях параметра A функция

$$z_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0;\\ A, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

в точке $(0,0)$ является непрерывной:
1) по совокупности переменных x и y;
2) по направлению $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$;
3) по переменной x;
4) по переменной y?

Решение. 1) В этом случае значение параметра A следует искать из равенства

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = A. \qquad (7.11)$$

Однако, как показано в примере 4.3, двойной предел в левой части (7.11) не существует. Следовательно, при любом значении параметра A функция $z_1(x,y)$ является разрывной в точке $(0,0)$ по совокупности переменных x и y.

2) В этом случае значение параметра A следует искать из равенства

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = A, \qquad (7.12)$$

где A — луч, выходящий из точки $(0,0)$ в направлении $\vec{\ell}$. Предел (7.12) найден в примере 5.3 и равен

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \sin 2\alpha = A. \qquad (7.13)$$

Следовательно, при выборе $A = \sin 2\alpha$ функция $z_1(x,y)$ будет непрерывной по направлению $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Например, при $\alpha = \pi/4$, т.е. для биссектрисы I-ой четверти, значение параметра A будет $A = \sin(2\pi/4) = 1$.

3) Непрерывность функции $z_1(x,y)$ по переменной x соответствует непрерывности по прямой, образованной двумя лучами, выходящими из точки $(0,0)$ под углами $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \pi$. Поскольку, согласно (7.13),

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L(\alpha_1=0)}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \sin 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L(\alpha_2=\pi)}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \sin 2\pi = 0,$$

то при выборе $A = 0$ функция $z_1(x,y)$ будет непрерывной по переменной x.

4) Непрерывность функции $z_1(x,y)$ по переменной y соответствует непрерывности по прямой, образованной двумя лучами, выходящими из точки $(0,0)$ под углами $\alpha_1 = \pi/2$ и $\alpha_2 = 3\pi/2$. Поскольку, согласно (7.13),

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L(\alpha_1=\pi/2)}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L(\alpha_2=3\pi/2)}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \sin\left(2\frac{3\pi}{2}\right) = 0,$$

то при выборе $A = 0$ функция $z_1(x,y)$ будет непрерывной по переменной y.

Объединение пунктов 3 и 4 позволяет сделать вывод о том, что при $A = 0$ функция $z_1(x,y)$ непрерывна по каждой переменной x и y в отдельности, являясь при этом разрывной по совокупности переменных x и y.

Пример 7.4. При каких значениях параметра A функция

$$z_2(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}, & x^2+y^2>0; \\ A, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

в точке $(0,0)$ является непрерывной:
1) по совокупности переменных x и y;
2) по направлению $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$;
3) по переменным x и y в отдельности?

Решение. 1) В этом случае значение параметра A следует искать из равенства

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = A.$$

Однако, как показано в примере 4.3, двойной предел в левой части этого равенства не существует. Следовательно, при любом значении параметра A функция $z_2(x,y)$ является разрывной в точке $(0,0)$ по совокупности переменных x и y.

2) В этом случае значение параметра A следует искать из равенства

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = A,$$

где A — луч, выходящий из точки $(0,0)$ в направлении $\vec{\ell}$. Предел в левой части этого уравнения найден в примере 5.3 и равен

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \begin{cases} 0, & \alpha_1 \neq \dfrac{\pi}{4},\ \alpha_2 \neq \dfrac{5\pi}{4},\ \text{т.е. } y \neq x; \\ 1, & \alpha_1 = \dfrac{\pi}{4},\ \alpha_2 = \dfrac{5\pi}{4},\ \text{т.е. } y = x. \end{cases} \tag{7.14}$$

Следовательно, при выборе $A = 0$ функция $z_2(x,y)$ будет непрерывной по всем направлениям, кроме двух: $\alpha_1 = \pi/4$ и $\alpha_2 = 5\pi/4$, по которым она будет разрывна. Другими словами, функция $z_2(x,y)$ будет непрерывна по всем прямым, проходящим через начало координат, за исключением прямой $y = x$.

Напротив, при выборе $A = 1$ функция $z_2(x,y)$ будет непрерывной по единственной прямой $y = x$ и разрывной по любой другой прямой, проходящей через точку $(0,0)$.

3) В этом случае значение A легко получить из предыдущего решения. Поскольку оси Ox и Oy являются прямыми, проходящими через начало координат, то выбор $A = 0$ обеспечивает непрерывность по каждой переменной x и y в отдельности.

Впрочем, этот же ответ можно получить, не используя пример 5.3. Действительно, предел функции $z_2(x,y)$ по всем прямым $y = kx$ имеет вид

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{k^2x^4}{k^2x^4+(1-k)^2x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2},$$

и, следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \begin{cases} 0, & k\neq 1,\ y\neq x;\\ 1, & k=1,\ y=x, \end{cases}$$

что совпадает с (7.14).

Пример 7.5. Показать, что функция

$$z_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0;\\ A, & x^2+y^2=0, \end{cases}$$

в точке $(0,0)$ при $A=0$ непрерывна по любой прямой, проходящей через эту точку; при $A=1$ непрерывна по параболе $y=x^2$ и при любых A разрывна по совокупности переменных x и y.

Решение. Справедливость этих утверждений очевидным образом вытекает из результатов примеров 5.3 и 5.4. Покажем справедливость этих утверждений, не обращаясь к этим примерам. Рассмотрим предел функции $z_3(x,y)$ по прямым L: $y=kx$ и параболе $\mathcal{L}$: $y=x^2$. В первом случае имеем

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in L}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{2kx^3}{x^4+k^2x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{2kx}{x^2+k^2} = 0,$$

во втором

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ (x,y)\in \mathcal{L}}} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2}} \frac{2x^4}{x^4+x^4} = 1.$$

Таким образом, при $A=0$ функция $z_3(x,y)$ непрерывна по всем прямым $y=kx$, а при $A=1$ — по параболе $y=x^2$. Поскольку пределы по этим двум линиям в точке $(0,0)$ различны, то двойной предел функции $z_3(x,y)$ в точке $(0,0)$ не существует. Это означает, что функция $z_3(x,y)$ в точке $(0,0)$ разрывна по совокупности переменных x и y.

Пример 7.6. Найти точки разрыва функции

$$\text{а)}\ \ z=\frac{17xy}{x^2-y};\quad \text{б)}\ \ z=\ln\sqrt{x^2+y^2};\quad \text{в)}\ \ z=\frac{13}{x-y};\quad \text{г)}\ \ z=\frac{2}{R^2-x^2-y^2}.$$

Решение. а) Функция не определена, если знаменатель дроби равен нулю: $x^2-y=0$, откуда $y=x^2$. Следовательно, данная функция имеет линией разрыва параболу $y=x^2$, т.е. точками разрыва являются все точки параболы.

б) $x^2+y^2=0$ или $x=0$, $y=0$.

в) $x-y=0$ или $y=x$, т.е. линией разрыва является прямая.

г) $x^2+y^2=R^2$, т.е. линией разрыва является окружность.

8. Свойства функций, непрерывных в точке и на множестве

Доказательства основных теорем о свойствах функций, непрерывных в точке и на множестве, для функций нескольких переменных практически дословно повторяют доказательства соответствующих теорем для функций одной переменной. По этой причине приведём формулировки этих теорем для функций нескольких переменных без их доказательств.

Теорема 8.1 (арифметические действия над непрерывными функциями). *Если функции $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$ определены в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке $\vec{x}_0$, то функции*

$$f_1(\vec{x}) \pm f_2(\vec{x}); \quad f_1(\vec{x})f_2(\vec{x}); \quad f_1(\vec{x})/f_2(\vec{x}),\ f_2(\vec{x}_0) \neq 0,$$

также непрерывны в точке $\vec{x}_0$.

Эта теорема остаётся справедливой для любого конечного числа функций, участвующих в арифметических операциях.

Теорема 8.2 (о непрерывности композиции функций (сложной функции)). *Пусть функции $\varphi^1(\vec{x}), ..., \varphi^m(\vec{x})$ определены в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ и непрерывны в точке $\vec{x}_0$, а функция $f(\vec{y}) = f(y^1, ..., y^m)$ определена в окрестности точки $\vec{y}_0 = (\varphi^1(\vec{x}_0), ..., \varphi^m(\vec{x}_0))$ и непрерывна в точке $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$. Тогда в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0$ определена сложная функция*

$$\Phi(\vec{x}) = f(\varphi^1(\vec{x}), ..., \varphi^m(\vec{x})), \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

причём функция $\Phi(\vec{x})$ непрерывна в точке $\vec{x}_0$.

Теорема 8.3 (о сохранении знака). *Если функция $w = f(\vec{x})$ непрерывна в точке $\vec{x}_0$ и $f(\vec{x}_0) \neq 0$, то существует такая окрестность точки $\vec{x}_0$, в пределах которой во всех точках области определения функция $f(\vec{x})$ не обращается в нуль и имеет знак, совпадающий со знаком $f(\vec{x}_0)$.*

Теоремы 8.1–8.3 остаются справедливыми для функций, непрерывных в точке $\vec{x}_0$ по множеству X.

От функций, непрерывных в точке, перейдём к функциям, непрерывным на множестве. Ограничимся связными множествами, т.е. областями.

Теорема 8.4 (Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции). *Функция $w = f(\vec{x})$, непрерывная в замкнутой и ограниченной области $\bar{D}$, ограничена в этой области.*

Теорема 8.5 (Вейерштрасса о достижении функцией наибольшего и наименьшего значений). *Функция $w = f(\vec{x})$, непрерывная в замкнутой и ограниченной области $\bar{D}$, принимает там свои наибольшее и наименьшее значения.*

Теорема 8.6 (о промежуточных значениях непрерывной функции). *Пусть функция $w = f(\vec{x})$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и достигает в этой области наибольшего M и наименьшего m значений. Тогда функция $w = f(\vec{x})$ принимает все значения, заключенные между M и m.*

Следствие 8.6.1. Пусть функция $w = f(\vec{x})$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и в двух различных точках этой области принимает значения разных знаков. Тогда в области D найдётся по крайней мере одна точка $\vec{x}_0$, в которой функция $f(\vec{x}_0)$ обращается в нуль.

ГЛАВА 3

Дифференцируемость функции нескольких переменных

9. Частные производные функции нескольких переменных

Пусть функция $w = f(\vec{x})$ определена в некоторой окрестности $O(\vec{x}_0)$ точки $\vec{x}_0 = (x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$. Рассмотрим функцию одной переменной x^k, зафиксировав остальные переменные:

$$\varphi(x^k) = f(x_0^1, ..., x_0^{k-1}, x^k, x_0^{k+1}, ..., x_0^n). \tag{9.1}$$

Функция $\varphi(x^k)$ как функция одной переменной x^k может иметь в точке x_0^k обычную производную

$$\frac{d\varphi}{dx^k}(x_0^k), \tag{9.2}$$

которую для функции нескольких переменных $f(\vec{x})$ называют *частной производной по переменной* x^k и обозначают

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}(\vec{x}_0) = \frac{d\varphi}{dx^k}(x_0^k). \tag{9.3}$$

Поскольку индекс k пробегает значения от 1 до n, то функция $f(\vec{x})$ может иметь n частных производных.

♦ Разность

$$\Delta_{x^i} f = f(x^1, x^2, \ldots, x^i + \Delta x^i, \ldots, x^n) - f(x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \tag{9.4}$$

называется *частным приращением функции* f *за счёт приращения независимой переменной* x^i.

Отношение

$$\frac{\Delta_x^k f(\vec{x}_0)}{\Delta x^k} = \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)}{\Delta x}, \quad \vec{x} = (x_0^1, ..., x_0^k + \Delta x^k, ..., x^n),$$

даёт среднюю скорость изменения функции $w = f(\vec{x})$ по переменной x^k на участке от точки $\vec{x}_0$ до точки $\vec{x}$.

Равенство (9.3) позволяет сформулировать следующее определение.

♦ *Частной производной* $(\partial f/\partial x^k)(\vec{x}_0)$ функции $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ по переменной x^k называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}(\vec{x}_0) = \lim_{\Delta x^k \to 0} \frac{\Delta_{x^k} f(\vec{x}_0)}{\Delta x^k}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{9.5}$$

где $\Delta x^k = x^k - x_0^k$ есть приращение переменной x^k, а Δ_{x^k} — частное приращение функции за счёт переменной x^k (9.4).

Поскольку частная производная (9.5) есть предел отношения частного приращения функции в точке $\vec{x}_0$ к вызвавшему его приращению Δx^k при $\Delta x^k \to 0$, то этот предел характеризует скорость изменения функции $f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ по переменной x^k.

Частные производные (9.5) называют ещё *частными производными первого порядка* или просто *первыми частными производными* и помимо обозначения (9.5) используют также обозначения

$$\frac{\partial f}{\partial x^k}(\vec{x}_0) = f_{x^k}(\vec{x}_0) = D_k f(\vec{x}_0) = f'_{x^k}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x^k}.$$

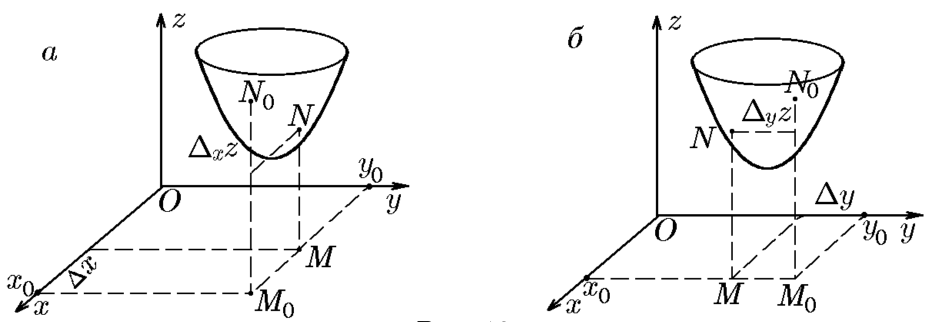


Рис. 12.

На рис. 12 приведена геометрическая иллюстрация определения частных производных функции двух переменных $z = z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad (9.6)$$

(рис. 12,*а*) и

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \qquad (9.7)$$

(рис. 12,*б*).

Поскольку при вычислении частных производных (9.5) все переменные, кроме одной, фиксируются, то техника вычисления частных производных такая же, как и техника вычисления производных функции одной переменной с использованием таблицы производных и правил дифференцирования.

Пример 9.1. Вычислить частные производные функции $z = x^2 y + x$.

Решение. *1-ый способ.* Согласно определению (9.6),

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 y + (x + \Delta x) - x^2 y - x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] y + \Delta x - x^2 y}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2x\Delta x + (\Delta x)^2] y + \Delta x}{\Delta x} = 2xy + 1.$$

Аналогично в силу (9.7)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{[x^2(y + \Delta y) + x] - [x^2 y - x]}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 \Delta y}{\Delta y} = x^2.$$

2-ой способ. Зафиксировав переменную y, выполним дифференцирование по переменной x и получим частную производную по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + x) = 2xy + 1.$$

Зафиксировав переменную x, выполним дифференцирование по переменной y и получим частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + x) = x^2.$$

Пример 9.2. Вычислить частные производные функции

$$w = xy^2 + 2y\sin z + \ln z + e^{xy}$$

в точке $M_0(1, 1, \pi)$.

Решение. Зафиксировав переменные y, z, найдём

$$w_x = y^2 + ye^{xy}.$$

Зафиксировав переменные x, z, найдём

$$w_y = 2xy + 2\sin z + xe^{xy}.$$

Зафиксировав переменные x, y, найдём

$$w_z = 2y\cos z + \frac{1}{z}.$$

Следовательно,

$$w_x(M_0) = 1 + e, \quad w_y(M_0) = 2 + e, \quad w_z(M_0) = -2 + \frac{1}{\pi}.$$

Пример 9.3. Найти все первые частные производные функции

$$w = z^{-x^2\sqrt{y}}.$$

Решение. При вычислении частной производной по x переменные y и z считаем постоянными и тогда данную функцию рассматриваем как показательную функцию от x. По правилу дифференцирования показательной функции найдём

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(z^{-x^2\sqrt{y}}) = z^{-x^2\sqrt{y}}\ln z(-x^2\sqrt{y})'_x = z^{-x^2\sqrt{y}}\ln z(-2x\sqrt{y}).$$

Считая постоянными x и z, найдём частную производную по y:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(z^{-x^2\sqrt{y}}) = z^{-x^2\sqrt{y}}\ln z(-x^2\sqrt{y})'_y = z^{-x^2\sqrt{y}}\ln z\Big(-\frac{x^2}{2\sqrt{y}}\Big).$$

При вычислении частной производной по z считаем x и y постоянными и рассматриваем данную функцию как степенную функцию z, следовательно,

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(z^{-x^2\sqrt{y}}) = -x^2\sqrt{y}z^{-x^2\sqrt{y}-1}.$$

Пример 9.4. Показать, что функция

$$w(x^1, ..., x^n) = \sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + ... + (x^n - x_0^n)^2} = \Big[\sum_{i=1}^n (x^i - x_0^i)^2\Big]^{1/2}$$

удовлетворяет уравнению

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial x^1}\Big)^2 + ... + \Big(\frac{\partial w}{\partial x^n}\Big)^2 = \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial w}{\partial x^i}\Big)^2 = 1.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{\partial w}{\partial x^i} = \frac{1}{2}\frac{2(x^i - x_0^i)}{\Big(\sum\limits_{j=1}^n (x^j - x_0^j)^2\Big)^{1/2}} = \frac{x^i - x_0^i}{\Big[\sum\limits_{j=1}^n (x^j - x_0^j)^2\Big]^{1/2}}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

то сумма их квадратов равна

$$\Big(\frac{\partial w}{\partial x^1}\Big)^2 + ... + \Big(\frac{\partial w}{\partial x^n}\Big)^2 = \sum_{i=1}^n \Bigg[\frac{x^i - x_0^i}{\Big(\sum\limits_{j=1}^n (x^j - x_0^j)^2\Big)^{1/2}}\Bigg]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n \Bigg[\frac{(x^i - x_0^i)^2}{\sum\limits_{j=1}^n (x^j - x_0^j)^2}\Bigg] = \frac{\sum\limits_{i=1}^n (x^i - x_0^i)^2}{\sum\limits_{j=1}^n (x^j - x_0^j)^2} = 1.$$

Пример 9.5. Сформулировать определение частной производной функции $w = f(\vec{x})$, $D(f) \subset \mathbb{R}^n$, в точке $\vec{x}_0$, эквивалентное (9.5), используя понятие предела по направлению.

Решение. Пусть $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{E}^n$ с заданной на нем стандартной метрикой, а $\{O, \mathcal{B}\}$ — система координат, в которой задана точка $\vec{x}_0$. Рассмотрим луч L_k, проходящий через точку $\vec{x}_0$ в направлении базисного вектора $\vec{e}_k$. Координаты точек этого луча определяются соотношениями

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{e}_k t, \quad \vec{e}_k = (0, ..., 1, ...0), \tag{9.8}$$

из которых следует, что все координаты остаются постоянными, за исключением одной координаты x^k, определяемой параметрическим уравнением

$$x^k = x_0^k + t. \tag{9.9}$$

С учётом этого приращение функции при переходе по лучу L от точки $\vec{x}_0$ до точки $\vec{x}$ определится как

$$\Delta_k f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0 + \vec{e}_k t) - f(\vec{x}_0) = f(x_0^1, ..., x_0^k + t, ..., x_0^n) - f(x_0^1, ..., x_0^k, ..., x_0^n).$$

Это означает, что величина $\Delta_k f(\vec{x}_0)$ представляет собой не что иное, как введённое выше частное приращение функции по переменной x^k, т.е.

$$\Delta_k f(\vec{x}_0) = \Delta_{x^k} f(\vec{x}_0), \quad \Delta x^k = x^k - x_0^k = \Delta t. \tag{9.10}$$

Приняв во внимание (9.10), предел (9.5), определяющий производную $\partial f/\partial x^k$, можно записать как предел по направлению луча L_k, т.е.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x^k}(\vec{x}_0) &= \lim_{\Delta x^k \to 0} \frac{\Delta_{x^k} f(\vec{x}_0)}{\Delta x^k} = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ x \in L_k}} \frac{\Delta_k f(\vec{x}_0)}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \vec{x} \in L_k}} \frac{f(x_0^1, ..., x_0^k + t, ..., x_0^n) - f(x_0^1, ..., x_0^k, ..., x_0^n)}{\Delta t}, \quad k = \overline{1, n}.\end{aligned} \tag{9.11}$$

Таким образом, частные производные $\partial f/\partial x^k$ можно рассматривать как соответствующие (9.5) пределы по направлению базисных векторов $\vec{e}_k$, $k = \overline{1, n}$.

Пример 9.6. Найти $z'_x(x_0, 2)$, если

$$z(x, y) = x + y + 1 - (y - 2)\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}.$$

Решение. При вычислении $z'_x(x_0, 2)$ координату $y_0 = 2$ считаем постоянной, а приращение координаты x найдём, согласно (9.10), как $x = x_0 + t$. С учётом этого из (9.11) получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, 2) &= \lim_{t \to 0} \frac{z(x_0 + t, 2) - z(x_0, 2)}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + t + 2 + 1) - (x_0 + 2 + 1)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{t} = 1.\end{aligned}$$

Пример 9.7. Найти $z'_x(0, 0)$ и $z'_y(0, 0)$, если

$$1)\ z = \sqrt[3]{xy}, \quad 2)\ z = \sqrt[3]{x^3 - y^3}, \quad 3)\ z = \begin{cases} e^{-1/(x^2+y^2)}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Решение. Согласно определению частной производной, имеем

$$z'_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{z(x, 0) - z(0, 0)}{x}, \quad z'_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{z(0, y) - z(0, 0)}{y}.$$

Тогда получим для случая 1)

$$z'_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x \cdot 0} - 0}{x} = 0, \quad z'_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot y} - 0}{y} = 0;$$

для случая 2)

$$z'_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 0} - 0}{x} = 1, \quad z'_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 - y^3} - 0}{y} = -1$$

и для случая 3)

$$z'_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2} - 0}{x} = 0, \quad z'_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{e^{-1/y^2} - 0}{y} = 0.$$

Заметим, что непосредственное вычисление производных, например, $z = \sqrt[3]{xy}$ даёт выражения

$$z'_x(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{y}{x^2}}, \quad z'_y(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{x}{y^2}},$$

в которых прямая подстановка $x = y = 0$ невозможна.

10. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке

Понятие дифференцируемости функции в точке было уже введено для функции одной переменной [11]. Для неё же были сформулированы необходимые и достаточные условия дифференцируемости. Обобщим это понятие на функции нескольких переменных и применительно к ней переформулируем условия дифференцируемость функции в точке.

♦ Функция $w = f(\vec{x})$ называется *дифференцируемой в точке* $\vec{x}_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и существуют такие числа A_i, $i = \overline{1,n}$, что при $\vec{x} \to \vec{x}_0$

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x^i - x_0^i) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|), \tag{10.1}$$

где

$$|\vec{x} - \vec{x}_0| = \rho(\vec{x}, \vec{x}_0) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x^i - x_0^i)^2\right]^{1/2} \tag{10.2}$$

и

$$o(|\vec{x} - \vec{x}_0|) = h(\vec{x})|\vec{x} - \vec{x}_0|, \quad \lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} h(\vec{x}) = 0. \tag{10.3}$$

Теорема 10.1. *Для того чтобы функция $w = f(\vec{x})$ была дифференцируемой в точке $\vec{x}_0$, необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки $\vec{x}_0$ она была представима в виде*

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{x})(x^i - x_0^i), \tag{10.4}$$

где $f_i(\vec{x})$, $i = \overline{1,n}$, — непрерывные в точке $\vec{x}_0$ функции.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть функция $w = f(\vec{x})$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$. Тогда выполнено условие дифференцируемости (10.1), в котором, согласно (10.3),

$$o(|\vec{x} - \vec{x}_0|) = h(\vec{x})|\vec{x} - \vec{x}_0| = h(\vec{x})\frac{|\vec{x} - \vec{x}_0|^2}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = h(\vec{x})\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}\sum_{i=1}^{n}(x^i - x_0^i)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h(\vec{x}) \frac{x^i - x_0^i}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}(x^i - x_0^i) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x)(x^i - x_0^i), \qquad (10.5)$$

где

$$h_i(x) = h(\vec{x}) \frac{x^i - x_0^i}{|\vec{x} - \vec{x}_0|}, \qquad (10.6)$$

и поскольку

$$0 \leqslant \left| \frac{x^i - x_0^i}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \right| \leqslant 1,$$

то

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} h_i(x) = \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} h(\vec{x}) \frac{|x^i - x_0^i|}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = 0.$$

Функции $h_i(\vec{x})$ (10.6) не определены в точке $\vec{x} = \vec{x}_0$. Доопределим их по непрерывности значениями

$$h_i(\vec{x}_0) = \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} h_i(\vec{x}) = 0,$$

тогда из (10.1) и (10.5) получим

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x^i - x_0^i) + \sum_{i=1}^{n} h_i(\vec{x})(x^i - x_0^i) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} [A_i + h_i(\vec{x})](x^i - x_0^i).$$

Обозначив

$$A_i + h_i(\vec{x}) = f_i(\vec{x})$$

и учтя непрерывность функций $h_i(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$, заключаем, что $f_i(\vec{x})$ непрерывна в точке $\vec{x}_0$, причём $f_i(\vec{x}_0) = A_i + h_i(\vec{x}_0) = A_i$ для всех $i = \overline{1, n}$. Следовательно, справедливо равенство

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} f_i(\vec{x})(x_i - x_0^i),$$

совпадающее с (10.4).

Достаточность. Пусть условие (10.4) выполнено. Тогда, воспользовавшись непрерывностью функции $f_i(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$, положим

$$A_i = f_i(\vec{x}_0), \quad f_i(\vec{x}) = A_i + h_i(\vec{x}), \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} h_i(\vec{x}) = 0.$$

С учётом этого (10.4) можно записать как

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} [A_i + h_i(\vec{x})](x^i - x_0^i)$$

или

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x^i - x_0^i) + \sum_{i=1}^{n} h_i(\vec{x})(x^i - x_0^i), \qquad (10.7)$$

но

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x^i - x_0^i) = o(|\vec{x} - \vec{x}_0|) \quad \text{при } \vec{x} \to \vec{x}_0, \qquad (10.8)$$

поскольку

$$\frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} h_i(\vec{x})(x^i - x_0^i)\right|}{|\vec{x}-\vec{x}_0|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |h_i(\vec{x})| \to 0 \quad \text{при } \vec{x} \to \vec{x}_0.$$

Таким образом, при $\vec{x} \to \vec{x}_0$ соотношение (10.7) при учёте (10.8) примет вид

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x^i - x_0^i) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|).$$

Отсюда в силу (10.1) и определения функции, дифференцируемой в точке $\vec{x}_0$, следует справедливость утверждения теоремы.

Следствие 10.1.1. Функция $w = f(\vec{x})$, дифференцируемая в точке $\vec{x}_0$, непрерывна в этой точке.

Действительно, предельный переход при $\vec{x} \to \vec{x}_0$ в (10.4) даёт равенство

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0),$$

означающее непрерывность функции $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$.

Как и для функции одной переменной, обратное утверждение в общем случае неверно, что и иллюстрирует следующий пример.

Пример 10.1. Показать, что функции

$$1)\ z = \sqrt[3]{xy}, \quad 2)\ z = \sqrt[3]{x^3 - y^3},$$

непрерывные в точке $x = 0$, $y = 0$, не дифференцируемы в этой точке.

Решение. 1) Предположим, что функция $z = \sqrt[3]{xy}$ дифференцируема в точке $x = 0$, $y = 0$. Тогда, согласно теореме 10.1, в некоторой окрестности этой точки функцию можно представить в виде

$$z(x,y) - z(0,0) = f_1(x,y)(x-0) + f_2(x,y)(y-0)$$

или

$$\sqrt[3]{xy} = xf_1(x,y) + yf_2(x,y), \tag{10.9}$$

где функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ непрерывны в точке $x = 0$, $y = 0$. Пусть k — произвольное число. Положим в (10.9) $y = kx$. Тогда во всех точках указанной окрестности должно выполняться равенство

$$k^{1/3} = x^{1/3}[f_1(x,kx) + kf_2(x,kx)],$$

которое в самой точке $x = 0$, $y = 0$ с учётом непрерывности функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ примет вид

$$k^{1/3} = 0 \cdot [f_1(0,0) + kf_2(0,0)] = 0.$$

Полученное равенство противоречит условию произвольности числа k. Это противоречие означает, что сделанное изначально предположение о дифференцируемости функции $z = \sqrt[3]{xy}$ неверно.

2) Как и в предыдущем случае, воспользуемся методом доказательства от противного. Предположим, что функция $z = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ дифференцируема в точке $x = 0$, $y = 0$. Тогда, согласно теореме 10.1, в некоторой окрестности этой точки функцию можно представить в виде

$$z(x, y) - z(0, 0) = f_1(x, y)(x - 0) + f_2(x, y)(y - 0)$$

или

$$\sqrt[3]{x^3 - y^3} = xf_1(x, y) + yf_2(x, y), \tag{10.10}$$

где $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ непрерывны в точке $x = 0$, $y = 0$. Пусть k — произвольное число. Положим в (10.10) $y = kx$. Тогда во всех точках указанной окрестности должно выполняться равенство

$$\sqrt[3]{1 - k^3} = f_1(x, kx) + kf_2(x, kx),$$

которое в самой точке $x = 0$, $y = 0$ с учётом непрерывности функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ примет вид

$$\sqrt[3]{1 - k^3} = f_1(0, 0) + kf_2(0, 0) = A_1 + A_2k.$$

Полученное равенство противоречиво в силу того, что функция $\sqrt[3]{1 - k^3}$ нелинейна по k в отличие от функции $A_1 + A_2k$ в правой части равенства. Это противоречие означает, что сделанное изначально предположение о дифференцируемости функции $z = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ неверно.

11. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке

Теорема 10.1 связывает условия дифференцируемости функции $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ с возможностью представить её в виде (10.4), где функции $f_i(\vec{x})$, $i = \overline{1, n}$, непрерывны. Следующие теоремы устанавливают связь между дифференцируемостью функции и существованием её частных производных.

Теорема 11.1 (необходимое условие дифференцируемости функции в точке). *Если функция $w = f(\vec{x})$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$, то она имеет в этой точке все частные производные $(\partial f/\partial x_i)(\vec{x}_0)$, $i = \overline{1, n}$, и при $\vec{x} \to \vec{x}_0$*

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)(x^i - x_0^i) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|). \tag{11.1}$$

Доказательство. Пусть функция $w = f(\vec{x})$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$. Тогда найдутся такие постоянные A_i, $i = \overline{1, n}$, что при $\vec{x} \to \vec{x}_0$ будет выполняться равенство

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x^i - x_0^i) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|).$$

Положим в этом равенстве $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{e}_k t$. Тогда оно примет вид

$$f(\vec{x}_0 + \vec{e}_k t) - f(\vec{x}) = A_k t + o(t), \quad t \to 0.$$

Следовательно, существуют пределы

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\vec{x}_0+\vec{e}_k t)-f(\vec{x})}{t}=\frac{\partial f}{\partial x^k}(\vec{x}_0)=A_k,\quad k=\overline{1,n}. \tag{11.2}$$

Но тогда подстановка (11.2) в (10.1) даёт (11.1), что и требовалось доказать.

◊ Следует иметь в виду, что теорема 11.1 формулирует необходимое, но не достаточное условие, поэтому только из существования частных производных функции в точке не следует её дифференцируемость в этой точке. Более того, существование частных производных функции в точке не гарантирует даже её непрерывность в этой точке. Проиллюстрируем это следующими примерами.

Пример 11.1. Исследовать на дифференцируемость в точке $x=0$, $y=0$ функцию

$$z(x,y)=\begin{cases}e^{-1/(x^2+y^2)}, & x^2+y^2>0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Решение. В примере 9.7 было показано, что данная функция в точке $(0,0)$ имеет частные производные $z'_x(0,0)=z'_y(0,0)=0$. Представим приращение функции $z(x,y)$ в точке $(0,0)$ в виде

$$z(x,y)-z(0,0)=z'_x(0,0)x+z'_y(0,0)y+\alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2},\quad x\to 0,\ y\to 0$$

или

$$e^{-1/(x^2+y^2)}=\alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2},\quad x\to 0,\ y\to 0.$$

В силу теоремы 11.1 функция $z(z,y)$ будет дифференцируемой в точке $(0,0)$, если функция

$$\alpha(x,y)=\frac{e^{-1/(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

будет бесконечно малой при $x\to 0$, $y\to 0$, т.е. выполняется равенство

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{-1/(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}=0. \tag{11.3}$$

Положив $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, получим известный предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{e^{-1/(x^2+y^2)}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho}e^{-1/\rho^2}=0,$$

подтверждающий равенство (11.3), из которого следует дифференцируемость данной функции в точке $(0,0)$.

Пример 11.2. Показать, что функции

$$1)\ z=\sqrt[3]{xy};\quad 2)\ z=\sqrt[3]{x^3-y^3},$$

непрерывные в точке $x=0$, $y=0$ и имеющие в ней частные производные, не дифференцируемы в ней.

Решение. Заметим, что недифференцируемость этих функций была уже доказана в примере 10.1, а в примере 9.7 были найдены их частные производные в точке $(0,0)$. Приращение исследуемой функции в точке $(0,0)$ можно представить в виде

$$z(x,y) - z(0,0) = z'_x(0,0)x + z'_y(0,0)y + \alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2}, \quad x \to 0,\ y \to 0. \quad (11.4)$$

В силу теоремы 11.1 функции $z(z,y)$ будут дифференцируемыми в точке $(0,0)$, если функция $\alpha(x,y)$ бесконечно мала при $x \to 0$, $y \to 0$, т.е. выполняется равенство

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \alpha(x,y) = 0. \quad (11.5)$$

1) Частные производные функции $z = \sqrt[3]{xy}$ в точке $(0,0)$ равны $z'_x(0,0) = z'_y(0,0) = 0$. Следовательно, для неё формула (11.4) примет вид

$$\sqrt[3]{xy} = \alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2}, \text{ при } x \to 0,\ y \to 0,$$

откуда

$$\alpha(x,y) = \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Вычислим двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{xy}}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (11.6)$$

Для этого предварительно вычислим предел по прямой $y = kx$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{\sqrt[3]{xkx}}{\sqrt{x^2+k^2x^2}} = \frac{\sqrt[3]{k}}{\sqrt{1+k^2}} \lim_{x\to 0} x^{-1/3} = \infty.$$

Поскольку существуют прямые, при стремлении по которым к точке $(0,0)$ предел функции $\alpha(x,y)$ не равен нулю, то эта функция не является бесконечно малой при $x \to 0$, $y \to 0$, а функция $z = \sqrt[3]{xy}$ не дифференцируема в этой точке.

2) Частные производные функции $z = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ в точке $(0,0)$ равны $z'_x(0,0) = 1$, $z'_y(0,0) = -1$. Следовательно, для неё формула 11.4 примет вид

$$\sqrt[3]{x^3-y^3} = x - y + \alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2}, \quad x \to 0,\ y \to 0,$$

откуда

$$\alpha(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x^3-y^3} - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Исходная функция будет дифференцируемой, если $\alpha(x,y)$ — бесконечно малые при $x \to 0$, $y \to 0$.

Вычислим двойной предел

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{x^3-y^3} - x + y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Для этого предварительно вычислим предел по прямой $y = -x$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=-x}} \frac{x(\sqrt[3]{2}-2)}{x\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Поскольку существуют прямая $y = -x$, при стремлении по которой к точке $(0,0)$ предел функции $\alpha(x,y)$ не равен нулю, то эта функция не является бесконечно малой при $x \to 0$, $y \to 0$, а функция $z = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ не дифференцируема в этой точке.

Теорема 11.2 (достаточные условия дифференцируемости функции в точке). *Если все частные производные $(\partial f/\partial x^i)(\vec{x})$, $i = \overline{1,n}$, функции $w = f(\vec{x})$ определены в окрестности точки $\vec{x}_0$ и непрерывны в $\vec{x}_0$, то функция $w = f(\vec{x})$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$.*

Доказательство проведём для функции двух переменных, т.е. $\vec{x} = (x,y)$, $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)$ (доказательство для функции произвольного числа переменных аналогично). Пусть $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ определены в некотором шаре (круге) $S(x_0,y_0;\delta)$ и непрерывны в его центре (x_0,y_0). Приращение функции $\Delta f(x_0,y_0)$ запишем в виде

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = [f(x,y) - f(x_0,y)] + [f(x_0,y) - f(x_0,y_0)]. \tag{11.7}$$

Рассмотрим функцию одной переменной

$$\varphi_1(t) = f(t,y). \tag{11.8}$$

Эта функция на отрезке $[x_0, x]$ имеет производную

$$\varphi_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,y), \quad t \in [x_0, x], \tag{11.9}$$

что позволяет применить к ней формулу конечных приращений Лагранжа (см. [11], формула (18.6))

$$\varphi_1(x) - \varphi_1(x_0) = \varphi_1'(x_0 + \theta(x - x_0))[x - x_0], \quad 0 < \theta < 1.$$

Это равенство с учётом (11.8) и (11.9) запишется как

$$f(x,y) - f(x_0,y) = f_1(x,y)(x - x_0), \tag{11.10}$$

где

$$f_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta(x - x_0), y).$$

Так как частная производная $f'_x(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0), то существует

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Таким образом, равенство (11.10) содержит непрерывную в точке (x_0,y_0) функцию $f_1(x,y)$.

Введём теперь в рассмотрение функцию

$$\varphi_2(t) = f(x_0, t).$$

Как и в предыдущем случае, для второго слагаемого в (11.7) получим равенство

$$f(x_0, y) - f(x_0, y_0) = f_2(x, y)(y - y_0), \tag{11.11}$$

где $f_2(x, y)$ — непрерывная в (x_0, y_0) функция.

Подставив (11.10) и (11.11) в (11.7), получим

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_1(x, y)(x - x_0) + f_2(x, y)(y - y_0).$$

Из непрерывности функций $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ и теоремы 10.1 следует дифференцируемость функции $w = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

В теории функций нескольких переменных теорема 11.2 имеет важное значение, поскольку исследование функции на дифференцируемость в точке непосредственно по определению зачастую бывает весьма трудоемким. В этих случаях значительно проще проверить непрерывность частных производных, для вычисления которых имеется удобный аналитический аппарат.

$\Diamond$ Непрерывность частных производных, являясь достаточным условием, не является необходимым условием дифференцируемости функции в точке.

Пример 11.3. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

дифференцируема в точке $x = 0$, $y = 0$, однако имеет в этой точке разрывные частные производные, не ограниченные в любой точке окрестности точки $(0, 0)$.

Решение. Функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(0, 0)$, поскольку

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(1/x^2)}{x} = 0,$$
$$f'_y(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 \sin(1/y^2)}{y} = 0,$$

и, следовательно,

$$f(x, y) - f(0, 0) = 0 \cdot x + 0 \cdot y + \alpha(x, y)\sqrt{x^2 + y^2}$$

или

$$\alpha(x, y) = \frac{(x^2 + y^2) \sin(1/(x^2 + y^2))}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

причём

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \alpha(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2 + y^2) \sin(1/(x^2 + y^2))}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \sqrt{\rho} \sin \frac{1}{\rho^2} = 0,$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $x \to 0, y \to 0 \Rightarrow \rho \to 0$.

Таким образом,

$$\alpha(x,y) = o(\sqrt{x^2+y^2}) \quad \text{при } x \to 0,\ y \to 0.$$

Это и означает, что функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

При $x^2+y^2>0$

$$f'_x = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$
$$f'_y = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Покажем, что частные производные f'_x и f'_y разрывны в точке $(0,0)$ и не ограничены в любой её окрестности. С этой целью выберем последовательность $\{x_n, y_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся к точке $(0,0)$ при $n\to\infty$, например

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \quad y_n = \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Поскольку $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ при $n\to\infty$, то последовательность точек $\{x_n, y_n\}_{n=1}^{\infty}$ попадает в любую окрестность точки $(0,0)$. При этом соответствующие последовательности

$$\sin\frac{1}{x_n^2+y_n^2} = \sin 2\pi n \to 0 \quad \text{при } n\to\infty,$$
$$\cos\frac{1}{x_n^2+y_n^2} = \cos 2\pi n \to 1 \quad \text{при } n\to\infty,$$

и, следовательно, $f'_x(x_n,y_n) = f'_y(x_n,y_n) = -2\sqrt{\pi n}$, $n=\overline{1,\infty}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f'_x(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} f'_y(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} -2\sqrt{\pi n} = -\infty.$$

Это означает, что частные производные f'_x и f'_y разрывны в точке $(0,0)$ и не ограничены в любой её окрестности.

В заключение отметим, что необходимость исследовать вопрос о связи между непрерывностью, дифференцируемостью функции и существованием её частных производных связана с тем, что определения непрерывности и дифференцируемости основаны на понятии предела по совокупности переменных, тогда как частные производные определяются с помощью пределов по направлениям координатных осей, т.е. пределов по каждой переменной в отдельности.

12. Дифференцируемость и частные производные сложной функции

Теорема 12.1 (о частных производных сложной функции). *Если функции $\varphi_i(\vec{x})$, $i=\overline{1,m}$, дифференцируемы в точке $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, а функция $f(\vec{y})$ — в точке $\vec{y}_0 = (\varphi_1(\vec{x}_0), ..., \varphi_m(\vec{x}_0)) \in \mathbb{R}^m$, то сложная функция $w(\vec{x}) = f(\varphi_1(\vec{x}), ..., \varphi_m(\vec{x}))$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$, причём*

$$\frac{\partial w}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y^j}(\vec{y}_0)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}(\vec{x}_0), \quad i=\overline{1,n}. \qquad (12.1)$$

Доказательство. Для функции $f(\vec{y})$, дифференцируемой в точке $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, в силу теоремы 10.1 существуют функции $f_j(\vec{y})$, $i = \overline{1,m}$, непрерывные в точке $\vec{y}_0$ и такие, что

$$f(\vec{y}) - f(\vec{y}_0) = \sum_{j=1}^{m} f_j(\vec{y})(y^j - y_0^j), \quad f_j(\vec{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial y^j}(\vec{y}_0). \tag{12.2}$$

Согласно теореме 8.2 о непрерывности сложной функции и принимая во внимание, что дифференцируемые в точке функции являются непрерывными в ней, заключаем, что функции

$$\psi_j(\vec{x}) = f_j(\varphi_1(\vec{x}), ..., \varphi_m(\vec{x})), \quad j = \overline{1,m}, \tag{12.3}$$

непрерывны в точке $\vec{x}_0$, причём

$$\psi_j(\vec{x}_0) = f_j(\varphi_1(\vec{x}_0), ..., \varphi_m(\vec{x}_0)) = f_j(\vec{y}_0) = \frac{\partial f}{\partial y^j}(\vec{y}_0). \tag{12.4}$$

Подставив в (12.2) $\vec{y} = (\varphi_1(\vec{x}), ..., \varphi_m(\vec{x}))$ и учитывая обозначения (12.3), имеем

$$w(\vec{x}) - w(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \psi_j(\vec{x})[\varphi_j(\vec{x}) - \varphi_j(\vec{x}_0)]. \tag{12.5}$$

В силу условий теоремы функции $\varphi_j(\vec{x})$, $j = \overline{1,m}$, дифференцируемы в $\vec{x}_0$, следовательно, существуют такие непрерывные в $\vec{x}_0$ функции $\varphi_{ij}(\vec{x})$, что

$$\varphi_j(\vec{x}) - \varphi_j(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ij}(\vec{x})(x^i - x_0^i), \quad \varphi_{ij}(\vec{x}_0) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}(\vec{x}_0), \quad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}. \tag{12.6}$$

Тогда подставив (12.6) в (12.5), получим

$$w(\vec{x}) - w(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} w_i(\vec{x})(x^i - x_0^i), \quad w_i(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(\vec{x})\psi_j(\vec{x}). \tag{12.7}$$

Так как функции $\varphi_{ij}(\vec{x})$ и $\psi_j(\vec{x})$ непрерывны в точке $\vec{x}_0$, то и функции $w_i(\vec{x})$ непрерывны в этой точке. Это означает, что

$$w_i(\vec{x}_0) = \frac{\partial w}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ij}(\vec{x}_0)\psi_j(\vec{x}_0).$$

Отсюда с учётом обозначений (12.4) и (12.6) найдём формулу вычисления частных производных

$$\frac{\partial w}{\partial x^i}(\vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y^j}(\vec{y}_0)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}(\vec{x}_0), \quad i = \overline{1,n},$$

совпадающую с (12.1).

Пример 12.1. Найти все частные производные сложной функции $z = u^3 v + \sin v + 2$, $u = x^2 + y$, $v = e^x y$.

Решение. Вычислим частные производные функции z по переменным u и v:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 3u^2 v, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = u^3 + \cos v.$$

Теперь найдём частные производные функций u и v по переменным x и y: $u_x = 2x$, $u_y = 1$; $v_x = e^x y$, $v_y = e^x$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (3u^2 v)2x + (u^3 + \cos v)e^x y;$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = (3u^2 v) + (u^3 + \cos v)e^x.$$

Пример 12.2. Найти все частные производные сложной функции $w = u\cos v$, $u = x - y + 2z$, $v = x^2 - y + e^z$.

Решение. Вычислим частные производные функции z по переменным u и v:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \cos v, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = -u\sin v,$$

Теперь найдём частные производные функций u и v по переменным x и y: $u_x = 1$, $u_y = -1$, $u_z = 2$; $v_x = 2x$, $v_y = -1$, $v_z = e^z$. Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 1 \cdot \cos v - 2xu\sin v;$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = (-1)\cos v - (-1)u\sin v;$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2 \cdot \cos v - e^z u\sin v.$$

$\Diamond$ Рассмотрим частный случай $w = f(u_1, \ldots, u_n, t)$, $u_i = u_i(t)$, тогда $w = F(t)$, и речь может идти об обычной производной, которую называют полной. Согласно (12.1),

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{du_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{du_n}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}. \tag{12.8}$$

Пример 12.3. Найти полную производную функции

$$1)\ w = u^2 v + e^v + \ln(1+u), \qquad 2)\ w = u^2 vt + e^v + \ln(t+u)$$

где $u = \sin t$, $v = t^3$.

Решение. 1) Согласно (12.8), с учётом $u'_t = \cos t$, $v'_t = 3t^2$ запишем

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{dt} = 2uvu'_t + u^2 v'_t + e^v v'_t + \frac{u'_t}{1+u} =$$
$$= 2uv\cos t + u^2 3t^2 + e^v 3t^2 + \frac{\cos t}{1+u}.$$

2) Аналогично

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t} = 2uvtu'_t + u^2 v'_t + u^2 v'_t + e^v v'_t + \frac{u'_t}{t+u} + \Big(u^2 v + \frac{1}{t+u}\Big) =$$
$$= 2uvt\cos t + u^2 3t^2 + e^v 3t^2 + \frac{\cos t}{1+u} + u^2 v + \frac{1}{t+u}.$$

13. Производная по направлению и градиент

Рассмотрим функцию $w = f(\vec{x})$ с областью определения $D(f) \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $\vec{x}_0$ — внутренняя точка области $D(f)$, а L — луч, проходящий через эту точку в направлении единичного вектора $\vec{\ell} = (\ell^1, ..., \ell^n)$, $(\ell^1)^2 + ... + (\ell^n)^2 = 1$. Так как $\vec{x}_0$ — внутренняя точка области $D(f)$, то найдётся значение параметра t_0 такое, что отрезок

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{\ell}t, \quad |t| < t_0,$$

будет лежать в этой области.

♦ *Производной функции $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ по направлению $\vec{\ell}$* называется величина

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}} = \lim_{t\to+0} \frac{f(\vec{x}_0 + \vec{\ell}t) - f(\vec{x}_0)}{t}. \qquad (13.1)$$

Теорема 13.1. *Если функция $w = f(\vec{x})$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$, то производная по направлению $\vec{\ell}$ в этой точке находится по формуле*

$$f_{\vec{\ell}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)\ell^i. \qquad (13.2)$$

Доказательство очевидным образом вытекает из определения (13.1) и правила дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial \vec{\ell}}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{x}_0 + \vec{\ell}t)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)\ell^i.$$

Следствие 13.1.1. Обычные частные производные можно рассматривать как производные по направлению базисных векторов $\vec{e}_i$:

$$f_{\vec{e}_i}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0). \qquad (13.3)$$

Представление частных производных в виде (13.3) позволяет построить ещё одну дифференциально-векторную характеристику функции $w = f(\vec{x})$.

♦ *Градиентом функции $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$* называется вектор

$$\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} f_{\vec{e}_i}(\vec{x}_0)\vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)\vec{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\vec{x}_0)\vec{e}_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x^n}(\vec{x}_0)\vec{e}_n. \qquad (13.4)$$

С помощью градиента функции $w = f(\vec{x})$ её производную по направлению $\vec{\ell}$ (13.2) можно записать в виде евклидова скалярного произведения

$$f_{\vec{\ell}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(\vec{x}_0) = \big(\operatorname{grad} f(\vec{x}_0), \vec{\ell}\big) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(\vec{x}_0)\ell^1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x^n}(\vec{x}_0)\ell^n, \qquad (13.5)$$

откуда

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(\vec{x}_0) = \big|\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)\big|\, |\vec{\ell}| \cos\varphi, \qquad (13.6)$$

где φ — угол между векторами $\vec{\ell}$ и $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0)$

Как известно из векторной алгебры, скалярное произведение двух векторов принимает наибольшее значение тогда, когда их направления совпадают. С учётом этого формула (13.5) позволяет сделать следующий вывод, характеризующий свойства вектора-градиента функции.

Теорема 13.2. *Производная функции $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ по направлению вектора $\vec{\ell}$ имеет наибольшее значение, если это направление совпадает с направлением $\operatorname{grad} w$. Это наибольшее значение равно*

$$\frac{\partial w}{\partial \vec{\ell}} = |\operatorname{grad} w| \cos\varphi = |\operatorname{grad} w| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)\Big)^2} \tag{13.7}$$

при $\varphi = 0$, т.е. $\vec{\ell} \parallel \operatorname{grad} w$.

$\Diamond$ Другими словами, градиент функции $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ даёт скорость (по величине и направлению) наибыстрейшего изменения функции (скалярного поля) в точке $\vec{x}_0$. (Это утверждение иногда выбирают в качестве определения градиента.)

Теорема 13.3 (свойство градиентов). *Если функции $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$ обладают конечными производными на некотором множестве X, то справедливы равенства:*

1) $\operatorname{grad}\big(c_1 f_1(\vec{x}) + c_2 f_2(\vec{x})\big) = c_1 \operatorname{grad} f_1(\vec{x}) + c_2 \operatorname{grad} f_2(\vec{x})$, c_1, c_2 — *произвольные постоянные;*
2) $\operatorname{grad}\big(f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x})\big) = f_2(\vec{x}) \operatorname{grad} f_2(\vec{x}) + f_1(\vec{x}) \operatorname{grad} f_2(\vec{x})$;
3) $\operatorname{grad}\Big(\dfrac{f_1(\vec{x})}{f_2(\vec{x})}\Big) = \dfrac{f_2(\vec{x}) \operatorname{grad} f_2(\vec{x}) - f_1(\vec{x}) \operatorname{grad} f_2(\vec{x})}{f_2^2(\vec{x})}$, $f_2(\vec{x}) \neq 0$;
4) $\operatorname{grad} f(u_1(\vec{x}), ..., u_m(\vec{x})) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} \operatorname{grad} u_i(\vec{x})$.

Доказательство всех утверждений теоремы проводится стандартным образом, поэтому приведём доказательство одного из них, например второго:

$$\operatorname{grad}\big(f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x})\big) = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1}\big(f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x})\big) + ... + \vec{e}_n \frac{\partial}{\partial x^n}\big(f_1(\vec{x}) f_2(\vec{x})\big) =$$
$$= \vec{e}_1\Big[f_2(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^1} f_1(\vec{x}) + f_1(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^1} f_2(\vec{x})\Big] + ... + \vec{e}_n\Big[f_2(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^n} f_1(\vec{x}) + f_1(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^n} f_2(\vec{x})\Big] =$$
$$= f_2(\vec{x}) \operatorname{grad} f_1(\vec{x}) + f_1(\vec{x}) \operatorname{grad} f_2(\vec{x}).$$

Рассмотрим более подробно частный случай: функцию трёх переменных $w = f(x, y, z)$, где x, y, z — независимые переменные, а $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ — орты декартова базиса, в котором произвольный единичный вектор $\vec{e}$ задаётся своими направляющими косинусами:

$$\vec{\ell} = \vec{\imath} \cos\alpha + \vec{\jmath} \cos\beta + \vec{k} \cos\gamma, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

С учётом этих обозначений градиент функции $w = f(x, y, z)$ и её производная по направлению $\vec{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, согласно (13.2) и (13.4), запишутся в виде

$$\begin{gathered}\operatorname{grad} f = \vec{\imath}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial f}{\partial z},\\ f_{\vec{\ell}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}} = \cos\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial f}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial f}{\partial z}.\end{gathered} \tag{13.8}$$

Для удобства записи можно ввести символический вектор

$$\nabla = \vec{\nabla} = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{13.9}$$

и договориться, что векторы, стоящие слева от ∇, перемножаются с ∇ по правилам векторной алгебры, а на величины, стоящие справа, ∇ действует как дифференциальный оператор. Тогда

$$\begin{gathered}\operatorname{grad} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}),\\ (\vec{\ell}, \nabla) = \cos\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \cos\beta\frac{\partial}{\partial y} + \cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}\end{gathered} \tag{13.10}$$

и

$$f_{\vec{\ell}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}}(\vec{x}) = (\vec{\ell}, \nabla) f(\vec{x}). \tag{13.11}$$

$\Diamond$ Обозначение градиента (13.9) было введено ирландским математиком Гамильтоном в 1853 г. Спустя почти полвека, в 1892 г., английский физик и инженер Хевисайд ввел для символа ∇ название «оператор Гамильтона» и более короткое — «набла». Происхождение первого названия понятно, а второе происходит от греческого $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ — арфа, форма которой напоминает символ ∇. Символ grad был введён английским физиком Максвеллом в 1873 г. и происходит от латинского *gradus* — шаг, *gradientis* — шагающий, что, как мы увидим ниже, достаточно точно характеризует этот оператор в геометрических приложениях функции нескольких переменных и векторного анализа.

Пример 13.1. Для функции $w = x^2y + y^2 + xz$ найти угол между её градиентами в точках $P_1(1, 0, 1)$ и $P_2(2, 1, 0)$ и её производную по направлению вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$ в этих же точках.

Решение. Точки P_1 и P_2 принадлежат области определения функции $D(w) = \mathbb{R}^3$. Её частные производные

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy + z, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x^2 + 2y, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = x$$

непрерывны в этих точках и равны

$$\begin{gathered}\frac{\partial w}{\partial x}(P_1) = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(P_1) = 1, \quad \frac{\partial w}{\partial z}(P_1) = 1;\\ \frac{\partial w}{\partial x}(P_2) = 4, \quad \frac{\partial w}{\partial y}(P_2) = 6, \quad \frac{\partial w}{\partial z}(P_2) = 2.\end{gathered}$$

С учётом этого

$$\operatorname{grad} w(x, y, z) = (2xy + z)\vec{\imath} + (x^2 + 2y)\vec{\jmath} + x\vec{k}$$

и

$$\operatorname{grad} w(P_1) = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}, \quad |\operatorname{grad} w(P_1)| = \sqrt{3}; \tag{13.12}$$

$$\operatorname{grad} w(P_2) = 4\vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}, \quad |\operatorname{grad} w(P_2)| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}. \tag{13.13}$$

Обозначив через φ угол между градиентами (13.12) и (13.13), найдём [10]

$$\cos\varphi = \frac{\big(\operatorname{grad} w(P_1), \operatorname{grad} w(P_2)\big)}{|\operatorname{grad} w(P_1)|\,|\operatorname{grad} w(P_1)|} = \frac{1\cdot 4 + 1\cdot 6 + 1\cdot 2}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}},$$

откуда $\varphi = \arccos(6/\sqrt{42}) \approx 22{,}2^\circ$.

Чтобы вычислить производную по направлению, найдём единичный вектор в направлении $\overrightarrow{P_1P_2}$: $\vec{\ell} = \overrightarrow{P_1P_2}/|\overrightarrow{P_1P_2}|$. Поскольку $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 1, -1)$, $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{3}$, то

$$\vec{\ell} = \Big(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\Big).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial w}{\partial\vec{\ell}}(P_1) = \big(\vec{\ell}, \operatorname{grad} w(P_1)\big) = 1\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\frac{1}{\sqrt{3}} + 1\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{\partial w}{\partial\vec{\ell}}(P_2) = \big(\vec{\ell}, \operatorname{grad} w(P_2)\big) = 4\frac{1}{\sqrt{3}} + 6\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\Big(-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Пример 13.2. Найти угол между градиентами функций

$$w_1 = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, \quad w_2 = \frac{x^2}{yz^2}$$

в точке $P(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$.

Решение. Поскольку

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{3x^2}{2}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = 18y^2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = 18\sqrt{6}z^2;$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{2x}{yz^2}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2z^2}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial z} = -2\frac{x^2}{yz^3},$$

то

$$\operatorname{grad} w_1 = \frac{3x^2}{2}\vec{\imath} + 18y^2\vec{\jmath} + 18\sqrt{6}z^2\vec{k};$$

$$\operatorname{grad} w_2 = \frac{2x}{yz^2}\vec{\imath} - \frac{x^2}{y^2z^2}\vec{\jmath} - 2\frac{x^2}{yz^3}\vec{k},$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} w_1(P) = 3\vec{\imath} + 9\vec{\jmath} + 3\sqrt{6}\vec{k}, \quad |\operatorname{grad} w_1(P)| = 12;\\ &\operatorname{grad} w_2(P) = 12\vec{\imath} - 12\vec{\jmath} - 12\sqrt{6}\vec{k}, \quad |\operatorname{grad} w_2(P)| = 24\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{13.14}$$

Обозначив через φ угол между градиентами (13.14), методами векторной алгебры [10] найдём

$$\cos\varphi = \frac{\big(\operatorname{grad} w_1(P), \operatorname{grad} w_2(P)\big)}{|\operatorname{grad} w_1(P)|\,|\operatorname{grad} w_2(P)|} = \frac{3\cdot 12 + 9\cdot(-12) + 3\sqrt{6}\cdot(-12\sqrt{6})}{12\cdot 24\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда $\varphi = 135^\circ$.

14. Дифференциал функции нескольких переменных. Правила дифференцирования

Пусть функция $w = f(\vec{x})$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$, тогда по теореме 11.1 при $\vec{x} \to \vec{x}_0$ для неё справедливо представление

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x^i}(x^i - x^i_0) + o(|\vec{x} - \vec{x}_0|). \tag{14.1}$$

Так как $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ есть полное приращение функции за счёт приращения аргументов $x^i - x^i_0 = \Delta x^i$, $\vec{x} - \vec{x}_0 = \Delta\vec{x}$, то соотношение (14.1) можно записать в виде

$$\Delta f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x^i}\Delta x^i + o(|\Delta\vec{x}|). \tag{14.2}$$

♦ *Дифференциалом $df(\vec{x}_0)$ функции $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$* называется главная часть полного приращения функции (14.2), линейная относительно приращения независимых переменных Δx^i, т.е.

$$df(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x^i}\Delta x^i.$$

Как и для функции одной переменной, положив $\Delta x^i = dx^i$, получим

$$df(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x^i}dx^i. \tag{14.3}$$

Выражение (14.3) иногда называют *первым дифференциалом*, а его слагаемые — *частными первыми дифференциалами*, которые обозначают

$$d_i f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x^i}dx^i.$$

Таким образом, полное приращение функции (14.2) с помощью полного дифференциала (14.3) можно записать

$$\Delta f(\vec{x}_0) = df(\vec{x}_0) + o(|\Delta\vec{x}|). \tag{14.4}$$

Пример 14.1. Найти полный дифференциал функции $z = (x + \sin y)e^x$.

Решение. Вычислим частные производные: $z'_x = e^x + (x + \sin y)e^x$, $z'_y = e^x \cos y$. Тогда

$$dz = e^x\big[(x + 1 + \sin y)dx + \cos y\, dy\big]. \tag{14.5}$$

Пример 14.2. Найти полный дифференциал функции

$$w = zyx^3 + e^{x+y} + \sin z.$$

Решение. Вычислим частные производные: $w_x = 3zyx^2 + e^{x+y}$; $w_y = zx^3 + e^{x+y}$; $w_z = yx^3 + \cos z$. Тогда

$$dw = w_x dx + w_y dy + w_z dz = (3zyx^2 + e^{x+y})dx + (zx^3 + e^{x+y})dy + (yx^3 + \cos z)dz.$$

Формула (14.3) является обобщением на случай нескольких переменных определения первого дифференциала функции одной переменной, форма которого обладает свойством инвариантности. Это свойство сохраняется и для первого (полного) дифференциала функции нескольких переменных.

Теорема 14.1 (об инвариантности формы первого дифференциала). *Форма первого дифференциала функции $w = f(\vec{y})$, т.е.*

$$df(\vec{y}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y^j}(\vec{y}_0)dy^j, \tag{14.6}$$

не зависит от того, являются ли величины $\vec{y}$ независимыми переменными или дифференцируемыми функциями независимых переменных $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$.

Доказательство. 1. Если $\vec{y}$ являются независимыми переменными, то формула (14.6) есть определение первого дифференциала функции $f(\vec{y})$.

Если же $\vec{y}$ являются функциями независимых переменных $\vec{y} = \vec{y}(\vec{x})$ и $\vec{y}(\vec{x})$ дифференцируемы в точке $\vec{x}_0$, а $f(\vec{y})$ — в точке $\vec{y}_0 = \vec{y}(\vec{x}_0)$, то сложная функция $f(\vec{y}(\vec{x}))$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$ и как функция от $\vec{x}$ имеет дифференциал

$$df(\vec{y}(\vec{x}_0)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{y}(\vec{x}_0))}{\partial x^i}dx^i. \tag{14.7}$$

По правилу дифференцирования сложной функции (12.1) правую часть (14.7) можно записать как

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{y}(\vec{x}_0))}{\partial x^i}dx^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{y}_0)}{\partial y^j}\frac{\partial y^j(\vec{x}_0)}{\partial x^i}dx^i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{y}_0)}{\partial y^j}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^j(\vec{x}_0)}{\partial x^i}dx^i,$$

а с учётом того, что

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^j(\vec{x}_0)}{\partial x^i}dx^i = dy^j(\vec{x}_0), \tag{14.8}$$

ещё и как

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{y}(\vec{x}_0))}{\partial x^i} dx^i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{y}_0)}{\partial y^j} dy^j. \tag{14.9}$$

Подстановка (14.9) в (14.7) даёт

$$df(\vec{y}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{y}_0)}{\partial y^j} dy^j,$$

и мы приходим к той же самой форме дифференциала, что и в случае, когда $\vec{y}$ были независимыми.

Таким образом, формальная запись дифференциала (14.6) в обоих случаях одинакова. Следует, однако, иметь в виду, что при совпадении формы записи смысловая нагрузка символов dy_j, конечно же, различна. В первом случае dy_j представляют собой дифференциалы самих независимых переменных y_j, а во втором — представляют дифференциалы функций независимых переменных (14.8).

2. Для наглядности приведём подробное доказательство для случая, когда $w = f(u, v)$, $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ и все функции в соответствующих областях дифференцируемы по своим аргументам.

Если u и v – независимые переменные, то

$$dw = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv. \tag{14.10}$$

Если u и v – функции от x, y, z, то и w – функция этих переменных и, следовательно,

$$dw = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Продифференцируем w как сложную функцию:

$$\begin{aligned} dw &= \Big[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\Big] dx + \Big[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\Big] dy + \Big[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}\Big] dz = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\Big[\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz\Big] + \frac{\partial f}{\partial v}\Big[\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz\Big] = \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv. \end{aligned} \tag{14.11}$$

Сравнив (14.10) и (14.11), убеждаемся в справедливости утверждения.

$\Diamond$ Заметим, что во многих прикладных задачах часто бывает затруднительно выяснить вопрос о независимости переменных. В этих случаях инвариантность формы первого дифференциала является удобным его свойством. При записи $df(\vec{y}_0)$ в виде (14.6) можно не задумываться о том, являются ли переменные $y^1, y^2, ..., y^m$ независимыми.

$\Diamond$ Если функция $w = f(\vec{x})$ дифференцируема во всех точках некоторой области $D \subset \mathbb{R}^n$, то в каждой точке $\vec{x} \in D$ можно вычислить дифференциал

$$df(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} dx^i, \tag{14.12}$$

который будет функцией $2n$ переменных $x^1, ..., x^n$; $dx^1, ..., dx^n$, причём при фиксированных $x^1, ..., x^n$ дифференциал (14.12) есть линейная функция $dx^1, ..., dx^n$.

Как и свойство инвариантности формы первого дифференциала, правила дифференцирования в случае функций нескольких переменных такие же, как и для функции одной переменной.

Теорема 14.2 (правила дифференцирования). *Если u и v — дифференцируемые функции, то*
1) $d(c_1u + c_2v) = c_1du + c_2dv$, c_1, c_2 — const;
2) $d(uv) = v\,du + u\,dv$;
3) $d\Big(\dfrac{u}{v}\Big) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, $v \neq 0$.

Доказательство теоремы основано на использовании общей формы первого дифференциала и правилах вычисления частных производных. Доказательства всех утверждений теоремы однотипны. Приведём доказательство, например, свойства 2. Из дифференцируемости функций u и v следует дифференцируемость функции $w = uv$, тогда

$$dw = d(uv) = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv = v\,du + u\,dv,$$

что и требовалось доказать.

Теоремы 14.1 и 14.2 иногда позволяют упрощать вычисление дифференциалов или частных производных.

Пример 14.3. Найти дифференциалы функций

$$w_1 = \operatorname{arctg}\frac{y^2}{x}, \quad w_2 = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Решение. Положим $u = y^2/x$. Тогда

$$dw_1 = d(\operatorname{arctg} u) = \frac{du}{1 + u^2} = \frac{d(y^2/x)}{1 + y^4/x^2} =$$
$$= \frac{(2yx\,dy - y^2dx)/x^2}{(x^2 + y^4)/x^2} = \frac{1}{x^2 + y^4}[-y^2\,dx + 2xy\,dy].$$

Так как коэффициентами при дифференциалах независимых переменных являются соответствующие частные производные, то отсюда сразу же получаются и значения последних:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = -\frac{y^2}{x^2 + y^4}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{2xy}{x^2 + y^4}.$$

Аналогично

$$dw_2 = d\Big(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\Big) = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)dx - x\,d(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} =$$
$$= \frac{(-x^2 + y^2 + z^2)dx - 2xy\,dy - 2xz\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}; \quad \frac{\partial w_2}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}; \quad \frac{\partial w_2}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

15. Применение полного дифференциала в приближённых вычислениях

Аналогично дифференциалу функции одной переменной полный дифференциал функции нескольких переменных также используется в приближённых вычислениях. Пусть мы имеем функцию $w = f(\vec{x})$, причём, определив значения $\vec{x} = (x^1, ..., x^n)$, мы допустим погрешность $\Delta\vec{x} = (\Delta x^1, ..., \Delta x^n)$. Тогда значение w, вычисленное по неточным значениям аргументов, также получится с погрешностью $\Delta w = f(\vec{x} + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x})$. Оценим эту погрешность, считая, что известны погрешности $\Delta\vec{x} = (\Delta x^1, ..., \Delta x^n)$. Это можно сделать с помощью формулы (14.4), пренебрегая в ней бесконечно малой $o(|\Delta\vec{x}|)$ и заменяя тем самым приближённо величину Δw на dw, т.е.

$$\Delta w \approx dw = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} \Delta x^i.$$

Здесь погрешности Δx^i, $i = \overline{1, n}$, и коэффициенты при них могут быть как положительными, так и отрицательными. Заменив те и другие их абсолютными значениями, получим оценку предельной абсолютной погрешности

$$|\Delta w| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x^i}\right| |\Delta x^i|. \tag{15.1}$$

С учётом этого предельная относительная погрешность найдётся как

$$\delta w = \frac{|\Delta w|}{|w|} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \ln f}{\partial x^i}\right| |\Delta x^i|. \tag{15.2}$$

Пример 15.1. Найти предельные абсолютную и относительную погрешности измерения плотности материала конуса, если величина π берется с точностью до 0,001, а $m = 1{,}5$ кг, $R = 5$ см, $H = 10$ см, $\Delta m = 10$ г, $\Delta R = \Delta H = \Delta l = 0{,}005$ см.

Решение. 1. Запишем формулу, определяющую плотность материала через заданные величины:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 H/3} = \frac{3m}{\pi R^2 H}.$$

Вычислим предельную абсолютную погрешность:

$$\begin{gathered}\Delta\rho = \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|\Delta m + \left|\frac{\partial\rho}{\partial R}\right|\Delta R + \left|\frac{\partial\rho}{\partial H}\right|\Delta H + \left|\frac{\partial\rho}{\partial \pi}\right|\Delta\pi = \\ = \left(\frac{3}{\pi R^2 H}\right)\Delta m + \left|-\frac{6m}{\pi R^3 H}\right|\Delta R + \left|-\frac{3m}{\pi R^2 H^2}\right|\Delta H + \left|-\frac{3m}{\pi^2 R^2 H}\right|\Delta\pi = \\ = \frac{3}{\pi R^2 H}\left[\Delta m + \frac{2m}{R}\Delta l + \frac{m}{H}\Delta l + \frac{m}{\pi}\Delta\pi\right] = \\ = \frac{3}{3{,}141 \cdot 25 \cdot 10}\left[10 + \frac{3000}{5}0{,}05 + \frac{1500}{10}0{,}05 + \frac{1500}{3{,}14}0{,}001\right] = 0{,}2\ \text{г/см}^3.\end{gathered}$$

2. $\ln\rho = \ln 3 + \ln m - \ln\pi - 2\ln R - \ln H$. Вычислим предельную относительную погрешность:

$$\delta\rho = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{2\Delta l}{R} + \frac{\Delta l}{H} = 0{,}034,$$

т.е. 3,4 %.

Если формулу (14.4) записать в виде

$$f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + df(\vec{x}_0),$$

то её можно использовать, чтобы вычислить значение $f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x})$:

$$f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_0)\Delta x^i. \tag{15.3}$$

Формулу (15.3) зачастую удобнее использовать в виде

$$f(x^1, ..., x^n) = f(0, ..., 0) + f'_{x^1}(0, ..., 0)x^1 + f'_{x^n}(0, ..., 0)x^n. \tag{15.4}$$

Пример 15.2. Вычислить приближённо с помощью дифференциалов

$$1)\ 1{,}003 \cdot 2{,}002^2 \cdot 3{,}005^3; \quad 2)\ \frac{1{,}05^2}{\sqrt[3]{0{,}97\sqrt[3]{1{,}045}}}; \quad 3)\ \sqrt{1{,}03^3 + 1{,}98^3};$$
$$4)\ \cos 61^\circ \operatorname{tg} 43^\circ; \quad 5)\ 0{,}98^{1{,}03248}.$$

Решение. 1) Воспользуемся формулой (15.4). Положив $f(x, y, z) = (1+x)(2+y)^2(3+z)^3$, где $x = 0{,}003$, $y = 0{,}002$, $z = 0{,}005$, имеем $f'_x = (2+y)^2(3+z)^2$, $f'_y = (1+x)2(2+y)(3+z)^3$, $f'_z = (1+x)(2+y)^2 3(3+z)^2$, и, следовательно,

$$(1+x)(2+y)^2(3+z)^3 \approx 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 + 2^2 3^3 x + 2^2 3^3 y + 2^2 3^3 z =$$
$$= 108(1 + 0{,}003 + 0{,}002 + 0{,}005) = 108 \cdot 1{,}01 = 109{,}08.$$

2) Положим

$$f(x, y, z) = (1+x)^2(1-y)^{-1/3}(1+z)^{-1/9} \approx 1 + 2x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}z,$$

где $x = 0{,}005$, $y = 0{,}003$, $z = 0{,}045$, получим

$$\frac{1{,}05^2}{\sqrt[3]{0{,}97\sqrt[3]{1{,}045}}} \approx 1 + 0{,}1 + 0{,}001 - 0{,}0005 \approx 1{,}111.$$

3) Положим

$$f(x, y) = [(1+x)^3 + (2-y)^3]^{1/2} \approx 3 + \frac{x}{2} - 2y,$$

где $x = 0{,}03$, $y = 0{,}02$, получим

$$\sqrt{1{,}03^3 + 1{,}98^3} \approx 3 + 0{,}015 - 0{,}04 \approx 2{,}98.$$

4) Пусть

$$f(x,y)=\cos\Big(\frac{\pi}{3}+x\Big)\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}-y\Big).$$

Положим здесь $x=1^\circ=\pi/180=0{,}017$, $y=2\pi/180=0{,}034$. Учтём, что

$$\cos\Big(\frac{\pi}{3}+x\Big)\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4}-y\Big)=\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\Big[\sin\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\Big]x-\Big[\cos\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{\cos^2(\pi/4)}\Big]y,$$

и получим

$$\cos 61^\circ\operatorname{tg}43^\circ\approx 0{,}5-0{,}886\cdot 0{,}017-0{,}034\approx 0{,}451.$$

5) Здесь $f(x,y)=(1-x)^{1+y}$, $f'_x(0,0)=-(1+y)(1-x)^y\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=-1$, $f'_y(0,0)=(1-x)^{1+y}\ln(1-x)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$. Тогда $f(x,y)\approx 1-x$ и, полагая $x=0{,}02$, $y=0{,}032$, получим

$$0{,}98^{1{,}03248}\approx 1-0{,}02=0{,}98.$$

Пример 15.3. Вычислить объём материала, необходимого для изготовления цилиндрического стакана с радиусом внутреннего цилиндра $R=4$, высотой внутреннего цилиндра $H=20$ и толщиной стенок $h=0{,}1$.

Решение. 1. Точное решение $V_{\text{внутр}}=\pi R^2H$, $V_{\text{внеш}}=\pi(R+h)^2(H+h)$;

$$\begin{aligned}\Delta V=V_{\text{внеш}}-V_{\text{внутр}}&=\pi\{(R+h)^(H+h)-R^2H\}=\\&=\pi\{2RHh+h^2H+R^2h+2Rh^2+h^3\}=\\&=\pi\{(2RH+R^2)h+(H+2R+h)h^2\}=17,8\pi.\end{aligned}$$

2. Приближённое решение

$$\begin{aligned}\Delta V\approx dV&=\frac{\partial V}{\partial R}\Delta R+\frac{\partial V}{\partial H}\Delta H=\\&=\pi[2RH\Delta H+R^2\Delta H]=\pi[2RH+R^2]h=17,6\pi.\end{aligned}$$

3. Погрешность

$$\delta=\frac{(17,8-17,6)\pi}{17,8\pi}=0,02,$$

т.е. 2%.

4. Вычислить $V_{\text{внеш}}$ можно следующим образом:

$$V_{\text{внеш}}\approx V_{\text{внутр}}+\Delta V=\pi\cdot 4^2\cdot 20+17,6\pi\approx 337\pi.$$

16. Формула Лагранжа

Уточним понятие области в метрическом пространстве. Ранее область в метрическом пространстве мы определили как открытое связное множество, т.е. множество, две произвольные точки которого можно соединить ломаной, целиком принадлежащей этому множеству.

♦ Если две любые точки области можно соединить одним отрезком, целиком лежащим в области, то такая область называется *выпуклой*.

Теорема 16.1 (формула конечных приращений Лагранжа). *Если функция $w = f(\vec{x})$ дифференцируема в выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^n$, а $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — две точки этой области, то найдётся число θ, $0 < \theta < 1$, такое, что*

$$f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\big(\vec{x}_1 + \theta(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\big)[x_2^i - x_1^i]. \tag{16.1}$$

Доказательство. Пусть $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ — две точки области D, а поскольку, по условию теоремы, она выпуклая, то отрезок, соединяющий точки $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, целиком принадлежит этой области. Координаты всех точек, лежащих на этом отрезке, определяются параметрическим уравнением

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{16.2}$$

Функцию $w = f(\vec{x})$ во всех точках этого отрезка можно рассматривать как дифференцируемую функцию одной переменной t:

$$w(t) = f\big(\vec{x}_1 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)t\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{16.3}$$

причём

$$w(0) = f(\vec{x}_1), \quad w(1) = f(\vec{x}_2). \tag{16.4}$$

Для функции одной переменной (16.3) воспользуемся формулой Лагранжа

$$w(t_2) - w(t_1) = w'(\theta)(t_2 - t_1), \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant \theta \leqslant t_2 \leqslant 1. \tag{16.5}$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$w'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x}_1 + [\vec{x}_2 - \vec{x}_1]t)[x_2^i - x_1^i]. \tag{16.6}$$

Теперь, положив в (16.5) $t_2 = 1$, $t_1 = 0$:

$$w(1) - w(0) = w'(\theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

и, подставив сюда (16.4) и (16.6), получим формулу

$$f(\vec{x}_2) - f(\vec{x}_1) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(\vec{x})[x_2^i - x_1^i], \tag{16.7}$$

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\theta, \quad 0 < \theta < 1. \tag{16.8}$$

совпадающую с (16.1).

$\Diamond$ Утверждение теоремы 16.1 допускает геометрическую интерпретацию, а именно: существует внутренняя точка $\vec{x}$ (16.8) отрезка, соединяющего точки $\vec{x}_2$ и $\vec{x}_1$, для которой выполняется равенство (16.7). Заметим, что, как и в одномерном случае, теорема не даёт рецепта определения координат точки $\vec{x}$.

Формула (16.1) даёт точное выражение для приращения функции при любом конечном приращении аргументов $\vec{x}_2 - \vec{x}_1$, хотя значение параметра θ неизвестно: $0 < \theta < 1$. Тем не менее, формула Лагранжа широко применяется в анализе. Так, выбрав конкретное значение θ, например $\theta = 0$, получим приближённое равенство

$$\Delta f(\vec{x}_0) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x^i}\Delta x^i \quad \text{при } \Delta x_i \to 0, \quad i = \overline{1, n},$$

которое также используется в приближённых вычислениях.

17. Геометрические приложения частных производных первого порядка и первого дифференциала

Как уже отмечалось, наглядный геометрический смысл можно придать лишь функции двух переменных $z = f(x, y)$. Для функции трёх переменных x, y, z и больше её геометрическая интерпретация как гиперповерхности в $n + 1$-мерном пространстве не является наглядной. В этом случае информацию об изменении функции $f(\vec{x})$ в области D могут дать линии и поверхности уровня $f(\vec{x}) = \text{const}$. Уравнение $w = f(\vec{x})$ ещё можно интерпретировать как определение некоторой скалярной величины w в каждой точке области D на плоскости, в пространстве и гиперпространстве. Поэтому функции $w = f(\vec{x})$ иногда называют *скалярным полем* w в области D.

Так, например, функция $w = f(x, y, z)$ определяет скалярное поле w в пространстве x, y, z, причём поверхности уровня $f(x, y, z) = C$ будут характеризовать изменение скалярного поля в этом пространстве. В свою очередь, функция $w = f(x, y)$ определяет скалярное поле на плоскости x, y с линиями уровня $f(x, y) = C$. С другой стороны, последнее уравнение можно рассматривать как поверхности уровня в пространстве, которые не зависят от переменной z. Такие поверхности, как известно, являются цилиндрическими, поэтому скалярное поле двух переменных иногда называют *плоскопараллельным скалярным полем в пространстве*, поскольку в плоскостях, параллельных плоскости xOy, это поле имеет одни и те же линии уровня $f(x, y) = C$.

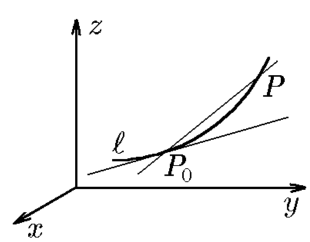
17.1. Касательная к пространственной кривой

Пусть пространственная кривая ℓ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

причём производные x_t, y_t, z_t существуют, непрерывны и одновременно в нуль не обращаются.

♦ *Касательной* к линии ℓ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ называется предельное положение секущей P_0P, когда $P_0 \to P$ по кривой ℓ.



Пусть t_0 соответствует точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$, т.е. $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, а t – точке $P(x, y, z)$, т.е. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Приращение Δt, $t = t_0 + \Delta t$, обеспечивает приращения $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, $z = z_0 + \Delta z$. Согласно аналитической геометрии, уравнение секущей имеет вид

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}$$

или

$$\frac{x - x_0}{\Delta x/\Delta t} = \frac{y - y_0}{\Delta y/\Delta t} = \frac{z - z_0}{\Delta z/\Delta t},$$

где x, y, z – текущие координаты секущей. При $P_0 \to P$, что соответствует $t_0 \to t$, $\Delta t \to 0$, имеем

$$\frac{x - x_0}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta x/\Delta t)} = \frac{y - y_0}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta y/\Delta t)} = \frac{z - z_0}{\lim\limits_{\Delta t \to 0}(\Delta z/\Delta t)}$$

или
$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},\tag{17.1}$$
что соответствует уравнению касательной к пространственной кривой ℓ в точке P_0 с направляющим вектором
$$\vec{S}(t_0)=x'(t_0)\vec{\imath}+y'(t_0)\vec{\jmath}+z'(t_0)\vec{k}.$$

17.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Рассмотрим в пространстве поверхность S, определяемую функцией двух переменных, заданной в неявном виде
$$F(x,y,z)=0.\tag{17.2}$$

♦ Точки поверхности, в которых частные производные $F_z=F_x=F_y=0$, будем называть *особыми точками.*

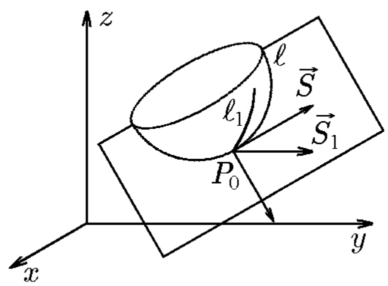


Рис. 13.

Пусть рассматриваемая поверхность S (17.2) не содержит особых точек. Зафиксируем на поверхности S точку $P_0(x_0,y_0,z_0)$ и через неё проведём линию ℓ (рис. 13), целиком принадлежащую поверхности S и заданную параметрическим уравнением $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$. Пусть $P(t)=(x(t),y(t),z(t))$ — точка, лежащая на линии ℓ. Уравнение (17.2) на линии ℓ примет вид
$$F(P(t))=F(x(t),y(t),z(t))=0,\tag{17.3}$$
поскольку $\ell\in S$.

Продифференцировав (17.3) как сложную функцию по переменной t, запишем
$$F_xx'(t)+F_yy'(t)+F_zz'(t)=0.\tag{17.4}$$
Рассмотрим два вектора:
$$\vec{S}=x'(t)\vec{\imath}+y'(t)\vec{\jmath}+z'(t)\vec{k};$$
$$\vec{N}=F_x(P(t))\vec{\imath}+F_y(P(t))\vec{\jmath}+F_z(P(t))\vec{k}.$$
Из (17.4) следует, что $(\vec{S},\vec{N})=0$, т.е. $\vec{S}\perp\vec{N}$. Таким образом, в точке P_0 мы имеем два вектора: $\vec{S}(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$ и $\vec{N}(t_0)=(F_x(t_0),F_y(t_0),F_z(t_0))$, где $\vec{S}$ — направляющий вектор касательной к пространственной кривой ℓ.

Проведём теперь через точку P_0 кривую ℓ_1 (см. рис. 13), также целиком принадлежащую поверхности S и $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$. Очевидно, что направляющий вектор касательной к кривой ℓ_1 в точке P_0, т.е. вектор $\vec{S_1}=(x_1'(t_0),y_1'(t_0),z_1'(t_0))$, изменится, а вектор $\vec{N}(P_0)$ в силу (17.4) останется тем же. Нетрудно заметить, что для любой кривой ℓ_i, принадлежащей поверхности S и проходящей через точку P_0, направляющий вектор её касательной $\vec{S_i}$ будет перпендикулярен одному и тому же вектору
$$\vec{N}(t_0)=(F_x(t_0),F_y(t_0),F_z(t_0)).\tag{17.5}$$

Но тогда это множество всех касательных образует плоскость, проходящую через точку P_0 с вектором нормали $\vec{N}(P_0)$. Уравнение этой плоскости будет иметь вид

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0. \tag{17.6}$$

♦ *Касательной плоскостью к данной поверхности в данной точке* называется плоскость, в которой лежат все касательные к любым линиям, принадлежащим данной поверхности и проходящим через данную точку. Касательная плоскость определяется уравнением (17.6).

Приняв вектор $\vec{N}(P_0)$ за направляющий вектор прямой, проходящей через точку P_0, можно записать её каноническое уравнение

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}. \tag{17.7}$$

♦ *Нормалью к поверхности* S в точке P_0 будем называть прямую, проходящую через точку P_0 перпендикулярно касательной плоскости к поверхности S в этой точке. Нормаль к поверхности определяется уравнением (17.7).

Если от неявного задания функции перейти к явному: $z=f(x,y)$ или $f(x,y)-z=0$, то

$$F_x=f_x,\quad F_y=f_y,\quad F_z=-1,$$

и с учётом (17.5) вектор нормали запишется как

$$\vec{N}(P_0)=(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0),-1). \tag{17.8}$$

Тогда уравнение касательной плоскости (17.7) с учётом (17.8) можно записать в виде

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

или

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)=(z-z_0), \tag{17.9}$$

а уравнение нормали (17.9) в виде

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{17.10}$$

17.3. Геометрический смысл частных производных функции нескольких переменных

Частные производные функции двух переменных имеют простой геометрический смысл.

Рассмотрим функцию $z=f(x,y)$, определённую в области D, лежащей на плоскости $\mathbb{R}^2$. Как известно, графиком этой функции является некоторая поверхность. Пусть точка $M_0(x_0,y_0)\in D$, соответствующая точке $N_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежит этой поверхности, и пусть в точке (x_0,y_0) существует частная производная $\partial z/\partial x$. По определению,

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$$

есть производная по x от функции одной переменной $f(x,y_0)$ при $x=x_0$. График этой функции $f(x,y_0)$ получим в пересечении поверхности $z=f(x,y)$ плоскостью $y=y_0$ (рис. 14).

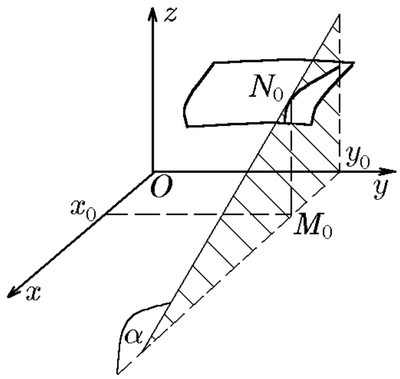


Рис. 14.

Так как производная функции одной переменной x в данной точке равна тангенсу угла наклона между касательной к функции в этой точке и положительным направлением оси Ox, то

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha,$$

т.е. значение частной производной $\partial z/\partial x$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ равно тангенсу угла, составленного осью Ox и касательной, проведённой в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Аналогично $f'_y(x_0, y_0)$ есть тангенс угла, составленного осью Oy и касательной, проведённой в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $x = x_0$.

Пример 17.1. Рассмотреть геометрический смысл производной, используя уравнение касательной плоскости.

Решение. Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, дифференцируемую в окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$. График этой функции в окрестности точки P_0 представляет собой некоторую поверхность S (рис. 15).

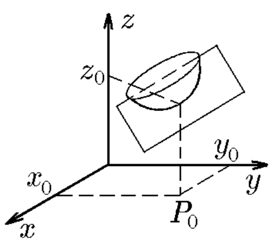


Рис. 15.

Запишем уравнение касательной плоскости к этой поверхности в точке $P_0(x_0, y_0)$:

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Найдём сечение плоскости $x = x_0$ с поверхностью S и касательной плоскостью. Пусть ℓ — линия пересечения $x = x_0$ с поверхностью S, тогда линией пересечения $x = x_0$ и касательной плоскости будет прямая, описываемая уравнением

$$\begin{cases} z - z_0 = f'_y(P_0)(y - y_0), \\ x = x_0, \end{cases}$$

причём эта прямая будет касательной к линии в точке $P_0(x_0, y_0)$.

Отсюда следует геометрический смысл частной производной $f'_y(P_0)$ как тангенса угла φ наклона касательной в точке P_0 к кривой ℓ_1, которая получается при пересечении поверхности S (определяемой уравнением $z = f(x, y)$) и плоскости $x = x_0$ (рис. 16,a).

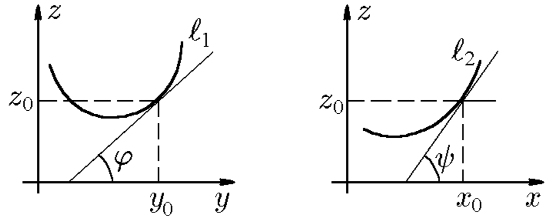


Рис. 16.

Аналогично частная производная $f_x(P_0)$ равна тангенсу угла ψ наклона касательной в точке P_0 к кривой ℓ_2, которая получается при пересечении поверхности

S и плоскости $y = y_0$ (рис. 16,*б*). Наряду с этим частные производные $f_x(P_0)$ и $f_y(P_0)$ можно интерпретировать, как скорости изменения величины z в плоскостях $x = x_0$ и $y = y_0$, соответственно.

Пример 17.2. Под каким углом нормаль в точке $P_1(-1, 2, 6)$ к поверхности $z = 2x^2 + y^2$ пересекается с плоскостью, касательной к поверхности в точке $P_2(2, 0, 8)$. Записать уравнение нормали в точке P_1 и касательной плоскости в точке P_2.

Решение. Как известно из аналитической геометрии, уравнение $z = 2x^2 + y^2$ описывает поверхность эллиптического параболоида. Если $P_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, лежащая на поверхности параболоида, то вектор нормали $\vec{N}_0(P_0)$ к поверхности в этой точке определяется уравнением (17.10). А поскольку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y,$$

то вектором нормали $\vec{N}_1$ в точке $P_1(-1, 2, 6)$ является вектор

$$\vec{N}_1(P_1) = (-4, 4, -1), \tag{17.11}$$

а вектором нормали $\vec{N}_2$ в точке $P_2(2, 0, 8)$ является вектор

$$\vec{N}_2(P_1) = (8, 0, -1). \tag{17.12}$$

Уравнение нормали в точке P_1 получится подстановкой (17.11) в (17.10):

$$\frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-6}{-1},$$

а уравнение касательной плоскости в точке P_2 получится подстановкой (17.12) в (17.9):

$$2(x-2) - (z-8) = 0.$$

Из аналитической геометрии (см., например, [10]) известно, что синус угла α между прямой и плоскостью находится по формуле

$$\sin\alpha = \frac{|(\vec{N}_1, \vec{N}_2)|}{|\vec{N}_1|\,|\vec{N}_2|} = \frac{|-4\cdot 8 + 4\cdot 0 + (-1)(-1)|}{\sqrt{16+16+1}\sqrt{64+1}} = \frac{31}{\sqrt{33\cdot 65}} \approx 0{,}67; \quad \alpha \approx 42^\circ.$$

Пример 17.3. Записать уравнение касательной плоскости к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Решение. Если точка $P_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на поверхности эллипсоида, то её координаты связаны уравнением

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1 \tag{17.13}$$

Чтобы найти вектор нормали $\vec{N}$, запишем уравнение поверхности в неявном виде:

$$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Тогда

$$F'_x=\frac{2x}{a^2},\quad F'_y=\frac{2y}{b^2},\quad F'_z=\frac{2z}{c^2},$$

и, следовательно, вектор нормали (17.5) в точке P_0 имеет координаты

$$\vec{N}_0(P_0)=\Big(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\Big).$$

С учётом этого уравнение касательной плоскости (17.6) можно записать как

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0.$$

Раскрыв скобки и учитывая (17.13), получим

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

17.4. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим функцию $z=f(x,y)$, дифференцируемую в окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$. График этой функции в окрестности точки P_0 представляет собой некоторую поверхность S. Через точку P_0 проведём касательную плоскость π (17.9):

$$\pi:\ z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Рассмотрим теперь соотношение между приращениями аппликаты точек поверхности S и касательной плоскости π, когда независимые переменные получают приращения Δx и Δy, соответственно. Согласно определению, полное приращение функции есть

$$\Delta z=\big[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y\big]+\big[\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\big].$$

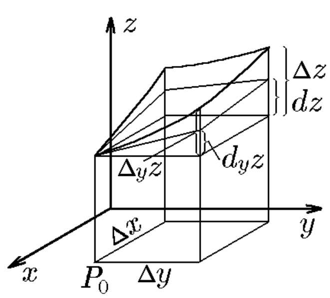


Рис. 17.

Но первое слагаемое, с одной стороны, есть полный дифференциал функции $z=f(x,y)$, а с другой – приращение ординаты z касательной плоскости к поверхности S в точке P_0.

Таким образом, геометрически (рис. 17) полный дифференциал функции $z=f(x,y)$ определяет главную часть полного приращения функции Δz, равную приращению апликаты касательной плоскости к поверхности S, проведённую в точке P_0, при задании независимым переменным приращений Δx и Δy.

Частные дифференциалы $dx=f_x(P_0)\Delta x$ и $dy=f_y(P_0)\Delta y$ определяют аналогичные приращения в плоскостях $x=x_0$ и $y=y_0$, соответственно.

17.5. Геометрические свойства градиента и производных по направлению

Теорема 17.1. *Градиент функции $w = f(x, y, z)$ в точке $P_0(x_0, y_0, z_0)$ направлен по нормали к поверхности уровня этой функции, проходящей через точку P_0.*

Доказательство. Согласно определению,

$$\operatorname{grad} w(P_0) = f_x(P_0)\vec{\imath} + f_y(P_0)\vec{\jmath} + f_z(P_0)\vec{k}. \tag{17.14}$$

Рассмотрим теперь поверхность уровня этой функции, проходящую через точку $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Предположим, что она описывает уровень

$$f(x, y, z) = C_0, \quad C_0 = f(x_0, y_0, z_0).$$

Но, с другой стороны, как мы уже установили, вектор нормали к этой поверхности в точке P_0 определён выражением

$$\vec{N}(P_0) = f_x(P_0)\vec{\imath} + f_y(P_0)\vec{\jmath} + f_z(P_0)\vec{k}. \tag{17.15}$$

Сравнив (17.14) и (17.15), убеждаемся в справедливости теоремы.

Теорема 17.2. *Производная функции $w = f(x, y, z)$ по направлению $\vec{\ell}$ равна проекции градиента этой функции на вектор $\vec{\ell}$.*

Доказательство. Пусть α, β, γ – углы, которые составляет вектор $\vec{\ell}$ с координатными осями, а единичный вектор $\vec{\ell}_0 = \vec{\ell}/|\vec{\ell}|$ имеет направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. По определению,

$$\frac{\partial w}{\partial \vec{l}} = f_x \cos\alpha + f_y \cos\beta + f_z \cos\gamma = (\operatorname{grad} w, \vec{\ell}_0) = |\operatorname{grad} w| \cdot 1 \cdot \cos\varphi, \tag{17.16}$$

где φ — угол между вектором $\vec{\ell}_0$ и вектором $\operatorname{grad} w$.

Следствие 17.2.1. Производная функции по направлению вектора $\vec{\ell}$, касательного к поверхности уровня, равна нулю.

Действительно, $\operatorname{grad} w$ и вектор нормали к поверхности $\vec{N}$ параллельны, т.е. $\vec{\ell} \perp \vec{N}$, и, следовательно, в соотношении (17.16) $\varphi = \pi/2$, $\cos\pi/2 = 0$,

$$\frac{\partial w}{\partial \vec{\ell}} = |\operatorname{grad} w| \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Пример 17.4. Найти направление и величину наибольшего изменения функции $w = x^2y + y^2z + z^2x$ в точке $P_0(1, 1, -1)$.

Решение. Согласно следствию 13.2, направление и величину наибольшего изменения функции задаёт $\operatorname{grad} w(P_0)$. Поскольку

$$w'_x = 2xy + z^2, \quad w'_y = x^2 + 2yz, \quad w'_z = y^2 + 2zx,$$

то

$$\operatorname{grad} w = \vec{\imath}(2xy + z^2) + \vec{\jmath}(x^2 + 2yz) + \vec{k}(y^2 + 2zx),$$

следовательно,

$$\operatorname{grad} w(P_0) = \vec{\imath}(2+1) + \vec{\jmath}(1-2) + \vec{k}(1-2) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k},$$

и, соответственно,

$$|\operatorname{grad} w(P_0)| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}.$$

Пример 17.5. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точке $P_0(3, 4)$ в направлении $\vec{\ell}$, перпендикулярном к линии уровня, проходящей через эту точку.

Решение. Направление, перпендикулярное к линии уровня $z_0 = \ln(x^2 + y^2)$, задаётся вектором

$$\operatorname{grad} z = \vec{\imath}\frac{2x}{x^2 + y^2} + \vec{\jmath}\frac{2y}{x^2 + y^2},$$

который в точке $P_0(3, 4)$ равен

$$\operatorname{grad} z(P_0) = \frac{6}{25}\vec{\imath} + \frac{8}{25}\vec{\jmath}.$$

Найдём единичный вектор этого направления:

$$\vec{\ell} = \frac{\operatorname{grad} z(P_0)}{|\operatorname{grad} z(P_0)|} = \frac{\dfrac{6}{25}\vec{\imath} + \dfrac{8}{25}\vec{\jmath}}{\sqrt{\left(\dfrac{6}{25}\right)^2 + \left(\dfrac{8}{25}\right)^2}} = \frac{3}{5}\vec{\imath} + \frac{4}{5}\vec{\jmath},$$

тогда

$$z_{\vec{\ell}}(P_0) = \frac{\partial z}{\partial \vec{\ell}}(P_0) = \bigl(\operatorname{grad} z(P_0), \vec{\ell}\bigr) = \frac{6}{25} \cdot \frac{3}{5} + \frac{8}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{50}{125} = 0{,}4.$$

Пример 17.6. Для функции $w_1 = x^{yz}$ найти производную в точке $P_1(e, 1, 1)$ по направлению наибольшего изменения функции $w = x^2y + y^2z + z^2x$ в точке $P_0(1, 1, -1)$.

Решение. Направление и величина наибольшего изменения функции w в точке P_0 найдены в примере 17.4:

$$\operatorname{grad} w(P_0) = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k},$$
$$|\operatorname{grad} w(P_0)| = \sqrt{11}.$$

Найдём единичный вектор этого направления:

$$\vec{\ell} = \frac{\operatorname{grad} w(P_0)}{|\operatorname{grad} w(P_0)|} = \frac{3}{\sqrt{11}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{11}}\vec{\jmath} - \frac{1}{\sqrt{11}}\vec{k}.$$

Далее, поскольку

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = yzx^{yz-1}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = x^{yz} z \ln x, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = x^{yz} y \ln x,$$

то

$$\operatorname{grad} w_1 = yzx^{yz-1}\vec{\imath} + x^{yz} z \ln x \vec{\jmath} + x^{yz} y \ln x \vec{k},$$

и, соответственно,

$$\operatorname{grad} w_1(P_1) = 1 \cdot 1 \cdot 1\vec{\imath} + e \cdot 1 \cdot 1\vec{\jmath} + e \cdot 1 \cdot 1\vec{k} = \vec{\imath} + e\vec{\jmath} + e\vec{k}.$$

Тогда

$$\big(w_1(P_1)\big)_{\vec{\ell}} = \frac{\partial w_1}{\partial \vec{\ell}}(P_1) = \big(\operatorname{grad} w_1(P_1), \vec{\ell}\big) = \frac{3-2e}{\sqrt{11}}.$$

18. Дифференцирование неявно заданных функций одной переменной

В разделе «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» [11] мы уже рассматривали задачу о дифференцировании неявно заданных функций. Однако развитый на тот момент математический аппарат позволил лишь сформулировать схему решения этой задачи, оставив в стороне её обоснование. Более того, при работе с функциями, неявно заданными выражением

$$F(x, y) = 0, \tag{18.1}$$

мы вынуждены были предположить, что уравнение (18.1) действительно определяет y как некоторую функцию от x. Теперь с помощью понятия частных производных мы можем сформулировать требования на функцию $F(x, y)$, при выполнении которых уравнение (18.1) определяет неявную зависимость y от x (или наоборот).

Теорема 18.1 (условия существования неявной функции). *Если функция $F(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$ в некоторой замкнутой окрестности*

$$D : |x - x_0| \leqslant \delta, \ |y - y_0| \leqslant \varepsilon \tag{18.2}$$

точки $P_0(x_0, y_0)$, причём $F(x_0, y_0) = 0$, а $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как однозначную и непрерывную функцию переменной x.

Доказательство. Прежде всего отметим, что теорема утверждает лишь сам факт существования функциональной зависимости y от x, оставляя открытым вопрос о вычислении её значений или об аналитическом представлении $y = y(x)$. Тем не менее, геометрическая трактовка функциональной зависимости соответствует существованию некоторой линии, проходящей через точку $P_0(x_0, y_0)$ и представляющей собой график этой функции. Существование такой линии ℓ нам и предстоит доказать.

1. Для определённости будем считать, что $F_y(x_0, y_0) > 0$ (доказательство для $F_y(x_0, y_0) < 0$ аналогично). Так как, по условию теоремы, $F_y(x, y)$ непрерывна

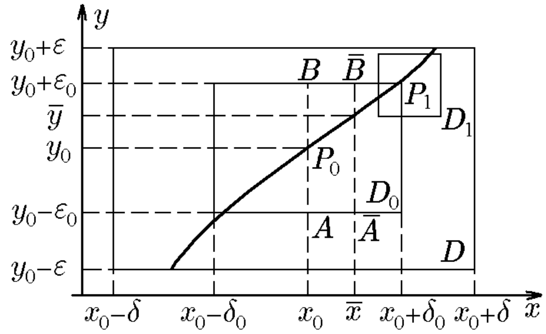


Рис. 18.

в прямоугольнике D, то в силу сделанного предположения можно указать некоторую окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$, например прямоугольник D_0: $|x - x_0| < \delta_0$, $|y - y_0| < \varepsilon_0$, в котором $F_y(x, y)$ будет также положительна (рис. 18).

Зафиксируем координату x значением x_0, тогда функция $F(x, y)$ сведётся к функции $F(x_0, y)$ одной переменной y. Теперь будем продвигаться по вертикали $x = x_0$ из точки A в точку B (см. рис. 18). Очевидно, что с ростом y функция $F(x_0, y)$ будет возрастать в силу условия $F_y(x_0, y) > 0$. Для возрастающей функции, обращающейся в нуль в точке $P_0(x_0, y_0)$, можно утверждать, что при $y < y_0$ Функция $F(x_0, y)$ будет иметь отрицательные значения, т.е. $F(x_0, y) < 0$. Это означает, что на концах отрезка AB функция $F(x_0, y)$ будет иметь значения разных знаков: $F(x_0, y_0 + \varepsilon_0) > 0$ и $F(x_0, y_0 - \varepsilon_0) < 0$.

Перейдём теперь к горизонтальным отрезкам, проходящим через точки A и B, т.е. фиксируем на этот раз $y = y_0 - \varepsilon_0$ и $y = y_0 + \varepsilon_0$. Получаются две функции: $g_1 = F(x, y_0 - \varepsilon_0)$ и $g_2 = F(x, y_0 + \varepsilon_0)$ от одной переменной x. Как уже установлено, при $x = x_0$ первая функция имеет отрицательное значение, вторая — положительное. По условию теоремы, обе функции непрерывны в D, и, следовательно, можно выбрать такое $\delta_0 \leqslant \delta$, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta_0$, каждая из функций сохранит свой знак, т.е.

$$F(x, y_0 - \varepsilon_0) < 0, \quad F(x, y_0 + \varepsilon_0) > 0, \quad |x - x_0| < \delta_0.$$

Возьмём теперь произвольное значение $\bar{x}$ переменной x из окрестности $|x - x_0| < \delta_0$. Зафиксировав координату x значением $\bar{x}$, рассмотрим функцию одной переменной $F(\bar{x}, y)$. Будем продвигаться по вертикали $x = \bar{x}$ из точки $\bar{A}$ в точку $\bar{B}$. Согласно только что доказанному, на концах отрезка $\bar{A}\bar{B}$ функция $F(\bar{x}, y)$ будет иметь значения разных знаков. Но тогда при движении от точки $\bar{A}$ к точке $\bar{B}$ в силу непрерывности $F(\bar{x}, y)$ и по теореме о нуле непрерывной функции встретится хотя бы одна точка с ординатой $\bar{y}$, в которой эта функция обратится в нуль:

$$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Последнее соотношение и означает, что для каждого значения $\bar{x}$ переменной x из промежутка $|x - x_0| < \delta_0$ существует такое значение $\bar{y}$ переменной y из промежутка $|y - y_0| < \delta_0$, которое удовлетворяет уравнению (18.1). Это и доказывает существование неявной функции, определяемой уравнением (18.1).

2. Докажем теперь её однозначность.

Так как функция $F(\bar{x}, y)$ возрастает на отрезке $|y - y_0| < \delta_0$, то каждое свое значение она принимает лишь один раз. Следовательно, существует только одно значение $\bar{y}$, при котором функция $F(\bar{x}, y)$ обращается в нуль, т.е. $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, что и доказывает её однозначность.

3. Для доказательства непрерывности возьмём произвольное значение x из промежутка $|x - x_0| < \delta_0$ и дадим ему столь малое приращение, чтобы точка $x + \Delta x$ оставалось в D_0. Согласно доказанному, значениям x и $x + \Delta x$ соответствуют значения y и Δy такие, что $F(x, y) = 0$ и $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$, и, следовательно,

$$\Delta F(x, y) = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) \equiv 0. \tag{18.3}$$

Применив к приращению $\Delta F(x, y)$ (18.3) теорему Лагранжа о конечных приращениях, получим

$$\Delta F(x, y) = F_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta x + F_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta y = 0, \tag{18.4}$$

где $0 < \theta < 1$.

По условию теоремы, производные F_x и F_y непрерывны в замкнутой области D и, следовательно, в нем ограничены положительными числами P и R:

$$|F_x(x, y)| \leqslant P; \tag{18.5}$$
$$|F_y(x, y)| \leqslant R. \tag{18.6}$$

Кроме того, согласно сделанному ранее предположению, F_y в D_0 принимает только положительные значения. Поэтому оценку (18.6) можно уточнить:

$$R \geqslant F_y \geqslant r > 0. \tag{18.7}$$

Если (18.4) переписать в виде

$$\Delta y = -\frac{F_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}{F_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)}\Delta x, \tag{18.8}$$

то для неё с учётом (18.5) и (18.7) справедлива оценка

$$|\Delta y| \leqslant \frac{P}{r}|\Delta x|.$$

Последнее неравенство показывает, что при $\Delta x \to 0$ Δy также стремится к нулю, а это и означает непрерывность функции $y = y(x)$ при любом x из прямоугольника D_0.

4. Итак, мы доказали существование, однозначность и непрерывность неявной функции $F(x, y) = 0$ в прямоугольнике D_0, представляющем собой некоторую окрестность точки $P_0(x_0, y_0)$. Если прямоугольник D_0 не покрывает прямоугольник D, то обозначим через $P_1(x_1, y_1)$ одну из точек пересечения графика этой функции (т.е. кривой l) с границей прямоугольника D_0 и рассмотрим ещё один прямоугольник с центром в точке P_1. В этом прямоугольнике выполнены все условия теоремы, а, кроме того, $F_y \neq 0$ в точке P_1. Но тогда, в соответствии с только что доказанным для прямоугольника D, уравнение (18.1) определит неявную, однозначную и непрерывную функцию $y(x)$. В общей части прямоугольников D_0 и D_1 эти функции совпадают (в силу их однозначности), и поэтому можно считать неявную функцию определённой в более широкой области. Такое продолжение можно делать несколько раз и в обе стороны от точки $P_0(x_0, y_0)$ до тех пор, пока не найдётся точка, где $F_y = 0$. Таким образом, теорема полностью доказана.

Укажем теперь аналитическое выражение для нахождения производной $y'(x)$, заданной неявным образом уравнением (18.1).

Теорема 18.2. *Если неявно заданная функция $F(x,y)=0$ удовлетворяет условиям теоремы существования* 18.1, *то функция $y=y(x)$ в окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$ обладает непрерывной производной $y'(x)$, равной*

$$y'(x)=\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F(x,y)/\partial x}{\partial F(x,y)/\partial y}. \tag{18.9}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (18.8), записанным в виде

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{F_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)},$$

тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)=-\lim_{\Delta x\to 0}-\frac{F_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)}{F_y(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)}. \tag{18.10}$$

Покажем, что при $\Delta x\to 0$ существует конечный предел (18.10). Действительно, по условию теоремы 18.1, F'_x и F'_y непрерывны в окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$, поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}F_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}F_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)=F_x(x,y);$$
$$\lim_{\Delta y\to 0}F_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}F_y(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)=F_y(x,y).$$

Из этих соотношений, равенства (18.10) и условия $F_y(x,y)\neq 0$ вытекает существование конечного предела (18.10) и, следовательно, существование $y'(x)$ в виде (18.9). Непрерывность $y'(x)$ следует непосредственно из самой формулы (18.9) и непрерывности F_x и F_y, что и требовалось доказать.

Заметим, что с помощью формулы (18.9) по свойствам функции $F(x,y)$ можно судить о свойствах функции $y=y(x)$, которая не задана непосредственно. Отметим также, что

$$dy(x)=-\frac{F_x}{F_y}dx. \tag{18.11}$$

Формулу (18.9) при условии существования $y'(x)$ можно получить из уравнения (18.1) дифференцированием $F(x,y(x))$ как сложной функции:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

Пример 18.1. Найти $y'(x)$ для неявно заданной функции

$$\sin(x+y)+x^2+e^y=0.$$

Решение. Запишем

$$F_x=\cos(x+y)+2x,\qquad F_y=\cos(x+y)+e^y.$$

Тогда при условии $\cos(x+y)+e^y\neq 0$, согласно (18.9),

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{\cos(x+y)+2x}{\cos(x+y)+e^y}.$$

Проверим непосредственно:

$$\cos(x+y)(1+y')+2x+e^y y'=0,$$

откуда

$$y'[\cos(x+y)+e^y]=-2x-\cos(x+y),$$

т.е.

$$y'=-\frac{\cos(x+y)+2x}{\cos(x+y)+e^y},$$

что и требовалось доказать.

19. Дифференцирование неявно заданных функций нескольких переменных

Результаты, полученные в предыдущем разделе, обобщим на неявные функции нескольких переменных. Если w — функция независимых переменных x^1, x^2, ..., x^n, то неявным образом она задаётся уравнением

$$F(x^1,x^2,\ldots,x^n,w)=0. \tag{19.1}$$

Требования к функции $F(x^1,x^2,\ldots,x^n,w)$, при которых уравнение (19.1) действительно определяет некоторую функцию $w=w(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ даёт следующая теорема.

Теорема 19.1 (теорема существования неявных функций нескольких переменных). *Если функция $F(x^1,x^2,...,x^n,w)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными F'_w, F'_{x^i}, $i=\overline{1,n}$, в замкнутом $(n+1)$-мерном параллелепипеде D: $|w-w_0|\leqslant\varepsilon$, $|x^i-x^i_0|\leqslant\delta^i$, $i=\overline{1,n}$, с центром в точке $P_0(x^1_0,x^2_0,...,x^n_0,w_0)$, причём $F(P_0)=0$, а $F'_w(P_0)\neq0$, то в некоторой окрестности точки P_0 уравнение* (19.1) *определяет w как однозначную и непрерывную по совокупности своих аргументов функцию $w=w(x^1,x^2,\ldots,x^n)$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 18.1.

Теорема 19.2. *Если неявно заданная функция $F(x^1,x^2,...,x^n,w)=0$ удовлетворяет условиям теоремы существования* 19.1*, то функция $w=w(x^1,x^2,...,x^n)$ в окрестности точки P_0 обладает непрерывными частными производными*

$$\frac{\partial w}{\partial x^i}=-\frac{\partial F/\partial x^i}{\partial F/\partial w},\quad i=\overline{1,n}. \tag{19.2}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 18.2.

◊ Формулы (19.2) в предположении существования частных производных можно получить, продифференцировав уравнения (19.1) и считая F сложной функцией от x^i:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial x^i}+\frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x^i}=0.$$

Отсюда с учётом того, что $\partial x^j/\partial x^i = \delta_{ij}$, имеем

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x^i} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда и следует (19.2).

С помощью формул (19.2) по свойствам функции $F(x^1, x^2, ..., x^n, w)$ можно судить о свойствах функции $w(x^1, x^2, ..., x^n)$, не заданной непосредственно. Заметим также, что

$$dw = -\frac{F'_{x^1}dx^1 + ... + F'_{x^n}dx^n}{F'_w} = -\frac{1}{F'_w}\sum_{i=1}^{n} F'_{x^i}dx^i.$$

Пример 19.1. Найти частные производные z'_x и z'_y для функции

$$e^z x + (y + x^2)z = 0.$$

Решение. Поскольку $F'_z = e^z x + x^2 + y$, $F'_x = e^z + 2xz$, $F'_y = z$, то

$$z'_x = -\frac{e^z + 2xz}{e^z x + x^2 + y}, \quad z'_y = -\frac{z}{e^z x + x^2 + y}.$$

Пример 19.2. Указать области, в которых уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет y как неявную функцию x. Показать, что ни в какой окрестности точки $P_1(1, 0)$ уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ не определяет y как неявную функцию x.

Решение. Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$, как известно из курса аналитической геометрии, определяет единичную окружность с центром в начале координат. В курсе математического анализа эту окружность называют графиком уравнения $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Поскольку окружность не проектируется однозначно на Ox, то на плоскости xOy уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет y как неявную функцию x. Однако, разбив отрезок $[-1, 1]$ точками $x_0 = -1 < x^1 < ... < x^n = 1$ и выбрав на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ функцию $y = \sqrt{1 - x^2}$ или $x = \sqrt{1 - y^2}$, получим, что их графики являются подмножествами графика исходного уравнения. Другими словами, верхняя и нижняя полуокружности, однозначно проектируясь на ось Ox, в совокупности представляют саму окружность.

Таким образом, в прямоугольнике $|x| \leqslant 1$, $0 < y \leqslant 1$ уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ неявно определяет y как функцию x ($y = \sqrt{1 - x^2}$), а в прямоугольнике $|x| \leqslant 1$, $-1 \leqslant y < 0$ уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ неявно определяет другую функцию y от x ($y = -\sqrt{1 - x^2}$). Вне этих двух прямоугольников уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ не определяет никакую функцию.

Этот же результат можно получить с использованием теоремы 19.1. Рассмотрим точку $P_0(0, 1)$. Координаты этой точки $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 - 1 = 0$, т.е. точка P_0 является нулем функции $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Поскольку $F'_y = 2y$, то $F'_y(P_1) = 2 \cdot 0 = 0$. Это означает, что в точке P_1 не выполняются условия теоремы 19.1, и, следовательно, ни в какой окрестности этой точки уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ не определяет y как неявную функцию x.

Пример 19.3. Показать, что уравнение

$$F(x, y, z) = z^3 - xyz + y^2 - 16 = 0 \tag{19.3}$$

определяет в некоторой окрестности точки $P_0(1, 4, 2)$ единственную неявную функцию вида $z = f(x, y)$; найти её частные производные z'_x и z'_y.

Решение. Функция $F(x,y,z) = z^3 - xyz + y^2 - 16 = 0$ дифференцируема в любой окрестности точки $P_0(1,4,2)$, причём $F(P_0) = 0$, $F'_z(P_0) = (3x^2 - xy)\big|_{P_0} = 3 - 4 = -1 \neq 0$. Следовательно, согласно теореме 19.1, уравнение (19.3) в окрестности точки $M_0(1,4)$ определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $z = f(x,y)$, причём $f(1,4) = 2$.

Теперь рассмотрим несколько способов вычисления частных производных полученной функции.

Первый способ. Воспользуемся формулами (19.2). Для этого найдём

$$F'_x = -yz, \quad F'_y = -xz + 2y, \quad F'_z = 3z^2 - xy,$$

тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{yz}{3z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{xz - 2y}{3z^2 - xy}.$$

Второй способ. Предположив, что функция $z = f(x,y)$ подставлена в уравнение (19.3), продифференцируем полученное тождество по x и y, соответственно:

$$3z^2 z'_x - yz - xyz'_x = 0;$$
$$3z^2 z'_y - xz - xyz'_y + 2y = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{3z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2y}{3z^2 - xy}.$$

Третий способ. Предположив, что функция $z = f(x,y)$ подставлена в уравнение (19.3), вычислим дифференциал полученного тождества:

$$(3z^2 - xy)dz - yz\,dx + (-xz + 2y)dy = 0.$$

При $3z^2 - xy \neq 0$ данное равенство преобразуется к виду

$$dz = \frac{yz}{3z^2 - xy}dx + \frac{xz - 2y}{3z^2 - xy}dy,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{3z^2 - xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz - 2y}{3z^2 - xy}.$$

20. Производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных

Пусть $w = f(x^1, x^2, ..., x^n)$ дифференцируема в D, т.е. существуют частные производные $\partial f/\partial x^i$. Рассматривая $\partial f/\partial x^i$ как новые функции, их снова можно дифференцировать:

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\frac{\partial w}{\partial x^1}\Big) = \frac{\partial^2 w}{\partial (x^1)^2} = w''_{x^1x^1} = w_{x^1x^1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial}{\partial x^n}\Big(\frac{\partial w}{\partial x^n}\Big) = \frac{\partial^2 w}{\partial (x^n)^2} = w''_{x^nx^n} = w_{x^nx^n}.$$

Кроме того, возможны частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x^1}\Big) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^1 \partial x^2} = w''_{x^1x^2} = w_{x^1x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\frac{\partial w}{\partial x^2}\Big) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial x^1} = w''_{x^2x^1} = w_{x^2x^1}, \ldots$$

Аналогично находятся производные третьего порядка

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial (x^1)^2}\Big) = \frac{\partial^3 w}{\partial (x^1)^3} = w'''_{x^1x^1x^1} = w_{x^1x^1x^1},$$
$$\frac{\partial}{\partial x^3}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^1 \partial x^2}\Big) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3} = w'''_{x^1x^2x^3} = w_{x^1x^2x^3}, \quad \ldots$$

и т.д.

21. Частные производные и производные по направлению высших порядков

♦ Производные, взятые по разным переменным, называются *смешанными производными.*

Теорема 21.1 (о равенстве смешанных производных). *Смешанные частные производные функции нескольких переменных в некоторой точке $\vec{x}$, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности в этой точке.*

Доказательство проведём для функции двух переменных $z = f(x, y)$. Подчеркнём, что непрерывность смешанных производных f''_{xy} и f''_{yx} означает их существование в некоторой окрестности точки $P(x, y)$. Отсюда следует, что в окрестности этой точки существуют непрерывные производные f_x, f_y и, наконец, непрерывная в окрестности этой же точки функция $f(x, y)$.

Составим вспомогательные функции

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y), \quad \psi(y) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \tag{21.1}$$

Легко убедиться, что с учётом непрерывности

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \psi(y + \Delta y) - \psi(y). \tag{21.2}$$

Применим к левой части соотношения (21.2) теорему Лагранжа о конечных приращениях:

$$\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \varphi'_x(\bar{x})\Delta x,$$

где $x < \bar{x} < x + \Delta x$, $\varphi'(\bar{x})$ вполне определена по условию теоремы. Кроме того, согласно (21.1),

$$\varphi'_x(\bar{x})\Delta x = [f(\bar{x}, y + \Delta y) - f(\bar{x}, y)]'_x \Delta x = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y.$$

Здесь $y < \bar{y} < y + \Delta y$, f''_{xy} вполне определена по условию теоремы.

Применив описанную выше процедуру к правой части соотношения (21.2), получим

$$\psi(y + \Delta y) - \psi(y) = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})\Delta x \Delta y.$$

Здесь $x < \tilde{x} < x + \Delta x$, $y < \tilde{y} < y + \Delta y$, f''_{xy} существует. В силу (21.2)

$$f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y = f''_{yx}(\tilde{x}, \tilde{y})\Delta x \Delta y$$

и, следовательно,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{xy}(\bar{x},\bar{y}) = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(\tilde{x},\tilde{y}) \to f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y),$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать равенство любых смешанных производных при указанных условиях (существование и непрерывность).

Если функция $w = f(x^1, x^2, ..., x^n)$, то

$$\frac{\partial^k f}{(\partial x^i)^{k-p}(\partial x^j)^p} = \frac{\partial^k f}{(\partial x^j)^p(\partial x^i)^{k-p}}.$$

Если условие теоремы не выполняется, то равенство смешанных производных, отличающихся только порядком дифференцирования, может нарушиться.

Пример 21.1. Показать, что для функции

$$z(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0;\\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

смешанные производные равны, если $x^2+y^2>0$, т.е.

$$z_{xy}(x,y) = z_{yx}(x,y),$$

и не равны, если $x^2+y^2=0$, т.е.

$$z_{xy}(x,y) \neq z_{yx}(x,y).$$

Решение. При $x^2+y^2>0$ имеем

$$\begin{aligned} z'_x(x,y) &= y\Big[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big] = y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2};\\ z'_y(x,y) &= x\Big[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big] = x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned} \tag{21.3}$$

Если $x=y=0$, то производные $z'_x(0,0)$ и $z'_y(0,0)$ находим непосредственно из определения:

$$\begin{aligned} z'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{z(x,0)-z(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x} = 0,\\ z'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{z(0,y)-z(0,0)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y} = 0. \end{aligned} \tag{21.4}$$

Найдём теперь смешанные производные.

При $x^2+y^2>0$ имеем

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y = \Big(y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)'_y = \frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + y\frac{-4x^3+8x^2y}{(x^2+y^2)^2} -$$

$$-2y\frac{(x^4-y^4+4x^2y^2)2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Big(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big);$$

$$z''_{yx}=(z'_y)'_x=\Big(x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)'_x=\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+x\frac{4x^3-8xy^2}{(x^2+y^2)^2}-$$

$$-2x\frac{(x^4-y^4-4x^2y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Big(1+\frac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big).$$

При $x=y=0$ смешанные производные найдём непосредственно из определения с учётом (21.3) и (21.4):

$$z_{xy}(0,0)=(z'_x)'_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{z'_x(0,y)-z'_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{-y^5/y^4}{y}=-1;$$

$$z_{yx}(0,0)=(z'_y)'_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{z'_y(x,0)-z'_y(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x^5/x^4}{x}=1.$$

Таким образом, для смешанных производных с разным порядком дифференцирования имеем

$$z_{xy}=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Big(1+\dfrac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big), & x^2+y^2>0;\\ -1, & y^2+y^2=0;\end{cases}\tag{21.5}$$

$$z_{yx}=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\Big(1+\dfrac{8x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big), & x^2+y^2>0;\\ 1, & y^2+y^2=0.\end{cases}\tag{21.6}$$

Отсюда следует, что при $x^2+y^2>0$ смешанные производные равны: $z''_{xy}=z''_{yx}$. Равенство нарушается в точке $x=y=0$: $z''_{xy}(0,0)=-1\neq z''_{yx}(0,0)=1$. Последнее объясняется тем, что в точке $(0,0)$ не выполняются требования теоремы 21.1: смешанные производные в этой точке не являются непрерывными. В том, что смешанные производные в точке $(0,0)$ терпят разрыв, можно убедиться, вычислив в ней предел по прямым $y=kx$:

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}z_{xy}(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}z_{yx}(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2(k^2-1)}{x^2(k^2+1)}\Big(1+\frac{8k^2x^4}{(k^2+1)^2x^4}\Big)=$$

$$=\frac{k^2-1}{k^2+1}\Big(1+\frac{8k^2}{(k^2+1)^2}\Big).$$

Зависимость пределов от угловых коэффициентов k означает, что соответствующие двойные пределы

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}z_{xy}(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}z_{yx}(x,y)$$

не существуют, а поэтому производные $z_{xy}(x,y)$, $z_{yx}(x,y)$ в точке $(0,0)$ имеют разрыв, вследствие чего $z_{xy}(0,0)\neq z_{yx}(0,0)$, что и требовалось доказать.

Пример 21.2. Показать, что функция

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}e^{-(x-x_0)^2/4a^2t}$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{21.7}$$

Решение. Найдём

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-x_0)^2/4a^2 t}\Big[-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t^{5/2}}\Big] = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t^3}} e^{-(x-x_0)^2/4a^2 t}\Big[1 - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2 t}\Big]; \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-(x-x_0)^2/4a^2 t}\Big[-\frac{2(x-x_0)}{4a^2 t}\Big]; \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{a^2 2\sqrt{4\pi a^2 t^3}} e^{-(x-x_0)^2/4a^2 t}\Big[1 - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2 t}\Big].
\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что u_t отличается от u_{xx} множителем a^2, следовательно, $u_t = a^2 u_{xx}$.

Следующий пример иллюстрирует технику вычисления производных высших порядков для сложной функции.

Пример 21.3. Найти выражения для производных 2-го порядка сложной функции $u = f(x, y)$, у которой величины x и y являются функциями независимых переменных α и β.

Решение. Пусть функции $u = f(x, y)$ и $x = x(\alpha, \beta)$, $y = y(\alpha, \beta)$ имеют непрерывные производные до 2-го порядка включительно. В этих предположениях первые частные производные, согласно (12.2), имеют вид

$$u_\alpha = u_x x_\alpha + u_y y_\alpha, \quad u_\beta = u_x x_\beta + u_y y_\beta.$$

Найдём теперь производные 2-го порядка. По определению производной, взятой дважды по α, имеем

$$\begin{aligned}
u_{\alpha\alpha} &= (u_\alpha)_\alpha = (u_x x_\alpha + u_y y_\alpha)_\alpha = [(u_x)_\alpha x_\alpha + u_x x_{\alpha\alpha}] + [(u_y)_\alpha y_\alpha + u_y y_{\alpha\alpha}] = \\
&= [(u_{xx} x_\alpha + u_{xy} y_\alpha) x_\alpha + u_x x_{\alpha\alpha}] + [(u_{yx} x_\alpha + u_{yy} y_\alpha) y_\alpha + u_y y_{\alpha\alpha}].
\end{aligned}$$

Приравняв здесь частные производные, различающиеся лишь порядком дифференцирования, в силу их непрерывности получим

$$u_{\alpha\alpha} = u_{xx} x_\alpha^2 + 2u_{xy} x_\alpha y_\alpha + u_{yy} y_\alpha^2 + u_x x_{\alpha\alpha} + u_y y_{\alpha\alpha}.$$

Буквально так же находятся две другие частные производные:

$$\begin{aligned}
&u_{\beta\beta} = u_{xx} x_\beta^2 + 2u_{xy} x_\beta y_\beta + u_{yy} y_\beta^2 + u_x x_{\beta\beta} + u_y y_{\beta\beta}; \\
&u_{\alpha\beta} = u_{xx} x_\alpha x_\beta + u_{xy}(x_\alpha y_\beta + x_\beta y_\alpha) + u_{yy} y_\alpha y_\beta + u_x x_{\alpha\beta} + u_y y_{\alpha\beta}.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом находятся производные 3-го и более высоких порядков. Запоминать эти формулы нет необходимости. При дифференцировании конкретных функций все вычисления ведутся непосредственно с помощью обычных правил и формул дифференцирования в предположении известной зависимости x и y от переменных α и β.

Пример 21.4. Записать уравнение $u_{xx}+u_{yy}=0$ в полярных координатах.

Решение. Поскольку $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, а $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}(y/x)$, то

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}=\cos\varphi,\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}=\sin\varphi,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{y}{r^2}=-\frac{\sin\varphi}{r},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{x}{r^2}=\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi};\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}.\end{aligned}$$

Обозначив

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)u=\Big(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)\Big(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)u=\\ &=\cos^2\varphi u_{rr}-\frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi u_{r\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}u_{\varphi\varphi}+\frac{\sin^2\varphi}{r}u_r+\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}u_\varphi;\\ \frac{\partial^2u}{\partial y^2}&=\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)u=\Big(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)\Big(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\Big)u=\\ &=\sin^2\varphi u_{rr}+\frac{2}{r}\cos\varphi\sin\varphi u_{r\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}u_{\varphi\varphi}+\frac{\cos^2\varphi}{r}u_r-\frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2}u_\varphi.\end{aligned}$$

Окончательно запишем

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{rr}+\frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}+\frac{1}{r}u_r=0.$$

Пример 21.5. Для определителя n-го порядка

$$\Gamma(t)=\begin{vmatrix}a_{11}(t)&\dots&a_{1n}(t)\\ \vdots&\dots&\vdots\\ a_{n1}(t)&\dots&a_{nn}(t)\end{vmatrix}$$

показать справедливость следующих соотношений:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial a_{ij}}=A_{ij},\quad i,j=\overline{1,n},\tag{21.8}$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элемента a_{ij}, и

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{da_{ij}(t)}{dt}A_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\Gamma_i(t),\tag{21.9}$$

где

$$\Gamma_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{da_{ij}(t)}{dt} A_{ij}.$$

$\Diamond$ Заметим, что $\Gamma_i(t)$ есть определитель, который получится из определителя $\Gamma(t)$, если в нём функции, стоящие в i-ой строке, заменить их производными.

Решение. Разложение определителя по элементам первой строки имеет вид

$$\Gamma = a_{11}A_{11} + ... + a_{1n}A_{1n}.$$

Элемент a_{11} входит только в первое слагаемое, при этом A_{11} не содержит a_{11}, поэтому

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial a_{11}} = A_{11}.$$

Аналогично доказываются остальные равенства (21.8).

Предположим теперь, что элементы $a_{ij}(t)$ определителя есть дифференцируемые функции для $t \in [0, T]$. Тогда и определитель $\Gamma(t)$ — дифференцируемая на отрезке $[0, T]$ функция. Воспользовавшись правилом нахождения производной сложной функции и формулой (21.8), получим правило (21.9) для вычисления производной определителя:

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Gamma}{\partial a_{ij}} \frac{da_{ij}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}\frac{da_{ij}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i(t),$$

что и требовалось доказать.

Пример 21.6. Найти $d\Gamma(t)/dt$, если

$$\Gamma(t) = \begin{vmatrix} e^{t^2} & 1 & 2 \\ 1 & t^3 & 1 \\ 2 & 1 & \sin 2t \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычисление производных определителя с помощью его разложения по какому-либо столбцу (строке) трудоемко, так как это разложение состоит из шести слагаемых, каждое из которых является произведением трёх сомножителей. В данном случае удобнее воспользоваться формулой (21.9). Это даёт

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} e^{t^2} & 1 & 2 \\ 1 & t^3 & 1 \\ 2 & 1 & \sin 2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2te^{t^2} & 0 & 0 \\ 1 & t^3 & 1 \\ 2 & 1 & \sin 2t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e^{t^2} & 1 & 2 \\ 0 & 3t^2 & 0 \\ 2 & 1 & \sin 2t \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} e^{t^2} & 1 & 2 \\ 1 & t^3 & 1 \\ 0 & 0 & 2\cos 2t \end{vmatrix} = 2te^{t^2}(t^3\sin 2t - 1) + 3t^2(e^{t^2}\sin 2t - 4) + 2\cos 2t(t^3e^{t^2} - 1).$$

$\blacklozenge$ Функции $w = f(\vec{x})$ по непрерывности их частных производных в заданной области $D \subset \mathbb{R}^n$ можно распределить по классам:

1) класс $C(D)$ или $C^{(0)}(D) \Leftrightarrow f(\vec{x})$ непрерывны на D;

2) класс $C^{(1)}(D) \Leftrightarrow \forall k = \overline{1,n}$, $f'_{x^k} \in C(D)$, т.е. все первые частные производные непрерывны на D;
3) класс $C^{(2)}(D) \Leftrightarrow \forall k,l = \overline{1,n}$, $f''_{x^k x^l} \in C(D)$, т.е. все частные производные 2-го порядка непрерывны на D;

и т.д.

Очевидно, что $C^{(n)}(D) \subset C^{(n-1)}(D) \subset ... \subset C(D)$.

По аналогии с частными производными высших порядков вводится понятие высших производных по направлениям.

♦ *Производной k-го порядка функции $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}$ по направлениям* $\vec{\ell}_1, ..., \vec{\ell}_k$ называется величина

$$f_{\vec{\ell}_1 \ldots \vec{\ell}_k} = f^{(k)}_{\vec{\ell}_1 \ldots \vec{\ell}_k} = (f^{(k-1)}_{\vec{\ell}_1 \ldots \vec{\ell}_{k-1}})'_{\vec{\ell}_k} = \frac{\partial}{\partial \vec{\ell}_k}\Big(\frac{\partial}{\partial \vec{\ell}_{k-1}}\Big(\cdots \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{\ell}_1}\Big)\Big). \tag{21.10}$$

В частности, для производной 2-го порядка по двум направлениям $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ имеем

$$f_{\vec{\ell}_1 \vec{\ell}_2} = f''_{\vec{\ell}_1 \vec{\ell}_2} = (f'_{\vec{\ell}_1})'_{\vec{\ell}_2} = \frac{\partial}{\partial \vec{\ell}_2}\Big(\frac{\partial f}{\partial \vec{\ell}_1}\Big).$$

Как для вычисления производной по направлению $\vec{\ell}$, все первые частные производные мы собирали в один вектор, так же для работы с производными по направлениям (21.10) все частные производные k-го порядка удобно свести в одну матрицу.

♦ *Производной k-го порядка функции $w = f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,* называется величина

$$f^{(k)}_{x^{i_1} x^{i_2} \ldots x^{i_k}}(\vec{x}) = \Big(\frac{\partial^k f(\vec{x})}{\partial x^{i_1} \partial x^{i_2} \ldots \partial x^{i_k}}\Big).$$

Например, производную 2-го порядка функции $w = f(\vec{x})$ можно записать в виде матрицы

$$f''(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f''_{x^1 x^1}(\vec{x}) & \ldots & f''_{x^1 x^n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ f''_{x^n x^1}(\vec{x}) & \ldots & f''_{x^n x^n}(\vec{x}) \end{pmatrix}. \tag{21.11}$$

С учётом этого производную 2-го порядка по направлениям $\vec{l} = (l^1, ..., l^n)$ и $\vec{s} = (s^1, ..., s^n)$ можно записать матричным произведением

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial \vec{l} \partial \vec{s}} = (l^1 \ldots l^n) \begin{pmatrix} f''_{x^1 x^1}(\vec{x}) & \ldots & f''_{x^1 x^n}(\vec{x}) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ f''_{x^n x^1}(\vec{x}) & \ldots & f''_{x^n x^n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^1 \\ \vdots \\ s^n \end{pmatrix}. \tag{21.12}$$

Пример 21.7. Записать выражение для вычисления производных по направлению (21.10), используя оператор Гамильтона ∇.

Решение. Воспользовавшись формулой (13.11), запишем производную по направлению в виде

$$f_{\vec{\ell}}(\vec{x}) = f'_{\vec{\ell}}(\vec{x}) = (\vec{\ell}, \nabla) f(\vec{x}) = \Big(\ell^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \ell^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + ... + \ell^n \frac{\partial}{\partial x^n}\Big) f(\vec{x}).$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&f^{(k)}_{\vec{\ell}_1\ldots\vec{\ell}_k}(\vec{x}) = (\vec{\ell}_1, \nabla)(\vec{\ell}_2, \nabla)\cdots(\vec{\ell}_k, \nabla)f(\vec{x}) = \\
&= \Big(\ell_1^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \ell_1^n\frac{\partial}{\partial x_n}\Big)\Big(\ell_{21}\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \ell_2^n\frac{\partial}{\partial x^n}\Big)\cdots\Big(\ell_k^1\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \ell_k^n\frac{\partial}{\partial x^n}\Big)f(\vec{x}).
\end{aligned}
\tag{21.13}
$$

Здесь $\vec{\ell}_j$, $j = \overline{1,k}$, — единичные векторы направления дифференцирования: $(\ell_j^1)^2 + (\ell_j^2)^2 + \ldots + (\ell_j^n)^2 = 1$.

Пример 21.8. Для функции $w = x^2y + y^2 + xz$ найти производные второго порядка по направлениям $\vec{\ell}_1$ и $\vec{\ell}_2$ в точке $P(2,1,0)$, если

$$
1)\ \vec{\ell}_1 = \vec{\ell}_2 = \operatorname{grad} w(P); \quad 2)\ \vec{\ell}_1 = \operatorname{grad} w(P),\ \vec{\ell}_2 = \Big(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big).
$$

Решение. Данная функция уже рассматривалась в примере 13.1. Там были найдены первые частные производные

$$
w_x = 2xy, \quad w_y = x^2 + 2y, \quad w_z = x
$$

и

$$
\operatorname{grad}\, w(P) = \Big(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\Big). \tag{21.14}
$$

Теперь составим матрицу (21.11) из частных производных 2-го порядка:

$$
w'' = \begin{pmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x & 1 \\ 2x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

и найдём её значение в точке $P(2,1,0)$:

$$
w''(P) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

С её помощью по формуле (21.12) вычислим требуемые производные по направлениям.

1) В этом случае $\vec{\ell}_1 = \vec{\ell}_2 = \operatorname{grad} w(P)$, т.е. производная второго порядка вычисляется по одному и тому же направлению, определяемому равенством (21.14). Следовательно, в силу (21.12) найдём

$$
\frac{\partial^2 w(P)}{[\partial \operatorname{grad} w(P)]^2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} =
$$

$$= \frac{1}{14}(2\ 3\ 1)\begin{pmatrix}17\\14\\2\end{pmatrix} = \frac{39}{7} \approx 5{,}57.$$

2) В этом случае

$$\vec{\ell}_1 = \operatorname{grad} w(P) = \vec{\imath}\frac{2}{\sqrt{14}} + \vec{\jmath}\frac{3}{\sqrt{14}} + \vec{k}\frac{1}{\sqrt{14}}, \quad \vec{\ell}_2 = -\vec{\imath}\frac{1}{\sqrt{5}} + \vec{k}\frac{2}{\sqrt{5}}$$

и $\vec{\ell}_1 \perp \vec{\ell}_2$, поскольку $(\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2) = 0$, т.е. производная 2-го порядка вычисляется по двум перпендикулярным направлениям. Согласно (21.12), запишем

$$\frac{\partial^2 w(P)}{\partial\vec{\ell}_1\partial\vec{\ell}_2} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\4 & 2 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{14}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}\\\frac{1}{\sqrt{14}}\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{70}}(-1\ 0\ 2)\begin{pmatrix}17\\14\\2\end{pmatrix} = -\frac{13}{\sqrt{70}} \approx -1{,}55.$$

Этот же результат можно получить из формул (21.13) предыдущего примера.

Пример 21.9. Записать общее выражение для вычисления производных функции $w = f(x, y)$ по направлениям 2-го и 3-го порядков.

Решение. Пусть $\vec{l} = (l^1, l^2)$, $(l^1)^2 + (l^2)^2 = 1$; $\vec{s} = (s^1, s^2)$, $(s^1)^2 + (s^2)^2 = 1$ — единичные векторы, задающие два направления. Тогда, согласно (21.12), и с учётом $w_{xy} = w_{yx}$ имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\vec{l}\partial\vec{s}} = (l^1\ l^2)\begin{pmatrix}w_{xx} & w_{xy}\\w_{yx} & w_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s^1\\s^2\end{pmatrix} = l^1s^1w_{xx} + (l^1s^2 + l^2s^1)w_{xy} + l^2s^2w_{yy}. \quad (21.15)$$

Этот же результат можно получить с помощью оператора ∇ (21.13):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\vec{l}\partial\vec{s}} = (\vec{s}, \nabla)(\vec{l}, \nabla)w = \Big(s^1\frac{\partial}{\partial x} + s^2\frac{\partial}{\partial y}\Big)\Big(l^1\frac{\partial}{\partial x} + l^2\frac{\partial}{\partial y}\Big)w(x, y).$$

К двум единичным векторам $\vec{l}$ и $\vec{s}$ добавим третий единичный вектор $\vec{m} = (m^1, m^2)$. Тогда, согласно (21.13),

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\vec{l}\partial\vec{s}\partial\vec{m}} = (\vec{m}, \nabla)(\vec{s}, \nabla)(\vec{l}, \nabla)w =$$

$$= \Big(m^1\frac{\partial}{\partial x} + m^2\frac{\partial}{\partial y}\Big)[l^1s^1w_{xx} + (l^1s^2 + l^2s^1)w_{xy} + l^2s^2w_{yy}] =$$

$$= l^1s^1m^1w_{xxx} + (l^1s^1m^2 + l^1s^2m^1 + l^2s^1m^1)w_{xxy} +$$

$$+ (l^1s^2m^2 + l^2s^1m^2 + l^2s^2m^1)w_{yyx} + l^2s^2m^2w_{yyy}. \quad (21.16)$$

Простой анализ (21.15) показывает, что:

а) при $\vec{l} = \vec{s} = \vec{\imath} = (1, 0)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\vec{\imath}\partial\vec{\imath}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

б) при $\vec{l} = \vec{s} = \vec{\jmath} = (0, 1)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\vec{\jmath}\partial\vec{\jmath}} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

в) при $\vec{l} = \vec{s}$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\vec{l}\partial\vec{s}} = l_1^2 w_{xx} + 2l_1 l_2 w_{xy} + l_2^2 w_{yy};$$

г) при $\vec{l} = (l^1, l^2)$ и $\vec{s} = (l^1, -l^2)$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\vec{l}\partial\vec{s}} = (l^1)^2 w_{xx} - (l^2)^2 w_{yy}$$

и т.д. Аналогичные соотношения можно получить и для (21.16).

Следующий пример иллюстрирует процедуру вычисления частных производных и производных по направлению высших порядков для функций, заданных неявно.

Пример 21.10. Для функции

$$z^3 - 3xyz - 8 = 0$$

в точке $P_0(1, 0, 2)$ найти частные производные и производные по направлению 2-го порядка, если направления задаются единичными векторами $\vec{l}$ и $\vec{s}$, образующими с осью Ox углы α и β, соответственно.

Решение. Функция

$$F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - 8 \tag{21.17}$$

дифференцируема в любой окрестности точки $P_0(1, 0, 2)$, причём $F(P_0) = 0$, $F'_z(P_0) = (3z^2 - xy)\big|_{P_0} = 12 - 0 = 12 \neq 0$. Следовательно, согласно теореме 19.1, уравнение (21.17) в окрестности точки $M_0(1, 0)$ определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $z = f(x, y)$, причём $f(1, 0) = 2$. Для вычисления z_x и z_y найдём

$$F_x = -3yz, \quad F_y = -3xz, \quad F_z = 3z^2 - 3xy.$$

Тогда

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{z^2 - xy}. \tag{21.18}$$

Продифференцировав соотношения (21.18) по x и y, запишем

$$z_{xx} = \frac{y}{(z^2 - xy)^2}[(z^2 - xy)z_x - z(2zz_x - y)];$$

$$z_{yy} = \frac{x}{(z^2 - xy)^2}[(z^2 - xy)z_y - z(2zz_y - x)];$$
$$z_{xy} = \frac{1}{(z^2 - xy)^2}[(z + yz_y)(z^2 - xy) - yz(2zz_y - x)].$$

Подставив в эти выражения частные производные из (21.18), получим

$$z_{xx} = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3}, \quad z_{yy} = -\frac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3}, \quad z_{xy} = -\frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}. \qquad (21.19)$$

По этим производным составим матрицу (21.11):

$$z'' = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \frac{z}{(z^2 - xy)^3} \begin{pmatrix} -2xy^3 & z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2 \\ z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2 & -2x^3y \end{pmatrix}$$

и найдём её значение в точке $P_0(1, 0, 2)$:

$$z''(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С её помощью, положив $\vec{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\vec{s} = (\cos\beta, \sin\beta)$, по формулам (21.12) вычислим производную по направлениям

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\vec{l}\partial\vec{s}}(P_0) = (\cos\alpha \ \sin\alpha) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta).$$

22. Дифференциалы высших порядков

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $w = f(\vec{x})$ класса $C^{(2)}(D)$. Тогда её полный дифференциал имеет вид

$$dw(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x^i} dx^i, \quad \vec{x} \in D,$$

и является функцией $2n$ переменных: $\vec{x} = (x^1, ..., x^n)$ и $d\vec{x} = (dx^1, ..., dx^n)$. Дифференциал $dw(\vec{x})$ как функция переменных $\vec{x}$ будет иметь непрерывные частные производные первого порядка, и можно говорить о полном дифференциале от этого дифференциала:

$$d(dw(\vec{x})) = d\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x^i} dx^i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \Big[d\Big(\frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x^i}\Big)dx^i + \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x^i} d(dx^i)\Big]. \qquad (22.1)$$

Поскольку приращения независимых переменных $d\vec{x}$ при переходе от первого дифференциала $dw(\vec{x})$ ко второму $d^2w(\vec{x}) = d(dw(\vec{x}))$ остаются одними и теми же, то они рассматриваются как постоянные и, следовательно, $d(dx^i) = 0$, а тогда

$$d^2w(\vec{x}) = d(dw(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} d\Big(\frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x^i}\Big)dx^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 w(\vec{x})}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j. \qquad (22.2)$$

Аналогично, предположив, что $w = f(\vec{x}) \in C^{(3)}(D)$, можно вычислить первый дифференциал от $d^2 w(\vec{x})$. Получим третий дифференциал

$$d^3 w(\vec{x}) = d(d^2 w(\vec{x})) = d(d(dw(\vec{x}))). \tag{22.3}$$

Продолжив процедуру вычисления дифференциалов подобным образом, мы придём к понятию дифференциала k-го порядка.

♦ *Дифференциалом k-го порядка функции $w = f(\vec{x}) \in C^{(k)}(D)$* называется полный дифференциал от дифференциала $(k-1)$-го порядка:

$$d^k w(\vec{x}) = d(d^{k-1} w(\vec{x})) = \underbrace{d(d \cdots (d}_{k} w(\vec{x}))) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k w(\vec{x})}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_k}} dx^{i_1} \cdots dx^{i_k}. \tag{22.4}$$

Определение (22.4) записано в двух формах: символической и развёрнутой.

Если ввести дифференциальный оператор

$$d = (d\vec{x}, \nabla) = dx^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + ... + dx^n \frac{\partial}{\partial x^n} = \sum_{i=1}^{n} dx^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{22.5}$$

то дифференциал k-го порядка можно записать как

$$d^k w(\vec{x}) = (d\vec{x}, \nabla)^k w(\vec{x}) = \Big(dx^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + ... + dx^n \frac{\partial}{\partial x^n}\Big)^k w(\vec{x}). \tag{22.6}$$

Следует иметь в виду, что под произведением дифференциальных операторов понимается их последовательное применение. Например, если

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x^i},$$

то

$$(D_i D_j) = D_i D_j = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}. \tag{22.7}$$

Таким образом, при перемножении дифференциальных операторов d вида (22.5) для операторов D_i используется правило (22.7). При этом дифференциалы независимых переменных $d\vec{x} = (dx^1, ..., dx^n)$ считаются постоянными и перемножаются как вещественные числа.

Развёрнутую запись дифференциала k-го порядка через частные производные можно получить из (22.4), воспользовавшись теоремой о равенстве смешанных производных.

Так, при $n = 2$ и $k = 2$

$$\begin{aligned} d^2 w(\vec{x}) &= (d\vec{x}, \nabla)^2 w(\vec{x}) = \Big(dx^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + dx^2 \frac{\partial}{\partial x^2}\Big)^2 w(\vec{x}) = \\ &= \frac{\partial^2 w(\vec{x})}{(\partial x^1)^2}(dx^1)^2 + 2\frac{\partial^2 w(\vec{x})}{\partial x^1 \partial x^2} dx^1 dx^2 + \frac{\partial^2 w(\vec{x})}{(\partial x^2)^2}(dx^2)^2. \end{aligned} \tag{22.8}$$

При $n = 2$ и $k = 3$

$$d^3w(\vec{x}) = (d\vec{x}, \nabla)^3 w(\vec{x}) = \Big(dx^1\frac{\partial}{\partial x^1} + dx^2\frac{\partial}{\partial x^2}\Big)^3 w(\vec{x}) =$$
$$= \frac{\partial^3 w(\vec{x})}{(\partial x^1)^3}(dx^1)^3 + 3\frac{\partial^3 w(\vec{x})}{(\partial x^1)^2\partial x^2}(dx^1)^2dx^2 + 3\frac{\partial^3 w(\vec{x})}{\partial x^1(\partial x^2)^2}dx^1(dx^2)^2 + \frac{\partial^3 w(\vec{x})}{(\partial x^2)^3}(dx^2)^3. \tag{22.9}$$

При $n = 2$ и произвольном k

$$d^k w(\vec{x}) = (d\vec{x}, \nabla)^k w(\vec{x}) = \Big(dx^1\frac{\partial}{\partial x^1} + dx^2\frac{\partial}{\partial x^2}\Big)^k w(\vec{x}) =$$
$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m \frac{\partial^k w(\vec{x})}{(\partial x^1)^{k-m}(\partial x^2)^m}(dx^1)^{k-m}(dx^2)^m; \quad C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!}, \tag{22.10}$$

и т.д.

При произвольных n и k

$$d^k w(\vec{x}) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=k} C_k^{i_1,\ldots,i_n}\frac{\partial^k w(\vec{x})}{(\partial x^1)^{i_1}\cdots(\partial x^n)^{i_n}}(dx^1)^{i_1}\cdots(dx^n)^{i_n}; \tag{22.11}$$
$$C_k^{i_1,\ldots,i_n} = \frac{k!}{(i_1)!\cdots(i_n)!}.$$

Пусть $w = f(\vec{x})$ — сложная функция, для которой переменные $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ являются функциями независимых переменных $\vec{t} = (t^1, ..., t^m) \in \mathbb{R}^m$, т.е. $x^i = \varphi_i(\vec{t})$, $i = \overline{1, n}$. Тогда в силу инвариантности формы первого дифференциала имеем

$$dw(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x^i}dx^i.$$

Для вычисления второго дифференциала воспользуемся полученным ранее выражением (22.1), в котором уже $d\vec{x} = (dx^1, ..., dx^n)$ являются дифференциалами не независимых переменных, как ранее, а дифференциалами функций, и, следовательно, сами будут функциями и могут не быть постоянными. Поэтому

$$d^2 w(\vec{x}(\vec{t})) = \sum_{i=1}^{n}\Big[d\Big(\frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x^i}\Big)dx^i + \frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x^i}d(dx^i)\Big] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 w(\vec{x})}{\partial x^i \partial x^j}dx^i dx^j + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x^i}d^2x^i. \tag{22.12}$$

Таким образом, формулы (22.1) и (22.12) отличаются друг от друга слагаемым

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w(\vec{x})}{\partial x^i}d^2x^i.$$

Это означает, что форма дифференциала второго порядка не является инвариантной, а зависит от того, являются ли переменные $\vec{x}$ независимыми или функциями независимых переменных. Справедливости ради отметим, что инвариантность формы второго дифференциала сохраняется при условии линейной зависимости переменных $x^i = \varphi_i(\vec{t})$, $i = \overline{1, n}$, когда $d^2x^i = 0$.

Пример 22.1. Найти второй дифференциал функции

$$z = \sin(x^2 + y^2).$$

Решение. *1-й способ.* Найдём первые производные:

$$z_x = \cos(x^2 + y^2)2x, \quad z_y = \cos(x^2 + y^2)2y.$$

Найдём вторые производные и составим из них матрицу

$$z'' = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2[\cos(x^2 + y^2) - 2x^2 \sin(x^2 + y^2)] & -4xy \sin(x^2 + y^2) \\ -4xy \sin(x^2 + y^2) & 2[\cos(x^2 + y^2) - 2y^2 \sin(x^2 + y^2)] \end{pmatrix}.$$

Тогда аналогично (21.16) запишем

$$d^2 z = (dx\ dy) z'' \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 2[\cos(x^2 + y^2) - 2x^2 \sin(x^2 + y^2)]dx^2 -$$
$$- 8xy \sin(x^2 + y^2) dx\, dy + 2[\cos(x^2 + y^2) - 2y^2 \sin(x^2 + y^2)]dy^2. \quad (22.13)$$

Этот же результат получится из формулы (22.8):

$$d^2 z = z_{xx} dx^2 + 2 z_{xy} dx\, dy + z_{yy} dy^2.$$

2-й способ. Найдём первый дифференциал:

$$dz = d[\sin(x^2 + y^2)] = \cos(x^2 + y^2) d(x^2 + y^2) = 2\cos(x^2 + y^2)(x\, dx + y\, dy).$$

Тогда второй дифференциал есть

$$d^2 z = 2d[\cos(x^2 + y^2)(x\, dx + y\, dy)] =$$
$$= 2\{(x\, dx + y\, dy) d[\cos(x^2 + y^2)] + \cos(x^2 + y^2) d(x\, dx + y\, dy)\}.$$

В первом слагаемом ещё раз вычислим первый дифференциал, а во втором слагаемом вынесем dx и dy как постоянные множители за знак дифференциала и в результате получим

$$d^2 z = 2\{(x\, dx + y\, dy)[-\sin(x^2 + y^2) 2(x\, dx + y\, dy)] + \cos(x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2)\}.$$

Вынеся общие множители dx^2, $dx\, dy$, dy^2, придём к (22.13).

Пример 22.2. Найти первый, второй и третий дифференциалы функции

$$z = x^4 - 5x^2 y^2 + y^4.$$

Решение. *1-й способ.* Найдём все частные производные до 3-го порядка включительно:

$$\begin{array}{lll} z_x = 4x^3 - 10xy^2, & z_{xx} = 12x^2 - 10y^2, & z_{xxx} = 24x; \\ x_y = -10x^2y + 4y^3, & z_{yy} = -10x^2 + 12y^2, & z_{yyy} = 24y; \\ & z_{xy} = -20xy, & z_{xxy} = -20y; \\ & & z_{yyx} = -20x. \end{array}$$

Тогда с учётом формул (22.8), (22.9) найдём

$$\begin{aligned} dz &= z_x dx + z_y dy = (4x^3 - 10xy^2)dx + (-10x^2y + 4y^3)dy; \\ d^2z &= z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dx\,dy + z_{yy}dy^2 = \\ &= (12x^2 - 10y^2)dx^2 - 40xy\,dx\,dy + (-10x^2 + 12y^2)dy^2; \\ d^3z &= z_{xxx}dx^3 + 3z_{xxy}dx^2dy + 3z_{xyy}dx\,dy^2 + z_{yyy}dy^3 = \\ &= 24x\,dx^3 - 60y\,dx^2dy - 60x\,dx\,dy^2 + 24y\,dy^3. \end{aligned}$$

2-й способ. Найдём первый дифференциал:

$$dz = d(x^4 - 5x^2y^2 + y^4) = 4x^3dx - 5(2xy^2dx + 2x^2y\,dy) + 4y^3dy.$$

Найдём второй дифференциал:

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d[4x^3dx - 10(xy^2dx + x^2y\,dy) + 4y^3dy] = \\ &= 4dx\,d(x^3) - 10[dx\,d(xy^2) + dy\,d(x^2y)] + 4dy\,d(y^3) = \\ &= 12x^2dx^2 - 10[dx(y^2dx + 2xy\,dy) + dy(2yx\,dx + x^2dy)] + 12y^2dy^2 = \\ &= (12x^2 - 10y^2)dx^2 - 40xy\,dx\,dy + (12y^2 - 10x^2)dy^2. \end{aligned}$$

Таким же образом найдём третий дифференциал:

$$\begin{aligned} d^3z &= d(d^2z) = dx^2d(12x^2 - 10y^2) - 40dx\,dy\,d(xy) + dy^2d(12y^2 - 10x^2) = \\ &= 24x\,dx^3 - 60y\,dx^2dy - 60x\,dx\,dy^2 + 24y\,dy^3. \end{aligned}$$

Пример 22.3. Найти второй дифференциал сложной функции

$$z = e^{x+y^2}, \quad x = u^2 + v^2, \quad y = u^2 - v^2.$$

Решение. Найдём сначала первые два дифференциала промежуточных переменных:

$$\begin{array}{ll} dx = 2u\,du + 2v\,dv, & dy = 2u\,du - 2v\,dv; \\ d^2x = 2du^2 + 2dv^2, & d^2y = 2du^2 - 2dv^2. \end{array} \tag{22.14}$$

Теперь последовательно вычислим дифференциалы z:

$$\begin{aligned} dz &= d(e^{x+y^2}) = e^{x+y^2}(dx + 2y\,dy); \\ d^2z &= d(dz) = d[e^{x+y^2}(dx + 2y\,dy)] = (dx + 2y\,dy)de^{x+y^2} + e^{x+y^2}d(dx + 2y\,dy) = \\ &= e^{x+y^2}(dx + 2y\,dy)^2 + e^{x+y^2}(d^2x + 2dy^2 + 2y\,d^2y). \end{aligned}$$

Сюда нужно было бы подставить выражения для дифференциалов x и y из (22.14), но мы не будем проводить эту простую, но громоздкую операцию.

Пример 22.4. Найти первый и второй дифференциалы функции, заданной неявно:

$$z^3 - 3xyz - 8 = 0.$$

Решение. В примере 21.10 было показано, что это уравнение определяет неявно заданную функцию $z = f(x, y)$. Вычислим дифференциал от левой и правой частей уравнения и, считая x и y независимыми переменными, а z — функцией от x, y, найдём

$$3z^2dz - 3(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz) = 0,$$

или

$$z^2dz - (yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz) = 0. \tag{22.15}$$

От этого выражения ещё раз вычислим дифференциал, считая dx и dy постоянными, а z — функцией от x, y:

$$d(z^2dz) - d(yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz) = 0,$$
$$2z\,dz^2 + z^2d^2z - [dx(z\,dy + y\,dz) + dy(x\,dz + z\,dx) + dz(y\,dx + x\,dy) + xy\,d^2z] = 0. \tag{22.16}$$

Теперь из (22.15) найдём

$$dz = \frac{1}{z^2 - xy}(yz\,dx + xz\,dy), \tag{22.17}$$

а из (22.16)

$$d^2z = \frac{1}{z^2 - xy}[2z\,dx\,dy + 2(y\,dx + x\,dy)dz - 2z\,dz^2].$$

Заменив dz и $dz^2 = (dz)^2$ согласно (22.17), получим

$$d^2z = \frac{2z}{(z^2 - xy)^3}\{[(z^2 - xy)^2 - 2x^2y^2]dx\,dy - xy^3dx^2 - x^3y\,dy^2\}. \tag{22.18}$$

Поскольку коэффициентами при дифференциалах независимых переменных dx и dy являются z_x и z_y, то из (22.17) можно найти производные неявно заданной функции:

$$z_x = \frac{yz}{z^2 - xy}, \quad z_y = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

Аналогично из (22.18) найдём

$$z_{xx} = -\frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3}, \quad z_{yy} = -\frac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3}, \quad z_{xy} = -\frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

Эти результаты совпадают с полученными в примере 21.10.

Пример 22.5. Найти $d^{14}w(x, y, z)$, если

$$w(x, y, z) = x^{16} + y^{15} - 2x^7y^3z^4 + 7x^3y^4z^2 + 5x^9y^7.$$

Решение. Вычислим все ненулевые частные производные 14-го порядка данной функции от каждого слагаемого:
от первого
$$\frac{\partial^{14}(z^{16})}{\partial z^{14}} = 16 \cdot 15 \cdots 3z^2 = \frac{16!}{2!}z^2;$$
от второго
$$\frac{\partial^{14}(y^{15})}{\partial y^{14}} = 15 \cdot 14 \cdots 2y = 15!x_2;$$
от третьего
$$\frac{\partial^{14}(-2x^7y^3z^3)}{\partial x^7 \partial y^3 \partial z^4} = -2 \cdot 7!3!4!;$$
от четвертого слагаемого все частные производные 14-го порядка равны нулю;
от пятого
$$\frac{\partial^{14}(5x^9y^7)}{\partial x^7 \partial y^7} = 5\frac{9!}{2!}7!x_1^2; \quad \frac{\partial^{14}(5x^9y^7)}{\partial x^8 \partial y^6} = 5 \cdot 9!7!xy; \quad \frac{\partial^{14}(5x^9y^7)}{\partial x^9 \partial y^5} = 5 \cdot 9!\frac{7!}{2!}y^2.$$
Согласно формуле (22.11), можно записать
$$\begin{aligned}
d^{14}w &= C_{14}^{0,0,14}\frac{\partial^{14}w}{\partial z^{14}}dz^{14} + C_{14}^{0,14,0}\frac{\partial^{14}w}{\partial y^{14}}dy^{14} + C_{14}^{7,3,4}\frac{\partial^{14}w}{\partial x^7\partial y^3\partial z^4}dx^7dy^3dz^4 + \\
&+ C_{14}^{7,7,0}\frac{\partial^{14}w}{\partial x^7\partial y^7}dx^7dy^7 + C_{14}^{8,6,0}\frac{\partial^{14}w}{\partial x^8\partial y^6}dx^8dy^6 + C_{14}^{9,5,0}\frac{\partial^{14}w}{\partial x^9\partial y^5}dx^9dy^5 = \\
&= \frac{14!}{0!0!14!}\frac{16!}{2!}z^2dz^{14} + \frac{14!}{0!14!0!}15!y\,dy^{14} + \frac{14!}{7!3!4!}(-2)7!3!4!dx^7dy^3dz^4 + \\
&+ \frac{14!}{7!7!}5\frac{9!}{2!}7!x^2dx^7dy^7 + \frac{14!}{8!6!}5 \cdot 9!7!xy\,dx^8dy^6 + \frac{14!}{9!5!}5 \cdot 9!\frac{7!}{2!}y^2dx^9dy^5 = \\
&= \frac{16!}{2!}z^2dz^{14} + 15y\,dy^{14} - 2 \cdot 14!dx^7dy^3dz^4 + \\
&+ 5\frac{14!9!}{7!2!}x^2dx^7dy^7 + 315 \cdot 14!xy\,dx^8dy^6 + 105 \cdot 14!y^2dx^9dy^5.
\end{aligned}$$

23. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Теорема 23.1 (формула Тейлора). *Если функция $w = f(\vec{x}) \in C^{(m+1)}(S(\vec{x}_0, \delta))$, то для любой точки $\vec{x} = \vec{x}_0 + \Delta\vec{x} = (x_0^1 + \Delta x^1, ..., x_0^n + \Delta x^n) \in S(\vec{x}_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ существует число $\theta \in]0, 1[$ такое, что справедливо следующее равенство:*
$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) = \sum_{k=0}^{m}\frac{(\Delta\vec{x}, \nabla)^k}{k!}f(\vec{x}_0) + R_m(\vec{x}), \tag{23.1}$$
где
$$R_m(\vec{x}) = \frac{(\Delta\vec{x}, \nabla)^{m+1}}{(m+1)!}f(\vec{x}_0 + \theta\vec{x}) \tag{23.2}$$
и использовано принятое ранее обозначение оператора
$$(\Delta\vec{x}, \nabla) = \Delta x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + ... + \Delta x^n\frac{\partial}{\partial x^n}. \tag{23.3}$$

Доказательство. Если точка $\vec{x} = \vec{x}_0 + \Delta\vec{x}$ принадлежит шару $S(\vec{x}_0, \delta)$, то точка $\vec{x}_0 + t\Delta\vec{x}$ при условии $0 \leqslant t \leqslant 1$ также принадлежит этому шару и лежит на отрезке, соединяющем точки $\vec{x}$ и $\vec{x}_0$. Рассмотрим вспомогательную функцию одной переменной

$$w(t) = w(\vec{x}(t)) = f(\vec{x}_0 + t\Delta\vec{x}), \tag{23.4}$$

которая $(m+1)$ раз дифференцируема в нуле, причём

$$w(0) = f(\vec{x}_0), \quad w(1) = f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}). \tag{23.5}$$

Для функции одной переменной (23.4) воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$w(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} w^{(k)}(0) + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} w^{(m+1)}(\theta t), \quad 0 < \theta < 1. \tag{23.6}$$

Следуя этой формуле, вычислим требуемые производные. По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$w'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w(\vec{x}_0 + t\Delta\vec{x})}{\partial x^i} \Delta x^i = (\Delta\vec{x}, \nabla) w(\vec{x}_0 + t\Delta\vec{x});$$

$$w''(t) = [w'(t)]' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (\Delta\vec{x}, \nabla) w(\vec{x}_0 + t\Delta\vec{x})}{\partial x^i} \Delta x^i = (\Delta\vec{x}, \nabla)^2 w(\vec{x}_0 + t\Delta\vec{x}).$$

Продолжив дифференцирование, для произвольного k получим

$$w^{(k)}(t) = (\Delta\vec{x}, \nabla)^k w(\vec{x}_0 + t\Delta\vec{x}). \tag{23.7}$$

С помощью (23.7) формулу (23.6) можно записать как

$$w(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!} (\Delta\vec{x}, \nabla)^k w(0) + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} w^{(m+1)}(\theta t).$$

Положив здесь $t = 1$, с учётом (23.4) и (23.5) приходим к формуле Тейлора (23.1):

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} (\Delta\vec{x}, \nabla)^k f(\vec{x}_0) + \frac{1}{(m+1)!} (\Delta\vec{x}, \nabla)^{m+1} f(\vec{x}_0 + \theta\Delta\vec{x}).$$

♦ Первое слагаемое формулы Тейлора (23.1) называется *полиномом Тейлора*, а второе — *остаточным членом в форме Лагранжа*, а саму формулу (23.1) называют *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.*

◊ Формулу Тейлора (23.1) можно записать в эквивалентной форме. Так, выделив из суммы слагаемых слагаемое с $k = 0$ и положив $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_0$, получим

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} (\vec{x} - \vec{x}_0, \nabla)^k f(\vec{x}_0) + \frac{1}{(m+1)!} (\vec{x} - \vec{x}_0, \nabla)^{m+1} f(\vec{x}_0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}_0)). \tag{23.8}$$

Положив $\Delta\vec{x} = d\vec{x}$, можем записать

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(\vec{x}_0) + \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\vec{x}_0 + \theta(\vec{x} - \vec{x}_0)). \tag{23.9}$$

Ограничившись в формуле, например, (23.9) значением $m = 0$, получим формулу Лагранжа (16.1).

Мы уже отмечали, что функция двух переменных $z = f(x, y)$ имеет простую геометрическую интерпретацию. Поэтому имеет смысл теорему 23.1 привести для функции двух переменных.

Теорема 23.2. *Если функция $w = f(P(x, y))$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными до $(m + 1)$-го порядка включительно в δ-окрестности $S(P_0, \delta)$ точки $P_0(x_0, y_0)$, то в любой точке $P(x, y)$ из этой окрестности её можно представить в виде*

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + r_m(x, y), \tag{23.10}$$

где

$$d^k f(x_0, y_0) = \Big[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\Big]^k f(x_0, y_0) =$$
$$= \sum_{p=0}^{k} C_k^p \frac{\partial^k f(x_0, y_0)}{\partial x^{k-p} \partial y^p} (x - x_0)^{k-p} (y - y_0)^p;$$
$$r_m(x, y) = \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(x + \theta(x - x_0), y + \theta(y - y_0)).$$

Соотношение (23.10) *можно представить в виде*

$$f(P) = f(P_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(P_0)}{k!} + \frac{d^{m+1} f(\bar{P})}{(m+1)!}, \tag{23.11}$$

где $\bar{P}$ – некоторая точка, лежащая на отрезке P_0P.

Доказательство очевидным образом вытекает из теоремы 23.1 при учёте формулы (22.10) для вычисления дифференциалов k-го порядка функции двух переменных. Действительно, введём вспомогательную функцию

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t)),$$

где $x(t) = x_0 + t\Delta x$, $y(t) = y_0 + t\Delta y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Значение $t = 0$ отвечает точке $P_0(x_0, y_0)$; значение $t = 1$ – точке $P(x, y)$:

$$\varphi(t)\big|_{t=1} = \varphi(1) = f(x, y), \quad \varphi(t)\big|_{t=0} = \varphi(0) = f(x_0, y_0). \tag{23.12}$$

Запишем формулу Тейлора для $\varphi(t)$ как функции одной переменной [11]:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + \frac{\varphi^{(m+1)}(\bar{t})}{(m+1)!}(t - t_0)^{m+1}, \tag{23.13}$$

$$t_0 < \bar{t} < t.$$

Положим $t_0 = 0$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\varphi^{(m+1)}(\bar{t})}{(m+1)!} t^{m+1}, \quad 0 < \bar{t} < t.$$

Рассматривая функцию

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t))$$

как сложную, найдём её производные:

$$\begin{gathered}
\varphi'(t)\big|_{t=0} = (f'_x x'_t + f'_y y'_t)\big|_{t=0} = \\
= (f'_x \Delta x + f'_y \Delta y)\big|_{t=0} = df(x, y)\big|_{t=0} = df(x_0, y_0), \\
\varphi''(t)\big|_{t=0} = d^2 f(x_0, y_0), \quad \ldots, \quad \varphi^{(m)}(t)\big|_{t=0} = d^m f(x_0, y_0), \\
\varphi^{(m+1)} = d^{m+1} f(\bar{x}, \bar{y}), \quad x = x_0 + \bar{t}\Delta x, \quad y = y_0 + \bar{t}\Delta y.
\end{gathered}$$

Подставив полученные выражения в (23.13) и положив $t = 1$, которое соответствует $P(x, y)$, с учётом (23.12) получим

$$\varphi(t)\big|_{t=1} = f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{d^k f(x_0, y_0)}{k!} + \frac{d^{m+1} f(\bar{x}, \bar{y})}{(m+1)!},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 23.3. *Если для функции $w = f(\vec{x})$ выполняются условия теоремы 23.1, то для неё справедливо представление*

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} d^k f(\vec{x}_0) + o(\rho^{m+1}(\vec{x}, \vec{x}_0)) \tag{23.14}$$

при $\rho(\vec{x}, \vec{x}_0) \to 0$, где $\rho(\vec{x}, \vec{x}_0) = |\vec{x} - \vec{x}_0| = |\Delta\vec{x}| = \sqrt{(\Delta x^1)^2 + ... + (\Delta x^n)^2}$. Соотношение (23.14) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Доказательство. Рассмотрим остаточный член в формуле (23.9):

$$\begin{aligned}
r_m(\vec{x}) &= \frac{1}{(m+1)!} d^{m+1} f(\vec{x}_0 + \theta\Delta\vec{x}) = \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{m+1}=1}^{n} \frac{\partial^{m+1} f(\vec{x}_0 + \theta\Delta\vec{x})}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_{m+1}}} \Delta x^{i_1} \cdots \Delta x^{i_{m+1}}.
\end{aligned} \tag{23.15}$$

Так как по условию теоремы все производные порядка $(m+1)$ функции $w = f(\vec{x})$ непрерывны в точке $\vec{x}_0$, то

$$\frac{\partial^{m+1} f(\vec{x}_0 + \theta\Delta\vec{x})}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_{m+1}}} = \frac{\partial^{m+1} f(\vec{x}_0)}{\partial x^{i_1} \cdots \partial x^{i_{m+1}}} + \alpha_{i_1 \ldots i_{m+1}}(\Delta\vec{x}), \tag{23.16}$$

где $\alpha_{i_1\ldots i_{m+1}}(\Delta\vec{x})$ — бесконечно малые функции при $|\Delta\vec{x}|\to 0$.

Так как $|\Delta x^i| \leqslant |\Delta\vec{x}| = \sqrt{(\Delta x^1)^2+\ldots+(\Delta x^n)^2}$, то $|\Delta x^{i_1}\cdots\Delta x^{i_{m+1}}| \leqslant |\Delta\vec{x}|^{m+1} = \rho^{m+1}(\vec{x},\vec{x}_0)$. Следовательно,

$$\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_{m+1}=1}^{n}\alpha_{i_1\ldots i_{m+1}}(\Delta\vec{x})\Delta x^{i_1}\cdots\Delta x^{i_{m+1}} = o(\rho^{m+1}(\vec{x},\vec{x}_0)). \tag{23.17}$$

Подставив (23.16) и (23.17) в (23.15), получим

$$\begin{aligned} R_m(\vec{x}) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_{m+1}=1}^{n}\frac{\partial^{m+1}f(\vec{x}_0)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{m+1}}}\Delta x^{i_1}\cdots\Delta x^{i_{m+1}}+\\ +\sum_{i_1=1}^{n}\ldots\sum_{i_{m+1}=1}^{n}\alpha_{i_1\ldots i_{m+1}}(\Delta\vec{x})\Delta x^{i_1}\cdots\Delta x^{i_{m+1}} =\\ = \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(\vec{x}_0)+o(\rho^{m+1}(\vec{x},\vec{x}_0)) \end{aligned} \tag{23.18}$$

при $\rho(\vec{x},\vec{x}_0)\to 0$.

Подставив (23.18) в (23.9), получим (23.14).

Пример 23.1. Функцию

$$z = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$$

разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $P_0(1,-2)$.

Решение. Данная функция имеет непрерывные производные любого порядка, причём все производные выше 2-го порядка равны нулю. Это означает, что остаточный член обращается в нуль, начиная с номера $m=2$. С учётом этого формула Тейлора (23.9) для данной функции примет вид

$$\begin{aligned} z = z(P_0) + z_x(P_0)(x-1) + z_y(P_0)(y+2)+\\ +\frac{1}{2}[z_{xx}(P_0)(x-1)^2 + 2z_{xy}(P_0)(x-1)(y+2) + z_{yy}(P_0)(y+2)^2]. \end{aligned} \tag{23.19}$$

Найдём частные производные:

$$z_x = 4x-y-6,\quad z_y = -x-2y-3,\quad z_{xx}=4,\quad z_{xy}=-1,\quad z_{yy}=-2,$$

и их значения и значение функции в точке $P_0(1,-2)$:

$$z(P_0)=5,\quad z_x(P_0)=0,\quad z_y(P_0)=0,\quad z_{xx}(P_0)=4,\quad z_{xy}(P_0)=-1,\quad z_{yy}(P_0)=-2.$$

С учётом этого из (23.19) найдём

$$z(x,y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2.$$

Пример 23.2. Функцию

$$w(x,y,z) = z^3 + y^2 + xz^2 - 5xyz$$

разложить по формуле Тейлора в точке $P_0(-1,0,2)$.

Решение. Так как все дифференциалы выше третьего порядка равны нулю, т.е. $d^m w \equiv 0$ при $m > 3$, то разложение по формуле Тейлора в точке P_0 для функции w имеет вид

$$w(x, y, z) = w(P_0) + \sum_{k=1}^{3} \frac{d^k w(P_0)}{k!}. \tag{23.20}$$

Вычислим теперь $d^k w$:

$$\begin{aligned}
&dw = (z^2 - 5yz)dx + (2y - 5xz)dy + (3z^2 - 5xy + 2xz)dz;\\
&d^2 w = 2dy^2 + (6z + 2x)dz^2 - 10z\,dx\,dy + 2(2z - 5y)dx\,dz - 10x\,dy\,dz;\\
&d^3 w = 6dz^3 + 4dx\,dz^2 - 30dx\,dy\,dz, \quad d^4 w = 0, \quad d^5 w = 0, \ \ldots
\end{aligned}$$

Таким образом, из (23.20) окончательно получим

$$\begin{aligned}
w(x, y, z) = 4 &+ 4(x + 1) + 10y + 8(z - 2) + \\
&+ \frac{1}{2}[2y^2 + 10(z - 2)^2 - 10(x + 1)y + 8(x + 1)(z - 2) + 10y(z - 2)] + \\
&\qquad + \frac{1}{6}[6(z - 2)^3 + 4(x + 1)(z - 2)^2 - 30(x + 1)(z - 2)].
\end{aligned}$$

Пример 23.3. Функцию

$$z = \ln(5x + 2y - 3)$$

разложить по формуле Тейлора в точке $P_0(2, 1)$ до слагаемых 3-го порядка включительно и оценить значение остаточного члена в прямоугольнике $|x - 2| \leqslant 0{,}5$, $|y - 1| \leqslant 0{,}3$.

Решение. Найдём сначала первые четыре дифференциала (четвертый нужен для оценки остаточного члена):

$$dz = \frac{5dx + 2dy}{5x + 2y - 3}; \qquad d^2 z = -\frac{(5dx + 2dy)^2}{(5x + 2y - 3)^2};$$

$$d^3 z = \frac{2(5dx + 2dy)^3}{(5x + 2y - 3)^3}; \qquad d^4 z = -\frac{6(5dx + 2dy)^4}{(5x + 2y - 3)^4}.$$

Затем вычислим значение функции и первые три дифференциала в точке $P_0(2, 1)$:

$$z(P_0) = \ln 9; \quad dz(P_0) = \frac{5(x - 2) + 2(y - 1)}{9}; \quad d^2 z = -\frac{1}{81}[5(x - 2) + 2(y - 1)]^2;$$

$$d^3 z = \frac{2}{729}[5(x - 2) + 2(y - 1)]^3.$$

Подстановка этих значений в (23.11) даёт

$$\begin{aligned}
\ln(5x + 2y - 3) = \ln 9 &+ \frac{1}{9}[5(x - 2) + 2(y - 1)] - \frac{1}{162}[5(x - 2) + 2(y - 1)]^2 + \\
&+ \frac{2}{2187}[5(x - 2) + 2(y - 1)]^3 + r_3(x, y),
\end{aligned} \tag{23.21}$$

где
$$r_3(x,y) = -\frac{6[5(x-2)+2(y-1)]^4}{4!(5x_1+2y_1-3)^4},$$
а (x_1, y_1) — координаты некоторой точки P_1, лежащей на отрезке (P_0, P), где $P(x,y)$.

Оценим остаточный член $r_3(x,y)$ в прямоугольнике $|x-2| \leqslant 0{,}5$, $|y-1| \leqslant 0{,}3$. Воспользуемся неравенствами
$$|x-2| \leqslant 0{,}5, \quad 1{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5; \quad |y-1| \leqslant 0{,}3, \quad 0{,}7 \leqslant y \leqslant 1{,}3.$$
Тогда $5x+2y-3 \geqslant 5{,}9$ и
$$|r_3(x,y)| = \frac{1}{4}\frac{[5(x-2)+2(y-1)]^4}{4!(5x_1+2y_1-3)^4} \leqslant \frac{1}{4}\frac{(5\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}3)^4}{5{,}9^4} \approx 0{,}02.$$
Следовательно, отбросив в (23.21) остаточный член, получим приближённую формулу для вычисления $\ln(5x+2y-3)$, погрешность которой в прямоугольнике $|x-2| \leqslant 0{,}5$, $|y-1| \leqslant 0{,}3$ не превышает 0,02.

Пример 23.4. Вывести приближённую формулу с точностью до слагаемых 4-го порядка для функции
$$z = \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Решение. *1-ый способ.* Исходную функцию можно рассматривать как сложную: $z = \sqrt{1-t}$, где $t = x^2+y^2$. Воспользуемся формулой Тейлора для функции одной переменной при $t=0$ с остаточным членом в форме Пеано:
$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2).$$
Подставив в последнее равенство $t = x^2+y^2$, получим формулу Тейлора для исходной функции с остаточным членом в форме Пеано:
$$\sqrt{1-x^2-y^2} = 1 - \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{(x^2+y^2)^2}{8} + o((x^2+y^2)^2). \tag{23.22}$$
Отметим, что $o((x^2+y^2)^2) = o(\rho^4)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, так как
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{o((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho^4)}{\rho^4} = 0.$$
Это означает, что разложение (23.22) действительно представляет разложение до слагаемых 4-го порядка включительно.

2-ой способ. Найдём дифференциалы функции z до 4-го порядка включительно:
$$dz = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2x\,dx - 2y\,dy);$$
$$d^2z = -\frac{1}{4}(1-x^2-y^2)^{-3/2}(-2x\,dx-2y\,dy)^2 + \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{-1/2}(-2dx^2-2dy^2);$$

$$d^3z = \frac{3}{8}(1-x^2-y^2)^{-5/2}(-2x\,dx-2y\,dy)^2-$$
$$-\frac{3}{4}(1-x^2-y^2)^{-3/2}(-2x\,dx-2y\,dy)(-2dx^2-2dy^2);$$
$$d^4z = -\frac{15}{16}(1-x^2-y^2)^{-7/2}(-2x\,dx-2y\,dy)^4+$$
$$+\frac{9}{4}(1-x^2-y^2)^{-5/2}(-2x\,dx-2y\,dy)^2(-2dx^2-2dy^2)-$$
$$-\frac{3}{4}(1-x^2-y^2)^{-3/2}(-2dx^2-2dy^2)^2.$$

Положив здесь $x=y=0$, $dx=x$, $dy=y$, получим

$$z(0,0)=1,\quad dz(0,0)=0,\quad d^2z(0,0)=-(x^2+y^2),\quad d^3z(0,0)=0,\quad d^4z=-3(x^2+y^2).$$

Теперь мы можем записать требуемое разложение:

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = z(0,0)+dz(0,0)+\frac{1}{2!}d^2z(0,0)+\frac{1}{3!}dz^3(0,0)+$$
$$+\frac{1}{4!}d^4z(0,0)+o((\sqrt{x^2+y^2})^4) = 1-\frac{x^2+y^2}{2}-\frac{(x^2+y^2)^2}{8}+o((x^2+y^2)^2),$$

совпадающее с формулой (23.22), полученной первым способом. Отметим, что без использования сложной функции количество выкладок и их трудоёмкость существенно возрастают.

Пример 23.5. Записать приближённую формулу для выражения $\cos x/\cos y$ с точностью до членов 2-го порядка.

Решение. Воспользуемся формулами

$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2}+o(t^2),\qquad \frac{1}{1-q}=1+q+q^2+o(q^2),$$

справедливыми при $t\to 0$ и $q\to 0$. Тогда

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1-x^2/2+o(x^2)}{1-y^2/2+o(y^2)} = \Big[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\Big]\Big[1+\frac{y^2}{2}+o(y^2)\Big] =$$
$$=1-\frac{x^2}{2}+x^2o(y^2)+y^2o(x^2)\approx 1-\frac{x^2-y^2}{2}.$$

ГЛАВА 4

Экстремумы функции нескольких переменных

24. Определение и необходимое условие существования экстремума

Рассмотрим функцию $w = f(\vec{x})$, определённую в области $D \subset \mathbb{R}^n$.

♦ Точка $\vec{x}_0 \in D$ называется *точкой локального минимума* (*максимума*) функции $w = f(\vec{x})$, если найдётся такой шар $S(\vec{x}_0, \delta) \subset D$, что для всех $\vec{x} \in S(\vec{x}_0, \delta)$ выполняется неравенство

$$f(\vec{x}) \geqslant f(\vec{x}_0), \quad [f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{x}_0)]. \tag{24.1}$$

♦ Точка $\vec{x}_0 \in D$ называется *точкой строгого локального минимума* (*максимума*) функции $w = f(\vec{x})$, если найдётся такой шар $S(\vec{x}^{\,0}, \delta) \subset D$, что для всех точек шара, не совпадающих с его центром $[x \in \dot{S}(\vec{x}_0, \delta)]$, выполняется условие

$$f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0), \quad [f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)]. \tag{24.2}$$

♦ Точки максимума и минимума функции $w = f(\vec{x})$ называются *точками экстремума*.

Поскольку $\Delta f(\vec{x}_0) = f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$, то (24.1) и (24.2) можно записать в эквивалентной форме:
для минимума $\Delta f(\vec{x}_0) \geqslant 0$, для строгого минимума $\Delta f(\vec{x}_0) > 0$;
для максимума $\Delta f(\vec{x}_0) \leqslant 0$, для строгого максимума $\Delta f(\vec{x}_0) < 0$.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ геометрическая интерпретация точек экстремума дана на рис. 19. Так, на рис. 19,*a* точка P_0 поверхности, описываемой уравнением $z = f(x, y)$, является точкой максимума (строгого максимума), а на рис. 19,*б* точкой минимума (строгого минимума).

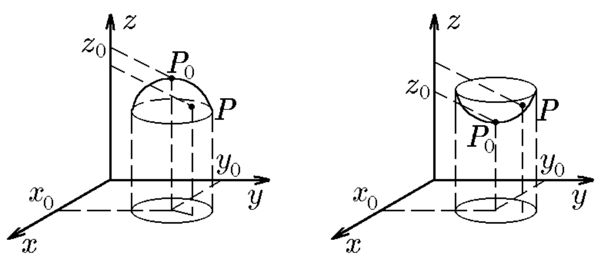


Рис. 19.

Следующие примеры иллюстрируют характер точек экстремума функции нескольких переменных.

Пример 24.1. Показать, что точка $O(0, 0)$ является точкой
1) строгого минимума функции $z = x^2 + y^2$;
2) строгого максимума функции $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$;
3) минимума функции $z = x^2$;
4) не является точкой экстремума функции $z = x^2 - y^2$.

Решение. 1) Поскольку в точке $O(0, 0)$ функция $z(0, 0) = 0$, то для любой точки $P(x, y)$, лежащей в круге $\dot{S}(0, 0, \delta)$: $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$, выполняется неравенство

$z(P) = x^2 + y^2 > 0 = z(0,0)$, означающее, что точка $O(0,0)$ — точка строгого минимума, т.е. эта точка располагается ниже всех точек поверхности кругового параболоида $z = x^2 + y^2$ (рис. 20,*а*).

2) Поскольку в точке $O(0,0)$ функция $z(0,0) = 0$, то для любой точки $P(x,y)$, лежащей в круге $\dot{S}(0,0,\delta)$: $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$, выполняется неравенство $z(P) = -\sqrt{x^2+y^2} < 0 = z(0,0)$, означающее, что точка $O(0,0)$ — точка строгого максимума, т.е. эта точка располагается выше всех точек поверхности конуса $z = -\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 20,*б*).

3) В точке $O(0,0)$ функция имеет значение $z(0,0) = 0$. Рассмотрим круг $S(0,0,\delta)$. В этом круге в точках $P_1(x,y)$, где $0 < x^2 < \delta$, $z(P_1) = x^2 > 0 = z(0,0)$, а в точках $P_2(0,y)$, где $x = 0$, $z(P_2) = 0 = z(0,0)$. Таким образом,

$$z(P_1) > z(0,0) \quad \forall P_1 \in S(0,0,\delta),$$
$$z(P_2) = z(0,0) \quad \forall P_2 \in S(0,0,\delta).$$

Это означает, что

$$z(P) \geqslant z(0,0) \quad \forall P \in S(0,0,\delta),$$

и, следовательно, точка $O(0,0)$ является точкой минимума. Она лежит на образующей цилиндра, точки которой расположены ниже всех точек цилиндрической поверхности $z = x^2$ (рис. 20,*в*).

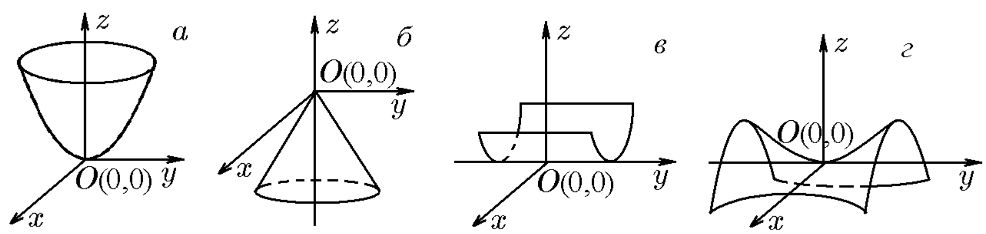


Рис. 20.

4) В точке $O(0,0)$ функция имеет значение $z(0,0) = 0$. Рассмотрим круг $S(0,0,\delta)$. В этом круге в точках $P_1(x,y)$, где $0 < x^2 < \delta^2$, $z(P_1) = x^2 > 0 = z(0,0)$, а в точках $P_2(0,y)$, где $0 < y^2 < \delta$, $z(P_2) = -y^2 < 0 = z(0,0)$. Таким образом,

$$z(P_1) > z(0,0) \quad \forall P_1 \in S(0,0,\delta),$$
$$z(P_2) < z(0,0) \quad \forall P_2 \in S(0,0,\delta).$$

Это означает, что точка $O(0,0)$ не является точкой минимума. На поверхности гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$ существуют точки, расположенные как выше, так и ниже точки $O(0,0)$ (рис. 20,*г*).

В приведённом примере точки максимума и минимума находятся достаточно просто. В более сложных случаях нужны специальные методы отыскания точек экстремума.

Теорема 24.1 (необходимое условие существования экстремума дифференцируемой функции). *В точке экстремума дифференцируемой функции все её первые частные производные равны нулю.*

Доказательство. Пусть функция $w = f(\vec{x})$ дифференцируема в точке $\vec{x}_0$, являющейся, например, точкой максимума. Тогда, согласно определению, существует такой шар $S(\vec{x}_0, \delta)$, что для всех его точек выполняется неравенство

$$f(\vec{x}) \leqslant f(\vec{x}_0) \quad \forall \vec{x} \in S(\vec{x}_0, \delta). \tag{24.3}$$

Рассмотрим функцию одной переменной x^i

$$\varphi(x^i) = f(x_0^1, ..., x^i, ..., x_0^n),$$

которая в силу (24.3) имеет в точке x_0^i максимум. Но тогда для неё выполняется равенство

$$\frac{d\varphi(x^i)}{dx^i}\Big|_{x^i=x_0^i} = 0,$$

которое с помощью функции $f(\vec{x})$ можно записать в виде

$$\frac{d\varphi(x^i)}{dx^i}\Big|_{x^i=x_0^i} = \frac{\partial f(x_0^1, ..., x^i, ..., x_0^n)}{\partial x^i}\Big|_{x^i=x_0^i} = \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i}\Big|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x^i} = 0. \qquad (24.4)$$

Очевидно, что равенство (24.4) должно выполняться для всех $i = \overline{1, n}$. Это и означает равенство нулю всех частных производных первого порядка в точке $\vec{x}_0$, что и требовалось доказать.

Следствие 24.1.1. В точке экстремума дифференцируемой функции её первый дифференциал равен нулю.

Действительно, поскольку

$$df(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\vec{x}_0)}{\partial x^i} dx^i,$$

но в силу теоремы 24.1 $\partial f(\vec{x}_0)/\partial x^i = 0$, $i = \overline{1, n}$, и, следовательно, $df(\vec{x}_0) = 0$.

♦ Точки, в которых полный дифференциал функции обращается в нуль, называются *стационарными*.

Точки экстремума дифференцируемой функции в силу необходимого условия существования экстремума являются стационарными.

Однако стационарные точки могут и не быть точками экстремума.

Действительно, для функций $z = x^2 + y^2$, $z = x^2$ и $z = y^2 - x^2$ точка $O(0, 0)$ является стационарной, поскольку

$$dz = 2x\,dx + 2y\,dy, \quad dz = 2x\,dx, \quad dz = 2y\,dy - 2x\,dx.$$

Однако, как следует из примера 24.1, эта точка для функций $z = x^2 + y^2$ и $z = x^2$ является точкой экстремума, а для $z = y^2 - x^2$ она таковой не является.

Теперь от функций, дифференцируемых в точке, перейдём к недифференцируемым. Так, в примере 24.1 показано, что точка $O(0, 0)$ для функции $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ является точкой экстремума (минимума), хотя сама функция не является дифференцируемой в этой точке. Действительно, $z\big|_{y=0} = -\sqrt{x^2} = -|x|$, а, как показано в разделе «Дифференцируемость функций одной переменной» [11], эта функция не дифференцируема в точке $O(0, 0)$.

Таким образом, все точки, которые могут быть точками экстремума, следует искать не только среди стационарных точках, но и среди тех, где частные производные не существуют.

♦ Точки, в которых первые частные производные функции обращаются в нуль или не существуют, называются *критическими*.

Задача нахождения точек экстремума функции связана с отысканием её критических точек. Для этого вычисляются все частные производные. Если их приравнять к нулю, то мы получим систему

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x^i} = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

решение которой даёт стационарные точки. Если установить точки, в которых частные производные не существуют, то они вместе со стационарными точками представляю всю совокупность критических точек функции.

♦ Критические точки, в которых функция не имеет ни максимума, ни минимума, называются *точками минимакса* (такая точка по отношению к одной части точек является точкой максимума, по отношению к другой — минимума).

Итак, мы установили, что функции нескольких переменных могут достигать экстремума в критических точках, которые разделяются на два вида. В точках первого вида исследуемая функция дифференцируема, в точках второго нет. Для дифференцируемых функций помимо необходимого условия справедливо достаточное условие существования экстремума.

25. Достаточное условие существования экстремума функции нескольких переменных

Теорема 25.1 (достаточное условие существования экстремума). *Пусть $w = f(\vec{x})$ имеет в окрестности точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные второго порядка (т.е. $f(\vec{x}) \in C^2(O(\vec{x}_0))$). Тогда, если*

1) *$d^2f(\vec{x}_0) > 0$, то точка $\vec{x}_0$ — точка строгого минимума;*
2) *$d^2f(\vec{x}_0) < 0$, то точка $\vec{x}_0$ — точка строгого максимума;*
3) *$d^2f(\vec{x}_0)$ принимает значения разных знаков, то точка $\vec{x}_0$ — точка минимакса.*

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (23.14):

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + df(\vec{x}_0) + \frac{1}{2}d^2f(\vec{x}_0) + o(\rho^2(\vec{x},\vec{x}_0)), \quad \rho(\vec{x},\vec{x}_0) \to 0.$$

Учитывая, что $df(\vec{x}_0) = 0$, получим

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \frac{1}{2}d^2f(\vec{x}_0) + o(\rho^2(\vec{x},\vec{x}_0)). \tag{25.1}$$

Здесь первое слагаемое при $\rho(\vec{x},\vec{x}_0) \to 0$ является бесконечно малой порядка ρ^2, а второе — порядка $o(\rho^2)$. Это означает, что существует шар $S(\vec{x}_0,\delta)$, в котором знак разности $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ совпадает со знаком первого слагаемого, т.е. $d^2f(\vec{x}_0)$. При этом предполагается, что $d^2f(\vec{x}_0) \neq 0$ при рассматриваемых $\Delta\vec{x}$.

Рассмотрим три случая:

1) для всех $\vec{x} \in S(\vec{x}_0,\delta)$ справедливо $d^2f(\vec{x}_0) > 0$, т.е. $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) > 0$, следовательно, выполняются условия строгого минимума — функция $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ имеет строгий минимум;

2) для всех $\vec{x} \in S(\vec{x}_0, \delta)$ справедливо $d^2 f(\vec{x}_0) < 0$, т.е. $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) < 0$, следовательно, выполняются условия строгого максимума — функция $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ имеет строгий максимум;
3) в разных точках сферы $d^2 f(\vec{x}_0)$ принимает значения разных знаков, следовательно, не выполняются условия ни максимума, ни минимума — функция $w = f(\vec{x})$ в точке $\vec{x}_0$ не имеет экстремума, т.е. $\vec{x}_0$ — точка минимакса.

Если окажется, что $d^2 f(\vec{x}_0) = 0$, то в формуле Тейлора следует добавить ещё одно слагаемое $d^3 f(\vec{x}_0)$ и исследовать его поведение и т.д.

Доказанная теорема мало приспособлена к практическому использованию при исследовании конкретных функций. Поэтому мы сформулируем этот признак в другой форме, более удобной в практических приложениях.

26. Достаточное условие существования экстремума функции двух переменных

Теорема 26.1. *Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой окрестности стационарной точки $P_0(x_0, y_0)$ непрерывные частные производные второго порядка $[f(x, y) \in C^{(2)}(S(P_0, \delta))]$:*

$$f_{xx}(P_0) = a_{11}, \quad f_{xy}(P_0) = a_{12}, \quad f_{yy}(P_0) = a_{22},$$
$$\det f''(P_0) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{11}^2 = \delta. \tag{26.1}$$

Тогда, если

$a_{11} > 0, \delta > 0,$ *то* P_0 *— точка строгого минимума;*
$a_{11} < 0, \delta > 0,$ *то* P_0 *— точка строгого максимума;*
$\delta < 0,$ *то* P_0 *не является точкой экстремума.*

Доказательство. 1. Согласно теореме 25.1, тип стационарной точки $P_0(x_0, y_0)$ обусловлен поведением в этой точке второго дифференциала $d^2 f(P_0)$, имеющего вид

$$d^2 f(P_0) = f_{xx}(P_0)dx^2 + 2f_{xy}(P_0)dx\,dy + f_{yy}(P_0)dy^2,$$

который, воспользовавшись обозначениями (26.1) и $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, можно записать

$$d^2 f(P_0) = a_{11}(\Delta x)^2 + 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}(\Delta y)^2. \tag{26.2}$$

Это выражение представляет собой квадратичную форму с матрицей $f''(P_0)$:

$$d^2 f(P_0) = (\Delta x\ \Delta y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}. \tag{26.3}$$

Исследуем знак второго дифференциала в зависимости от коэффициентов a_{ij} и Δx, Δy.

2. Начнем со случая $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \delta > 0$.

В этом случае $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$, поскольку иначе получим противоречие: $-a_{12}^2 > 0$. Преобразуем (26.2) к виду

$$d^2 f(P_0) = \frac{1}{a_{11}}\left[a_{11}^2(\Delta x)^2 + 2a_{11}a_{12}\Delta x\Delta y + a_{12}^2(\Delta y)^2 - a_{12}^2(\Delta y)^2 + a_{11}a_{22}(\Delta y)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\big[(a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y)^2 + \delta(\Delta y)^2\big]. \qquad (26.4)$$

Выражение (26.4) при условии $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} > 0$ имеет знак, совпадающий со знаком величины a_{11}. Согласно теореме 25.1, при $a_{11} > 0$ и $a_{11} < 0$ точка P_0 является точкой строгого минимума и максимума, соответственно.

3. Пусть теперь $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \delta < 0$.

Если $a_{11} \neq 0$, то справедливо представление (26.4). Покажем, что в этом случае $d^2f(P_0)$ может принимать значения разных знаков при различных Δx и Δy. Так, при $\Delta y = 0$

$$d^2f(P_0) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\Delta x)^2,$$

и знак дифференциала определяется знаком a_{11}. Однако при Δx и Δy таких, что $a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y = 0$, получим

$$d^2f(P_0) = \frac{\delta}{a_{11}}(\Delta y)^2.$$

Это означает, что знак дифференциала противоположен знаку a_{11}.

Таким образом, в окрестности точки P_0 при разных значениях Δx и Δy дифференциал $d^2f(P_0)$ принимает значения разных знаков.

4. Аналогично, если $a_{11} = 0$ и $a_{22} \neq 0$, то из (26.2) запишем

$$d^2f(P_0) = 2a_{12}\Delta x\Delta y + a_{22}(\Delta y)^2 = \frac{1}{a_{22}}\big[(a_{12}\Delta x + a_{22}\Delta y)^2 - a_{12}^2(\Delta x)^2\big].$$

5. Если $a_{11} = a_{22} = 0$, то из (26.2) следует

$$d^2f(P_0) = 2a_{12}\Delta x\Delta y.$$

Убеждаемся, что и в этих случаях $d^2f(P_0)$ принимает значения разных знаков.

Таким образом, утверждения теоремы справедливы.

$\Diamond$ В том случае, когда $d^2f(P_0) = 0$, требуется учёт в формуле (25.1) дифференциалов более высоких порядков.

Если $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \delta = 0$, то условия теоремы 26.1 не выполняются и для исследования функции на экстремум необходимо определить знак приращения функции в исследуемой точке.

Доказанная теорема обосновывает следующую схему исследования дифференцируемой функции на экстремум:

1) приравнять нулю первые частные производные;
2) решить полученную систему и найти стационарные точки;
3) найти вторые производные и вычислить их значения в стационарных точках;
4) проверить выполнение достаточных условий экстремума.

Пример 26.1. Исследовать на экстремум функции

$$1)\ \ z = x^2 + y^2; \quad 4)\ \ z = -x^2 + y^2$$

из примера 24.1.

Решение. 1) Вычислив

$$z_x = 2x, \quad z_y = 2y, \quad z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = 2,$$

из системы $2x = 0$, $2y = 0$ найдём стационарную точку $O(0,0)$. Поскольку

$$a_{11} = 2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 2, \text{ то } \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 4 > 0.$$

Следовательно, точка $O(0,0)$ является точкой экстремума. Приняв во внимание, что $a_{11} = 2 > 0$, заключаем, что $O(0,0)$ — точка строгого минимума.

4) Вычислив

$$z_x = -2x, \quad z_y = 2y, \quad z_{xx} = -2, \quad z_{xy} = 0, \quad z_{yy} = 2,$$

из системы $2x = 0$, $2y = 0$ найдём стационарную точку $O(0,0)$. Поскольку

$$a_{11} = -2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 2, \text{ то } \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -4 < 0.$$

Следовательно, точка $O(0,0)$ точкой экстремума не является.

Полученные результаты совпадают с результатами примера 24.1.

Пример 26.2. При каких значениях коэффициентов a, b и c функция

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2gy + h \tag{26.5}$$

имеет экстремум? Когда она имеет максимум и когда — минимум?

Решение. Вычислив

$$z_x = 2(ax + by + c), \quad z_y = 2(cy + bx + g);$$
$$z_{xx} = 2a, \quad z_{xy} = 2b, \quad z_{yy} = 2c,$$

найдём

$$a_{11} = 2a, \quad \delta = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{vmatrix} = 4(ac - b^2).$$

Отсюда следует, что функция (26.5) будет иметь строгий экстремум при условии $\delta > 0$ и не будет иметь точек экстремума в противном случае ($\delta < 0$). Это означает, что функция (26.5) будет иметь экстремум, если её линии уровня

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2ex + 2gy + h = \text{const} \tag{26.6}$$

будут кривыми эллиптического типа, и не будет иметь экстремумов, если линии уровня будут кривыми гиперболического типа. В случае кривой параболического типа, когда $\delta = 0$, функция (26.5) может иметь нестрогий экстремум на прямых, в которые вырождаются линии уровня кривой при некотором значении постоянной в правой части. Рисунок 20 наглядно иллюстрирует эти выводы.

Если функция (26.5) имеет экстремум при $\delta > 0$, то он будет минимумом при $a > 0$ и максимумом при $a < 0$. Функции из примера 24.1 являются частным случаем (26.5) и подтверждают полученные выводы.

Пример 26.3. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Решение. Вычислим частные производные:

$$z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x,$$

и приравняем их к нулю:

$$x^2 - y = 0, \quad y^2 - x = 0.$$

Из решения этой системы $y = x^2$, $x(x^3 - 1) = 0$ найдём стационарные точки: $P_1(0,0)$ и $P_2(1,1)$.

Теперь найдём матрицу вторых производных и её определитель:

$$z''(x,y) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \quad \det z'' = 36xy - 9.$$

Для коэффициентов a_{11} и δ в точке $P_1(0,0)$ получим

$$a_{11} = z_{xx}(P_1) = 0, \quad \delta = \det z''(P_1) = -9 < 0.$$

Следовательно, точка $P_1(0,0)$ не является точкой экстремума. В точке $P_2(1,1)$

$$a_{11} = z_{xx}(P_2) = 6 > 0, \quad \delta = \det z''(P_1) = 27 > 0,$$

т.е. в этой точке функция имеет строгий минимум, причём $z_{\min} = z(P_2) = -1$.

Пример 26.4. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^4 + y^4 - (x+y)^2. \tag{26.7}$$

Решение. Вычислим частные производные:

$$z_x = 4x^3 - 2(x+y), \quad z_y = 4y^3 - 2(x+y),$$

и приравняем их к нулю:

$$2x^3 - (x+y) = 0, \quad 2y^3 - (x+y) = 0.$$

Из решения этой системы $y = x$, $x(x^2 - 1) = 0$ найдём три стационарные точки: $P_1(-1,-1)$, $P_2(1,1)$, $P_3(0,0)$.

Теперь найдём матрицу вторых производных и её определитель:

$$z''(x,y) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}, \quad \det z'' = 4[(6x^2 - 1)(6y^2 - 1) - 1].$$

В точке $P_1(-1,-1)$ достаточные условия экстремума функции принимают вид

$$a_{11} = z_{xx}(P_1) = 10 > 0, \quad \delta = \det z''(P_1) = 96 > 0.$$

Следовательно, точка $P_1(-1,-1)$ является точкой строгого локального минимума, причём $z_{\min} = z(P_1) = -2$.

В точке $P_2(1,1)$

$$a_{11} = z_{xx}(P_2) = 10 > 0, \quad \delta = \det z''(P_1) = 96 > 0,$$

следовательно, точка $P_2(1,1)$ также является точкой строгого локального минимума с $z_{\min} = z(P_2) = -2$.

В точке $P_3(0,0)$

$$a_{11} = z_{xx}(P_3) = -2 < 0, \quad \delta = \det z''(P_1) = 0.$$

В этом случае достаточный признак ответа применить нельзя, и для выяснения вопроса о существовании экстремума рассмотрим приращение функции z (26.7) в точке $P_3(0,0)$

$$\Delta z(0,0) = z(x,y) - z(0,0) = x^4 + y^4 - (x+y)^2,$$

которое при $y = -x$ можно записать как $\Delta z(0,0) = 2x^4 > 0$, а при $y = x$ как $\Delta z(0,0) = -2x^2(1-x^2)$, и при малых x $\Delta z(0,0) = -2x^2(1-x^2) < 0$. Таким образом, приращение функции (26.7) в начале координат принимает значения разных знаков. Следовательно, экстремума в точке $P_3(0,0)$ нет.

Пример 26.5. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = x^2y^4(6-x-y). \tag{26.8}$$

Решение. Вычислим частные производные:

$$z_x = xy^3(12-3x-2y), \quad z_y = x^2y^2(18-3x-4y),$$

и приравняем их к нулю:

$$xy^3(3x+2y-12) = 0, \quad x^2y^2(3x+4y-18) = 0.$$

Из решения этой системы найдём стационарные точки: $P_1(2,3)$; $P_2(x,0)$, $x \in]-\infty,\infty[$; $P_3(0,y)$, $y \in]-\infty,\infty[$.

Теперь найдём матрицу вторых производных:

$$z''(x,y) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12y^3(6-3x-y) & xy^2(36-9x-8y) \\ xy^2(36-9x-8y) & 6x^2y(6-x-2y) \end{pmatrix}.$$

В точке $P_1(2,3)$

$$a_{11} = z_{xx}(P_1) = -162 < 0, \quad \delta = \det z''(P_1) = 144 \cdot 162 - 108^2 > 0,$$

следовательно, точка $P_1(2,3)$ является точкой строгого максимума, причём $z_{\max} = z(P_1) = 108$.

В точках $P_2(x,0)$ величина $\delta = \det z''(P_2) = 0$. В этом случае достаточный признак применить нельзя, и для выяснения вопроса о существовании экстремума рассмотрим приращение функции (26.8) в точке $P_2(x,0)$:

$$\Delta z(P_2) = (x+\Delta x)^2(\Delta y)^3(6-x-\Delta x-\Delta y).$$

При Δx и Δy произвольно малых и таких, что $x+\Delta x \neq 0$, $6-x-\Delta x-\Delta y \neq 0$, величина $\Delta x(P_2)$ как функция Δx, Δy принимает значения разных знаков в точках $(\Delta x, \Delta y)$ и $(\Delta x, -\Delta y)$. Следовательно, точка $P_2(x,0)$ не является экстремальной.

В точках $P_3(0,y)$ величина $\delta = \det z''(P_3) = 0$. В этом случае достаточный признак также не позволяет выяснить существование экстремума, и для выяснения вопроса о его существовании рассмотрим приращение функции (26.8) в точке $P_3(0,y)$:

$$\Delta z(P_3) = (\Delta x)^2(y+\Delta y)^3(6-\Delta x - y - \Delta y).$$

При достаточно малых Δx и Δy

$\Delta z(P_3) \leqslant 0$ при $y \in]-\infty, 0[\cup]6, +\infty[= X_-$

и

$\Delta z(P_3) \geqslant 0$ при $y \in]0, 6[= X_+$.

Следовательно, в точках $P_3 \in X_-$ функция z имеет нестрогий максимум, а в точках $P_3 \in X_+$ нестрогий минимум. В точках же $P_3(0,0)$ и $P_3(0,6)$ функция z экстремума не имеет, так как приращение $\Delta z(0,y)$ меняет знак при переходе переменной y через точки $y=0$ и $y=6$.

Пример 26.6. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

Решение. Вычислим частные производные:

$$z_x = 2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}, \quad z_y = 2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)},$$

и приравняем их к нулю:

$$x(1-x^2-y^2) = 0, \quad y(1-x^2-y^2) = 0.$$

Из решения этой системы найдём стационарные точки, которыми являются точка $P_0(0,0)$ и точки $P(x,y)$ окружности $x^2+y^2=1$.

Теперь найдём матрицу вторых производных:

$$z''(x,y) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{pmatrix} = 2e^{-(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 2x^2(x^2+y^2)-6x^2+1 & 2xy(x^2+y^2)-4xy \\ 2xy(x^2+y^2)-4xy & 2y^2(x^2+y^2)-6y^2+1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в точке $P_0(0,0)$

$$a_{11} = z_{xx}(P_0) = 2 > 0, \quad \delta = \det z''(P_0) = 4 > 0,$$

то в этой точке функция имеет минимум, причём $z_{\min} = z(P_0) = 0$.

Для проверки достаточных условий существования экстремума в точках, принадлежащих окружности $x^2+y^2=1$, функцию z будем рассматривать как функцию одной переменной $t = x^2+y^2$, т.е. $z = te^t$, для которой $t=1$ является стационарной точкой. Поскольку $z''_t = (t-2)e^{-t}$ отрицательна при $t=1$, то функция имеет в этой точке максимум. Таким образом, исследуемая функция в точках окружности $x^2+y^2=1$ имеет нестрогий максимум $z_{\max} = z\big|_{x^2+y^2=1} = e^{-1}$.

Пример 26.7. Исследовать на экстремум функцию

$$z = -\sqrt{x^2+y^2}.$$

Решение. Данная функция не имеет стационарных точек, но в точке $O(0,0)$ частные производные первого порядка не существуют, так как разностные отношения

$$\frac{z(\Delta x,0)-z(0,0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x},\quad \frac{z(0,\Delta y)-z(0,0)}{\Delta y}=\frac{|\Delta y|}{\Delta y}$$

не имеют пределов. Следовательно, точка $O(0,0)$ является критической точкой. Из того, что приращение

$$\Delta z(0,0)=z(x,y)-z(0,0)=-\sqrt{x^2+y^2}<0,$$

заключаем, что в этой точке функция имеет строгий максимум $z_{\max}=0$. Эта функция рассматривалась в примере 24.1. Рисунок 20,*б* наглядно иллюстрирует полученный результат.

До сих пор мы рассматривали функции, заданные явно. Переход к неявному заданию функции особых затруднений не вызывает, что и показывает следующий пример.

Пример 26.8. Исследовать на экстремум функцию $z=f(x,y)$, заданную неявно уравнением

$$F(x,y,z)=5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0. \tag{26.9}$$

Решение. Функция $F(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, является полиномом, а поэтому она непрерывна и дифференцируема бесконечное число раз. Следовательно, в окрестности любой точки (x_0,y_0,z_0), в которой $F=0$ и $F_z\neq0$, т.е. выполнены все условия теоремы 19.1, согласно которой уравнение (26.9) неявно определяет функцию $z=f(x,y)$, принимающую в точке (x_0,y_0) значение z_0. Эта функция бесконечное число раз дифференцируема.

Для определения стационарных точек и значений функции в них найдём

$$F_x=10x-2y-2z,\quad F_y=10y-2x-2z,\quad F_z=10z-2x-2y. \tag{26.10}$$

Тогда

$$z_x=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{10x-2y-2z}{10z-2x-2y},\quad z_y=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{10y-2x-2z}{10z-2x-2y}. \tag{26.11}$$

Приравняв эти производные к нулю, получим систему

$$\begin{gathered}5x-y-z=0;\\5y-x-z=0,\end{gathered}$$

откуда $y=x$, $z=4x$.

Подставив их в уравнение (26.9), получим $x^2-1=0$ и найдём два значения: $x_1=-1$, $x_2=1$, а тогда $y_1=x_1=-1$, $y_2=x_2=1$, $z_1=4x_1=-4$, $z_2=4x_2=4$. В итоге имеем две стационарные точки: $P_1(-1,-1,-4)$ и $P_2(1,1,4)$.

Отметим ещё раз, что в точках P_1 и P_2 $F(P_1)=F(P_2)=0$, а

$$F_z(P_1)=-36\neq0,\quad F_z(P_2)=36\neq0,$$

т.е. в окрестности стационарных точек уравнение (26.9) действительно неявно определяет функции $z_1=f_1(x,y)$ и $z_2=f_2(x,y)$, причём значения этих функций в точках P_1 и P_2 уже найдены: $z_1 = -4$, $z_2 = 4$. Теперь нам осталось определить характер стационарных точек, что мы сделаем двумя разными способами.

Первый способ. Из (26.11) найдём частные производные 2-го порядка:

$$z_{xx} = \frac{(5 - z_x)(x + y - 5z) - (1 - 5z_x)(5x - y - z)}{(x + y - 5z)^2};$$
$$z_{xy} = \frac{(-1 - z_x)(x + y - 5z) - (1 - 5z_y)(5x - y - z)}{(x + y - 5z)^2};$$
$$z_{yy} = \frac{(5 - z_y)(x + y - 5z) - (1 - 5z_y)(5x - y - z)}{(x + y - 5z)^2}.$$

В этих формулах мы должны были бы вместо z_x и z_y подставить их выражения из (26.11), но в этом нет необходимости. В стационарных точках эти производные равны нулю, поэтому при вычислении a_{ij} будем полагать их нулями.

В стационарной точке $P_1(-1, -1, -4)$

$$a_{11} = z_{xx}(P_1) = \frac{5(-1 - 1 + 20) - 1 \cdot (-5 + 1 + 4)}{(-1 - 1 + 20)^2} = \frac{5}{18} > 0,$$
$$a_{12} = z_{xy}(P_1) = -\frac{1}{18}, \quad a_{22} = z_{yy}(P_1) = \frac{5}{18};$$
$$\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \left(\frac{5}{18}\right)^2 - \left(-\frac{1}{18}\right)^2 = \frac{24}{324} > 0.$$

Следовательно, P_1 — точка минимума $z_{\min} = -4$.

В стационарной точке $P_2(1, 1, 4)$

$$a_{11} = z_{xx}(P_2) = -\frac{5}{18} < 0, \quad a_{12} = z_{xy}(P_2) = \frac{1}{18}, \quad a_{22} = z_{yy}(P_2) = -\frac{5}{18}, \quad \delta = \frac{24}{324} > 0.$$

Следовательно, P_2 — точка максимума $z_{\max} = 4$.

Второй способ. Согласно (26.10), имеем

$$dz = -\frac{1}{F_z}(F_x dx + F_y dy),$$

тогда

$$d^2 z = -\frac{1}{F_z}(F_{xx}dx^2 + 2F_{xy}dx\,dy + F_{yy}dy^2) - \left(\frac{1}{F_z}\right)_z dz(F_x dx + F_y dy).$$

А поскольку $F_{xx} = 10$, $F_{xy} = -2$, $F_{yy} = 10$, $dz(P_1) = dz(P_2) = 0$, то

$$d^2 z(P_1) = -\frac{1}{F_z(P_1)}(10dx^2 - 4dx\,dy + 10dy^2) = \frac{1}{18}(5dx^2 - 2dx\,dy + 5dy^2).$$

Следовательно,

$$a_{11} = \frac{5}{18} > 0, \quad a_{12} = -\frac{1}{18}, \quad a_{22} = \frac{5}{18}, \quad \delta = \frac{24}{324} > 0,$$

т.е. точка P_1 — точка минимума $z_{\min} = -4$;

$$d^2z(P_2) = -\frac{1}{18}(5dx^2 - 2dx\,dy + 5dy^2),$$

следовательно,

$$a_{11} = -\frac{5}{18} < 0, \quad a_{12} = \frac{1}{18}, \quad a_{22} = -\frac{5}{18}, \quad \delta = \frac{24}{324} > 0,$$

т.е. точка P_2 — точка максимума $z_{\max} = 4$.

27. Квадратичные формы и достаточные условия существования экстремума функции

Для формулировки достаточных условий существования экстремума функции нескольких переменных с помощью частных производных приведём некоторые сведения из курса «Линейная алгебра» [9], касающиеся теории квадратичных форм.

♦ Квадратичная форма

$$A(\vec{x}) = (x^1 \ldots x^n)\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^j x^j. \tag{27.1}$$

где $\vec{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$; $a_{ij} = a_{ji}$, называется

1) *положительно определённой*, если $A(\vec{x}) > 0$ для всех $\vec{x} \neq \vec{0}$;

2) *отрицательно определённой*, если $A(\vec{x}) < 0$ для всех $\vec{x} \neq \vec{0}$;

3) *неопределённой*, если существуют такие $\vec{x}$ и $\vec{x}\,'$, что $A(\vec{x}) > 0$, а $A(\vec{x}\,') < 0$.

Из определения (27.1) вытекают два важных свойства.

Свойство 1. Для всех $\vec{x} \neq 0$ справедливо равенство

$$A\Big(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\Big) = \frac{1}{|\vec{x}|^2}A(\vec{x}), \quad |\vec{x}| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}. \tag{27.2}$$

Действительно,

$$A\Big(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{x^i}{|\vec{x}|}\frac{x^j}{|\vec{x}|} = \frac{1}{|\vec{x}|^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j = \frac{1}{|\vec{x}|^2}A(\vec{x}).$$

Свойство 2. Для положительно определённой формы $A(\vec{x})$ найдётся такое $\lambda > 0$, что

$$A(\vec{x}) \geqslant \lambda|\vec{x}|^2. \tag{27.3}$$

Действительно, рассмотрим квадратичную форму $A(\vec{r})$ на единичной сфере S: $r_1^2 + \ldots + r_n^2 = 1$. Так как точка $\vec{0} \notin S$, а квадратичная форма положительно определена, то $A(\vec{r}) > 0$ в любой точке $\vec{r} \in S$.

Очевидно, что S является замкнутым и ограниченным множеством в $\mathbb{R}^n$, а непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве функция $A(\vec{x})$, согласно теореме Вейерштрасса 8.5, принимает в некоторой точке $\vec{r}_0 \in S$ свое наименьшее значение. Поэтому, положив $\lambda = A(\vec{r}_0)$, получим, что $\lambda > 0$ и для любой точки $\vec{r} \in S$ выполняется неравенство $A(\vec{r}) > \lambda$.

Если $\vec{x} \neq \vec{0}$, то точка $\vec{x}/|\vec{x}|$ принадлежит единичной сфере S, поэтому

$$A\Big(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\Big) \geqslant \lambda,$$

откуда в силу (27.2)

$$A(\vec{x}) \geqslant \lambda |\vec{x}|^2.$$

Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы [2]

Квадратичная форма (27.1) положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы положительны, т.е.

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \tag{27.4}$$

Квадратичная форма (27.1) отрицательно определена тогда и только тогда, когда квадратичная форма $-A(\vec{x})$ положительно определена, т.е.

$$\begin{gathered} (-1)\Delta_1 = -a_{11} > 0, \quad (-1)^2\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \\ \ldots, \quad (-1)^n\Delta_n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \end{gathered} \tag{27.5}$$

Теорема 27.1 (достаточное условие экстремума: общий случай). *Пусть функция $w = f(\vec{x})$ имеет в окрестности стационарной точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ непрерывные частные производные второго порядка $[f(\vec{x}) \in C^{(2)}(O(\vec{x}_0))]$. Тогда, если $d^2 f(\vec{x}_0)$ есть положительно определённая квадратичная форма, то $\vec{x}_0$ — точка строгого минимума; если $d^2 f(\vec{x}_0)$ есть отрицательно определённая квадратичная форма, то $\vec{x}_0$ — точка строгого максимума; если же $d^2 f(\vec{x}_0)$ — неопределённая квадратичная форма, то функция $f(\vec{x})$ не имеет экстремума в точке $\vec{x}_0$.*

Доказательство. Согласно теореме 25.1, характер стационарной точки $\vec{x}_0$ обусловлен поведением дифференциала $d^2 f(\vec{x}_0)$, имеющего, согласно (22.2), вид квадратичной формы:

$$d^2 f(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x^i \partial x^j} \Delta x^i \Delta x^j \tag{27.6}$$

с симметричной матрицей $A = \|a_{ij}\|_{n\times n}$, где

$$a_{ij} = f''_{x^i x^j}(\vec{x}_0) = \frac{\partial^2 f(\vec{x}_0)}{\partial x^i \partial x^j}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{27.7}$$

Пусть для разности

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \frac{1}{2}d^2 f(\vec{x}_0) + o(|\Delta\vec{x}|^2), \quad |\Delta\vec{x}| \to 0, \tag{27.8}$$

где $|\Delta\vec{x}| = \sqrt{(\Delta x^1)^2 + ... + (\Delta x^n)^2} = |\vec{x}-\vec{x}_0| = \rho(\vec{x},\vec{x}_0)$, квадратичная форма (27.6) является положительно определённой, т.е. выполняются неравенства (27.4). Тогда для неё в силу свойства 2 существует такое $\lambda > 0$, что

$$d^2 f(\vec{x}_0) \geqslant \lambda|\Delta\vec{x}|^2.$$

Применив это неравенство к (27.8), получим

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = \frac{\lambda}{2}|\Delta\vec{x}|^2 + o(|\Delta\vec{x}|^2) = \frac{\lambda}{2}|\Delta\vec{x}|^2[1 + \alpha(|\Delta\vec{x}|^2)], \tag{27.9}$$

где $\alpha(|\Delta\vec{x}|^2) = o(|\Delta\vec{x}|^2)/|\Delta\vec{x}|^2 \to 0$ при $|\Delta\vec{x}| \to 0$. Отсюда следует, что найдётся такой шар $S(\vec{x}_0,\delta)$, в котором для любого $\vec{x} \in S(\vec{x}_0,\delta)$ будет выполняться неравенство $|\alpha(|\vec{x}|)| < 1/2$. С учётом этого из (27.9) следует, что для всех $\vec{x} \in \dot{S}(\vec{x}_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) \geqslant \frac{\lambda}{2}|\Delta\vec{x}|^2[1 - |\alpha(|\Delta\vec{x}|)|] \geqslant \frac{\lambda}{4}|\Delta\vec{x}|^2 > 0.$$

Следовательно, точка $\vec{x}_0$ — точка строгого минимума $f(\vec{x})$.

Аналогично доказывается, что если $d^2 f(\vec{x}_0)$ есть отрицательно определённая квадратичная форма, т.е. выполняются неравенства (27.5), то $\vec{x}_0$ — точка строгого максимума $f(\vec{x})$.

Если $d^2 f(\vec{x}_0)$ — неопределённая квадратичная форма, то с помощью аналогичных рассуждений можно показать, что разность $f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)$ также принимает значения разных знаков. Таким образом, теорема доказана.

$\Diamond$ Теорема 26.1 представляет собой частный случай теоремы 27.1, а условия (27.4) совпадают с условиями (27.5) при $n = 2$.

Пример 27.1. Исследовать на экстремум функцию

$$w = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

Решение. Найдём первые и вторые частные производные:

$$w_x = 2(x+1), \quad w_y = 2(y+2), \quad w_z = 2(z-3);$$
$$w_{xx} = 2, \quad w_{yy} = 2, \quad w_{zz} = 2, \quad w_{xy} = w_{xz} = w_{yz} = 0.$$

Приравняв к нулю первые производные:

$$2(x+1) = 0, \quad 2(y+2) = 0, \quad 2(z-3) = 0,$$

найдём одну стационарную точку $P_0(-1,-2,3)$.

Составим матрицу вторых производных

$$w''(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

и вычислим её главные миноры

$$\det 2 = 2 > 0, \quad \det\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} = 4 > 0, \quad \det\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = 8 > 0.$$

Это означает, что $d^2f(P_0)$, согласно критерию Сильвера (27.4), является положительно определённой квадратичной формой. Следовательно, в точке $P_0(-1,-2,3)$ функция $w(x,y,z)$ имеет минимум $w_{\min} = w(-1,-2,3) = -14$.

Пример 27.2. Исследовать на экстремум функцию

$$w = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

Решение. Найдём первые и вторые частные производные:

$$w_x = 3(x^2+4y), \quad w_y = 2(y+6x), \quad w_z = 2(z+1);$$
$$w_{xx} = 6x, \quad w_{yy} = 2, \quad w_{zz} = 2, \quad w_{xy} = 12, \quad w_{xz} = 0, \quad w_{yz} = 0.$$

Приравняв к нулю первые производные, получим систему

$$x^2 = -4y, \quad y = -6x, \quad z = -1$$

и найдём две стационарные точки: $P_1(24,-144,-1)$ и $P_2(0,0,-1)$.

Составим матрицу вторых производных

$$w''(x,y,z) = \begin{pmatrix}6x & 12 & 0\\ 12 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

и найдём её значения в стационарных точках:

$$w''(P_1) = \begin{pmatrix}144 & 12 & 0\\ 12 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$
$$w''(P_2) = \begin{pmatrix}0 & 12 & 0\\ 12 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Вычислим главные миноры матрицы $w''(P_1)$:

$$\det 144 = 144 > 0, \quad \det\begin{pmatrix}144 & 12\\ 12 & 2\end{pmatrix} = 144 > 0, \quad \det\begin{pmatrix}144 & 12 & 0\\ 12 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} = 288 > 0.$$

Это означает, что $d^2f(P_1)$, согласно критерию Сильвера (27.4), является положительно определённой квадратичной формой. Следовательно, функция $w(x,y,z)$ в точке $P_1(24,-144,-1)$ имеет минимум $w_{\min} = w(24,-144,-1) = -6913$.

Один из главных определителей матрицы $w''(P_2)$ обращается в нуль: $\det(0) = 0$, поэтому вопрос о существовании экстремума в этой точке требует дальнейшего исследования. Для этого найдём приращение

$$\Delta w(P_2) = w(\Delta x, \Delta y, (-1+\Delta z)) - w(0,0,-1) =$$
$$= (\Delta x)^3 + (\Delta y)^2 + (-1+\Delta z)^2 + 12\Delta x\Delta y + 2(-1+\Delta z) - (1-2) =$$
$$= (\Delta x)^3 + (\Delta y)^2 + 12\Delta x\Delta y + \Delta z^2.$$

Из этого равенства следует, что при $\Delta x = t^2$, $\Delta y = \Delta z = 0$ и при $\Delta x = -t^2$, $\Delta y = \Delta z = 0$, где $t \neq 0$, приращение принимает значения разных знаков. Следовательно, точка P_2 не является точкой экстремума.

Пример 27.3. Исследовать на экстремум функцию

$$w = x^1(x^2)^2(x^3)^3\cdots(x^n)^n\varphi(\vec{x}), \quad \varphi(\vec{x}) = 1 - x^1 - 2x^2 - ... - nx^n, \quad x^i > 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Решение. Найдём частные производные первого порядка и приравняем их к нулю:

$$\begin{array}{l}
w_{x^1} = (x^1)^{1-1}(x^2)^2(x^3)^3\cdots(x^n)^n(\varphi - x_1) = 0,\\
w_{x^2} = 2x^1(x^2)^{2-1}(x^3)^3\cdots(x^n)^n(\varphi - x^2) = 0,\\
w_{x^3} = 3x^1(x^2)^2(x^3)^{3-1}\cdots(x^n)^n(\varphi - x^3) = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
w_{x^n} = nx^1(x^2)^2(x^3)^3\cdots(x^n)^{n-1}(\varphi - x^n) = 0.
\end{array} \tag{27.10}$$

Так как $x^i > 0$, то координаты стационарных точек должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{array}{l}
\varphi - x^1 = 0,\\
\varphi - x^2 = 0,\\
\dots\dots\dots\\
\varphi - x^n = 0.
\end{array} \tag{27.11}$$

Вычитая в (27.11) из первого уравнения второе, из второго третье и т.д., получим систему

$$x^i = x^{i+1}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{27.12}$$

из которой следует $x^1 = x^2 = ... = x^n$. С учётом этого из первого уравнения системы найдём

$$\varphi(x^1) - x^1 = 0,$$

или

$$1 - (1+2+...+n)x^1 - x^1 = 0.$$

Поскольку

$$1+2+...+n = \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2+n}{2},$$

то

$$1 - \frac{n^2+n}{2}x^1 - x^1 = 0$$

и, следовательно,

$$x^1 = \frac{2}{n^2+n+2},$$

а в силу (27.12)

$$x^1 = x^2 = ... = x^n = \frac{2}{n^2+n+2}. \tag{27.13}$$

Теперь найдём производные второго порядка. Учитывая, что

$$\varphi_{x^k} = -k,$$

имеем

$$\begin{aligned}
w_{x^1x^1} &= -2(x^2)^2(x^3)^3\cdots(x^n)^n,\\
w_{x^kx^k} &= k(k-1)x^1(x^2)^2\cdots(x^k)^{k-2}\cdots(x^n)^n(\varphi - x^k) -\\
&\quad - k(k+1)x^1(x^2)^2\cdots(x^k)^{k-1}\cdots(x^n)^n,\ k=\overline{2,n};\\
w_{x^kx^m} &= kmx^1(x^2)^2\cdots(x^k)^{k-1}\cdots(x^n)^n(\varphi - x^k) - kmx^1(x^2)^2\cdots(x^k)^{k-1}\cdots(x^n)^n,\\
&\quad k,m=\overline{1,n},\quad k\neq m.
\end{aligned} \tag{27.14}$$

Обозначив через P стационарную точку с координатами

$$x^1 = x^2 = ... = x^n = \frac{2}{n^2+n+2} = x$$

и учитывая в (27.14), что в стационарной точке в силу (27.11) $\varphi - x^k = \varphi - x = 0$, а

$$2+3+...+n = \frac{n^2+n}{2} - 1 = \frac{n^2+n-2}{2},$$

найдём

$$\begin{aligned}
a_{11} &= u_{x^1x^1}(P) = 2y;\\
a_{kk} &= u_{x^kx^k}(P) = k(k+1)y;\\
a_{km} &= u_{x^kx^m}(P) = kmy,
\end{aligned} \tag{27.15}$$

где

$$y = -x^{(n^2+n-2)/2} = -\Big(\frac{2}{n^2+n+2}\Big)^{(n^2+n-2)/2}.$$

Из формул (27.15) запишем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix}
1\cdot 2y & 1\cdot 2y & 1\cdot 3y & 1\cdot ny & ... & 1\cdot 4y\\
2\cdot 1y & 2\cdot 3y & 2\cdot 3y & 2\cdot 4y & ... & 2\cdot ny\\
3\cdot 1y & 3\cdot 2y & 3\cdot 4y & 3\cdot 4y & ... & 3\cdot ny\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & ... & \vdots\\
n\cdot 1y & n\cdot 2y & n\cdot 3y & n\cdot 4y & ... & n(n+1)y
\end{pmatrix} \tag{27.16}$$

и найдём её главные определители:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 1\cdot 2y;\\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} 1\cdot 2y & 1\cdot 2y\\ 2\cdot 1y & 2\cdot 3y\end{vmatrix} = 1\cdot 2y^2\begin{vmatrix} 2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} = 2!y^2\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 2!y^2\begin{vmatrix} 2+2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} =\\
&\quad = 2!y^2(1+1+2) = 2!y^2\Big(1+\frac{2\cdot 3}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Продолжив, для m-го определителя получим

$$\Delta_m = m!y^m \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & \ldots & m \\ 1 & 3 & 3 & 4 & \ldots & m \\ 1 & 2 & 4 & 4 & \ldots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & m+1 \end{vmatrix} = m!y^m \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & \ldots & m \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= m!y^m \begin{vmatrix} 2+2+3+\ldots+m & 2 & 3 & 4 & \ldots & m \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= m!y^m(1+1+2+3+\ldots+m) = m!y^m\Big[1+\frac{m(m+1)}{2}\Big].$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$\Delta_m = m!y^m\Big(1+\frac{m^2+m}{2}\Big) = m!\Big(1+\frac{m^2+m}{2}\Big)\big(-x^{(n^2+n-2)/2}\big)^m =$$
$$= (-1)^m m!\Big(1+\frac{m^2+m}{2}\Big)x^{m(n^2+n-2)/2}.$$

Это означает, что знаки главных миноров чередуются:

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \ \ldots, \ \Delta_m = (-1)^m m!\Big(1+\frac{m^2+m}{2}\Big)x^{m(n^2+n-2)/2},$$

т.е., согласно критерию Сильвера, квадратичная форма с матрицей $d^2w(P)$ (27.16) является отрицательно определённой. Таким образом, в стационарной точке P функция имеет максимум. Вычислив экстремальное значение функции w, получим

$$w_{\max} = x\cdot(x)^2\cdots(x)^n(1-x-2x-\ldots-nx) = x^{1+2+\ldots+n}\big[1-(1+2+\ldots+n)x\big] =$$
$$= x^{n(n+1)/2}\Big[1-\frac{n(n+1)}{2}x\Big] = \Big[\frac{2}{n^2+n+2}\Big]^{n^2+n)/2}\Big[1-\frac{n^2+n}{2}\,\frac{2}{n^2+n+2}\Big] =$$
$$= \Big[\frac{2}{n^2+n+2}\Big]^{\frac{n^2+n}{2}+1} = \Big(\frac{2}{n^2+n+2}\Big)^{(n^2+n+2)/2}.$$

28. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции нескольких переменных в замкнутой области

Как уже отмечалось, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$ функция $w = f(\vec{x})$ достигает в ней наибольшего и наименьшего значений. Естественно, что точки P, соответствующие этим значениям, могут либо лежать на границе, либо быть критическими. Отсюда вытекает правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в $\overline{D}$.

1. Приравнять к нулю первые производные.
2. Решить полученную систему уравнений и найти критические точки.
3. Вычислить значения функции в критических точках, не уточняя их характер.
4. Исследовать поведение функции на границе Γ области $\overline{D}$. Уравнения, описывающие границу области, позволяют свести задачу о нахождении наибольшего и наименьшего значений в граничных точках свести к аналогичной задаче, но уже с меньшим числом переменных. В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ уравнение границы Γ: $y = y(x)$ позволяет свести эту задачу к задаче для функции $z = f(x, y(x)) = F(x)$ в замкнутом интервале по одной переменной.
5. Из вычисленных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 28.1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - y^2$ в замкнутой области $\overline{D}$: $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Решение. В примере 26.1 было показано, что эта функция имеет одну стационарную точку $P(0, 0)$, которая не является экстремальной и в которой $z(P) = 0$. Рассмотрим теперь точки, лежащие на границе области, т.е. на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Выразив из этого уравнения $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ и подставив его в уравнение $z = x^2 - y^2$, найдём z как функцию одной переменной: $z = 2x^2 - 1$. Таким образом, нам нужно найти найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $x \in [-1, 1]$. Положив $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, найдём значения функции на концах отрезка: $z(x_1) = z(-1) = 1$, $z(x_2) = z(1) = 1$.

Чтобы найти стационарные точки, решим уравнение $z'_x = 4x = 0$, отсюда $x_0 = 0$ и $z(x_0) = z(0) = -1$. Таким образом, $z_{\text{наиб}} = 1$, $z_{\text{наим}} = -1$. Укажем точки на окружности, в которых функция $z = x^2 - y^2$ принимает эти значения. Так, $z_{\text{наиб}} = 1$ функция принимает в точках $P_1(-1, 0)$, $P_2(1, 0)$, а $z_{\text{наим}} = -1$ — в точках $P_3(0, 1)$, $P_4(0, -1)$.

Пример 28.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - 12x + 16y \tag{28.1}$$

в замкнутой области $x^2 + y^2 \leqslant 25$.

Решение. Функция z непрерывна в замкнутой ограниченной области $\overline{D}$: $z^2+y^2 \leqslant 25$. Поэтому, согласно теореме Вейерштрасса, она на этом множестве достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

Поскольку система

$$z_x = 2x - 12 = 0, \quad z_y = 2y + 16 = 0$$

для нахождения стационарных точек имеет решением одну стационарную точку $P(6, -8)$, которая не принадлежит области $\overline{D}$, то наибольшее и наименьшее значения будут достигаться на окружности $z^2 + y^2 = 25$. Найдём значения функции на окружности, уравнение которой запишем в параметрической форме:

$$x = 5\cos t, \quad y = 5\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{28.2}$$

Подстановка этих выражений в уравнение (28.1) задаёт z как функцию одной переменной t:

$$z = 25 - 60\cos t + 80\sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \tag{28.3}$$

Таким образом, нам нужно найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[0, 2\pi]$. Обозначив $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$, найдём значения функции (28.3) на концах отрезка: $z(0) = -45$, $z(2\pi) = -45$.

Чтобы найти стационарные точки, решим уравнение

$$z'_t = 60\sin t + 80\cos t = 0,$$

откуда

$$\cos t(3\operatorname{tg} t + 4) = 0,$$

и, следовательно,

$$t_1 = -\operatorname{arctg}\frac{4}{3}, \quad t_2 = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos t_1 &= \frac{3}{5}, \quad \sin t_1 = -\frac{4}{5};\\ \cos t_2 &= -\frac{3}{5}, \quad \sin t_2 = \frac{4}{5}, \end{aligned} \tag{28.4}$$

то первая стационарная точка $P_1(3, -4)$, а вторая — $P_2(-3, 4)$. Подставив (28.4) в (28.3), найдём

$$\begin{aligned} z(t_1) &= 25 - 60\cdot\frac{3}{5} + 80\Big(-\frac{4}{5}\Big) = -75;\\ z(t_2) &= 25 - 60\Big(-\frac{3}{5}\Big) + 80\cdot\frac{4}{5} = 125. \end{aligned}$$

Таким образом, $z_{\text{наим}} = z(t_1) = -75$, $z_{\text{наиб}} = z(t_2) = 125$.

Пример 28.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^3 + 3xy - y^2 - 2y + 5 \tag{28.5}$$

в замкнутой области $\overline{D}$, ограниченной кривыми: $y = -x^2/2$, $y = -2$ (рис. 21).

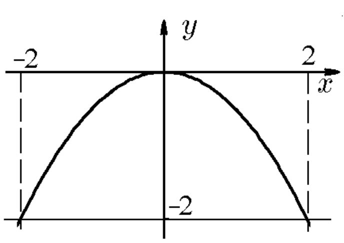


Рис. 21.

Решение. Найдём первые частные производные и приравняем их к нулю:

$$z_x = 3x^2 + 3y = 0, \quad z_y = 3x - 2y - 2 = 0.$$

Решив эту систему, найдём две стационарные точки: $P_1(1/2; -1/4)$, $P_2(-2, -4)$. Поскольку P_2 не принадлежит области $\overline{D}$, то достаточно рассмотреть лишь значение функции в точке P_1: $z(P_1) = 83/16 \approx 5{,}18$.

Найдём теперь наибольшее и наименьшее значения функции на границе области. В отличие от предыдущих примеров граница в данном случае состоит из двух частей, задаваемых разными уравнениями, которые следует рассмотреть по отдельности.

1. На дуге параболы $y = -x^2/2$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, функция (28.5) является функцией одной переменной:

$$z = -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{2} + x^2 + 5, \quad x \in [-2, 2]. \tag{28.6}$$

Найдём значения функции (28.6) на концах отрезка: $z(-2) = 9$, $z(2) = 1$. Чтобы найти стационарные точки, запишем уравнение

$$z'_x = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x = -\frac{x}{2}(2x^2 + 3x - 4) = 0.$$

Это уравнение имеет три корня: $x_1 = 0$, $x_2 = (-3 + \sqrt{41})/2$, $x_3 = (-3 - \sqrt{41})/2$. Последнее значение не принадлежит отрезку $[-2, 2]$ и должно быть отброшено. Вычислим значения функции (28.6) в точках x_1 и x_2: $z(x_1) = 5$, $z(x_2) = (939 - 41\sqrt{41})/128 \approx 5{,}28$. Таким образом, наименьшим значением функции на параболе является $z(2) = 1$, а наибольшим $z(-2) = 9$.

2. На отрезке $y = -2$, $x \in [-2, 2]$, функция (28.5) также является функцией одной переменной:

$$z = x^3 - 6x + 5, \quad x \in [-2, 2]. \tag{28.7}$$

Поскольку значения этой функции на границе уже найдены, найдём стационарные точки из уравнения

$$z'_x = 3x^2 - 6 = 0,$$

т.е. $x_4 = -\sqrt{2}$, $x_5 = \sqrt{2}$. Значения функции (28.7) в этих точках равны $z(x_4) = 5 + 4\sqrt{2}$, $z(x_5) = 5 - 4\sqrt{2}$.

Объединив результаты пунктов 1 и 2, найдём, что наименьшим значением функции (28.5) на границе является $5 - 4\sqrt{2}$, а наибольшим $5 + 4\sqrt{2}$. Поскольку значение функции в стационарной точке $z(P_1) \approx 5{,}18$ расположено между этими двумя значениями, то они остаются наибольшим и наименьшим значениями функции (28.5) в области $\overline{D}$.

$\Diamond$ Задачу о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции, вообще говоря, можно сформулировать и для незамкнутой и, более того, неограниченной области. Не останавливаясь на общем анализе этой задачи, рассмотрим следующий пример.

Пример 28.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = (x - y)e^{-(x+y)} \tag{28.8}$$

в области D, расположенной в первой четверти координатной плоскости xOy между лучами $y = x$, $y = 2x$, включая сами лучи (рис. 22).

Решение. Функция рассматривается в незамкнутой неограниченной области и поэтому может не иметь там наибольшего и наименьшего значений. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, нужно знать её предельное значение, когда точка удаляется в бесконечность, оставаясь в области D. Для этого следует вычислить предел при $x \to \infty$, $y \to \infty$ по множеству D:

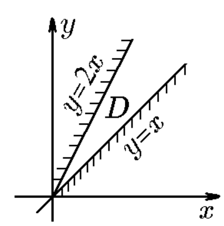


Рис. 22.

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty\\ (x,y)\in D}} (x - y)e^{-(x+y)}. \tag{28.9}$$

Перейдя в (28.9) к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ и учитывая, что в области D: $\pi/4 \leqslant \varphi \leqslant \operatorname{arctg} 2$, т.е. $\cos\varphi + \sin\varphi > 0$, получим

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty\\ (x,y)\in D}} (x - y)e^{-(x+y)} = \lim_{\substack{\rho\to\infty\\ \pi/4\leqslant\varphi\leqslant\operatorname{arctg} 2}} \rho(\cos\varphi - \sin\varphi)e^{-\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)} = 0.$$

Теперь перейдём к нахождению стационарных точек функции. Вычислив первые производные и приравняв их к нулю, имеем

$$z_x = e^{-(x+y)}(1 - x + y) = 0, \quad z_y = e^{-(x+y)}(-1 - x + y) = 0.$$

Но эта система несовместна (не имеет решений), следовательно, функция не имеет стационарных точек и наибольшего и наименьшего значений достигает на границе области D, т.е. на лучах.

1. На луче $x = y$ функция $z = 0$.
2. На луче $y = 2x$ функция превращается в функцию одной переменной: $z = -xe^{-3x}$, $x \in [0, +\infty[$. Найдём её наибольшее и наименьшее значения. Поскольку
$$z'_x = (3x - 1)e^{-3x} = 0,$$
имеем одну стационарную точку $x_0 = 1/3$. Сравним значение $z(1/3) = -1/3e$ со значением $z(0) = 0$ и ранее найденным значением $z(+\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} z(x) = 0$. Следовательно, значение $z(1/3) = -1/3e$ является наименьшим на луче $y = 2x$ и одновременно наименьшим в области D. Наибольшим значением функции в области D является $z = 0$, которого она достигает на луче $y = x$ и в бесконечно удалённых точках.

29. Условный экстремум

29.1. Понятие условного экстремума

Выше мы ввели понятие локального экстремума функции. Такие экстремумы иногда называют *безусловными*. Это название объясняется тем, что значение функции в экстремальной точке сравнивается со значением функции во всех точках некоторой её окрестности безо всяких исключений или условий.

Однако задача о вычислении наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области сводится к задаче о нахождении экстремума функции на границе области, т.е. в точках, координаты которых подчиняются уравнениям, описывающим кривые, составляющие границу области. Таким образом, в отличие от точек безусловного экстремума мы находили точки экстремума, подчиняющиеся некоторым условиям. Аналогичным образом задачу об отыскании экстремума при наличии некоторых условий или связей можно сформулировать и для внутренних точек области.

Рассмотрим открытое множество $D \subset \mathbb{R}^n$, на котором заданы функции $f_0(\vec{x})$, $f_1(\vec{x}), ..., f_m(\vec{x})$, причём $m < n$, и пусть E — подмножество точек множества D, удовлетворяющих системе уравнений

$$f_i(\vec{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{29.1}$$

♦ Уравнения (29.1) называются *уравнениями связи*, или просто *связями*, функции $f_0(\vec{x})$ в области D.

♦ Точка $\vec{x}_0 = (x_0^1, ..., x_0^n)$ называется *точкой условного минимума* (*максимума*) функции $f_0(\vec{x})$ при наличии связей (29.1), если найдётся такая окрестность $O(\vec{x}_0)$, что для всех $\vec{x} \in D \cup O(\vec{x}_0)$ выполнено неравенство

$$f_0(\vec{x}) \geqslant f_0(\vec{x}_0) \quad [f_0(\vec{x}) \leqslant f_0(\vec{x}_0)]. \tag{29.2}$$

Если в этом определении условия (29.2) заменить строгими неравенствами:

$$f_0(\vec{x}) > f_0(\vec{x}_0) \quad [f_0(\vec{x}) < f_0(\vec{x}_0)], \tag{29.3}$$

то точка $\vec{x}_0$ называется *точкой строгого условного минимума* (*максимума*).

♦ Точки условного минимума и условного максимума называются *точками условного экстремума.*

Аналогично определяются *точки условного строгого экстремума.*

29.2. Прямой метод отыскания точек условного экстремума

Прямой метод реализуется в том случае, если из системы связей (29.1) можно выразить m каких-либо переменных x^i через остальные переменные. Если это удаётся, то, подставив вместо соответствующих переменных x^i их выражения через остальные $(n-m)$ переменных в функцию $f_0(\vec{x})$, получим функцию $\bar{f}_0$ от этих $(n-m)$ переменных. В результате задача о нахождении точек условного экстремума функции $f_0(\vec{x})$ при наличии связей (29.1) сводится к задаче нахождения обычного, т.е. безусловного, экстремума функции $\bar{f}_0$, зависящей от $(n-m)$ переменных.

Рассмотрим несколько примеров, когда прямой метод отыскания точек условного экстремума может быть реализован.

Пример 29.1. Найти точки условного экстремума функций

$$1)\ z = x^2 + y^2; \quad 2)\ z = -\sqrt{x^2+y^2}; \quad 3)\ z = x^2; \quad 4)\ z = x^2 - y^2$$

при условии $x + y = 1$.

Решение. Эти функции рассматривались в примере 24.1. Там было показано, что точка $O(0,0)$ является точкой строгого минимума для первой функции, строгого максимума для второй, точкой минимума (нестрогого) для третьей функции, а четвертая функция точек экстремума не имеет. Рассмотрим, как эти результаты изменятся при дополнительном условии $x + y = 1$. Для этого из уравнения связи $x + y = 1$ выразим переменную y:

$$y = 1 - x, \tag{29.4}$$

и подставим её в уравнения функций. В результате получим функции z одной переменной и задача сведётся к отысканию безусловного экстремума этих функций. Итак, для функции $z = x^2 + y^2 = x^2 - (1-x)^2 = 1 - 2x - 2x^2$ найдём $z' = -2 + 4x$, $z'' = 4$. Тогда из равенства $z' = -2(1-2x) = 0$ найдём одну стационарную точку $x_0 = 1/2$, которая в силу неравенства $z'' = 4 > 0$ является точкой строгого минимума. Из уравнения связи (29.4) найдём $y_0 = 1 - x_0 = 1 - 1/2 = 1/2$. Таким образом, мы нашли точку условного строгого минимума $P(1/2, 1/2)$, в которой $z_{\min} = z(1/2, 1/2) = (1/2)^2 + (1/2)^2 = 1/2$. Геометрически она соответствует вершине параболы, которая является линией пересечения параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ и плоскости $x + y = 1$ (рис. 23,a).

2) Для функции $z = -\sqrt{x^2+y^2} = -\sqrt{1-2x+2x^2} = -\sqrt{2(x-1/2)^2+1/2}$ найдём

$$z' = -\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{2(x-1/2)^2+1/2}}, \quad z'' = -\frac{2}{\sqrt{2(x-1/2)^2+1/2}} + \frac{4(x-1/2)^2}{\sqrt{[2(x-1/2)^2+1/2]^3}}.$$

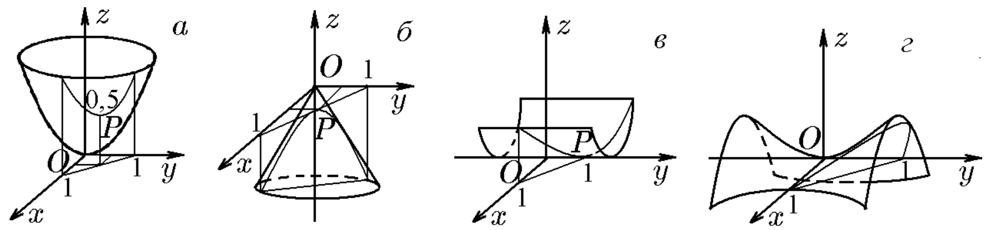


Рис. 23.

Тогда из равенства $z' = 0$ найдём одну стационарную точку $x_0 = 1/2$, которая в силу неравенства $z''(1/2) = -2\sqrt{2} < 0$ является точкой строгого максимума. Из уравнения связи (29.4) найдём $y_0 = 1 - x_0 = 1/2$. Таким образом, имеем точку условного строгого максимума $P(1/2, 1/2)$, в которой $z_{\max} = z(1/2, 1/2) = -\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = -1/\sqrt{2}$. Геометрически она соответствует вершине гиперболы, которая является линией пересечения конуса $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ с плоскостью $x + y = 1$ (рис. 23,*б*).

3) Для функции $z = x^2$ найдём $z' = 2x$, $z'' = 2$. Из равенства $z' = 2x = 0$ имеем одну стационарную точку $x_0 = 0$, которая в силу неравенства $z'' = 2 > 0$ является точкой строгого минимума. Из уравнения связи (29.4) найдём $y_0 = 1 - x_0 = 1$. Таким образом, имеем точку условного строгого минимума $P(0, 1)$, в которой $z_{\min} = z(0, 1) = 0$. Геометрически она соответствует вершине параболы, которая является линией пересечения параболического цилиндра $z = x^2$ с плоскостью $x + y = 1$ (рис. 23,*в*).

4) Для функции $z = y^2 - x^2 = (1 - x)^2 - x^2 = 1 - 2x$ найдём $z' = -2$, $z'' = 0$. Отсюда в силу $z' = -2 \neq 0$ следует, что функция $z = 1 - 2x$ стационарных точек не имеет, а значит, и функция $z = y^2 - x^2$ не имеет условных экстремумов. Геометрически это означает, что линия пересечения гиперболического параболоида с плоскостью $x + y = 1$ экстремальных точек не имеет (рис. 23,*г*).

Пример 29.2. Исследовать на условный экстремум функцию

$$w = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2z \tag{29.5}$$

при условии

$$x + y + z = 1. \tag{29.6}$$

Решение. Из уравнения связи найдём выражение для z: $z = 1 - x - y$ и подставим его в уравнение (29.5). Тогда

$$w = x^2 + y^2 + 1. \tag{29.7}$$

Таким образом, задача об отыскании условного экстремума для функции (29.5) свелась к нахождению безусловного экстремума функции двух переменных (29.7). Поскольку

$$w_x = 4x, \quad w_y = 4y, \quad w_{xx} = 4, \quad w_{xy} = 0, \quad w_{yy} = 4,$$

то из уравнений

$$w_x = 4x = 0, \quad w_y = 4y = 0$$

найдём одну стационарную точку $P(0, 0)$. Для выяснения её характера выпишем коэффициенты

$$a_{11} = w_{xx} = 4 > 0, \quad a_{12} = w_{xy} = 0, \quad a_{22} = 4; \quad \delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 16 > 0.$$

Отсюда следует, что точка $P(0,0)$ является точкой строгого минимума, а, значит, точка с координатами $x=0$, $y=0$, $z=1$ является точкой условного строгого минимума функции (29.5) с $w_{\min}=w(0,0,1)=-1$.

Пример 29.3. Исследовать на условный экстремум функцию

$$z=x^2+y^2-12x+16y$$

при условии $x^2+y^2=25$.

Решение. Для этой функции в примере 28.2 мы нашли наибольшее и наименьшее значения в замкнутой области $x^2+y^2\leqslant 25$. Там же было показано, что на границе $x^2+y^2=25$ функция имеет две экстремальные точки: $P_1(3,4)$ — точка строгого минимума и $P_2(-3,4)$ — точка строгого максимума. Следовательно, эти же точки будут точками строгого условного экстремума исследуемой функции.

29.3. Метод множителей Лагранжа

Прямой метод нахождения условного экстремума редко бывает эффективным, поскольку в этом случае необходимо разрешить уравнения связи (29.1) относительно какой-либо группы переменных. Последнее далеко не можно сделать в явном виде, поэтому перейдём к изучению методов, позволяющих найти условный экстремум, не учитывая явного вида уравнений связи.

Для решения задачи об отыскании условного экстремума функции $f_0(\vec{x})$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, при наличии связей

$$f_i(\vec{x})=0,\quad i=\overline{1,m},\ m<n, \tag{29.8}$$

воспользуемся методом Лагранжа, для чего введём вспомогательную функцию.

♦ Функция

$$L(\vec{x},\vec{\lambda})=f_0(\vec{x})+\lambda^1 f_1(\vec{x})+...+\lambda^m f_m(\vec{x});\quad \vec{x}\in\mathbb{R}^n,\ \vec{\lambda}\in\mathbb{R}^m,\quad m<n, \tag{29.9}$$

называется *функцией Лагранжа*, а постоянные множители $\vec{\lambda}=(\lambda^1,...,\lambda^m)$ — *множителями Лагранжа*.

С помощью функции Лагранжа (29.9) задача об отыскании условного экстремума функции $f_0(\vec{x})$ со связями (29.8) сводится к исследованию на обычный (безусловный) экстремум функции по переменным $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ и $\vec{\lambda}\in\mathbb{R}^m$.

♦ Точка $(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)=(x_0^1,...,x_0^n,\lambda_0^1,...,\lambda_0^m)\in\mathbb{R}^{n+m}$ называется *стационарной точкой функции Лагранжа* (29.9), если

$$\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial x^j}(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)=0,\quad j=\overline{1,n};\\ \frac{\partial L}{\partial\lambda^i}(\vec{x}_0,\vec{\lambda}_0)=f_i(\vec{x}_0)=0,\quad i=\overline{1,m}.\end{gathered} \tag{29.10}$$

♦ Функциональная матрица

$$J_{ij}(\vec{x})=\left\|\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x^j}\right\|,\quad i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}, \tag{29.11}$$

называется *матрицей Якоби системы функций* $f_i(\vec{x})$, $i=\overline{1,m}$, задающих уравнения связей (29.8).

Обозначим через D_0 линейное многообразие в $\mathbb{R}^n$:

$$D_0 = \left\{ \vec{y} | \vec{y} = (y^1, ..., y^n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(\vec{x}_0) y^j = 0; \ i = \overline{1,m}, \right\}$$

тогда равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^j}(\vec{x}_0) dx^j = 0; \ i = \overline{1,m}, \qquad (29.12)$$

означает, что $d\vec{x} = (dx^1, ..., dx^n) \in D_0$.

Сформулируем без доказательства достаточное условие существования условного экстремума.

Теорема 29.1. *Пусть функции $f_0(\vec{x})$ и $f_i(\vec{x})$, $i=\overline{1,m}$, имеют непрерывные частные производные второго порядка в окрестности некоторой точки $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ [т.е. $f_i(\vec{x}) \in C^{(2)}(O(\vec{x}_0))$, $i=\overline{1,m}$], причём $\operatorname{rang} J_{ij}(\vec{x}_0) = m$, и $(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)$ является стационарной точкой функции Лагранжа $L(\vec{x}, \vec{\lambda})$.*

Тогда, если квадратичная форма

$$d_x^2 L(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(\vec{x}_0, \vec{\lambda}_0)}{\partial x^k \partial x^j} dx^k dx^j \qquad (29.13)$$

при $d\vec{x} = (dx^1, ..., dx^n) \in D_0$ является

1) *положительно определённой, то $\vec{x}_0$ есть точка условного строгого минимума функции $f_0(\vec{x})$ при наличии связей (29.8);*
2) *отрицательно определённой, то $\vec{x}_0$ есть точка условного строгого максимума функции $f_0(\vec{x})$ при наличии связей (29.8);*
3) *неопределённой, то $\vec{x}_0$ не является точкой условного экстремума функции $f_0(\vec{x})$ при наличии связей (29.8).*

Пример 29.4. Исследовать на условный экстремум функцию

$$w = (x^1)^4 + ... + (x^n)^4,$$

если $x^1 + ... + x^n = n$.

Решение. Следуя (29.9), составим функцию Лагранжа

$$L(\vec{x}, \lambda) = \sum_{j=1}^{n} (x^j)^n + \lambda \left(\sum_{j=1}^{n} x^j - n \right) = 0$$

и запишем для неё систему (29.10) для нахождения стационарных точек:

$$\frac{\partial L}{\partial x^j} = 4(x^j)^3 + \lambda = 0, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{j=1}^{n} x^j - n = 0.$$

Из первых n уравнений этой системы найдём

$$x^j = \Big(-\frac{\lambda}{4}\Big)^{1/3}, \quad j = \overline{1,n},$$

и подставим их в последнее уравнение:

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(-\frac{\lambda}{4}\Big)^{1/3} = \Big(-\frac{\lambda}{4}\Big)^{1/3} n = n,$$

откуда $\lambda = -4$ и, следовательно, $x^j = 1$, $j = \overline{1,n}$.

Таким образом, имеем одну стационарную точку $P = (\vec{x}, \lambda) = (1, ..., 1, -4)$.

Теперь найдём второй дифференциал

$$d_x^2 L = 4 \cdot 3 \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2 (dx^j)^2$$

и вычислим его значение в точке $P(1, ..., 1, -4)$:

$$d^2 L(P) = 12 \sum_{j=1}^{n} (dx^j)^2 > 0. \tag{29.14}$$

Так как квадратичная форма (29.14) является положительно определённой, то точка $\vec{x} = (1, ..., 1)$ является точкой условного строгого минимума функции с $w_{\min} = w(1, ..., 1) = n$.

Пример 29.5. Найти экстремумы функции

$$w = x - 2y + 2z$$

на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение. Следуя (29.9), составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

и запишем для неё систему (29.10) для нахождения стационарных точек:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0;$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Из первых трёх уравнений этой системы найдём

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda}, \quad z = -\frac{1}{\lambda}$$

и подставим их в последнее уравнение:

$$\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 3/2$, $\lambda_2 = -3/2$ и, соответственно,

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ y_1 = \frac{2}{3},\ z_1 = -\frac{2}{3}; \qquad x_2 = \frac{1}{3},\ y_2 = -\frac{2}{3},\ z_2 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, функция Лагранжа имеет две стационарные точки: $P_1 = (M_1, \lambda_1) = (M_1, 3/2)$, $M_1 = (x_1, y_1, z_1) = (-1/3, 2/3, -2/3)$ и $P_2 = (M_2, \lambda_2) = (M_2, -3/2)$, $M_2 = (x_2, y_2, z_2) = (1/3, -2/3, 2/3)$.

Так как

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

и в точке P_1

$$d^2L(P_1) = 3(dx^2 + dy^2 + dz^2) > 0,$$

а в точке P_2

$$d^2L(P_2) = -3(dx^2 + dy^2 + dz^2) < 0,$$

то точка $M_1(-1/3, 2/3, -2/3)$ — точка строгого условного минимума функции w, а точка $M_2(1/3, -2/3, 2/3)$ — точка строгого условного максимума функции w, причём $w_{\min} = w(P_1) = -3$, $w_{\max} = w(P_2) = 3$.

Пример 29.6. Найти условный экстремум функции

$$w = xy + yz,$$

если уравнения связей для $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ имеют вид

$$x^2 + y^2 = 2, \quad y + z = 2.$$

Решение. Следуя (29.9), составим функцию Лагранжа

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = xy + yz + \lambda^1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda^2(y + z - 2), \quad \vec{x} = (x, y, z), \quad \vec{\lambda} = (\lambda^1, \lambda^2),$$

и запишем для неё систему (29.10) для нахождения стационарных точек:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda^1 x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x + z + 2\lambda^1 y + \lambda^2 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = y + \lambda^2 = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^1} = x^2 + y^2 - z = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda^2} = y + z - 2 = 0.$$

Отсюда $\lambda^1 = -1/2$, $\lambda^2 = -1$ и, соответственно, $x = y = z = 1$.

Так как

$$d^2L = 2\lambda^1(dx^2 + dy^2) + 2dx\,dy + 2dy\,dz,$$

то

$$d^2L(1, 1, 1, -1/2) = -dx^2 - dy^2 + 2dx\,dy + 2dy\,dz.$$

Из уравнений связи при $x = y = z = 1$ следует $dy = -dz = -dx$, поэтому

$$d^2L(1, 1, 1, -1/2) = -dx^2 - 3dy^2 - 2dz^2 < 0.$$

Таким образом, в точке $M(1, 1, 1)$ функция w имеет строгий условный минимум, равный $w_{\min} = 2$.

Пример 29.7. На прямых

$$\begin{aligned}
&\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{2},\\
&\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{1}
\end{aligned} \tag{29.15}$$

найти пару наиболее близких друг к другу точек.

Решение. Во избежание путаницы координаты второй прямой будем обозначать прописными буквами X, Y, Z. Как известно, расстояние l от точки $P_1(x, y, z)$ первой прямой до точки $P_2(X, Y, Z)$ второй прямой находится по формуле

$$l=\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2}.$$

Оно будет наименьшим, если будет наименьшей величина

$$l^2=(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2. \tag{29.16}$$

Таким образом, мы имеем задачу о нахождении экстремума функции (29.16) при условиях связи (29.15), которые можно записать в виде

$$\begin{gathered}
2x-y-5=0, \quad 2x-z-3=0,\\
3X-2Y+5=0, \quad X-2Z+5=0.
\end{gathered}$$

Следуя (29.9) и обозначив $\vec{X}=(X,Y,Z)$, $\vec{x}=(x,y,z)$, $\vec{\lambda}=(\lambda^1,\lambda^2)$, $\vec{\mu}=(\mu^1,\mu^2)$, составим функцию Лагранжа в расширенном пространстве $(\vec{x},\vec{X})\in\mathbb{R}^6$

$$\begin{aligned}
L(\vec{X},\vec{x},\vec{\lambda},\vec{\mu})=(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2+\lambda^1(2x-y-5)+\\
+\lambda^2(2x-z-3)+\mu^1(3X-2Y+5)+\mu^2(X-2Z+5)
\end{aligned}$$

и запишем для неё систему (29.10) для нахождения её стационарных точек:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x}=2(x-X)+2\lambda^1+2\lambda^2=0, && \frac{\partial L}{\partial X}=2(X-x)+3\mu^1+\mu^2=0;\\
&\frac{\partial L}{\partial y}=2(y-Y)-\lambda^1=0, && \frac{\partial L}{\partial Y}=2(Y-y)-2\mu^1=0;\\
&\frac{\partial L}{\partial z}=2(z-Z)-\lambda^2=0, && \frac{\partial L}{\partial Z}=2(Z-z)-2\mu^2=0;\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda^1}=2x-y-5=0, && \frac{\partial L}{\partial \mu^1}=3X-2Y+5=0;\\
&\frac{\partial L}{\partial \lambda^2}=2x-z-3=0, && \frac{\partial L}{\partial \mu^2}=X-2Z+5=0.
\end{aligned}$$

Решив эту систему, найдём

$$\lambda^1=-\frac{51}{13}, \quad \lambda^2=\frac{17}{13}, \quad \mu^1=\frac{51}{26}, \quad \mu^2=-\frac{17}{26}$$

и

$$x = \frac{42}{13},\ y = \frac{19}{13},\ z = \frac{45}{13};\quad X = \frac{8}{13},\ Y = \frac{89}{26},\ Z = \frac{73}{26}.$$

Таким образом, в расширенном пространстве функция Лагранжа имеет одну стационарную точку, эквивалентную двум точкам в исходном пространстве:

$$P_1(x,y,z) = \Big(\frac{42}{13}, \frac{19}{13}, \frac{45}{13}\Big);\qquad P_2(X,Y,Z) = \Big(\frac{8}{13}, \frac{89}{26}, \frac{43}{26}\Big),$$

В точках P_1 и P_2 функция (29.16) достигает условного экстремума. Выполнение достаточного условия в данном случае проверять нет необходимости, поскольку из постановки задачи очевидно, что это минимум.

Таким образом, точки P_1 и P_2 являются наименее удалёнными точками прямых (29.15) с наименьшим между ними расстоянием $l_{\min} = |P_1P_2| = 17/\sqrt{26}$.

Этот результат легко проверяется методами аналитической геометрии (см., например, [10]). Из уравнений прямых имеем координаты их направляющих векторов и точек, через которые они проходят:

$$\vec{s}_1 = (1,2,2),\quad \vec{s}_2 = (2,3,1),\quad M_1(2,-1,1),\quad M_2(-3,-2,1).$$

Тогда, учитывая, что $\overrightarrow{M_1M}_1 = (5,1,0)$, искомое расстояние l найдётся как [9]

$$l = \frac{|(\overrightarrow{M_2M}_1, \vec{s}_1, \vec{s}_2)|}{|[\vec{s}_1, \vec{s}_2]|} = \frac{\left|\det\begin{pmatrix}5 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\right|}{\left|\det\begin{pmatrix}\vec{\jmath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\right|} = \frac{17}{\sqrt{26}},$$

что совпадает с найденным выше $l_{\min} = 17/\sqrt{26}$.

◊ С помощью условного экстремума задачу о нахождении наибольшего и наименьшего значений функции можно сформулировать в более общих предположениях.

Если функция $f(\vec{x})$ дифференцируема в области $D \subset \mathbb{R}^n$ и непрерывна на замыкании $\overline{D}$, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значения или в стационарной точке, или в точке, принадлежащей границе области D.

Задачи на отыскание экстремумов функций как числовых, так и более общей природы, при наличии связей широко распространены. Теория экстремальных задач помимо классических приложений находит широкое применение в области новейших приложений. Метод множителей Лагранжа имеет обобщения на случаи, когда ограничения задаются системой равенств и неравенств при помощи недифференцируемых в обычном смысле функций. В конкретных приложениях множители Лагранжа имеют содержательную интерпретацию. Так, в физике они задают реакцию связей, в экономике — цены на продукцию производства и т.д. В настоящее время широко развиваются методы решения экстремальных задач с использованием современных электронных технологий.

Задания для самоконтроля

Теоретические вопросы

I. Понятие функции нескольких переменных

1. Понятие функции нескольких переменных. Геометрический смысл функции нескольких переменных. Привести примеры функции нескольких переменных. Способы задания функции нескольких переменных. Линии и поверхности уровня функции нескольких переменных.
2. Определение метрического пространства. Привести примеры метрических пространств. Аксиомы метрики. Неравенства Коши и неравенство Минковского.
3. Многомерные последовательности. Сходимость в метрическом пространстве. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Последовательности, сходящиеся к бесконечно удалённой точке. Свойства пределов последовательностей. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
4. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух последовательностей. Фундаментальные последовательности. Признак Коши сходимости числовой последовательности. Полные метрические пространства.

II. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

5. Предел функции нескольких переменных. Определение предела функции по Гейне и по Коши. Критерий Коши существования предела функции. Теоремы о пределах. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций.
6. Предел функции нескольких переменных в точке по множеству и по направлению. Способы вычисления предела функции по множеству. Повторные пределы. Теорема о связи кратных и повторных пределов.
7. Непрерывность функций нескольких переменных в точке и на множестве. Непрерывность суммы, произведения и частного функции нескольких переменных. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теоремы о непрерывности обратной сложной функции. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции.

III. Дифференцируемость функции нескольких переменных

8. Частные производные функции нескольких переменных. Геометрический смысл частных производных функции нескольких переменных.
9. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке. Теорема о дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.
10. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных в точке.
11. Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Теорема о частных производных сложной функции. Полная производная.
12. Производная по направлению. Градиент функции нескольких переменных. Градиент суммы, произведения и частного функции нескольких переменных.
13. Дифференциал функции нескольких переменных. Полное приращение и полный дифференциал функции нескольких переменных. Правила дифференцирования. Теорема об инвариантности формы первого дифференциала функции нескольких переменных.
14. Формула конечных приращений Лагранжа. Применение полного дифференциала в приближённых вычислениях.
15. Касательная к пространственной кривой. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

16. Геометрический смысл частных производных функции нескольких переменных. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. Геометрические свойства градиента и производных по направлению
17. Дифференцирование неявно заданных функций одной переменной. Теорема о существовании неявной функций функции нескольких переменных
18. Дифференцирование неявно заданных функций нескольких переменных. Теорема о существовании неявной функций
19. Производные и дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных. Теорема о равенстве смешанных производных. Производные по направлению высших порядков
20. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Остаточный член в форме Лагранжа и Пеано

IV. Экстремум функции нескольких переменных

21. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие существования экстремума. Стационарные и критические точки
22. Теорема о достаточном условии существования экстремума функции нескольких переменных
23. Достаточное условие существования экстремума функции двух переменных
24. Квадратичные формы и достаточные условия существования экстремума функции. Критерий Сильвестра положительной определённости квадратичной формы
25. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой области
26. Условный экстремум. Уравнения связей. Прямой метод отыскания точек условного экстремума
27. Метод множителей Лагранжа отыскания условного экстремума. Функция и множители Лагранжа. Достаточное условие существования условного экстремума.

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)};\quad 2)\ u=\frac{5\sqrt{z}}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}.$$

1.2. Построить график функции $z=4x^2-y^2$.

1.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha=\pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ для функции

$$1)\ z=(1+x)^{(x+y)/x^2},\ M_0(0,2);\quad 2)\ z=\frac{x^2y^2+4xy-1}{4x^3y^3-3x^2y^2+6},\ M_0(\infty,\infty).$$

1.4. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной, но разрывна по их совокупности.

1.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z=\ln(y^2-e^{-x});\quad 2)\ \cos\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

и функций из заданий 1.1, 1.2, 1.3.

1.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \frac{xy+4}{y^2}-\operatorname{tg}(x+y)=0,\ M_0(2-2);\quad 2)\ \sin z-\ln(x^2+y^2-z^2)=0,\ M_0(0,1,0),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

1.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z=\operatorname{arctg}(u+4v-w)$, где $u=(x+1)/x$, $v=\sqrt[3]{x}$, $w=e^{1/x}$.

1.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=\sin(uw+v^2)$, где $u=x+y$, $v=xy$, $w=\sin(x+y^2)$.

1.9. Для функции $z=7x-x^3y^2+y^4$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора до 3-го порядка в точке $M(1,1)$.

1.10. Показать, что функция $z=x^y$ удовлетворяет равенству

$$y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-(1+y\ln x)\frac{\partial z}{\partial x}=0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u=x+2y+2$, $v=x-y-1$ за новые независимые переменные.

1.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 1.6 при $x=0{,}01$, $y=0{,}09$.

1.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = xy + y^2 - 2x,\ M_0(2,1,-1);\quad 2)\ \frac{\cos(\sqrt[3]{x}z)}{x+y+z} - \frac{\exp(y^2-y)}{\sqrt{x+y^2+z^3}} = 0,\ M_0(0,1,2).$$

1.13. Для функции $f(x,y) = \cos(x^2/2 - xy)$ найти $\partial^4 f/\partial x \partial y^3$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

1.14. Найти экстремумы функции

$$z = xy\ln(x^2+y^2);\quad w = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},\ x>0, y>0, z>0.$$

1.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy$ в замкнутой области D: $y = \dfrac{1}{3}x^2$, $y = 3$.

1.16. Найти производную скалярного поля $u = x^{yz}$ в точке $M(1,1,1)$ по направлению вектора $\vec{\ell} = (1,-2,0)$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}_1$, перпендикулярного $\vec{\ell}$ и $\vec{\imath}$.

1.17. Найти направление и величину наибольшего изменения функции $u = x^2y + y^2z + z^2x$ в точке $M(1,0,0)$.

Вариант № 2

2.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \sqrt{x\sin y};\quad 2)\ u = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2) + \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

2.2. Построить график функции $z = x^2 - 2x + y^2$.

2.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = (x^2+y^2)e^{-1/(x^5+y^6)},\ M_0(0,0);\quad 2)\ z = \frac{x^2+y^2-x+y}{4\sin(x-y)+x^2+y^2},\ M_0(0,0).$$

2.4. Показать, что функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0; \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $(0,0)$ по любому лучу, но разрывна по совокупности переменных.

2.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad 2)\ u = e^{xyz^2} + \arcsin(2x+yz),$$

и функций из заданий 2.1, 2.2, 2.3.

2.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \arcsin\frac{y^2-1}{x} + xy - 1 = 0,\ M_0(1,1);\quad 2)\ x^z = \frac{z}{y},\ M_0(1,1,1),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

2.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = \arcsin\left(4w - \dfrac{u^2}{v}\right)$, где $u = \cos(1-y)$, $v = 1/2y$, $w = e^{-y}$.

2.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = (\cos w)u^v$, где $u = \sqrt{x^2+y}$, $v = \ln(xy)$, $w = x^y$.

2.9. Для функции $z = 2 - x^3 - y^3 + 5x$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора до 3-го порядка в точке $M(1,1)$.

2.10. Показать, что функция $z = x/y$ удовлетворяет равенству

$$x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = 2x+3y+5$, $v = x-y+1$ за новые независимые переменные.

2.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $(0{,}97)^{2{,}02}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 2.6 при $x = 1{,}01$, $y = 0{,}98$.

2.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = 2x^2 + 2xy - y^2,\ M_0(1,3,-1);$$

$$2)\ \frac{\pi}{2}\cos\left(\sqrt[5]{\frac{x^3}{z^4}} - y^2\right) - \operatorname{arcctg}\left(x^5 - \sqrt[3]{\frac{y^7}{z^8}}\right) = 0,\ M_0(1,1,1).$$

2.13. Для функции $f(x,y) = \sin(x^2+xy)$ найти $\partial^4 f/\partial x \partial y^3$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

2.14. Найти экстремумы функции

$$1)\ z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\operatorname{arctg} y/x; \quad 2)\ w = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

2.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в замкнутой области D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$.

2.16. Найти производную скалярного поля $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ в точке $M_0(1,1,1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M_1}$, где $M_1(3,2,1)$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{\jmath}$.

2.17. Найти наибольшую крутизну подъёма поверхности $z = x^y$ в точке $M(2,2,4)$.

Вариант № 3

3.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \arcsin\frac{y}{x}; \quad 2)\ u = \frac{x^2+y^2}{4x - y + z - 4}.$$

3.2. Построить график функции $z = \sqrt{x^2 + y^2/8}$.

3.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{\ln[1+(x+y)^2] - 2xy}{4^{x^2+y^2} - 1},\ M_0(0,0); \quad 2)\ z = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{4-x^2-y^2} - 2},\ M_0(0,0).$$

3.4. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0;\\ 0, & y=0\end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной, но разрывна по их совокупности.

3.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z=y\operatorname{arctg}\frac{x^2}{y};\quad 2)\ u=z^3\arcsin(z+xy),$$

и функций из заданий 3.1, 3.2, 3.3.

3.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \cos^3(x-y)-\sin^3(y-x)=\frac{4y}{\pi},\ M_0\Big(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\Big);\quad 2)\ \frac{zy}{x}-3^{z/5}=0,\ M_0(5,3,5),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

3.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z=u^3\operatorname{tg}(w+v)$, где $u=e^x$, $v=1/x$, $w=\ln(1+x^2)$.

3.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=\sqrt{w}\operatorname{tg}(3u+2v^2)$, где $u=2y/x$, $v=\sqrt{xy}$, $w=e^{xy}$.

3.9. Для функции $z=\arccos(x+y)$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора до 3-го порядка в точке $M(0{,}5;0{,}5)$.

3.10. Показать, что функция $z=y\varphi(x+y)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u=2x+y+2$, $v=x+y+2$ за новые независимые переменные.

3.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\sqrt{5e^{0{,}02}+(2{,}03)^2}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 3.6 при $x=4{,}98$, $y=3{,}01$.

3.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z=xy+2x-y,\ M_0(2,2,6);\quad 2)\ xe^{\sqrt{x}yz^2}-ye^{z\sqrt{y}x^2}=0,\ M_0(1,1,1).$$

3.13. Для функции $f(x,y)=\sqrt{x^2+y}$ найти $\partial^4 f/\partial x\partial y^3$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

3.14. Найти экстремумы функции

$$z=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)},\quad w=xy^2z^3(1-x-2y-3z).$$

3.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+3y^2+x-y$ в замкнутой области D: $x=1$, $y=1$, $x+y=1$.

3.16. Найти производную скалярного поля $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$ в точке $M(1,1,0)$ по направлению вектора $\vec{e}=2\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-\vec{k}$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{e}$ и $\vec{k}$.

3.17. Найти наибольшую крутизну подъёма поверхности $z=(x+\sqrt{y})/y$ в точке $M(2,1,3)$.

Вариант № 4

4.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \ln\ln(y-x); \quad 2)\ u = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}.$$

4.2. Построить график функции $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}}$.

4.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{(x+y)^2}{\sqrt{\sin x^4 + \sin y^4}},\ M_0(0,0); \quad 2)\ z = (1+xy)^{1/(x^2y+xy^2)},\ M_0(2,0).$$

4.4. Исследовать на непрерывность в точке $(0,1)$ функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

4.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \ln(x^2+y) + \ln(x^2-y-3); \quad 2)\ u = \frac{\sqrt{x-\sqrt{y}}}{z^2},$$

и функций из заданий 4.1, 4.2, 4.3.

4.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \sqrt{xy} - 3^{-x+4y} = -26,\ M_0(1,1); \quad 2)\ e^{zy} - \ln(x^2+y^2+z^2) = 1,\ M_0(0,0,1),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

4.7. Найти производную и дифференциал сложной функции: $z = \cos(u+e^v) + u\sin w$, где $u = 2x/\cos x$, $v = 3^{x^2}$, $w = \sqrt{(x+1)/x}$.

4.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $3^{u/v-v/u} = wz$, где $u = x\cos y$, $v = y\sin x$, $w = e^{x^2+y}$.

4.9. Для функции $z = \sqrt{3x^2-y^2+x}$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора до 3-го порядка в точке $M(1,0)$.

4.10. Показать, что функция $z = xy\varphi(x/y)$ удовлетворяет равенству

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2z,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = x-3y+1$, $v = 3x-y+2$ за новые независимые переменные.

4.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\sqrt[3]{(1{,}02)^2+(0{,}04)^2}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 4.6 при $x = 0{,}01$, $y = 0{,}04$.

4.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = 2xy - x,\ M_0(2,2,6); \quad 2)\ \frac{\log_2(zx^3+y)}{z^{-1}+x} - \frac{\cos(z-y)}{y+x^4} = 0,\ M_0(1,1,1).$$

4.13. Для функции $f(x,y) = \ln(x^3 + xy)$ найти $\partial^5 f/\partial x\partial y^4$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.

4.14. Найти экстремумы функции

$$z = x^2 + (y-1)^2, \quad w = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z).$$

4.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области D: $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

4.16. Найти производную функции $u = x^y + y^z$ в точке $M(1,1,0)$ по направлению $\vec{e} = \{-1,2,2\}$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{e}_1$, перпендикулярного $\vec{e}$ и $\vec{\imath}$.

4.17. Найти угол между градиентами скалярных полей

$$u = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3, \quad v = \frac{x^2}{yz^2}$$

в точке $M(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$.

Вариант № 5

5.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \arcsin(x+y); \quad 2)\ u = \arcsin(x+y+z).$$

5.2. Построить график функции

$$z = \sqrt{1 - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9}}.$$

5.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = (1+xy)^{1/(x^2+xy)},\ M_0(2,0); \quad 2)\ z = \frac{3(x^2+y^2)}{\sqrt{4-x^2-y^2}-2},\ M_0(0,0).$$

5.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{x^2y^2}, & x^2+y^2 > 0; \\ 1, & x = y = 0. \end{cases}$$

5.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \frac{x}{\sqrt{3x-2y}}; \quad 2)\ u = \operatorname{arctg}^2 z - 3xy^2 + \frac{1}{xyz},$$

и функций из заданий 5.1, 5.2, 5.3.

5.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \operatorname{tg}(2xy) + y^3x - \frac{\pi}{2} = 0,\ M_0\Big(\frac{\pi}{2}, 1\Big); \quad 2)\ \cos(xz) - \sin(yz) + z^3 = 2,\ M_0(0,0,1),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

5.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = \cos(u - av) + \sin(u + w + av)$, где $u = 1/x^2$, $v = 1 - 4x$, $w = \sqrt{x^2 + 1}$.

5.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = u^{vw} - w^u$, где $u = e^{x-y}$, $v = x/(x^2 + y)$, $w = x/y$.

5.9. Для функции $z = \operatorname{arcctg}(x - y)$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1, 1)$.

5.10. Показать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = 2x + 2y - 1$, $v = 2x - y + 3$ за новые независимые переменные.

5.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\ln[(10{,}09)^3 + (0{,}99)^3]$; б) значение неявной функции 2) из задачи 5.6 при $x = 0{,}02$, $y = -0{,}03$.

5.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = 2x^2 + 2xy - y^2,\ M_0(1, 3, -1); \quad 2)\ \frac{\log_2\left(\dfrac{1}{xz^3} + \sqrt{y}\right)}{z^3 + x^2} - \frac{\cos(z^3 - y^2)}{\sqrt{y} + x} = 0,\ M_0(1, 1, 1).$$

5.13. Для функции $f = \ln(x^2 + y)$ найти $\partial^5 f/\partial y^4 \partial x$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $2\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

5.14. Найти экстремумы функции

$$z = x^3 y^2 (a - x - y); \quad w = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

5.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x + y - xy$ в замкнутой области D: $0 \leqslant x \leqslant 4$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.

5.16. Найти производную скалярного поля $u = (x^3 + y^3 + z^2)^{1/3}$ в точке $M(1, 1, 1)$ по направлению вектора $\vec{\ell} = (-1, 1, 0)$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}_1$, перпендикулярного $\vec{\ell}$ и $\vec{\jmath}$.

5.17. Найти угол между градиентами скалярного поля $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $M(1, 2, 2)$ и $N(-3, 1, 0)$.

Вариант № 6

6.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \arcsin\frac{x - 1}{y}; \quad 2)\ u = \sqrt{x} + 3\sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

6.2. Построить график функции $z = 4x^2 + \dfrac{y^2}{4}$.

6.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{e^{-1/(x^4 + y^4)}}{x^2 + y^2},\ M_0(0, 0); \quad 2)\ z = \frac{(x + y)^2 - 1}{\ln(2x - 1 + 2y)},\ M_0(1, 0).$$

6.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\frac{x+y}{x^2+y^3}.$$

6.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z=e^{x/y}\ln y;\quad 2)\ u=\operatorname{arctg}^3 z^2+\frac{x}{y}+6,$$

и функций из заданий 6.1, 6.2, 6.3.

6.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ x\sqrt[3]{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}=20,\ M_0(8,8);\quad 2)\ z-\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})=0,\ M_0(0,1,0),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

6.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z=w/(4-u^2-v^2)$, где $u=1-\operatorname{tg}x$, $v=1/x$, $w=\cos x^2$.

6.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=ve^{u/v}/\mathrm{w}$, где $u=\ln^2(xy)$, $v=\sqrt{xy}$, $w=x^y$.

6.9. Для функции $z=\arcsin([x+y]/x)$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(0,1)$.

6.10. Показать, что функция $z=[\varphi(x+y)]/y$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\Big),$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u=-x-y+2$, $v=2x-y+3$ за новые независимые переменные.

6.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $(1{,}02)^{4{,}05}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 6.6 при $x=0{,}01$, $y=0{,}98$.

6.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z=x^2+3xy-y^2,\ M_0(1,3,1);\quad 2)\ \frac{\log_2\left(\dfrac{x^2}{z^2}+y^3\right)}{z+x}-\frac{\cos(z^2-y^2)}{y^3+x^3}=0,\ M_0(1,1,1).$$

6.13. Для функции $f(x,y)=\cos(xy)$ найти $\partial^6 f/\partial y^4\partial x^2$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

6.14. Найти экстремумы функции

$$z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2),\quad w=x^2+y^2+z^2-xy-z+2z.$$

6.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2-xy$ в замкнутой области D: $-1\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 3$.

6.16. Найти производную скалярного поля $u=xyz$ в точке $M_0(5,1,8)$ по направлению к точке $M_1(9,4,4)$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}_1$, перпендикулярного $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{k}$.

6.17. Найти $\operatorname{grad}(\ln r)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Вариант № 7

7.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z=\ln(y-x);\quad 2)\ u=\ln z+\ln(x+y-1).$$

7.2. Построить график функции $z=\sqrt{4-(x-1)^2+(y-2)^2}$.

7.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha=\pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ для функции

$$1)\ z=\frac{\sin(x+y)^2-2xy}{2^{x^2+y^2}-1},\ M_0(0,0);\quad 2)\ z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{y^2/(x+y)},\ M_0(0,0).$$

7.4. Показать, что функция

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+\dfrac{xyz}{y^2+z^2}, & y^2+z^2\neq 0;\\ x^2, & y^2+z^2=0\end{cases}$$

терпит разрыв в точке $(1,0,0)$, являясь непрерывной вдоль прямой $x=1$, $y=0$.

7.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z=\ln\sin(x-2y);\quad 2)\ u=z4^{x^2-y^3}-\cos^3(yz),$$

и функций из заданий 7.1, 7.2, 7.3.

7.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ e^x\sin y+e^y\cos x=1,\ M_0(0,0);\quad 2)\ \ln\frac{(z^2+1)}{x}\ln\frac{(z^2+1)}{y}-xy=\ln^2 2-1,\ M_0(1,1,1).$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

7.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z=e^w/\sqrt{a^2-u^2-v^2}$, где $u=\sin 4x$, $v=\cos 4x$, $w=\pi^x$.

7.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=u^3v^w+u^2/v^2$, где $u=\cos 2y$, $v=\sin x$, $w=y^x$.

7.9. Для функции $z=2x^2y^2+x^3-y^3$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1,1)$.

7.10. Показать, что функция $z=x\varphi(x+y)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u=-2x+y-3$, $v=x-2y+3$ за новые независимые переменные.

7.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 7.6 при $x=1{,}01$, $y=0{,}98$.

7.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z=x^2+3xy-y^2,\ M_0(1,3,1);\quad 2)\ \frac{\log_2\left(\dfrac{x}{z}+\sqrt[3]{y}\right)}{z+x}-\frac{\cos(z-y)}{\sqrt[3]{y}+x^2}=0,\ M_0(1,1,1).$$

7.13. Для функции $f(x,y)=\sin(xy)$ найти $\partial^6 f/\partial y^5\partial x$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath}-\vec{\jmath}$.

7.14. Найти экстремумы функции

$$z=x^3y^2(6-x-y);\quad w=x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{t}{z}+\frac{2}{t},\quad x,y,z,t>0.$$

7.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2-2y^2+4$ в замкнутой области D: $x^2+y^2\leqslant 1$.

7.16. Установить характер роста скалярного поля $u=5x^2yz-7xy^2z+5xyz^2$ в направлении вектора $\vec{n}=8\vec{\imath}-4\vec{\jmath}+8\vec{k}$ в точке $M(1,1,1)$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{n}$ и $\vec{\imath}$.

7.17. Найти наибольшую крутизну поверхности $z^2=xy$ в точке $M(4,2)$.

Вариант № 8

8.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z=\sqrt{y+\sqrt{x}};\quad 2)\ u=\sqrt{3-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}.$$

8.2. Построить график функции $z=-\sqrt{4-x^2+2x-y^2+4y-1}$.

8.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha=\pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ для функции

$$1)\ z=\frac{\sqrt[3]{x^2+y^2}-1}{2^{xy}-1},\ M_0(1,0);\quad 2)\ z=\frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}-\sqrt[3]{2}},\ M_0(1,1).$$

8.4. Указать значение параметра p, при котором функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0;\\ p, & x=y=0,\end{cases}$$

непрерывна: 1) по x; 2) по y в точке $(0,0)$.

8.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x};\quad 2)\ u=\frac{\sqrt{xyz}}{\sin^2(xy)+\cos^2(yz)},$$

и функций из заданий 8.1, 8.2, 8.3.

8.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \ln(3-6x+y^2)-\sin 2\pi x=0,\ M_0(0{,}5;1);\quad 2)\ e^{z^3-y}+x^3=2z,\ M_0(1,1,1),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

8.7. Найти производную и дифференциал сложной функции: $z=\operatorname{tg}(uv)/uw$, где $u=4^x$, $v=x^4$, $w=(1+x^2)^y$.

8.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=\sqrt{w}a^{u-2v}$, где $u=\dfrac{y}{x^2}$, $v=(3x-y)^4$, $w=y^{2x}$.

8.9. Для функции $z=xy^4-3x^2y+1$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1,-1)$.

8.10. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = x^{-2}\varphi(y/x)$ уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2z,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = 2+3x-y$, $v = 1-x+y$ за новые независимые переменные.

8.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $(2-\sqrt{0{,}97})^{3{,}02}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 8.6 при $x = 1{,}02$, $y = 0{,}97$.

8.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = 3y^2 - 9xy + y,\ M_0(1,3,3); \quad 2)\ \frac{\log_3(\sqrt[3]{x}+y^6)}{\sqrt{z}+y\sqrt{x}} - \frac{\log_3(\sqrt[3]{z}+y^2)}{\sqrt{x}+y^{5/3}\sqrt{z}} = 0,\ M_0(1,1,1).$$

8.13. Для функции $f(x,y) = \sqrt{xy}$ найти $\partial^5 f/\partial x\partial y^4$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}$.

8.14. Найти экстремумы функции

$$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y; \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

8.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 1 + xy^2$ в замкнутой области D: $0 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$.

8.16. Найти производную скалярного поля $u = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M(3,1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{MB}$, где $B(6,5)$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}_1$, перпендикулярного $\overrightarrow{MB}$ и $\vec{\jmath}$.

8.17. Найти угол между градиентами данного поля $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ в точках $M(1,1)$; $N(1,-1)$.

Вариант № 9

9.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = x + \sqrt{x^2 - y^2}; \quad 2)\ u = \frac{z}{x^2+y^2+z^2-4}.$$

9.2. Построить график функции $z = \sqrt{x^2 - \dfrac{(y-1)^2}{4}}$.

9.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{\sqrt{x^3+y^3}}{\sqrt[3]{1+x^2+y^2}-1},\ M_0(0,0); \quad 2)\ z = \left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right)^{xy},\ M_0(\infty,\infty).$$

9.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

9.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = xe^{-xy}; \quad 2)\ u = \frac{1}{\sqrt{\ln^3(x - z\sin y)}},$$

и функций из заданий 9.1, 9.2, 9.3.

9.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \ln(x+e^y)-xy=\ln 2,\ M_0(1,0);\quad 2)\ \arcsin\frac{y+z}{x}=4x-z-5,\ M_0(1,1,-1),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

9.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z=\arcsin(uv)^3/w$, где $u=x^4-1$, $v=e^x$, $w=x^x$.

9.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=(2u+w)/(u+v)$, где $u=e^{x-4y}$, $v=x\sqrt{y}$, $w=\sqrt[x]{y}$.

9.9. Для функции $z=\operatorname{ctg}(y/x)$ найти dz, d^2z, d^3z и записать ее разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(\pi,2)$.

9.10. Показать, что функция $z=e^{xy}$ удовлетворяет равенству

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u=1-x-y$, $v=2+x+2y$ за новые независимые переменные.

9.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\ln[(0{,}09)^3+(0{,}99)^3]$; б) значение неявной функции 2) из задачи 9.6 при $x=0{,}98$, $y=1{,}02$.

9.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z=xy+x-y,\ M_0(1,1,1);\quad 2)\ \frac{\log_2(\sqrt{x}+y^7)}{\sqrt[3]{z}+\sqrt{xy^3}}-\frac{\log_2(\sqrt{z}+y^3)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{zy^2}}=0,\ M_0(1,1,1).$$

9.13. Для функции $f(x,y)=\ln(xy+y^2)$ найти $\partial^4 f/\partial x^2\partial y^2$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $3\vec{\imath}-2\vec{\jmath}$.

9.14. Найти экстремумы функции

$$z=1+6x-x^2-xy-y^2;\quad w=x_1x_2^2x_3^3x_4^4(1-x_1-2x_2-3x_3-4x_4),\ x_i>0,\ i=1,...,4.$$

9.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=\dfrac{1}{2}x^2-xy$ в замкнутой области D: $y=\dfrac{x^2}{3}$, $y=3$.

9.16. Найти производную скалярного поля $u=4\ln(x+2)-8xyz$ в точке $M(1,1,1)$ по направлению нормали $\vec{n}$ к поверхности $x^2-2y^2+2z^2=1$, образующей с осью Oz острый угол, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{n}$ и $\vec{k}$.

9.17. Найти угол между градиентами данного поля $u=\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$ в точках $M(1,1,1)$, $N(1,2,-1)$.

Вариант № 10

10.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z=\ln(3-6x+y^2);\quad 2)\ u=\sqrt{x}+\sqrt{4-y-z}.$$

10.2. Построить график функции $z=1+\sqrt{x^2+y^2}$.

10.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy},\ M_0(0,0); \quad 2)\ z = \frac{\operatorname{tg} 4xy^2}{x^2y^2},\ M_0(4,0).$$

10.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0; \\ 1, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

10.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \left(\frac{2x-y}{x+2y}\right)^3; \quad 2)\ u = \sin 8z \ln^2(x^2+y^2+z^2),$$

и функций из заданий 10.1, 10.2, 10.3.

10.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \ln(y+e^x) - 3xy = \ln 2,\ M_0(0,1); \quad 2)\ e^{z^2-y} + z^3 = 2y,\ M_0(1,1,1),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

10.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = \sec(w/[4u-v])$, где $u = 2^{1/x}$, $v = x^2$, $w = x^{\sin x}$.

10.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = e^w/(\sqrt{u-\sqrt{v}})$, где $u = \operatorname{tg}(x+4y)$, $v = 5^{xy}$, $w = (x+1)^{\sin y}$.

10.9. Для функции $z = \operatorname{tg}((x+y)/(x-y))$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(2,1)$.

10.10. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \varphi(x/y)$ уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = x-2+y$, $v = 3-x+3y$ за новые независимые переменные.

10.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\sqrt{(4{,}01)^2 + (1{,}93)^2}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 10.6 при $x = 0{,}98$, $y = 1{,}02$.

10.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = y^2 - xy - x^2,\ M_0(1,0,-1); \quad 2)\ \frac{\exp(x/z)}{\sqrt[4]{y^3+z^2}} - \frac{\exp(y/z)}{\sqrt[4]{x^3+z^3}} = 0,\ M_0(1,1,1).$$

10.13. Для функции $f(x,y) = x^y$ найти $\partial^7 f/\partial x \partial y^6$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$.

10.14. Найти экстремумы функции

$$z = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)} - (x^2+y^2); \quad w = x^2 - 2xy + 4xz + 8yz + 5y^2 + 9z^2.$$

10.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = xy-2x-y$ в замкнутой области D: $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 4$.

10.16. Найти производную скалярного поля $u = x + \ln(y^2 + z^2)$ в точке $M(1, 2, 1)$ по направлению вектора $\vec{e} = 5\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{e}$ и $\vec{\imath}$.

10.17. Найти угол между градиентами функций $u = x^2 + 9y^2 + 6z^2$, $v = \dfrac{1}{xyz}$ в точке $M(1, 1/3, 1/\sqrt{6})$.

Вариант № 11

11.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \ln(y^2 - 4x + 8); \quad 2)\ u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

11.2. Построить график функции $z = (x-1)^2 + (y-1)^2$.

11.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{xy}{\sqrt{xy+9} - 3},\ M_0(0,0); \quad 2)\ z = (1 + x^2y)^{x/(y^2x + yx^2)},\ M_0(1,0).$$

11.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

11.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \ln\sin(x - 2y); \quad 2)\ u = z4^{x^2 - y^3} - \cos^3(yz),$$

и функций из заданий 11.1, 11.2, 11.3.

11.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \sin\pi\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} + xy = 1,\ M_0(-1,1); \quad 2)\ 2ze^{xy} + x^2 + 3y - \operatorname{tg} z = 3,\ M_0(0,1,0),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

11.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = \sqrt[w]{\cos\ln(u^2 + 3v)}$, где $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $v = x^5 - 3$, $w = (x^2+1)^x$.

11.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = \ln(u + v^3)^w$, где $u = y/x$, $v = 2x + y$, $w = \arcsin(x^2 + y^2)$.

11.9. Для функции $z = e^{x+y-4}$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(2,2)$.

11.10. Проверить, удовлетворяет ли функция $z = \sqrt{x/y}$ равенству

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\Big(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\Big) = 0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = 2 + x + 4y$, $v = 3x - y - 3$ за новые независимые переменные.

11.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\ln(\sqrt{4{,}02} - \sqrt[3]{0{,}97})$; б) значение неявной функции 2) из задачи 11.6 при $-x = 0{,}01$, $y = 0{,}95$.

11.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = x^2 - y^2 - x - y,\ M_0(1,-3,-6);\quad 2)\ \frac{\exp(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} + \frac{\exp(\sqrt{y})}{\sqrt{z}+\sqrt{y}} - \frac{\exp(\sqrt{z})}{\sqrt{x}} = 0,\ M_0(1,1,1).$$

11.13. Для функции $f(x,y) = x\ln(y^3 - x^2y)$ найти $\partial^5 f/\partial y^2 \partial x^3$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

11.14. Найти экстремумы функции

$$z = 4 - (x^2+y^2)^{2/3};\quad w = xyz(1-x-y-z),\ x,y,z > 0.$$

11.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x^2 + y^2 + y$ в замкнутой области $D: x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x + y \geqslant -1,\ y \leqslant 0$.

11.16. Дано скалярное поле $u = xy^2 + z^3 - xyz$. Найти $\partial u/\partial \vec{n}$ в точке $M(1,1,2)$, если вектор $\vec{n}$ образует с осями координат углы, соответственно равные $60°$, $45°$, $60°$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{n}$ и $\vec{\jmath}$.

11.17. Найти угол между градиентами функций $u = x^2 - y^2 - 3z^2$, $v = 1/yz^2$ в точке $M(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$.

Вариант № 12

12.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \ln y - \ln\sin x;\quad 2)\ u = \frac{3x-y}{\sqrt{4-x^2-2y^2-z}}.$$

12.2. Построить график функции $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$.

12.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{4-\sqrt{16-x^2-y^2}}{x^2+y^2},\ M_0(0,0);\quad 2)\ z = (x^2+y^2)\cos\frac{1}{xy},\ M_0(0,0).$$

12.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2 > 0; \\ 1, & x = y = 0. \end{cases}$$

12.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \arcsin^2\frac{x+y}{xy};\quad 2)\ u = \sqrt[3]{xy^2+z^3}\cos 6x,$$

и функций из заданий 12.1, 12.2, 12.3.

12.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ e^{x^2+4y} - xy^3 + y1,\ M_0(0,0);\quad 2)\ \sin^2 xz + 3xy - \frac{y}{z} = 1,\ M_0(0,-1,1),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

12.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = \dfrac{3uv^w}{\sin(u+v^3)}$, где $u = \dfrac{1}{x}$, $v = \ln^2 x$, $w = e^{\sqrt{x}}$.

12.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = (uv)^w/(u-v)$, где $u = \sqrt{x^2+y^2}$, $v = yx^3$, $w = \ln(x^2+y^2)$.

12.9. Для функции $z = 7x^3y - \sqrt{xy}$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1,4)$.

12.10. Проверить, удовлетворяет ли функция $u = \varphi(xy, z/y)$ равенству

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $r = x+y+z$, $s = x-y-1$, $t = x+2y+z$ за новые независимые переменные.

12.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $10/[(4{,}98)^3 - (5{,}03)^2]$; б) значение неявной функции 2) из задачи 12.6 при $x = 0{,}01$, $y = -0{,}97$.

12.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = 2xy + y^2 - 5x,\ M_0(1,1,-2);\quad 2)\ \frac{\exp(x/z)}{\sqrt[4]{x^2+z^3}} - \frac{\exp(y/z)}{\sqrt[4]{x^2+z^2}} = 0,\ M_0(1,1,1).$$

12.13. Для функции $f(x,y) = (y+1)e^{-x/(y+1)}$ найти $\partial^4 f/\partial y\partial x^3$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

12.14. Найти экстремумы функции

$$z = x^3 + y^3 - 15xy;\quad w = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{4},\ x,y,z > 0.$$

12.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2+2y+x$ в замкнутой области D: $x^2+y^2 \leqslant 1$, $x+y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$.

12.16. Найти производную скалярного поля $u = xy - \dfrac{x}{z}$ в точке $M(-4,3,1)$ по направлению вектора $\vec{e} = 5\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{e}$ и $\vec{k}$.

12.17. Найти угол между градиентами функций $u = x^2 - y^2 - 3z^2$, $v = yz^2/x$ в точке $M(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$.

Вариант № 13

13.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y};\quad 2)\ u = \frac{x-2y}{4x^2+y^2+8z^2-8}.$$

13.2. Построить график функции $z = \sqrt{x^2+y^2-4}$.

13.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{9-x^2-y^2}-3},\ M_0(0,0);\quad 2)\ z = \frac{\sin(xy)}{y},\ M_0(1,0).$$

13.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

13.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z=\sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x};\quad 2)\ u=\frac{z^3}{e^{x^2y}+x},$$

и функций из заданий 13.1, 13.2, 13.3.

13.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ e^{x+2y}+\cos\pi(xy)=2,\ M_0(2,-1);\quad 2)\ \sin^3(x+z)+\cos^3 y+z=\operatorname{tg}^3 z+1,\ M_0(0,0,0),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

13.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z=w^2e^{u\sin v}$, где $u=\sqrt{x^2+1}$, $v=\dfrac{x}{x^2+1}$, $w=(x^2+1)^x$.

13.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=\dfrac{u^2v+e^w}{u^3+v^3}$, где $u=\dfrac{1}{\sqrt{4+x^2y^2}}$, $v=\dfrac{1}{\sqrt{xy-1}}$, $w=\sqrt{xy+e^x}$.

13.9. Для функции $z=\arcsin(x+y)$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(0{,}5;0{,}5)$.

13.10. Проверить, удовлетворяет ли функция $u=z^3\varphi(y/z,x/z)$ равенству

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=3u,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $r=x+y$, $s=y+z$, $t=x+z$ за новые независимые переменные.

13.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\ln[(2,02)^3+\sqrt[3]{0,98}-8]$; б) значение неявной функции 2) из задачи 13.6 при $x=0{,}01$, $y=0{,}03$.

13.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z=x^2-y^2+5x+4y,\ M_0(0,1,3);\quad 2)\ \frac{\cos(\sqrt{z}-\sqrt{x})}{\sqrt{2x+y^2z}}-\frac{\cos(\sqrt{y}-\sqrt{x})}{\sqrt{2z+yx}}=0,\ M_0(1,1,1).$$

13.13. Для функции $f(x,y)=x\ln(y^3+xy^2)$ найти $\partial^5 f/\partial y^2\partial x^3$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath}-\vec{\jmath}$.

13.14. Найти экстремумы функции

$$z=xy^2(1-x-y);\quad w=x^2+y^2+z^2-xy-x+2z.$$

13.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=5x^2-y^2+6y$ в замкнутой области $D: x^2+y^2\leqslant 1$, $x+y\leqslant 1$, $y\geqslant 0$.

13.16. Найти производную скалярного поля $u=\operatorname{arctg}(x-y)+z^2$ в точке $M(1,2,-1)$ по направлению вектора $\vec{e}=\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-2\vec{k}$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{e}$ и $\vec{\imath}$.

13.17. Найти угол между градиентами функций $u=\dfrac{3}{2}x^2+3y^2-2z^2$, $v=x^2yz^3$ в точке $M(2,1/3,\sqrt{3/2})$.

Вариант № 14

14.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \sqrt{4x - -y^2};\quad 2)\ u = \arccos(x^2 + y^2 + z^2 - 5).$$

14.2. Построить график функции $z = \sqrt{\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} - 1}$.

14.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \Big(1 + \frac{1}{x})^{x^2/(x+y)},\ M_0(\infty, a);\quad 2)\ z = \frac{\sin 4xy^2}{x^2y^2},\ M_0(4, 0).$$

14.4. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной, но разрывна по их совокупности.

14.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2});\quad 2)\ u = \frac{\operatorname{tg}(1 - x + y - 2z)}{z^{xy}},$$

и функций из заданий 14.1, 14.2, 14.3.

14.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ x^2y + 3y - \sin\pi(3x + 2y) = 4,\ M_0(-1, 1);\quad 2)\ z^2 - y^{3^{x/z}} = 0,\ M_0(0, 1, 1),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

14.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = \sqrt{\dfrac{4}{w} + \cos(u + \ln v)}$, где $u = 3^{x^2}$, $v = \sqrt[4]{x}$, $w = (2 + x)^{1/x}$.

14.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = \arcsin((u - v)/w)^2$, где $u = \operatorname{tg}(xy)$, $v = 4^{x-y^2}$, $w = e^x - e^{2y}$.

14.9. Для функции $z = \ln(3x^2 - 2y^2)$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1, 1)$.

14.10. Показать, что заданная функция $z = e^{x+y^2}$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = 2x - 1$, $v = 2x - y + 2$ за новые независимые переменные.

14.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\sqrt[7]{(3,03)^4 + (1,98)^5 + 15}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 14.6 при $x = 0{,}02$, $y = 1{,}02$.

14.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = 3x^2 + 2y^2 - xy,\ M_0(2, 1, 12);\quad 2)\ \frac{3^{\cos(xy)}}{\sqrt{x + y^2}} - \frac{3^{\cos(yz)}}{\sqrt{z + y}} = 0,\ M_0(0, 1, 0).$$

14.13. Для функции $f(x,y)=e^{xy^3}$ найти $\partial^5 f/\partial x^4\partial y$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $2\vec{i}+\vec{j}$.

14.14. Найти экстремумы функции

$$z=x^2+xy+y^2-3x-6y;\quad w=x_1x_2^2x_3^3(24-x_1-2x_2-3x_3),\ x_i>0.$$

14.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2x^2+y^2-3y$ в замкнутой области $D: x^2+y^2\leqslant 1,\ x-y\leqslant 1,\ y\leqslant 0$.

14.16. Найти производную функции $u=\ln(e^x+e^y)$ в направлении $\vec{n}$, параллельном биссектрисе координатного угла, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{n}$ и $\vec{j}$.

14.17. Найти угол между градиентами функций $v=xyz$, $u=x^2+9y^2+6z^2$ в точке $M(1,1/3,1/16)$.

Вариант № 15

15.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}};\quad 2)\ u=\ln(2x^2+4y^2+8z^2-8).$$

15.2. Построить график функции $z=-\sqrt{x^2+y^2-1}$.

15.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha=\pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ для функции

$$1)\ z=\left(1+x^2y\right)^{(x+y)/x^2},\ M_0(0,3);\quad 2)\ z=\frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy},\ M_0(0,0).$$

15.4. Показать, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

непрерывна в точке $(0,0)$ по любому лучу, но разрывна по совокупности переменных.

15.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{x-\sqrt{x^2-y^2}};\quad 2)\ u=x^{y-z},$$

и функций из заданий 15.1, 15.2, 15.3.

15.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ x^3-xy^2+4^{x+2y}=7,\ M_0(2,-1);\quad 2)\ z^3-3xyz=\mathrm{tg}(x-y)-2,\ M_0(1,1,1),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

15.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z=u^3\arcsin(v^2+w)$, где $u=\sqrt{x}$, $v=\sqrt[3]{3-x}$, $w=\arccos\sqrt{x}$.

15.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=\mathrm{tg}(u^wv^2)$, где $u=e^{x+y}$, $v=(x-y)^3$, $w=\ln(e^y+x^2)$.

15.9. Для функции $z=5xy^4+2x^2y^7$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1,1)$.

15.10. Показать, что заданная функция $z = x4^{x+y} + y5^{x+y}$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = x + y + 1$, $v = x - y + 2$ за новые независимые переменные.

15.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\dfrac{1}{(3{,}03)^2 - (4{,}98)^2}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 15.6 при $x = 1{,}03$, $y = 0{,}98$.

15.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = x^2 + y^2 + 2x + y - 1,\ M_0(-1, 2, 4);\quad 2)\ \frac{2^{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y^2}}}{\sqrt{z^3}+x} - \frac{2^{\sqrt[3]{z^2}+x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{y^2}} = 0,\ M_0(1, 1, 1).$$

15.13. Для функции $f(x, y) = e^{x^2 y}/x^4$ найти $\partial^5 f/\partial x \partial y^4$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$.

15.14. Найти экстремумы функции

$$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2 \quad w = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z},\ x > 0, y > 0, z > 0.$$

15.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x^2 + y^2 - x$ в замкнутой области $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x + y \geqslant -1$, $x \leqslant 0$.

15.16. Найти производную скалярного поля $u = x^2 + \operatorname{arctg}(z + y)$ в точке $M(2, 1, 1)$ по направлению вектора $\vec{e} = 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{e}$ и $\vec{k}$.

15.17. Найти угол между градиентами функций

$$u = \frac{y^3}{x^2 z}, \quad v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$$

в точке $M(\sqrt{2/3}, \sqrt{3/2}, 1/2)$.

Вариант № 16

16.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \sqrt{\cos \pi (x^2 + y^2)};\quad 2)\ u = \ln(3 - x^2 - 6y^2 - 9z^2).$$

16.2. Построить график функции $z = (y - 1)^2 + x^2$.

16.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{\sin(xy)}{x},\ M_0(0, a);\quad 2)\ z = (1 + xy^2)^{y/(x^2 y + xy^2)},\ M_0(0, 3).$$

16.4. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{y}, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

непрерывна по каждой переменной, но разрывна по их совокупности.

16.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x};\quad 2)\ u = \frac{\ln y - \ln\sin x}{\cos^2 z},$$

и функций из заданий 16.1, 16.2, 16.3.

16.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ y\sin^2\pi x + \frac{y^3}{x} = 1,\ M_0(1,1);\quad 2)\ e^{z/y} + \cos x - 2xy^2 z = 2,\ M_0(0,1,0),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

16.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = v^3 7^{\ln 2u^w}$, где $u = (1-x)^2$, $v = (4x-1)$, $w = \pi^x$.

16.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = \ln\operatorname{tg}\dfrac{u^w}{v}$, где $u = \cos(xy)$, $v = \ln(x^2/y)$, $w = (x/y)^x$.

16.9. Для функции $z = \operatorname{arctg} x + \sqrt{y}$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1,4)$.

16.10. Показать, что функция u удовлетворяет равенству

$$u = x^4\varphi\Big(\frac{y}{x^2},\frac{z}{x^3}\Big),\quad x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + 3z\frac{\partial u}{\partial z} = 4u,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $r = x+z+1$, $s = x+2y+2$, $t = y+2z$ за новые независимые переменные.

16.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\operatorname{arctg}\dfrac{(1{,}04)^2}{0{,}98}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 16.6 при $x = 0{,}02$, $y = 1{,}02$.

16.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = x^2 + 2yx + 3y^2,\ M_0(1,0,1);\quad 2)\ \frac{\exp(x/z)}{\sqrt{y^4+z^5}} - \frac{\exp(y/z)}{\sqrt{x^4+z^5}} = 0,\ M_0(1,1,1).$$

16.13. Для функции $f(x,y) = \ln\dfrac{x}{x^2+y^2}$ найти $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $3\vec{\imath} + \vec{\jmath}$.

16.14. Найти экстремумы функции

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8,\quad w = xy^2z^3(1 - x - 2y - 3z).$$

16.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 4x^2 - 3y^2 - 13y$ в замкнутой области $D: x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x + y \geqslant -1$, $y \leqslant 0$.

16.16. Найти производную функции

$$u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

в точке $M(a,b,c)$ в направлении радиуса-вектора $\vec{r}$ этой точки, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{r} + \vec{\imath}$.

16.17. Найти точки, в которых градиент скалярного поля $u = \ln(x + 1/y)$ равен вектору $\vec{\ell} = \vec{\imath} - \frac{16}{9}\vec{\jmath}$.

Вариант № 17

17.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z=\arcsin\frac{y-1}{x};\quad 2)\ u=\frac{4x}{x+y+z-2}.$$

17.2. Построить график функции $z=-\sqrt{4-(y-2)^2+x^2}$.

17.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha=\pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ для функции

$$1)\ z=(1+x^2y^2)^{-1/(x^2+y^2)},\ M_0(0,0);\quad 2)\ z=\frac{\operatorname{tg}2xy}{x^2y},\ M_0(1,0).$$

17.4. Исследовать на непрерывность в точке $(0,1)$ функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

17.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z=\sqrt{y\ln x};\quad 2)\ u=\arcsin^3\frac{z}{x+y}+z^3x,$$

и функций из заданий 17.1, 17.2, 17.3.

17.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ e^{-xy}+\frac{x+1}{y^2}=2,\ M_0(0,1);\quad 2)\ \arcsin 3(z+x)=x^2-3y+z,\ M_0(1,0,-1),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

17.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z=\dfrac{\sin\sqrt{uvw}}{\cos(u-v)}$, где $u=(x-1)^3$, $v=\dfrac{1}{x-1}$, $w=\sqrt{e^x+\cos x}$.

17.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=(1+u^2)\ln v^w$, где $u=\dfrac{2x}{y}$, $v=3x-y$, $w=x^{\pi-y}$.

17.9. Для функции $z=\arcsin(xy)-3xy^2$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1,-1)$.

17.10. Показать, что функция $z=e^{x/y}$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big)=0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u=2-x+2y$, $v=2-y$ за новые независимые переменные.

17.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\dfrac{2{,}03}{(2{,}03)^4+(2{,}97)^2}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 17.6 при $x=0{,}98$, $y=0{,}02$.

17.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z=x^2+y^2+6x+3y,\ M_0(1,-2,-3);\quad 2)\ \frac{\exp(\sqrt[3]{x^3/z^2})}{\sqrt[3]{y+z^4}}-\frac{\exp(\sqrt[4]{y^4/z^3})}{\sqrt[3]{x+z^3}}=0,\ M_0(1,1,1).$$

17.13. Для функции $f=e^{xy^2}/y^4$ найти $\partial^5 f/\partial x^4\partial y$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath}+3\vec{\jmath}$.

17.14. Найти экстремумы функции

$$z=2xy-4x-2y,\quad w=x+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{t}{z}+\frac{2}{t},\quad x,y,z,t>0.$$

17.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2+xy-3x-y$ в замкнутой области D: $0\leqslant x\leqslant 2$, $0\leqslant y\leqslant 3$.

17.16. Найти производную поля $u=x^2+y^3-z^4$ в точке $M(2,3,4)$ по направлению вектора $\vec{e}$, образующего с координатными осями тупые углы α, β, γ, причём $\alpha=135^\circ$, $\gamma=120^\circ$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{e}$ и $\vec{\jmath}$.

17.17. Найти направление и величину наибольшего изменения функции $u=xyz$ в точке $M_0(2,1,-1)$.

Вариант № 18

18.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z=\ln(3x^2-y^2);\quad 2)\ u=\frac{1-x-y}{\sqrt{z-4}}.$$

18.2. Построить график функции $z=2x-x^2-y^2-1$.

18.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha=\pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ для функции

$$1)\ z=(1+xy)^{2/(x^2+xy)},\ M_0(0,2);\quad 2)\ z=e^{xy/(4xy+5)},\ M_0(\infty,\infty).$$

18.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{x^2y^2}, & x^2+y^2>0;\\ 1, & x=y=0.\end{cases}$$

18.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z=\arccos\frac{x-y}{2x};\quad 2)\ u=\operatorname{ctg}\frac{xy}{z}-\ln^3(xy),$$

и функций из заданий 18.1, 18.2, 18.3.

18.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \operatorname{arctg}\frac{x^2}{y}-x^3y^2-5y=5,\ M_0(0,-1);\quad 2)\ e^{x+y-z}+\frac{x+y}{z}=2,\ M_0(1,1,2),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

18.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = \arcsin\sqrt[w]{1-u^2-v^2}$, где $u = \lg x^3$, $v = (x+3)/\sqrt{x}$, $w = \log_\pi x$.

18.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = \sqrt[w]{u^{2v}}$, где $u = (x+y)^2$, $v = \sin(3x-2y)$, $w = \operatorname{arctg}(x+3y)$.

18.9. Для функции $z = \cos(x^2-y^2)+x^3$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(-1,1)$.

18.10. Показать, что функция z удовлетворяет равенству

$$z = \frac{1}{x}\sin(x-y), \quad \frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\Big) - x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = y+1$, $v = 2x+y-2$ за новые независимые переменные.

18.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\sqrt{3{,}98}(1{,}03)^{3{,}98}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 18.6 при $x = 1{,}03$, $y = 0{,}97$.

18.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = x^2+3xy-6y,\ M_0(1,-2,10); \quad 2)\ x\sqrt{z}e^{\sqrt{x}y^2} - zye^{\sqrt{z}x^2} = 0,\ M_0(1,1,1).$$

18.13. Для функции $f(x,y) = \ln(x^3+2x^2y+xy^2)$ найти $\partial^5 f/\partial x\partial y^4$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $5\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

18.14. Найти экстремумы функции

$$z = 3x^2-2x\sqrt{y}+y-8x+8, \quad w = xyz(1-x-y-z),\ x,y,z>0.$$

18.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 3x^2-y^2-y$ в замкнутой области $D: x^2+y^2 \leqslant 1,\ x-y \leqslant 1,\ y \leqslant 0$.

18.16. Найти производную скалярного поля $u = \sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}$ в точке $M(0,0,0)$ по направлению оси Oy, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell} = \vec{\imath}+\vec{k}$.

18.17. Найти наибольшую скорость возрастания поля $u = \ln(x^2+4y^2)$ в точке $M(6,4,1)$.

Вариант № 19

19.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \ln(xy); \quad 2)\ u = \frac{x+y+4z}{x^2+y^2+z^2-4}.$$

19.2. Построить график функции $\sqrt{4-(x-2)^2-y^2}$.

19.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ для функции

$$1)\ z = \Big(1+\frac{1}{y}\Big)^{y^3/(x^2+y^2)},\ M_0(1,\infty); \quad 2)\ z = \frac{xy+4}{(2-x)(2+y)+\sin(x+y)},\ M_0(-2,-2).$$

19.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^3}.$$

19.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = (2x+y)^{x+2y}; \quad 2)\ u = z^x\ln(4x+y^3z),$$

и функций из заданий 19.1, 19.2, 19.3.

19.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \arcsin xy + \frac{x^2+1}{y^3} = 1,\ M_0(0,1); \quad 2)\ \frac{x}{z} = \ln\frac{z}{y} + 1,\ M_0(1,1,1),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

19.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = \ln^3(uv^3 + \pi^w)$, где $u = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$, $v = \operatorname{tg} x^2$, $w = \sin(x^x)$.

19.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = \operatorname{ctg} u/v^w$, где $u = x^3y^2$, $v = x + 2y + 1$, $w = \operatorname{tg} x^y$.

19.9. Для функции $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(-1,-1)$.

19.10. Показать, что функция $z = x\exp[-(x^2+y^2)/2]$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} + xyz = 0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = x - y + 1$, $v = y - x + 2$ за новые независимые переменные.

19.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $(1{,}03)^{-3{,}05}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 19.6 при $x = 1{,}01$, $y = 0{,}98$.

19.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = 3x^2 - xy + x + y,\ M_0(1,3,4); \quad 2)\ \sqrt{x}e^{\sqrt{yz^3}} - \sqrt{y}e^{z\sqrt{x}} = 0,\ M_0(1,1,0).$$

19.13. Для функции $f = \sqrt{x^3 + xy}$ найти $\partial^4 f/\partial x\partial y^3$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $5\vec{\imath} - \vec{\jmath}$.

19.14. Найти экстремумы функции

$$z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2, \quad w = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{4},\ x,y,z > 0.$$

19.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = 2x^2 - 3y^2 + 8x$ в замкнутой области $D: x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x + y \geqslant -1,\ x \leqslant 0$.

19.16. Найти производную скалярного поля $u = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(0,0,0)$ по направлению оси Ox, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell} = \vec{\jmath} + \vec{k}$.

19.17. Определить, в каких точках поверхности S: $x^2 + y^2/5 - z^2 = 1$ нормаль к ней параллельна вектору $\vec{\ell} = (2, \sqrt{5}, 2)$.

Вариант № 20

20.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ \sqrt{x+y}\ln(y^2 - x^2); \quad 2)\ u = \arccos(x^2 + y^2 + z^2 - 6).$$

20.2. Построить график функции $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2}$.

20.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{x^2/(x+y)},\ M_0(\infty, 1);\quad 2)\ z = \frac{\sin(xy^2) + (x-1)^2}{y^2 + (\ln x)^2},\ M_0(1, 0).$$

20.4. Показать, что функция

$$f(x,y,z) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{xyz}{y^2+z^2}, & y^2 + z^2 \neq 0; \\ x^2, & y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$$

терпит разрыв в точке $(1, 0, 0)$, являясь непрерывной вдоль прямой $x = 1$, $y = 0$.

20.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{x^2/(3+y)};\quad 2)\ u = x^2 \arcsin\frac{z}{z+y} + \ln z,$$

и функций из заданий 20.1, 20.2, 20.3.

20.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ 5^{\sin y} + 3^{\cos x} = 4,\ M_0(0,0);\quad 2)\ e^{x^2-1} - ye^{z^2-1} + z = 1,\ M_0(1,1,1),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

20.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = \operatorname{tg}^4(u - \sqrt[w]{v})$, где $u = \ln^3 x$, $v = 1/(\ln^3 x)$, $w = \sqrt[x]{x}$.

20.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = (u - 2v)/u^{3w}$, где $u = x \operatorname{tg} y$, $v = y - e^x$, $w = (x/y)^y$.

20.9. Для функции $z = \operatorname{arctg}(2x - y)$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1, 1)$.

20.10. Показать, что заданная функция z удовлетворяет равенству

$$z = x\sqrt{x+y} + \frac{y}{\sqrt{x+y}},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = 0{,}5x - y + 3$, $v = y - 1{,}5x - 2$ за новые независимые переменные.

20.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\sqrt[4]{(2{,}02)^2 + (2{,}99)^2 + 3}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 20.6 при $x = 1{,}02$, $y = 1{,}03$.

20.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = x^2 + xy + y^2,\ M_0(2, -1, 3);\quad 2)\ x^2\sqrt{y}e^{xz} - z^2\sqrt{x}e^{y\sqrt{z}} = 0,\ M_0(1, 1, 1).$$

20.13. Для функции $f(x, y) = \sqrt{x^3 + xy}$ найти $\partial^4 f/\partial x^2 \partial y^2$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$.

20.14. Найти экстремумы функции

$$z = e^{x/2}(x + y^2);\quad w = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$$

20.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = \frac{x^2}{2} - xy$ в замкнутой области D: $y = 2x^2$, $y = 8$.

20.16. Найти производную скалярного поля $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$ в точке $M(1, 3, 2)$ по направлению вектора $\vec{e} = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{e}$ и $\vec{\imath}$.

20.17. Определить, в каких точках поверхности S: $x^2 + y^2/7 + z^2 = 1$ нормаль к ней параллельна вектору $\vec{\ell} = (0, 1, \sqrt{2})$.

Вариант № 21

21.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \sqrt{x - \sqrt{y}}; \quad 2)\ u = \frac{5\sqrt{z}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

21.2. Построить график функции $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$.

21.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \ln\frac{4xy + 5}{xy},\ M_0(\infty, \infty); \quad 2)\ z = \frac{(4x - y)^2}{\sqrt{\sin x^4 + 3\sin y^4}},\ M_0(0, 0).$$

21.4. Указать значение параметра p, при котором функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ p, & x = y = 0, \end{cases}$$

непрерывна: 1) по x; 2) по y в точке $(0, 0)$.

21.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \arcsin\sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}; \quad 2)\ u = y^{\sin x} + \operatorname{tg}^3\frac{z}{xy},$$

и функций из заданий 21.1, 21.2, 21.3.

21.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \operatorname{tg}(4x - y^2) + 5x + 6y = 17,\ M_0(1, 2); \quad 2)\ \sqrt{x^2 + y^2 + xz^2} + \frac{5}{zy} = 6,\ M_0(0, 1, 1),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x, y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

21.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = \sqrt[w]{u^{v^2}}$, где $u = \sqrt{3x + 1}/x$, $v = \operatorname{tg} 3x$, $w = x^{\cos x}$.

21.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = \sqrt[w^2]{4u - 5v^3}$, где $u = \sin^2(xy)$, $v = \cos(x - y)$, $w = \sqrt[x^2]{y}$.

21.9. Для функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy}$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(0, 1)$.

21.10. Показать, что заданная функция z удовлетворяет равенству:

$$z = \cos\frac{y}{x} + x\sin\frac{y}{x}, \quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = x + 2y + 2$, $v = x + y - 1$ за новые независимые переменные.

21.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $(4{,}05)^2 e^{1-(1{,}02)^2}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 21.6 при $x = 0{,}02$, $y = 0{,}98$.

21.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = 2x^2 + 3xy + 4y^2,\ M_0(0,1,4);\quad 2)\ \frac{\cos\sqrt{x-z}}{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{yz}}} - \frac{\cos\sqrt{y-x}}{\sqrt{z+2\sqrt{yx}}} = 0,\ M_0(1,1,1).$$

21.13. Для функции $f = \sqrt{x^3 + 2xy}$ найти $\partial^4 f/\partial x \partial y^3$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath} - 5\vec{\jmath}$.

21.14. Найти экстремумы функции

$$z = x^2 - xy - y^2;\quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$$

21.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2$ в замкнутой области D: $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 2 = 0$.

21.16. Найти производную скалярного поля $u = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}$ в точке $M(0,0,0)$ по направлению вектора $\vec{\ell} = (1,1,1)$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}_1$, перпендикулярного $\vec{\ell}$ и $\vec{\jmath}$.

21.17. Найти угол между градиентами функции

$$u = \frac{yz^2}{x^2},\quad v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$$

в точке $M(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3})$.

Вариант № 22

22.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \ln(x^2 + y^2 - 1);\quad 2)\ u = \arcsin(x + y + z - 4).$$

22.2. Построить график функции $z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9}}$.

22.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{e^{-1/(x^4+3y^4)}}{2x^2 + y^2},\ M_0(0,0);\quad 2)\ z = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{xy},\ M_0(0,0).$$

22.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

22.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \ln\Big[\mathrm{ctg}\Big(\frac{x}{4} - \frac{y}{2}\Big)\Big];\quad 2)\ u = e^{2z}\,\mathrm{arctg}^3\,\frac{x-1}{2y},$$

и функций из заданий 22.1, 22.2, 22.3.

22.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \frac{x-4}{y}+\cos(xy)+3=0,\ M_0(0,1);\quad 2)\ z-x-\ln\frac{y}{z-x}=1,\ M_0(1,1,2),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

22.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z=\sqrt[u]{v+\sin w}$, где $u=x\,\mathrm{arctg}\,x$, $v=\sin(x^2+1)$, $w=\ln(x/(x+1))$.

22.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=\sqrt[w]{\sin(uv)}$, где $u=(\ln 4x)/y$, $v=6x+y$, $w=\sqrt[y]{x^2}$.

22.9. Для функции $z=\cos(3x+y)-x^2$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1,-3)$.

22.10. Показать, что заданная функция $z=y\sqrt{y/x}$ удовлетворяет равенству

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u=x+2y+2$, $v=x-y-1$ за новые независимые переменные.

22.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\mathrm{arctg}\,\dfrac{0{,}98}{(1{,}02)^2}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 22.6 при $x=1{,}02$, $y=0{,}98$.

22.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z=x^2-y^2-2x+y,\ M_0(3,-3,-9);\quad 2)\ \frac{\cos(x^2-z\sqrt{y})}{1+\sqrt{z}}-\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=0,\ M_0(1,1,1).$$

22.13. Для функции $f=x^5\cos(y/x)$ найти $\partial^4 f/\partial x\partial y^3$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $4\vec{\imath}+\vec{\jmath}$.

22.14. Найти экстремумы функции

$$z=x^2-xy+y^2;\quad w=x_1x_2^2x_3^3(24-x_1-2x_2-3x_3),\ x_i>0.$$

22.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=2x^2+2xy-\frac{y^2}{2}-4y$ в замкнутой области D: $y=2x$, $y=2$, $x=0$.

22.16. Найти производную функции $z=\mathrm{arctg}(y/x)$ в точке $M(1/2,\sqrt{3}/2)$, принадлежащей окружности $x^2+y^2-2x=0$, по направлению нормали $\vec{n}$ к этой окружности, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{n}$ и $\vec{\imath}$.

22.17. Найти точки скалярного поля $u=(x^2+y^2)^{3/2}$, в которых модуль градиента равен 2.

Вариант № 23

23.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z=\frac{1}{\ln(1-x^2-y^2)};\quad 2)\ u=\sqrt{\cos(x^2+y^2+z^2)}.$$

23.2. Построить график функции $z=\sqrt{1-(x^2/4)+y^2}$.

23.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^4+y^4}},\ M_0(0,0); \quad 2)\ z = \frac{\ln(x^3+y^3) - 4\ln 2}{\sqrt{x^3+y^3-4}},\ M_0(2,2).$$

23.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0; \\ 1, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

23.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = e^{x\sin(y/x)}; \quad 2)\ u = z^3\ln(y\cos z - z\cos x),$$

и функций из заданий 23.1, 23.2, 23.3.

23.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \lg(xy) + \operatorname{tg}\pi(x+4y) = 0,\ M_0(10,1); \quad 2)\ x+y+z-1 = e^{-(x+2y+4z)},\ M_0(2,1,-1),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

23.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = 4^w - \cos^2(2u-3v)$, где $u = (x^2+1)/x$, $v = \ln 4x$, $w = x\operatorname{arctg} x$.

23.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции: $z = \sqrt[v]{e^u + \ln w}$, где $u = (x-y^2)^3$, $v = \sqrt[x]{x+y}$, $w = y\arccos x$.

23.9. Для функции $z = \ln(x+xy-y^2)$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1,0)$.

23.10. Показать, что заданная функция $z = \sin^2(y-ax)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = 2x+3y+5$, $v = x-y+1$ за новые независимые переменные.

23.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\sqrt[3]{2{,}01 + (0{,}97)^2 + 5}$; б) значение неявной функции 2) из задачи 23.6 при $x = 1{,}98$, $y = 0{,}97$.

23.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = 2xy + 3x - 2y,\ M_0(1,0,3); \quad 2)\ \cos\Big(\frac{2^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{y}}}{z}\Big) - \frac{z}{2x^2-y^2} = 0,\ M_0(1,1,1).$$

23.13. Для функции $f = x^4\cos(y/x)$ найти $\partial^4 f/\partial x^2\partial y^2$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec\imath + 4\vec\jmath$.

23.14. Найти экстремумы функции

$$z = 3x^2y - x^3 - y^2; \quad w = x^2 - 2xy + 4xz + 8yz + 5y^2 + 9z^2.$$

23.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2+xy-2$ в замкнутой области D: $y = 4x^2-4$, $y = 0$.

23.16. Найти производную скалярного поля $u = y\ln(1+x^2) - \operatorname{arctg} z$ в точке $M(0,1,1)$ по направлению вектора $\vec\ell = 2\vec\imath - 3\vec\jmath - 2\vec k$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec\ell_1$, перпендикулярного $\vec\ell$ и $\vec\jmath$.

23.17. Найти угол между градиентами функции $u = \operatorname{arctg}(x^2+y^2+z^2)$ в точках $M_1(2,-1,1)$, $M_2(3,-2,1)$.

Вариант № 24

24.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z=\ln(2x-y);\quad 2)\ u=xy\sqrt{z-1}.$$

24.2. Построить график функции $z=\sqrt{1+x^2-(y^2/4)}$.

24.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha=\pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0,y_0)$ для функции

$$1)\ z=xye^{-(x^4+y^4)},\ M_0(\infty,\infty);\qquad 2)\ z=\frac{(x^2-y)y}{x^y-1},\ M_0(2,0).$$

24.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\cos\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

24.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z=\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad 2)\ u=\left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

и функций из заданий 24.1, 24.2, 24.3.

24.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ \operatorname{tg}(x+y)+\frac{2x}{y^2}=2,\ M_0(1,-1);\quad 2)\ e^{z/x}-e^y=2z,\ M_0(1,0,0),$$

неявные функции $y=f(x)$, $z=f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

24.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z=\sqrt{(1/w)+\operatorname{tg}(uv)}$, где $u=1/x^2$, $v=x/(2x-1)$, $w=\operatorname{arctg}e^x$.

24.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z=\sqrt[w]{u/(u+v)}$, где $u=ye^x$, $v=xe^y$, $w=(y+2x)e^{2y}$.

24.9. Для функции $z=\sqrt{3x^2-2y^2+3}$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1,1)$.

24.10. Показать, что заданная функция $z=\ln(x^2+y^2+2y+1)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u=2x+y+2$, $v=x+y+2$ за новые независимые переменные.

24.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\ln(\sqrt[3]{1{,}01}+\sqrt{0{,}99}-1)$; б) значение неявной функции 2) из задачи 24.6 при $x=0{,}98$, $y=0{,}02$.

24.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z=y^2-2,\ M_0(2,1,-1);\quad 2)\ \frac{\cos(\sqrt[3]{x}z)e^{y^2-y}}{\sqrt{x+y^2+z^3}}-\frac{1}{x+y+z}=0,\ M_0(0,1,2).$$

24.13. Для функции $f=y/(x+y^2)$ найти $\partial^5 f/\partial x^3\partial y^2$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $4\vec{\imath}-\vec{\jmath}$.

24.14. Найти экстремумы функции

$$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y; \quad w = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z).$$

24.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ в замкнутой области D: $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant 3\pi/2$.

24.16. Найти производную скалярного поля $u = x\sqrt{yz} - yz^3$ в точке $M(2,1,1)$ по направлению нормали $\vec{n}$ к поверхности $x^2 + y^2 = 5z$, образующей острый угол с осью Oy, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{n}$ и $\vec{k}$.

24.17. Найти угол между градиентами функции $u = \ln(x^2+y^2+z^2)$ в точках $M_1(2,-1,3)$, $M_2(3,-2,1)$.

Вариант № 25

25.1. Найти область определения функции и изобразить её:

$$1)\ z = \ln x - \ln\sin y; \quad 2)\ u = \sqrt{1 - x - y - z}.$$

25.2. Построить график функции $z = \sqrt{x^2 + 9y^2}$.

25.3. Найти пределы: а) по направлению прямой, составляющей угол $\alpha = \pi/4$ к оси Ox; б) оба повторных и в) двойной в указанной точке $M_0(x_0, y_0)$ для функции

$$1)\ z = \frac{(x+2y)^2}{\sqrt{x^2+4y^2}},\ M_0(0,0); \quad 2)\ z = \frac{\sin(4xy)}{y},\ M_0(0,0).$$

25.4. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 1, & x = y = 0. \end{cases}$$

25.5. Найти все частные производные первого порядка и частные дифференциалы следующих функций:

$$1)\ z = \sin^3 x \ln\frac{y}{x}; \quad 2)\ u = \sqrt{\arcsin 4z} + \cos(x + 4y^2 + z^3),$$

и функций из заданий 25.1, 25.2, 25.3.

25.6. Определяют ли данные уравнения

$$1)\ y = 2x \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ M_0(1,0); \quad 2)\ x^2 + 2y^2 + 3z^3 - yz + y = 4,\ M_0(1,1,0),$$

неявные функции $y = f(x)$, $z = f(x,y)$ в окрестности указанной точки? Если да, то найти их производные в этой точке.

25.7. Найти производную и дифференциал сложной функции $z = (uv)^{vw}$, где $u = e^{\arcsin x}$, $v = \sqrt[x]{1+x}$, $w = \pi^{x^2}$.

25.8. Найти частные производные и частные дифференциалы сложной функции $z = \ln(e^{uw} + e^v)$, где $u = x\sin 2y$, $v = \cos 2(x/y)$, $w = \arcsin\sqrt{x^2 + 2y^2}$.

25.9. Для функции $z = y^2 - 3xy - x^4$ найти dz, d^2z, d^3z и записать её разложение по формуле Тейлора в точке до 3-го порядка в точке $M(1,1)$.

25.10. Показать, что функция $z = e^{-\cos(ax+y)}$ удовлетворяет равенству

$$a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

и преобразовать это уравнение, приняв $u = 2x+2y-1$, $v = 2x-y+3$ за новые независимые переменные.

25.11. Заменяя приращение соответствующей функции её полным дифференциалом, вычислить приближённо: а) $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1,97}{1,02}-1\right)$; б) значение неявной функции 2) из задачи 25.6 при $x = 1{,}02$, $y = 0{,}97$.

25.12. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке:

$$1)\ z = xy + y^2 - 2x,\ M_0(2,1,-1); \quad 2)\ x^5y^3e^{\sqrt{xyz}} - zx^3e^{\sqrt{x/y}} = 0,\ M_0(1,1,1).$$

25.13. Для функции $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ найти $\partial^5 f/\partial x^2\partial y^3$, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$.

25.14. Найти экстремумы функции

$$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y; \quad w = x^2 + y^2 + z^2 - xy - x + 2z.$$

25.15. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ в замкнутой области D: $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi/2$.

25.16. Найти производную функции $z = \ln(x+y)$ в точке $M(1,2)$, принадлежащей параболе $y^2 = 4x$, по направлению нормали $\vec{n}$ к этой параболе, полученный результат продифференцировать по направлению вектора $\vec{\ell}$, перпендикулярного $\vec{n}$ и $\vec{\imath}$.

25.17. Найти угол между градиентами скалярных полей

$$u = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}, \quad v = \frac{x^3y^2}{z}$$

в точке $M(1,2,\sqrt{6})$.

Список литературы

1. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. I: *Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 672 с.

2. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* — М.: Наука, 1980.

3. Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа.* – М.: Наука, 1985.

4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. *Краткий курс математического анализа.* – М.: Наука, 1971.

5. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985.

6. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Задачник.* – М.: Наука, 1987.

7. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967.

8. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах.* – М.: Высшая школа, 1980.

9. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Ч. I: *Линейная алгебра.* 2 изд. — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2009. — 310 с.

10. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Ч. II: *Аналитическая геометрия.* 2 изд. — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2010. — 398 с.

11. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Ч. III: *Дифференциальное и интегральное исчисление*: 1. *Дифференциальное исчисление функций одной переменной.* — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2013. — 325 с.

12. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа (в 2-х томах).* – М. Наука, 1971 (т.1), 1973 (т.2).

13. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержев В.Ф. *Специальный курс высшей математики.* – М.: Высшая школа, 1976. – 400 с.

14. Каплан И.А. *Практические занятия по высшей математике.*(в 3-х томах). – Харьков: Изд-во ХГУ. – Т. 1. – 1965; Т. 2 – 1971; Т. 3 – 1972.

15. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1981 (т. 1), 1982 (т. 2).

16. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Курс высшей математики.* – М.: Наука, 1971.

17. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Краткий курс высшей математики.* – М.: Наука, 1986.

18. Кузнецов Л.А. *Сборник индивидуальных заданий по курсу высшей математики.* – М. Наука, 1964.

19. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. *Математический анализ в примерах и задачах* (в 2-х т.). – Киев: Вища школа, т. 1 – 1975, т. 2 – 1977.

20. Мышкис А.Д. *Математика для ВТУЗОВ* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1971 (т. 1), 1973 (т. 2).

21. Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1985.

22. Терёхина Л.И., Фикс И.И. *Высшая математика.* Ч. 2. *Предел, непрерывность, производная, приложения производной, функции нескольких переменных*: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – 180 с.

23. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (в 3-х т.). – М.: Наука, 1966.

Учебное издание

ЗАДОРОЖНЫЙ Валерий Николаевич
ЗАЛЬМЕЖ Владимир Феликсович
ТРИФОНОВ Андрей Юрьевич
ШАПОВАЛОВ Александр Васильевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
для технических университетов
Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление
2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Учебное пособие

Технический редактор *В.Н. Романенко*
Компьютерная верстка *В.Н. Романенко*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе $\TeX$ – $\LaTeX$
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Подписано к печати . .2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать . Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. .
Заказ . Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru