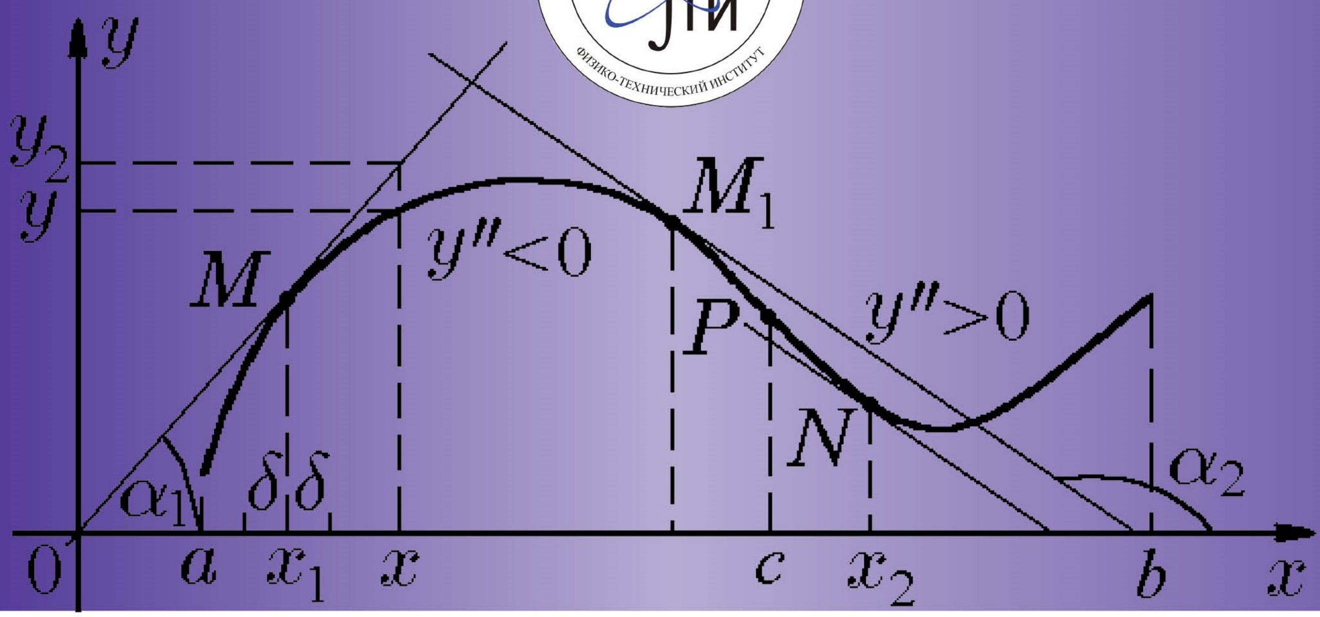


В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

для технических университетов

Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление
Часть III.1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Учебники Томского политехнического университета

Издательство ТПУ

Министерство образования и науки
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж,
А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

для технических университетов

Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление

Часть III.1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

2-е издание, исправленное

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73
В937

Задорожный В.Н.

В937 Высшая математика для технических университетов. Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление. 1. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов; Томский политехнический университет. – 2-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 325 с.

Настоящее пособие представляет собой изложение третьей части курса «Высшая математика» и содержит материал по разделу этого курса: «Дифференциальное и интегральное исчисление»: «Дифференциальное исчисление функций одной переменной». Оно содержит теоретический материал в объёме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями для самостоятельного решения по каждому разделу.

Предлагаемое пособие может быть полезно студентам, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

Пособие предназначено для студентов физических, инженерно-физических специальностей и студентов, обучающихся в системе элитного технического образования.

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Работа частично поддержана Государственным заданием ВУЗам «Наука», регистрационный номер 1.676.2014/К.

Рецензенты
Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Осетрин К.Е.
Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ
Багров В.Г.

Содержание

ГЛАВА 1
Элементы теории множеств

1. Логическая символика

В изложении элементарных курсов геометрии, алгебры и др. отмечалось, что построение математических теорий осуществляется на основе простейших неопределяемых или, как их ещё называют, основных понятий. Это, к примеру, точка, прямая в геометрии, множество в алгебре, высказывания в логике и т.д.

Начнем с понятия высказывания, которое является основным понятием и лежит в основе всех математических конструкций: определений, теорем и т.д. Под *высказыванием* понимается связное повествовательное предложение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

Проиллюстрируем понятие высказывания следующим примером.

Пример 1.1. Провести классификацию предложений:
1) “$3 \cdot 3 = 9$”;
2) “$3^3 = 9$”;
3) “$x \cdot 3 = 9$”;
4) “Следует ли изучать математику?”;
5) “Следует развлекать математику”.

Решение. Предложение 1) является истинным высказыванием; предложение 2) является ложным высказыванием; предложение 3) высказыванием не является в силу невозможности установить его истинность или ложность; предложение 4) также не является высказыванием, поскольку не является повествовательным предложением; предложение 5) также не является высказыванием, поскольку не является связным предложением.

На базе основных понятий с помощью логических операций формируются «вторичные понятия», совокупности и взаимосвязи которых и составляют содержание соответствующего курса. Исходя из этого, для курса математического анализа воспользуемся некоторыми извлечениями из других разделов математики.

♦ *Логической операцией* называется способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при котором истинностное значение сложного высказывания полностью определяется истинностными значениями исходных высказываний.

Часто под логической операцией понимаются мыслительные действия, результатом которых является изменение содержания и смысла понятий, а также образование новых понятий.

Рассмотрим теперь основные логические операции и отвечающие им символы, позволяющие упростить запись действий с высказываниями. Воспользуемся удобным языком логических символов, позволяющим в ряде случаев существенно упростить изложение различных частей курса.

♦ *Импликация* (от латинского *implico* – тесно связываю) — логическая операция, соответствующая грамматической конструкции «если..., то ...» или «когда..., тогда...». Для обозначения импликации используется символ $\Rightarrow$.

Запись

$$A \Rightarrow B \tag{1.1}$$

означает, что из справедливости высказывания A вытекает (имплицируется) справедливость высказывания B («если справедливо A, то справедливо B») или B

следует из A. Зачастую высказывание A называют *посылкой*, а высказывание B – его *заключением*, при этом саму конструкцию (1.1) можно назвать *теоремой*. Поскольку сама теорема является высказыванием, то её принято считать ложной только в том случае, когда посылка является истинной, а заключение ложным (именно на однозначности этой посылки основан метод доказательства от противного).

Если посылка и заключение являются истинными, то заключение называют *логическим следствием* посылки, а теорему — верной. В этом случае высказывание A называют *достаточным условием* для высказывания B, а высказывание B – *необходимым условием* для высказывания A, что соответствует необходимым и достаточным условиям теоремы $A \Rightarrow B$.

♦ Конструкция $B \Rightarrow A$, образованная для теоремы $A \Rightarrow B$, называется *обратной теоремой*, а сама теорема $A \Rightarrow B$ – *прямой*.

Пример 1.2. Для прямой теоремы $A \Rightarrow B$: «Из делимости натурального числа на 6 следует его делимость на 3» сформулировать обратную и установить её истинность или ложность.

Решение. Из курса элементарной математики известно, что прямая теорема $A \Rightarrow B$ является истинной. Обратная теорема $B \Rightarrow A$ имеет формулировку: «Из делимости натурального числа на 3 следует его делимость на 6». В качестве простейшего примера можно выбрать число 9, которое делится на 3, но не делится на 6, что демонстрирует ложность обратной теоремы.

Следующий пример иллюстрирует случай, когда обращение неверной прямой теоремы приводит к верной обратной теореме.

Пример 1.3. Для прямой теоремы: «Если треугольники имеют одинаковые площади, то они равны» сформулировать обратную и указать её истинность или ложность.

Решение. Из курса элементарной геометрии известно, что прямая теорема неверна. Обратная теорема формулируется следующим образом: «Если треугольники равны, то они имеют одинаковые площади». Методами элементарной геометрии легко устанавливается справедливость обратной теоремы.

Как видим, соотношения истинности и ложности прямой и обратной теорем могут быть разнообразными, и, конечно же, нередко оказываются справедливыми как прямая, так и обратная теоремы. В связи с этим мы переходим к следующей логической операции.

♦ *Эквивалентность* (от латинского *aequivalens* — «равносильный, равнозначный») — логическая операция, соответствующая грамматической конструкции «... тогда и только тогда, когда ...», «... если и только если... ». Для её обозначения используется символ $\Leftrightarrow$.

Запись

$$A \Leftrightarrow B \tag{1.2}$$

означает, что высказывание B следует из A и одновременно A следует из B, т.е. A равносильно B. Другими словами, для истинной прямой теоремы её обратная теорема является верной. Это означает, что A является необходимым и достаточным условием для B и наоборот.

Пример 1.4. С помощью логических символов записать теорему Пифагора для треугольника со сторонами a, b, c.

Решение. По условию задачи, вершина C противоположна стороне c, тогда

$$\angle C = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2.$$

Если посылка или заключение состоят более чем из одного высказывания или отрицания высказывания, то используются следующие логические символы.

♦ *Дизъюнкция* (от латинского *disjunctio* — «разделение, разобщение») — логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям третье, которое является истинным тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из исходных высказываний. Для обозначения дизъюнкции используется символ $\vee$.

Знак дизъюнкции соответствует высказыванию, состоящему из двух высказываний A, B. Таким образом, высказывание

$$A \vee B \tag{1.3}$$

является ложным только в одном случае: когда оба высказывания ложны, а истинным (что нас по большей части и интересует) — в противном случае. Именно как союз «или» и читается знак $\vee$ в конструкции (1.3) (в латинском «или» – *vell*, отсюда и форма знака).

♦ *Конъюнкция* (от латинского *conjunctio* — «соединение, союз») — логическая операция, ставящая в соответствие двум высказываниям третье, которое является истинным тогда и только тогда, когда истинны оба исходных высказывания. Для обозначения конъюнкции используется символ $\wedge$.

Знак конъюнкции $\wedge$ в записи

$$A \wedge B \tag{1.4}$$

читается как союз «и» (знак конъюнкции – перевернутый знак дизъюнкции – отражает смысл этих двух операций).

♦ *Инверсия* (от латинского *inversio* — «перестановка») — логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие высказывание, состоящее в том, что исходное высказывание отрицается. Для обозначения инверсии (или отрицания) используется символ $\bar{}$.

Знак отрицания соответствует высказыванию $\bar{A}$, истинность которого противоположна истинности высказывания A. Обозначение

$$\bar{A} \tag{1.5}$$

читается как «не A», «неверно, что A», «A не имеет места». Очевидно, что справедлива равносильность $\bar{\bar{A}} \Leftrightarrow A$, называемая *законом двойного отрицания.*

♢ Отрицание замыкает группу символов логических операций между высказываниями. Последние три операции носят ещё название булевых по имени английского математика Джона Буля, который в своей книге «Исследование законов мышления» заложил основы математической логики.

Перейдём теперь к другой группе логических символов. Для этого вернемся к предложению 3) из примера 1.1, а именно: $P(x) =$ «$x \cdot 3 = 9$». Как уже отмечалось, это содержательное повествовательное предложение не является высказыванием только по причине своей неопределённости, т.е. невозможности установить его истинность или ложность. Однако его можно сделать высказыванием (истинным или ложным) с помощью некоторых дополнений. Например, это же предложение с дополнением вида «для всех x выполняется $x \cdot 3 = 9$» превращается в ложное высказывание, а с дополнением «существует x, при котором $x \cdot 3 = 9$» превращается в истинное высказывание. Последнее высказывание допускает усиление вида «существует единственное x, при котором $x \cdot 3 = 9$».

Этот простой пример объясняет появление следующих терминов. Предложение $x \cdot 3 = 9$, не являющееся высказыванием, но способное превратиться в него, называют *предикатом*, а дополнения, превращающие предикат в высказывание, *кванторами*. Дадим более подробное определение.

♦ Содержательное повествовательное предложение, включающее некоторый набор переменных и способное превращаться в высказывание при конкретизации этих переменных, называется *предикатом* (от латинского *praedicatum* – «высказанное, заявленное»). В зависимости от числа переменных различают одноместные $P(x)$, двуместные $P(x, y)$ и т.д. предикаты.

Пример 1.5. Привести примеры одноместных, двуместных и трёхместных предикатов.

Решение. Одноместным предикатом является уже упоминавшееся предложение $P(x) =$ «$x \cdot 3 = 9$», а также $P(x) =$ «$x < 3$». Двуместными предикатами являются $P(x, y) =$ «$x^2 + y^2 = 9$», $P(x, y) =$ «$x < y$». Наконец, трёхместным предикатом является $P(x, y, z) =$ «$x^2 + y^2 = z$».

♢ С каждым предикатом связаны два множества переменных, на которых он принимает значения истинности и ложности.

♦ Логическая операция, устанавливающая область истинности одноместного предиката $P(x)$, называется *квантором* (от латинского *quantum* — сколько).

Различают квантор всеобщности $\forall$ и квантор существования $\exists$, с которым связан квантор единственности $\exists!$. Квантор $\forall$ читается как «для всех», «для любого», «для каждого». Квантор $\exists$ читается как «найдётся», «существует», а квантор $\exists!$ — как «существует единственный», «для одного и только одного».

♢ Символы $\forall$ и $\exists$ для кванторов ввел немецкий математик Г. Фреге в 1879 г.

♢ Знак $\forall$ – перевёрнутая буква A (первая буква немецкого слова *alle* – все). Знак $\exists$ – перевёрнутая буква E (первая буква немецкого слова *existieren* – существовать).

♢ Кванторы можно отрицать, поместив над ними черту. Квантор $\bar{\forall}$ читается как «не все», квантор «$\bar{\exists}$» читается как «не существует ..., такого что», а квантор «$\bar{\exists}!$» — «не существует единственного ..., такого что». Любой из кванторов можно выразить посредством другого, противоположного квантора. Так, квантор всеобщности $\forall$ можно заменить квантором существования по формуле $\forall x P(x) \Leftrightarrow \bar{\exists} x \overline{P(x)}$.

Пример 1.6. Установить результат связывания кванторов с предикатом $P(x) =$ «$x \cdot 3 = 9$».

Решение. Высказывание

$$\forall x\, P(x),$$

т.е. «для любого (каждого, всех) x произведение $x \cdot 3 = 9$», является ложным.

Высказывание

$$\exists x\, P(x),$$

т.е. «существует (найдётся) x, для которого произведение $x \cdot 3 = 9$», является истинным.

Высказывание

$$\exists! x\, P(x),$$

т.е. «существует единственное x, для которого произведение $x \cdot 3 = 9$», является истинным.

Пример 1.7. Установить результат связывания кванторов с двуместным предикатом $P(x, y) =$ «$x < y$».

Решение. Связывание квантора с двуместным предикатом производится по каждой переменной отдельно. Тогда высказывание

$$\forall x \forall y\, P(x, y),$$

т.е. «для любого x и любого y выполняется неравенство $x < y$», является ложным, как и высказывание

$$\forall y \forall x\, P(x, y).$$

Высказывание

$$\forall x \exists y\, P(x, y),$$

т.е. «для любого x существует y такой, что выполняется неравенство $x < y$», является верным.

Высказывание

$$\exists y \forall x\, P(x, y),$$

т.е. «существует y такой, что при любом x выполняется неравенство $x < y$», является ложным.

Аналогично устанавливается, что высказывание

$$\exists x \forall y\, P(x, y)$$

является ложным, а высказывание

$$\forall y \exists x\, P(x, y)$$

является истинным.

Нетрудно заметить, что одноименные кванторы коммутируют, а разноименные нет.

Пример 1.8. Записать отрицание высказываний $\forall x\, P(x)$ и $\exists x\, P(x)$.

Решение. Отрицание высказывания $\forall x\, P(x)$ состоит в том, что найдётся такое x, для которого утверждение $P(x)$ ложно, т.е. $\exists x \overline{P(x)}$, таким образом,

$$\overline{\forall x\, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \overline{P(x)}. \tag{1.6}$$

Аналогично

$$\overline{\exists x\, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \overline{P(x)}. \tag{1.7}$$

Формулы (1.6), (1.7) носят название *законов Моргана для кванторов.*

В заключение отметим, что помимо логических символов будем пользоваться общепринятыми вспомогательными обозначениями, такими как $|$ (или :), соответствующим значению «такой, что»; символом $\in$ принадлежности элемента множеству и фигурными скобками $\{\dots\}$, которыми мы заменим кавычки «...» для выделения высказываний и утверждений. Согласно сложившейся практике, знаки кванторов $\forall$, $\exists$ иногда используются как стенографические (не для предикатов). Другие знаки и символы будем вводить по мере необходимости.

Пример 1.9. С помощью логической символики записать приведённые ниже высказывания и их отрицания:
а) множество X ограничено сверху;
б) число m есть наименьший элемент множества X;
в) множество X имеет наименьший элемент.

Решение. а) Данное высказывание обозначим через A, оно имеет место, если существует число M такое, что для x из X выполняется неравенство $x \leqslant M$. Тогда

$$A \Leftrightarrow \{\exists M \forall x \in X(x \leqslant M)\}. \tag{1.8}$$

Отрицание высказывания A, т.е. $\bar{A}$, означает, что множество X сверху не ограничено. Другими словами, для любого числа M найдётся элемент x из X, который будет больше этого числа, что символически записывается в виде

$$\bar{A} \Leftrightarrow \{\forall M \exists x \in X(x > M)\}. \tag{1.9}$$

◊ Эта же формула следует из отрицания импликации (1.8) в соответствии с законами Моргана.

б) Обозначим данное высказывание через B. Оно имеет место, если m принадлежит X и для любого элемента x их X выполняется неравенство $m \leqslant x$. Тогда

$$B \Leftrightarrow \{(m \in X) \wedge \forall x \in X(m \leqslant x)\}.$$

Отрицание высказывания B, т.е. $\bar{B}$, означает, что число m не принадлежит множеству X или в этом множестве X существует элемент x, меньший числа m, т.е.

$$\bar{B} \Leftrightarrow \{(m \notin X) \vee (\exists x \in X(m > x))\}.$$

в) Данное высказывание обозначим через C. Оно имеет место, если в этом множестве X найдётся элемент, равный m и для которого все x из X удовлетворяют неравенству $m \leqslant x$. Тогда

$$C \Leftrightarrow \{(\exists m \in X) \wedge (\forall x \in X(m \leqslant x))\}.$$

Отрицание высказывания C, т.е. $\bar{C}$, означает, что для любого элемента из X найдётся другой, больший данного, т.е.

$$\bar{C} \Leftrightarrow \{\forall x' \in X \exists x \in X(x' < x)\}.$$

Пример 1.10. Прочитать приведённые ниже высказывания для действительных чисел, выяснить их смысл и установить, истинны они или ложны:

$$\text{а)}\ \{\forall x(ax^2 + bx + c > 0) \Rightarrow (b^2 - 4ac < 0)\},$$
$$\text{б)}\ \{\forall x(ax^2 + bx + c > 0) \Leftrightarrow (b^2 - 4ac < 0) \wedge a > 0\}.$$

Решение. Первая запись означает: если квадратный трёхчлен при всех x принимает только положительные значения, то из этого следует, что его дискриминант отрицателен. Это утверждение является истинным. Действительно, предположим противное: $b^2 - 4ac \geqslant 0$, но в этом случае квадратный трёхчлен имеет действительные корни, в которых он обращается в нуль. Сделанное предположение приводит к противоречию, доказывающему справедливость исходной импликации.

Вторая запись означает, что необходимым и достаточным условием того, что квадратный трёхчлен при всех значениях x принимает только положительные значения, является выполнение неравенств $b^2 - 4ac < 0$ и $a > 0$. Это утверждение также является истинным. Действительно, рассмотрим равенство

$$ax^2 + bx + c = a\Big[\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\Big]. \tag{1.10}$$

Тогда необходимость вытекает из утверждения а), в силу которого выражение в квадратных скобках (1.10) является положительным, и поэтому из утверждения $ax^2 + bx + c > 0$ следует неравенство $a > 0$. Достаточность очевидным образом вытекает из (1.10), поскольку из неравенств $b^2 - 4ac < 0$ и $a > 0$ следует выполнение неравенства $ax^2 + bx + c > 0$.

2. Основные понятия и определения

Как уже отмечалось, в математике существует набор *простейших основных понятий*, с помощью которых формулируются остальные понятия и определения. Основные понятия характеризуются правилами их употребления и свойствами объектов, им соответствующих. Корректность введённых основных понятий необходима для построения непротиворечивой математической теории. К числу таких понятий относится понятие множества. Оно не определяется, но может быть пояснено при помощи свойств.

Кратко опишем свойства множества.

◊ Для любого множества A и для любого элемента a справедливо одно из двух отношений: либо $a \in A$, либо $a \notin A$ ($a \bar{\in} A$).

◊ Обычно множества задаются двумя способами:

1) перечисляются все элементы множества:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\};$$

такая запись означает, что множество A состоит из элементов $a_1, a_2, ..., a_n$;

2) указывается общее свойство P, присущее всем элементам множества:

$$A = \{x | P(x)\},$$

что означает: множество A состоит из элементов x, обладающих свойством $P(x)$.

Пример 2.1. Задать множество натуральных чисел ($\mathbb{N}$) от 1 до 100.

Решение. 1) Перечислим все элементы, входящие в это множество: $A = \{1, 2, ..., 100\}$.

2) Определим это множество следующим образом: $A = \{x |\ x \in \mathbb{N},\ x \leqslant 100\}$.

◊ Отметим, что второй способ является более общим, например, он позволяет задавать множество с бесконечным числом элементов.

Элемент a и одноэлементное множество $\{a\}$ формально различаются в том, что утверждение $a \in \{a\}$ – истинно, а $\{a\} \in a$ – ложно.

Пусть A и B – два множества.

♦ Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент x, принадлежащий множеству A ($x \in A$), принадлежит также множеству

B ($x \in B$). Символ $A \subset B$ (или $B \supset A$) означает, что A содержится в B (или B содержит A). Операция $\subset$ называется *включением*.

♦ Множества A и B называются *равными* (совпадающими), т.е. $A = B$, если множество A содержится в B ($A \subset B$) и одновременно множество B содержится в A ($B \subset A$).

◊ Очевидно, что в этом случае множества A и B состоят из одних и тех же элементов.

♦ Множество A называется *собственным подмножеством* или *правильной частью* множества B, если множество A содержится в множестве B ($A \subset B$) и не совпадает с ним ($A \neq B$).

♦ Множество A называется *пустым* множеством, если оно не содержит ни одного элемента и является подмножеством любого множества. Для обозначения пустого множества используется символ $\emptyset$.

♦ Множество, фиксированное в рамках данной математической теории и содержащее в качестве элементов и подмножеств все объекты, рассматриваемые в этой теории, называется *универсальным множеством*, или *универсумом*, и обозначается U.

◊ Примерами универсальных множеств являются: числовая ось в теории действительных чисел и множество всех точек плоскости в планиметрии, пространство событий в теории вероятности.

Операции над множествами

Пусть A и B – два множества. Данные ниже определения будем для наглядности иллюстрировать диаграммами.

♦ Множество S, состоящее из всех элементов множеств A и B и только из них, называется *суммой*, или *объединением*, множеств A и B (рис. 1,*а*) и обозначается

$$S = A + B \quad \text{или} \quad S = A \cup B.$$

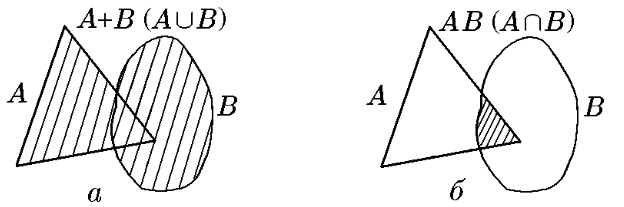


Рис. 1. Объединение (*а*) и пересечение (*б*) множеств

♦ Множество P, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B, и только из них называется *произведением*, или *пересечением*, множеств A и B (рис. 1,*б*) и обозначается

$$P = AB \quad P = A \cap B.$$

Понятия объединения и пересечения двух множеств могут быть обобщены на конечное или счётное количество множеств.

Пусть A_ξ – набор множеств, нумеруемых параметром ξ, который является элементом некоторого множества Ω ($\xi \in \Omega$). Последнее называют *индексным множеством*.

♦ Множество S, состоящее из всех элементов множеств A_ξ, $\xi \in \Omega$, и только из них, называется *суммой*, или *объединением*, этих множеств и обозначается

$$S = \sum_{\xi \in \Omega} A_\xi \quad \text{или} \quad S = \bigcup_{\xi \in \Omega} A_\xi.$$

♦ Множество P, состоящее из элементов, принадлежащих каждому из множеств A_ξ, $\xi \in \Omega$, и только из них, называется *произведением*, или *пересечением*, этих множеств и обозначается

$$P = \prod_{\xi \in \Omega} A_\xi \quad \text{или} \quad P = \bigcap_{\xi \in \Omega} A_\xi.$$

Пусть A, B и C – некоторые множества. Из определений непосредственно следует, что введённые выше операции над множествами обладают следующими свойствами:

коммутативность

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{и} \quad A \cap B = B \cap A; \tag{2.1}$$

ассоциативность

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{и} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \tag{2.2}$$

идемпотентность

$$A \cup A = A \quad \text{и} \quad A \cap A = A; \tag{2.3}$$

дистрибутивность

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \tag{2.4}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C). \tag{2.5}$$

♢ Содержание сформулированных выше утверждений (2.1) – (2.5), как многих других теорем теории множеств, состоит в равенстве каких-либо двух множеств L и R ($L = R$). Доказательство подобных утверждений стандартно и состоит в проверке двустороннего включения: $L \subset R$ и $L \supset R$, откуда следует $L = R$.

В качестве иллюстрации проведём доказательство соотношения (2.4).

Доказательство. Обозначим

$$L := A \cap (B \cup C), \quad R := (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

тогда, по определению, для всех $x \in L$ справедливо

$$x \in A \quad \text{и} \quad x \in B \cup C.$$

Для определённости положим, что $x \in B$. Тогда $x \in A \cap B$ и, следовательно, $x \in R$. Таким образом, доказано, что $L \subset R$. Обратно, для всех $x \in R$ справедливо

$$x \in A \cap B \quad \text{или} \quad x \in A \cap C.$$

Для определённости будем считать, что $x \in A \cap B$, т.е. $x \in A$ и $x \in B$. Тогда и подавно $x \in B \cup C$, следовательно, $x \in A \cap (B \cup C)$.

Таким образом, доказано, что $R \subset L$. В силу доказанного двустороннего включения $L = R$. Аналогично доказывается (2.5).

◊ В дальнейшем будем приводить доказательства таких теорем и утверждений, лишь если они содержат нетривиальные моменты.

♦ Множество M, состоящее из элементов множества A, не входящих в B, и только из них, называется *разностью* (рис. 2,*а*) множеств A и B и обозначается

$$M = A - B \quad \text{или} \quad M = A \setminus B.$$

♦ Множество S называется *симметрической разностью* (рис. 2,*б*) множеств A и B, если

$$S \equiv A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

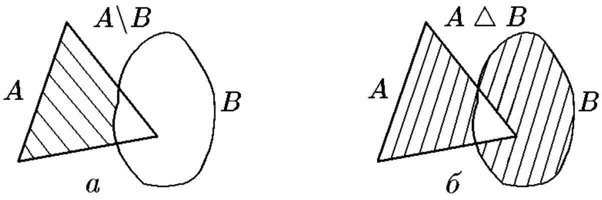


Рис. 2.

♦ Множество $\overline{M}$ называется *дополнением* множества $M \subset U$, если

$$\overline{M} = U \setminus M.$$

♦ Совокупность попарно непересекающихся множеств A_ξ называется *дизъюнктной*, если для всех $\xi, \xi' \in \Omega$ справедливо

$$A_\xi \cap A_{\xi'} = \emptyset, \quad \xi \neq \xi'.$$

Двойственность

Математике, построенной на классической логике (в которой каждое утверждение может быть либо истинным, либо ложным), присуща *двойственность* (логическая симметрия) понятий и отношений. Она позволяет «удваивать» число теорем и делает теорию логически полной. *Принцип двойственности* состоит в замене всех понятий и отношений на двойственные, тогда из данной теоремы следует двойственная ей.

◊ Двойственность одних понятий и отношений может быть следствием двойственности других понятий и отношений. В теории множеств примерами двойственных отношений являются понятия, выражаемые символами $\cup$ и $\cap$. Например, отношение «M содержит L» двойственно отношению «M содержится в L». Другим примером двойственного отношения являются множество A и его дополнение в универсуме U: $U \setminus A$.

Примером двойственных друг другу утверждений могут служить законы дистрибутивности (2.4) и (2.5).

Другой пример двойственности дают следующие два утверждения. Пусть S – некоторое множество, а $A_\alpha \subset S$, где $\alpha \in I$ – набор его подмножеств, I – индексное множество. Тогда справедливы утверждения

1) дополнение суммы равно пересечению дополнений:

$$U \setminus \bigcup_\alpha A_\alpha = \bigcap_\alpha (U \setminus A_\alpha); \tag{2.6}$$

2) дополнение пересечения равно сумме дополнений:

$$S \setminus \bigcap_\alpha A_\alpha = \bigcup_\alpha (S \setminus A_\alpha). \tag{2.7}$$

Действительно, обозначим $L = S \setminus \bigcap\limits_\alpha A_\alpha$, а $R = \bigcap\limits_\alpha (S \setminus A_\alpha)$, тогда для всех $x \in L$, таких, что $x \notin \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$, следует $x \notin A_\alpha$. Отсюда $x \in S \setminus A_\alpha$ для всех α. Таким образом, $x \in \bigcap\limits_\alpha (S \setminus A_\alpha$, т.е. $L \subset R$. Обратное включение доказывается аналогично, и соотношение (2.6) справедливо.

Подобным же образом убеждаемся в справедливости соотношения (2.7).

$\Diamond$ Принцип двойственности не всегда приводит к новому результату, в этом случае утверждение называется *самодвойственным*. Так, например, совокупность утверждений (2.6) и (2.7) самодвойственна.

3. Функция на множестве

Пусть заданы два множества X и Y.

♦ Говорят, что задано *отображение* f множества X **в** множество Y, или *функция* f с областью определения X и множеством значений, лежащих в Y, если установлено правило, по которому каждому элементу x, $x \in X$, поставлен в соответствие единственный элемент y, $y \in Y$. Такое отображение обозначается

$$f : X \to Y; \quad X \xrightarrow{f} Y; \quad x \to y = f(x).$$

$\Diamond$ Определение функции несимметрично относительно множеств X и Y, что наглядно иллюстрирует рис. 3: правило f, изображенное на рис. 3,*а*, соответствует определению функции, а на рис. 3,*б* — не соответствует.

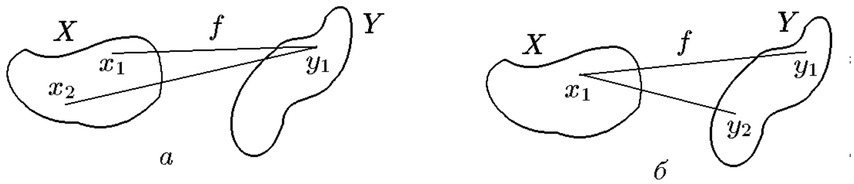


Рис. 3.

♦ Множество $B \subset Y$ называется *образом* (f-образом) множества $A \subset X$, если $B = \{f(a) | \forall a \in A\}$ и обозначается $B = f[A]$.

♦ Образ области определения функции $f : X \to Y$ называется *областью значений* функции f и обозначается $\mathrm{Ran}\ f$ или $f[X]$.

♦ Множество $A \subset X$ называется *полным прообразом* множества $B \subset \mathrm{Ran}\ f$, если оно состоит из таких элементов $x \in X$, образы которых лежат в B:

$$A = f^{-1}[B] = \{x | f(x) \in B\}.$$

♦ Отображение $f : X \to Y$ множества X **на** Y называется *сюръекцией*, если каждый элемент множества Y имеет хотя бы один прообраз $f[X] = Y$.

♦ Отображение $f : X \to Y$ называется *инъекцией*, если из соотношения $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$.

♦ Отображение $f : X \to Y$ называется *биекцией*, если оно является одновременно сюръекцией и инъекцией.

♦ Функция

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \tag{3.1}$$

называется *характеристической функцией* множества $A \subset X$.

♢ В литературе для этой функции также используется обозначение $\chi(x; A)$.

Утверждение 3.1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]; \tag{3.2}$$
$$f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]; \tag{3.3}$$
$$f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]; \tag{3.4}$$
$$f^{-1}[A \setminus B] = f^{-1}[A] \setminus f^{-1}[B]. \tag{3.5}$$

Доказательства соотношений (3.2)–(3.5) однотипны. Поэтому докажем справедливость только соотношения (3.2). Для этого покажем, что множества L и R равны. Здесь $L : f^{-1}[A \cup B]$, $R : f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$.

Пусть $x \in L$. Это означает, что $x \in X$, причём $f(x) \in A \cup B$. Предположим для определённости, что $f(x) \in A$. Это, в свою очередь, означает, что $x \in f^{-1}[A]$. Тогда и подавно $x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B] = R$. Тем самым доказано включение $L \subset R$.

Обратное включение доказывается аналогично, откуда следует равенство $L = R$.

4. Бинарные отношения

♦ Объект (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$, называется *упорядоченной парой* элементов множеств A, B. Левый элемент считаем первым, правый – вторым.

♦ Множество всех упорядоченных пар (a, b) называется *декартовым произведением* множеств A и B и обозначается:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A; \quad b \in B\}.$$

Декартово произведение множества A на множество A ($A \times A = A^2$) называется *декартовым квадратом* множества A.

♦ Правило, по которому выделяется подмножество

$$\Phi = \{(x, y) | x, y \in A\} \tag{4.1}$$

декартова квадрата множества A ($\Phi \subset A \times A$), называется *бинарным отношением* на множестве A.

♢ Множество Φ можно задать таблицей (перечислив все его элементы), но можно указать свойство φ, по которому устанавливается принадлежность пары (x, y) множеству Φ. Если $(x, y) \in \Phi$, то в этом случае говорят: элемент x находится в отношении φ к элементу y и записывают

$$x\varphi y \quad \text{или} \quad x \underset{\varphi}{\sim} y, \tag{4.2}$$

т.е.

$$\Phi = \{(x,y)|x\varphi y; x,y \in A\}. \tag{4.3}$$

В дальнейшем множество Φ и свойство φ могут обозначаться одной буквой φ.

♦ Бинарное отношение φ на A называется *отношением эквивалентности*, если оно является:

1. рефлексивным, т.е. $a \underset{\varphi}{\sim} a$ для всех $a \in A$;
2. симметричным, т.е. если $a \underset{\varphi}{\sim} b$, то $b \underset{\varphi}{\sim} a$;
3. транзитивным, т.е. если $a \underset{\varphi}{\sim} b$ и $b \underset{\varphi}{\sim} c$, то $a \underset{\varphi}{\sim} c$.

Пример 4.1. Показать, что отношение сонаправленности ($\uparrow\uparrow$) двух векторов в пространстве $\mathbb{R}^3$ является отношением эквивалентности, а отношение противоположнонаправленности ($\uparrow\downarrow$) таковым не является.

Решение. Пусть вектор $\vec{a}$ сонаправлен вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ сонаправлен вектору $\vec{c}$. Тогда очевидно, что

$$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}, \quad \vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}, \quad \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}.$$

Таким образом, отношение $\uparrow\uparrow$ является отношением эквивалентности.

Поскольку из соотношений $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ и $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$ следует, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$, то отношение $\uparrow\downarrow$ нетранзитивно, а потому не является отношением эквивалентности.

Отношение эквивалентности на множестве A связано с разбиением A на пересекающиеся подмножества (классы эквивалентности).

♦ Множество элементов, эквивалентных a, называется *классом эквивалентности* элемента $a \in A$ и обозначается $[a]$.

♦ Совокупность $U = \{K_\xi\}$ подмножеств $K_\xi \subset A$, $\xi \in I$, где I — некоторое индексное множество, такая что

$$K_\xi \bigcap_{\xi \neq \xi'} K_{\xi'} = \emptyset, \qquad A = \bigcup_{\xi \in I} K_\xi,$$

называется *разбиением* (*разложением*) множества A, а сами множества K_ξ – *классами разбиения.*

Теорема 4.1. *Отношение эквивалентности φ на A является необходимым и достаточным условием разбиения A.*

Доказательство. Пусть задано отношение эквивалентности φ на множестве A. Для любого a, принадлежащего A, обозначим $K_a = \{x|a\varphi x, x \in A\}$. Тогда совокупность множеств $\{K_a\}$ задаёт разбиение A. Действительно, если $K_a \cap K_{a'} \neq \emptyset$ то существует элемент c такой, что $c \in K_a$, $c \in K_{a'}$. Следовательно, $a\varphi c$, $c\varphi a'$. Отсюда вследствие свойства транзитивности отношения эквивалентности φ следует $a\varphi a'$ и $K_a = K_{a'}$. Другими словами, множества K_a при различных a или совпадают, или не пересекаются. В силу построения множеств K_a всякий элемент $x \in A$ принадлежит одному из этих множеств K_a. Таким образом, совокупность множеств K_a задаёт разбиение множества A.

Обратно, если $U = \{K_\xi\}$ есть разбиение множества A, то всякий элемент a принадлежит одному из множеств K_ξ, которое обозначено через K_a. Определим отношение φ на множестве A правилом: $x\varphi a$, если $x \in K_a$. Прямой проверкой убеждаемся, что φ есть отношение эквивалентности на множестве A.

Пример 4.2. Показать, что функция

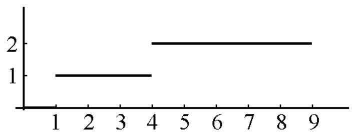


Рис. 4.

$$y = f(x) = [\sqrt{x}], \quad x \geqslant 0,$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа, задаёт разбиение множества $X = \{x|x \in [0,9[\}$ на классы эквивалентности по правилу $x_1 \in K_a$ и $x_2 \in K_a$, если $f(x_1) = f(x_2)$.

Решение. Множества $K_0 = \{x|x \in [0,1[\}$, $K_1 = \{x|x \in [1,4[\}$, $K_2 = \{x|x \in [4,9[\}$ (рис. 4) являются классами эквивалентности. Это непосредственно следует из определения.

Пример 4.3. Пусть на плоскости задан круг единичного радиуса $B[0,1]$ с центром в начале координат. Точки, принадлежащие кругу, будем задавать декартовыми координатами:

$$\vec{r} = (x,y)^\top \in B[0,1], \quad \text{если} \quad x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Определим отношение φ на $B[0,1]$ по правилу $\vec{r}_1 \varphi \vec{r}_2$, если

$$x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2, \tag{4.4}$$

Показать, что φ есть отношение эквивалентности и найти классы разбиения.

Решение. а) Отношение φ разбивает круг $B[0,1]$ на непрерывное семейство концентрических окружностей радиуса r, $r \in [0,1]$ (см. рис. 5).

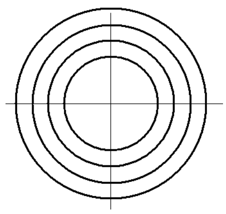


Рис. 5.

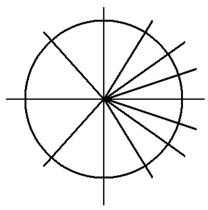


Рис. 6.

б) Свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности следуют из свойств равенства (4.4). Классами эквивалентности отношения φ являются семейства радиусов, зеркально симметричных относительно оси Ox (см. рис. 6).

Заметим, что множество $B[0,1]$ можно разбить на семейство концентрических окружностей, если в качестве отношения эквивалентности выбрать следующее правило. Введём на множестве $B[0,1]$ преобразование $T(\alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$, вида

$$\vec{r}_2 = T(\alpha)\vec{r}_1, \qquad T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Будем считать $\vec{r}_2 \varphi \vec{r}_1$, если существует такое α, что справедливо (4.5). Непосредственно проверяется, что φ есть отношение эквивалентности, которое разбивает $B[0,1]$ на семейство концентрических окружностей.

5. Бесконечные множества

В дальнейшем нам потребуется понятие *бесконечного множества.* Это понятие является одним из ключевых в математике и нетривиальным. В курсе математического анализа под *бесконечным множеством* понимается такое множество, извлекая из которого элемент за элементом, мы будем иметь в оставшемся множестве другие элементы (сколько бы ни повторялась процедура извлечения). Такое описание носит интуитивный характер. Теория множеств позволяет дать более строгое определение на основе теорем о бесконечных множествах, к изучению которых мы и переходим.

Для конечного множества процедура извлечения элементов заканчивается через конечное число шагов.

Иначе. Для конечного множества можно, хотя бы примерно, указать число элементов в нем. Для бесконечного это невозможно.

Если даны два множества A и B, то на вопрос – одинаково ли число элементов в них – можно ответить двумя способами:

а) пересчитать элементы в A и B и сравнить числа,

б) установить биекцию $A \leftrightarrow B$.

Второй способ, очевидно, более общий, так как позволяет сравнивать и бесконечные множества, для которых неприменим способ а).

♦ Множества A и B называются *эквивалентными*, если между A и B существует биекция. Эквивалентность множеств обозначается следующим образом: $A \sim B$.

Очевидно:

$$A \sim A; \quad A \sim B \Rightarrow B \sim A; \quad A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C.$$

♢ В некоторой совокупности множеств $\mathcal{A} = \{A, B, ...\}$ соответствие $\sim$ есть отношение эквивалентности (см. разд. 4).

5.1. Счётные множества

Простейшим бесконечным множеством является множество натуральных чисел

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\} \tag{5.1}$$

♦ Множество A, эквивалентное множеству натуральных чисел N, называется *счётным.*

♢ Определению равносильно

Утверждение 5.1. *Множество A счётно в том случае, если его можно записать в виде*

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}, \tag{5.2}$$

т.е. пронумеровать его элементы натуральными числами.

Действительно, в этом случае биекция устанавливается по формуле: $a_n \leftrightarrow n$.

Теорема 5.1. *Из бесконечного множества B можно извлечь счётное подмножество.*

Доказательство. Извлечем из множества B некий элемент $a_1 \in B$. Полученное после такого извлечения множество обозначим через B_1:

$$B_1 = B \setminus \{a_1\} \neq \emptyset.$$

Из множества B_1 извлечем некий элемент $a_2 \in B_1$. Полученное после этого множество обозначим через B_2:

$$B_2 = B_1 \setminus \{a_2\} \neq \emptyset.$$

Продолжим эту процедуру до бесконечности. Из извлеченных элементов составим множество A (5.2), которое является счётным, что и требовалось доказать.

В следующих далее трёх теоремах требуется доказать, что некоторое множество счётно.

$\Diamond$ Основой их доказательства является указание корректного способа нумерации элементов множества, т.е. способа записи множества в виде (5.2). Опуская тривиальные подробности, будем в каждом доказательстве указывать лишь способ нумерации.

Теорема 5.2. *Всякое бесконечное подмножество B счётного множества A счётно.*

Доказательство. Запишем множество A в виде (5.2):

$$A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}.$$

Перебирая элементы множества A слева направо и присваивая элементам множества $B \subset A$ номер «встречи» с ним, мы представим множество B в виде (5.2): $B = \{b_1, b_2, ...\}$, где b_1 – первый встреченный элемент, b_2 – второй и т.д. В силу утверждения 5.1 теорема доказана.

Теорема 5.3. *Сумма конечного числа счётных множеств есть счётное множество.*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2, ..., A_N$ – счётные дизъюнктные (непересекающиеся) множества. Последовательность присвоения номеров элементам суммарного множества $A = \bigcup\limits_{j=1}^{N} A_j$, т.е. его представление в виде (5.2), указана стрелками:

$$\begin{array}{lccccccc}
A_1 = & a_1^{(1)}, & & a_2^{(1)}, & & \dots, & & a_{n_1}^{(1)} \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A_2 = & a_1^{(2)}, & & a_2^{(2)}, & & \dots, & & a_{n_2}^{(2)} \\
& \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\
\dots & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A_N = & a_1^{(N)}, & & a_2^{(N)}, & & ..., & & a_{n_{(N)}}^{(N)}
\end{array}$$

Теорема 5.4. *Сумма счётного множества счётных множеств есть счётное множество.*

Доказательство. Не умаляя общности, систему счётных множеств $A_1, A_2 ...$ считаем дизъюнктной (множества не пересекаются).

Пусть $A_1, A_2, ..., A_N$ – счётные дизъюнктные множества. Последовательность присвоения номеров элементам суммарного множества $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$, т.е. его представление в виде (5.2), указана стрелками:

$$\begin{array}{llllllll}
A_1 = & a_1^{(1)}, & \rightarrow & a_2^{(1)}, & & a_3^{(1)}, & \rightarrow & \dots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
A_2 = & a_1^{(2)}, & & a_2^{(2)}, & & a_3^{(2)}, & & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
A_3 = & a_1^{(3)}, & & a_2^{(3)}, & & a_3^{(3)}, & \dots & \\
 & & \swarrow & & & & & \\
\dots & \dots & & & & & &
\end{array}$$

Теорема 5.5. *Если элементы множества A определяются мультииндексом ν, $\nu \in \mathbb{Z}_+^N$, т.е.*

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n), \qquad \nu_k = \overline{0, \infty},$$

то множество $A = \{a_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\dots,\nu_n}\}$ счётно.

Доказательство проведём по индукции. При $n = 1$ (одномерный мультииндекс) теорема очевидна.

Предположим, теорема верна для $n = m$. Покажем, что она верна при $n = m + 1$, т.е. для множества

$$A = \{a_{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\dots,\nu_m,\nu_{m+1}}\}.$$

Зафиксируем произвольное значение индекса $\nu_{m+1} = \nu_{m+1}^{(i)}$.

Тогда множество

$$A_i = \{a_{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_m,\nu_{m+1}^{(i)}}\}$$

задаётся m-мерным мультииндексом $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_m)$ и, следовательно, является счётным.

Множество $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ есть сумма счётного множества счётных множеств. По теореме 5.4 множество A счётно.

Эквивалентность бесконечных множеств

Теорема 5.6. *Если к бесконечному множеству M прибавить конечное или счётное множество A, то*

$$M \cup A \sim M.$$

Доказательство. Следуя теореме 5.1, выделим из бесконечного множества M счётное подмножество D. Тогда множество M можно представить в виде

$$M = P \cup D, \text{ где } P = M \setminus D, \tag{5.3}$$

а множество $M \cup A$ – в виде

$$M \cup A = (P \cup D) \cup A = P \cup (D \cup A). \tag{5.4}$$

Установим биекцию множеств (5.3) и (5.4). Обозначим через i тождественное преобразование множества P в представлениях (5.3) и (5.4), $i : P \leftrightarrow P$. Согласно теореме 5.6, счётные множества D и $(D \cup A)$ эквивалентны. Обозначим биекцию этих множеств через φ, $\varphi : D \leftrightarrow D \cup A$. Тогда биекция ψ множеств M и $(M \cup A)$ определяется выражениями

$$\psi : M \leftrightarrow M \cup A, \tag{5.5}$$
$$\psi(x) = \begin{cases} i(x), & x \in P, \\ \varphi(x), & x \in D. \end{cases}$$

Таким образом, биекция ψ устанавливает эквивалентность множеств M и $M \cup A$, т.е. $M \sim M \cup A$.

Следствие 5.6.1. *Если из бесконечного множества S удалить конечное или счётное подмножество A, то*
$$S \sim S \setminus A. \tag{5.6}$$

Доказательство. Пусть S – бесконечное множество. Следуя теореме 5.6, выделим из S конечное или счётное подмножество A. Обозначим через M множество, получившееся из S после удаления A:

$$M \equiv S \setminus A.$$

Тогда, согласно теореме 5.6,

$$S = M \cup A \sim M = S \setminus A. \tag{5.7}$$

Иначе говоря, всякое бесконечное множество S содержит эквивалентную правильную часть.

◊ Данным свойством не обладает конечное множество, так как в собственном подмножестве конечного множества меньше элементов, чем во всем множестве. Это обстоятельство позволяет сформулировать определение бесконечного множества.

⧫ Множество называется *бесконечным*, если оно содержит эквивалентное собственное подмножество.

5.2. Несчётные множества

Не все множества счётны. Существование несчётных множеств доказывает следующий важный пример.

Теорема 5.7. *Сегмент $U = [0, 1]$ несчётен.*

Доказательство. Предположим противное, тогда все числа из U можно расположить в виде счётной последовательности

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ... \tag{5.8}$$

Запишем эти числа в виде десятичных дробей:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = 0{,}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ \alpha_2 = 0{,}a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ \alpha_3 = 0{,}a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{5.9}$$

Здесь a_{ij} – числа $0, 1, 2, ..., 9$.

Построим (воспользовавшись так называемой диагональной процедурой Кантора) десятичную дробь

$$\beta = 0, b_1 b_2 b_3 ..., \tag{5.10}$$

отличную от всех дробей α_i. Для этого положим

$$\begin{array}{ccc} b_1 \neq a_{11} & & \beta \neq \alpha_1 \\ b_2 \neq a_{22} & \text{тогда} & \beta \neq \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots \end{array}$$

Две дроби равны, когда равны их соответствующие десятичные знаки. Следовательно, $\beta \subset U$ и не входит в последовательность (5.9), что доказывает несчётность U (невозможность представить все элементы U в виде (5.8)).

$\Diamond$ Некоторые числа можно задать двумя способами, например

$$\frac{1}{2} = 0{,}5000... = 0{,}4999\ldots$$

Если потребовать в доказательстве $b_i \neq 0{,}9$, то отмеченная двузначность устраняется и доказательство становится строгим.

5.3. Мощность множества

Введём одно из самых важных понятий теории множеств.

Понятие мощности множества есть обобщение на произвольное множество понятия числа элементов, характеризующего конечные множества. Мощность множества определяется посредством абстракции как то общее, что есть у всех множеств, эквивалентных данному (в том смысле, что отношение φ (4.2) есть биекция).

♦ Множества A и B называются *равномощными*, если они эквивалентны (существует биекция $f : A \to B$).

Равномощность обобщает понятие равночисленности конечных множеств.

На некоторой системе $\mathcal{A}$ множеств $A, B, C, ...$ равномощность является отношением эквивалентности и разбивает $\mathcal{A}$ на непересекающиеся классы $\{\mathcal{K}\}$ равномощных множеств.

Для обозначения класса $\mathcal{K}$ равномощных (эквивалентных) множеств удобно ввести специальный термин: *мощность* или *кардинальное число.*

♦ Множества A и B имеют одинаковую *мощность* или *кардинальное число*, если они эквивалентны ($A \sim B$).

♦ Множество A называется *множеством мощности континуум*, если оно эквивалентно сегменту (отрезку) вещественной оси.

Стандартные обозначения

Мощность множества A обычно обозначается как $m(A)$ или $\overline{\overline{A}}$. Для обозначения мощности счётных множеств используется символ $\aleph_0$, называемый алефнуль. Так, для мощности множества натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ запишем $m(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Для обозначения мощности континуум используется символ C: $m([0, 1]) = C$.

Мощность конечных множеств (натуральные числа) можно сравнивать (установить отношения $=, <, >$.)

Простейшие свойства мощности

Все предыдущие рассуждения о мощности представляют собой реальный интерес, если мощностей «много» (бесконечно много).

Покажем в частности, что для любого множества всегда можно построить множество большей мощности, т.е. невозможно задать множество наибольшей мощности.

Теорема 5.8. *Если задано некоторое множество A, то множество M, элементами которого являются все подмножества множества A, имеет мощность большую, чем A.*

Доказательство. Очевидно, что для мощностей множеств A и M справедливо соотношение $m(M) \geqslant m(A)$, так как в M имеется одноэлементное подмножество множества A.

Допустим, что справедливо равенство $m(M) = m(A)$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между элементами множества $A = \{a\}$ и элементами множества $M = \{B\}$, где $B \subset A$ $(f : a \to B)$. Обозначим через B_0 объединение элементов множества A, не принадлежащих тем подмножествам, которым они соответствуют при взаимно однозначном отображении $f : A \to M$. Пусть a_0 – элемент множества A, соответствующий B_0. Этот элемент не может принадлежать множеству B_0 и не может ему не принадлежать. Полученное противоречие доказывает утверждение.

◊ В частности, множество всех подмножеств множества мощности континуум имеет мощность большую, чем мощность континуума. Мощность такого множества называется *гиперконтинуумом.*

6. Множества действительных чисел

Для чисел, изучаемых в школьном курсе математики, установлены определённые операции: известно, что означает сумма двух чисел, что означает их произведение. При этом выполняются законы арифметики.

Натуральные числа $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ появились в результате счёта и измерения длины, площади, объёма, времени, скорости, температуры и т.п. Будем обозначать множество всех натуральных чисел символом $\mathbb{N}$.

Число нуль и отрицательные числа появились в результате потребностей алгебры. Например, без этих чисел невозможно решить уравнения

$$x + 13 = 13, \qquad x + 13 = 10.$$

♦ Числа, которые можно представить в виде разности натуральных чисел, называются *целыми* и обозначаются $\mathbb{Z}$.

♦ Частное от деления двух целых чисел p/q, если $q \neq 0$, называется *рациональным числом.* Класс рациональных чисел будем обозначать $\mathbb{Q}$.

Каждое рациональное число можно записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби, например $1/3 = 0{,}3333... = 0{,}(3)$ (ноль целых три в периоде).

Однако одних рациональных чисел недостаточно, чтобы обслужить потребности науки и техники. Так, в математике, имея дело только с рациональными числами, мы не можем решить такое уравнение, как $x^2 - 13 = 0$. Этому уравнению должно удовлетворять такое число, квадрат которого равен 13. Можно показать, что среди рациональных чисел $\mathbb{Q}$ нет такого числа. Поэтому в математике рассматривают так называемые *иррациональные числа* $\mathbb{J}$, такие как $\sqrt{13}$, $\sqrt[3]{4}$, $1+2\sqrt{5}$ и т.п. Иррациональные числа $\mathbb{J}$ записываются бесконечными десятичными непериодическими дробями ($\sqrt{2} = 1{,}41\ldots$, $\pi = 3{,}14159\ldots$).

♦ Совокупность всех рациональных $\mathbb{Q}$ и иррациональных $\mathbb{J}$ чисел называется *множеством действительных, или вещественных, чисел* $\mathbb{R}$, или *классом действительных чисел* $\mathbb{R}$. Итак, множество $\mathbb{R}$ действительных чисел состоит из двух частей (подмножеств): множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и множества $\mathbb{J}$ иррациональных чисел.

Задача о нахождении корней квадратных уравнений вида $x^2+13 = 0$ и $x^2+2x+2 = 0$ приводит к понятию комплексного числа: так, $x_{1,2} = \pm i\sqrt{13}$ и $x_{1,2} = -1 \pm i$. Здесь i — мнимая единица, $i^2 = -1$. Множество комплексных чисел обозначается через $\mathbb{C}$.

Значительно меньше внимания в школьном курсе математики уделяется такой характеристике вещественных чисел, как непрерывность множества $\mathbb{R}$. Свойство непрерывности вещественных чисел, как правило, не рассматривается в курсе элементарной математики, хотя без него невозможно строгое построение математического анализа. Под непрерывностью, как правило, понимают, что между любыми двумя действительными числами a и b содержится бесконечное множество промежуточных действительных чисел x (как $\mathbb{Q}$ рациональных, так и $\mathbb{J}$ иррациональных), удовлетворяющих неравенству

$$a < x < b.$$

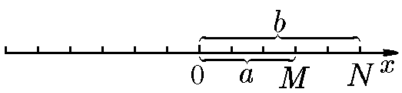


Рис. 7.

Действительные числа $\mathbb{R}$ изображаются точками числовой оси. Числовой осью называют прямую Ox, на которой выбраны: 1) начало отсчёта 0; 2) положительное направление (указывается стрелкой) и 3) масштаб для измерения длин H (рис. 7). Каждому числу соответствует точка на числовой оси и наоборот. Между точками числовой оси и действительными числами $\mathbb{R}$ устанавливается взаимно однозначное соответствие: действительному числу a соответствует точка M с координатой $x = a$, причём точка M будет находиться справа от начала координат, если $x > 0$, и слева от него, если $x < 0$. Наоборот, каждой точке N соответствует действительное число $x_2 = b$ – координата этой точки. Поэтому вместо слова «число» говорят «точка» и наоборот. Перейдём от интуитивного представления о вещественном числе к более строгому. Для этого воспользуемся аксиоматическим подходом.

При аксиоматическом подходе вещественные числа определяются как множество элементов, удовлетворяющее трем группам аксиом. Первая группа — это аксиомы поля (с ними мы встречались в курсе «Линейной алгебры» [10]); вторая группа — это аксиомы порядка; третья группа — аксиомы непрерывности [17]. Аксиомы поля определяют операции сложения и умножения вещественных чисел. Аксиомы порядка устанавливают между числами отношения порядка, т.е. «больше», «меньше» и т.д., причём отношения порядка согласованы с арифметическими операциями.

♦ *Множеством вещественных чисел* называется непрерывное упорядоченное числовое поле и обозначается $\mathbb{R}$.

◊ Иными словами, множество элементов называется *множеством* (*совокупностью*) *действительных* (*вещественных*) *чисел* и обозначается $\mathbb{R}$, если его элементы (числа) удовлетворяют аксиомам поля, порядка и непрерывности.

◊ Задаче определения действительных чисел посвящена обширная литература (см., например, классические учебники [17, 25, 26]).

Всякую конечную или бесконечную совокупность $\mathbb{R}$ действительных чисел называют *числовым множеством.*

Числовые множества обозначаются прописными буквами латинского алфавита $(X, Y, Z, \dots)$, а принадлежащие им числа – строчными буквами $(x, y, z, \dots)$.

6.1. Аксиомы поля

Аксиома 1. *Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ является числовым полем.*

♦ Множество $\mathcal{K}$ называется *числовым полем*, а его элементы *числами*, если любой паре чисел a и b из $\mathcal{K}$ отвечают число $c = a + b$, называемое *суммой* чисел a и b, и число $d = a \cdot b$ (или $d = ab$), называемое *произведением* чисел a и b, причём все $a, b, c, d \in \mathcal{K}$. Операции сложения и умножения подчинены следующим аксиомам.

А1.1. Операция сложения чисел коммутативна, т.е. для всех $a, b \in \mathcal{K}$ справедливо $a + b = b + a$.

А1.2. Операция сложения чисел ассоциативна: для всех $a, b, c \in \mathcal{K}$ справедливо $(a + b) + c = a + (b + c)$.

А1.3. Существует нулевой элемент $0 \in \mathcal{K}$, такой что $a + 0 = a$ для всех $a \in \mathcal{K}$.

А1.4. Для всех $a \in \mathcal{K}$ существует такой противоположный элемент $b \in \mathcal{K}$, что $a + b = 0$.

А1.5. Операция умножения чисел коммутативна: для любых $a, b \in \mathcal{K}$ справедливо $ab = ba$.

А1.6. Для всех $a \in \mathcal{K}$ существует единичный элемент $1 \in \mathcal{K}$, такой, что $1 \cdot a = a$.

А1.7. Операция умножения чисел ассоциативна: для любых $a, b, c \in \mathcal{K}$ справедливо $a(bc) = (ab)c$.

А1.8. Для любого числа $a \in \mathcal{K}$ $(a \neq 0)$ существует обратный элемент $b \in \mathcal{K}$, такой что $ab = 1$ (обратный элемент $b = 1/a = a^{-1}$).

Операции сложения и умножения связаны.

А1.9. Операция умножения дистрибутивна по отношению к сложению: для любых действительных чисел $a, b, c \in \mathcal{K}$ справедливо $(a + b)c = ac + bc$.

Условия А1.1–А1.9 называются *аксиомами поля.*

◊ Разрешимость уравнения $a+b = 0$ для всех $a \in \mathcal{K}$ позволяет ввести операцию вычитания. Разность $a-b$, по определению, есть $a+c$, где c — решение уравнения $b + c = 0$.

◊ Разрешимость уравнения $ab = 1$ для всех не равных нулю $a \in \mathcal{K}$ позволяет ввести операцию деления на $a \neq 0$. Частное b/a есть произведение bc, где c – решение уравнения $ac = 1$.

6.2. Аксиомы порядка

Аксиома 2. *Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ упорядочено.*

♦ Числовое поле R называется *упорядоченным*, если между любыми двумя его элементами a и b имеет место одно и только одно из трёх соотношений:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad a > b,$$

при этом, если $a < b$, $b < c$, то $a < c$.

Абсолютные величины

В математическом анализе мы встретимся с абсолютными величинами чисел и с неравенствами, содержащими знак абсолютных величин.

♦ Под *абсолютной величиной*, или *модулем*, действительного числа a понимается неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Например, $|-13| = -(-13) = 13$; $|5| = 5$; $|0| = 0$; $|-2{,}3| = -(-2{,}3) = 2{,}3$.

Геометрически $|a|$ есть расстояние точки a от начала координат, т.е. $|a|$ есть длина отрезка, соединяющего начало координат с точкой, координата которой $x_1 = a$.

Из определения абсолютной величины следует, что

1. $|a| = |-a|$;
2. $a \leqslant |a|$;
3. $-a \leqslant |a|$.
4. Можно показать, что неравенство $|a| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, равносильно двум неравенствам: $-\varepsilon < a < +\varepsilon$, и запись $|a| \leqslant \varepsilon$ равносильна записи $-\varepsilon \leqslant a \leqslant +\varepsilon$.

Действительно, неравенство $|a| < \varepsilon$ равносильно двум неравенствам: $-\varepsilon < a < +\varepsilon$, так как, согласно 2, $a \leqslant |a| < \varepsilon$ и, следовательно, $a < \varepsilon$. Согласно 3, $-a \leqslant |a| < \varepsilon$, откуда $-a < \varepsilon$ или $a > -\varepsilon$. Окончательно имеем $-\varepsilon < a < +\varepsilon$.

Обратно, если $-\varepsilon < a < +\varepsilon$, то $|a| < \varepsilon$. В самом деле, если $a \geqslant 0$, то, учитывая первое неравенство, получим $|a| < \varepsilon$. Если $a < 0$, то $|a| = -a$, и, умножив первое неравенство на -1, получим $|a| < \varepsilon$. В частности, всегда $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

5. Из неравенства $|a| \geqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, следует или $a \leqslant -\varepsilon$, или $a > \varepsilon$.

♦ Число x называется *неотрицательным* (*положительным*), если $x \geqslant 0$ ($x > 0$). Число x называется *неположительным* (*отрицательным*), если $x \leqslant 0$ ($x < 0$). Число 0 одновременно неположительно и неотрицательно.

Сформулируем основные свойства абсолютных величин.

Свойство 1. Модуль суммы двух чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел, т.е.

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

что можно проверить на примерах, но можно и доказать.

Действительно, пусть $a + b > 0$. Известно, что $a \leqslant |a|$, $b \leqslant |b|$. При сложении этих неравенств получим $a + b \leqslant |a| + |b|$. Но $|a + b| = a + b$ и, следовательно, $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. Пусть $a + b < 0$. Так как $-a < |a|$, $-b \leqslant |b|$, то при сложении этих неравенств получим $-(a + b) \leqslant |a| + |b|$. Но $|a + b| = -(a + b)$. Окончательно имеем

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Свойство 2. Модуль разности двух величин больше или равен разности модулей этих величин, т.е.

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|.$$

Например, $|2 - 9| \geqslant |2| - |9|$, но $|-7| > 2 - 9$, т.е. $7 > -7$;

$$|-3-2| \geqslant |-3| - |2|, \text{ но } |-5| \geqslant |3-2|, \text{ т.е. } 5 > 1.$$

Свойство 3. Модуль произведения двух величин равен произведению модулей, т.е.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$$

Например, $|-3 \cdot 2| = |-3| \cdot |2|$, но $|-6| = 3 \cdot 2$, т.е. $6 = 6$.

Свойство 4. Модуль частного двух величин равен частному модулей делимого и делителя, т.е.

$$|a/b| = |a|/|b|.$$

Интервалы, отрезки, окрестности

Свойство упорядоченности действительных чисел позволяет определить такие объекты, как интервалы, отрезки и окрестности.

♦ *Интервалом* (*промежутком*, *открытым промежутком*, *открытым отрезком*) называется множество таких чисел, которые удовлетворяют неравенствам $a < x < b$, где a и b – данные числа, $a < b$. Символически интервал обозначается так: $]a, b[$, аналитически так: $a < x < b$, графически (рис. 8).

Например, множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-3 < x < 2$, образуют интервал $]-3, 2[$.

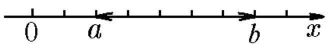


Рис. 8.

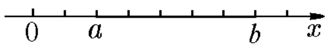


Рис. 9.

♦ *Отрезком* (*сегментом*, *замкнутым промежутком*, *замкнутым отрезком*, *замкнутым интервалом*) называют множество таких чисел x, которые удовлетворяют условиям $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b – данные числа, $a < b$.

Символически отрезок обозначают так: $[a, b]$, аналитически так: $a \leqslant x \leqslant b$, графически так (рис. 9).

Например, отрезок $[-3, 2]$ состоит из всех чисел x, удовлетворяющих условиям $-3 \leqslant x \leqslant 2$; числа -3 и 2 принадлежат отрезку и являются концами отрезка $[-3, 2]$.

♦ Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leqslant b$ или $a \leqslant x < b$, называется *полуинтервалом* и символически обозначается соответственно $]a, b]$ или $[a, b[$.

♦ Интервал $]a, b[$, отрезок $[a, b]$, полуинтервалы $]a, b]$, $[a, b[$ называют *конечными промежутками*, а их точки: $a < x < b$ — *внутренними точками*.

Наряду с конечными рассматривают и бесконечные промежутки:
1) интервалы $[a, +\infty[= \{x | x \in \mathbb{R}, x > a\}$, $]-\infty, a[= \{x | x \in \mathbb{R}, x < a\}$;
2) полуинтервалы $[a, +\infty[= \{x | x \in \mathbb{R}, x \geqslant a\}$; $]-\infty, a] = \{x | x \in \mathbb{R}, x \leqslant a\}$;
3) совокупность всех действительных чисел $\mathbb{R}$ представляют так: $]-\infty, +\infty[= \{x | x \in \mathbb{R}, -\infty < x < +\infty\}$.

♦ *Окрестностью* точки c на числовой оси называют любой интервал $]a, b[$, середина которого есть точка c, или интервал $]a, b[$, содержащий эту точку (здесь имеется в виду любой интервал: как симметричный, так и не симметричный относительно рассматриваемой точки c).

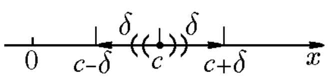


Рис. 10.

Чисто арифметически окрестность точки c можно задать как интервал $]c - \delta, c + \delta[$ или $c - \delta < x < c + \delta$, где δ – любое малое положительное число (рис. 10). Окрестность точки c будем обозначать $S(c, \delta) =]c - \delta, c + \delta[$. Каждая точка c имеет бесконечное множество окрестностей, так как она является серединой бесконечного множества интервалов.

Условие $c - \delta < x < c + \delta$ можно записать так: $|x - c| < \delta$, а последняя запись выражает тот факт, что все точки x, принадлежащие окрестности $]c-\delta, c+\delta[$ точки c, находятся от этой точки на расстоянии, меньшем δ. Например, окрестностью точки 3 будет интервал $]3 - \delta, 3 + \delta[$ или $3 - \delta < x < 3 + \delta$. Придав δ любые малые положительные значения, получим все окрестности точки 3. При выбранном δ точка x принадлежит указанной окрестности, если $3 - \delta < x < 3 + \delta$ или, что то же, $|x - 3| < \delta$. Величину δ называют *радиусом окрестности*, а саму окрестность – *дельта-окрестностью*. Коротко δ-окрестность точки c обозначается как

$$S(c, \delta) \Leftrightarrow \{x|\forall x \in X(|x - c| < \delta)\}.$$

Если из окрестности $S(c, \delta)$ удалить точку c, то получим окрестность $\dot{S}(c, \delta)$, называемую *проколотой*:

$$\dot{S}(c, \delta) \Leftrightarrow \{x|\forall x \in \dot{X}(0 < |x - c| < \delta)\}.$$

♦ Множества $E_1 = \{x \in \mathbb{R}(x < -\varepsilon)\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R}(x > \varepsilon)\}$, $E = \{x \in \mathbb{R}(|x| > \varepsilon)\}$ называются *ε-окрестностями* $-\infty$, $+\infty$ и ∞, соответственно (причём $E = E_1 \cup E_2$), и обозначаются $E_1 = S(-\infty, \varepsilon)$, $E_2 = S(+\infty, \varepsilon)$, $E = S(-\infty, \varepsilon) \cup S(+\infty, \varepsilon)$.

Границы и сечения числового множества

Любое число c, не меньшее всякого числа x, принадлежащего множеству X, называется *верхней гранью множества* X: $c \geqslant x$, если $x \in X$. *Нижней гранью множества* X называется любое число c, не большее всякого числа x, принадлежащего множеству: $c \leqslant x$, если $x \in X$.

Множества, имеющие верхнюю грань, называются *ограниченными сверху*; множества, имеющие нижнюю грань, — *ограниченными снизу*; множества, ограниченные и сверху и снизу, — просто *ограниченными*.

♦ Число c называется *точной верхней* (*нижней*) *гранью* множества X и обозначаются $\sup X$ ($\inf X$), если

1) для всех $x \in X$ $x \leqslant c$ ($x \geqslant c$);
2) для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $\tilde{x} \in X$, такой что $\tilde{x} \geqslant c - \varepsilon$ ($\tilde{x} \leqslant c - \varepsilon$).

Фактически $\sup X$ — это наименьшая из точных верхних граней, а $\inf X$ — наибольшая из точных нижних граней. Именно поэтому их и называют точной верхней и нижней гранью множества, соответственно (от латинского *supremum* — наивысший, *infimum* — наинизший).

Если точные грани множества X существуют, то они определяются однозначно, при этом они могут принадлежать X, а могут и не принадлежать ему.

Интервал не имеет концов: числа a и b являются точными гранями множества $]a, b[$: $a = \inf]a, b[$, $b = \sup]a, b[$, и интервалу не принадлежат.

Отрезок (замкнутый интервал) имеет концы: числа a и b являются точными гранями множества $[a, b]$ и принадлежат отрезку.

Сечением множества $\mathbb{R}$ называют разбиение всех действительных чисел на два класса: нижний класс A и верхний класс B, если оба класса непустые ($A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$); каждое действительное число содержится только в одном классе; любое число нижнего класса A меньше любого числа верхнего класса. Сечение множества $\mathbb{R}$ обозначают $A|B$.

6.3. Аксиома непрерывности

Аксиома 3. *Множество вещественных чисел* $\mathbb{R}$ *– непрерывное.*

Существуют различные формулировки свойства непрерывности: принцип вложенных отрезков Кантора, принцип непрерывности по Дедекинду, принцип супремума, принцип Гейне–Бореля, принцип Больцано–Вейерштрасса и др. В зависимости от выбранной формулировки понятия непрерывности вещественного числа, указанные «принципы» будут либо аксиомами, либо теоремами.

Сформулируем основные принципы, которые дают возможность определить понятие непрерывности множества вещественных чисел и дадим необходимые определения. Пусть R — упорядоченное числовое поле.

Принцип Архимеда. *Для любого числа* $a \in \mathrm{R}$ *существует целое число* n*, такое что* $n > a$.

◊ Впервые принцип Архимеда был сформулирован Евдоксом Книдским в его теории отношений величин. Поэтому аксиому Архимеда иногда называют аксиомой Евдокса.

Из принципа Архимеда непосредственно следует утверждение:

Лемма 6.1. *Для любых двух чисел* $a > 0$ *и* b *существует целое число* n*, такое что* $na > b$*, т.е. складывая* a *с самим собой достаточное количество раз, можно превзойти* b*:* $\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n} > b$.

Действительно, так как $a > 0$, то существует частное b/a. Тогда, согласно аксиоме Архимеда, существует n, такое что $n > b/a$ или $na > b$.

♦ Система числовых отрезков $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$:

$$[a_1, b_1], \quad [a_2, b_2], \quad \ldots, \quad [a_n, b_n], \ldots,$$

$a \in \mathrm{R}$, $b \in \mathrm{R}$, называется *системой вложенных отрезков* (рис. 11), если

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1. \tag{6.2}$$

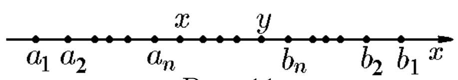


Рис. 11.

♦ Пусть задана система вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$. Будем говорить, что длины отрезков $[a_n, b_n]$ *стремятся к нулю*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой что для всех $n > N$ справедливо неравенство $b_n - a_n < \varepsilon$.

Принцип вложенных отрезков Кантора. *Для любой системы вложенных отрезков* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$ *существует хотя бы один элемент, который принадлежит всем отрезкам системы.*

Из принципа вложенных отрезков непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 6.1. *Для всякой системы вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, существует единственное число, принадлежащее всем отрезкам системы.*

Доказательство. Пусть $\{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}$ — система вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. Доказательство теоремы проведём от противного: предположим, что существуют числа x и y ($x \neq y$), принадлежащие всем отрезкам системы (рис. 11), т.е.

$$a_n \leqslant x \leqslant b_n, \quad a_n \leqslant y \leqslant b_n, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Положим $x < y$ (противоположное неравенство доказывается аналогично). Вычтем из неравенства $y \leqslant b_n$ неравенство $x \geqslant a_n$:

$$y - x \leqslant b_n - a_n. \tag{6.3}$$

Положим $\varepsilon = y - x$, тогда, согласно условию теоремы, существует номер N, такой что для всех $n > N$ выполняется $b_n - a_n < \varepsilon = y - x$. С учётом (6.3) получим

$$y - x < y - x.$$

Полученное противоречие и доказывает утверждение теоремы.

Принцип супремума. *Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество чисел $X \subset \mathrm{R}$ имеет конечную точную верхнюю (нижнюю) грань.*

Принцип Дедекинда. *Любое число $a \in \mathrm{R}$ определяет сечение множества вещественных чисел, и для любого сечения $A|B$ существует число $x \in \mathrm{R}$, которое производит это сечение. Число x является либо наибольшим в нижнем классе A (тогда в верхнем нет наименьшего), либо наименьшим в верхнем классе B (тогда в нижнем нет наибольшего).*

Это утверждение положено Дедекиндом в основу определения действительных чисел.

Теорема 6.2. *Пусть R — упорядоченное поле. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) *для R выполнены принцип Архимеда и принцип вложенных отрезков Кантора;*
2) *для R выполнен принцип супремума;*
3) *для R выполнен принцип непрерывности Дедекинда.*

Доказательство. I. Покажем, что из принципа вложенных отрезков Кантора следует принцип супремума.

I.1. Пусть множество $X \subset \mathrm{R}$ — непустое ($X \neq \emptyset$) ограниченное множество. Поскольку множество X непусто, то существует хотя бы один элемент $a \in X$. Согласно определению ограниченного множества, существует число $b \in \mathbb{R}$, такое что $x \leqslant b$ для всех $x \in X$. Так как $a \in X$, то отрезок $[a, b]$ содержит хотя бы одну точку множества X. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Отрезок $[a, (a+b)/2]$ будем называть *левым*, а отрезок $[(a+b)/2, b]$ — *правым*. Если существует хотя бы один элемент $x \in \mathrm{R}$, такой что $x \in [(a+b)/2, b]$, то обозначим $a_1 = (a+b)/2$, $b_1 = b$. В противном случае положим $a_1 = a$, $b_1 = (a+b)/2$. По построению отрезок $[a_1, b_1]$ содержит хотя бы один элемент множества X. Продолжив описанную процедуру, получим последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$: $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$

Отметим, что по построению для всех n число b_n является верхней гранью множества X, т.е. $x < b_n$ для всех $x \in X$.

I.2. Покажем, что длина отрезков $[a_n, b_n]$ стремится к нулю с ростом n. Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$, согласно аксиоме Архимеда, существует натуральное число N_ε, такое что для всех $n > N_\varepsilon$ выполняется

$$n > \frac{b-a}{\varepsilon} \text{ и, следовательно, } \frac{b-a}{n} < \varepsilon.$$

Длина l_n отрезка $[a_n, b_n]$ равна

$$l_n = b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},$$

и

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + ... + n + 1 > n.$$

Следовательно, $1/2^n < 1/n$ и для всех $n > N_\varepsilon$

$$l_n < \frac{b-a}{2^n} < \frac{b-a}{n} < \varepsilon.$$

Таким образом, длины l_n отрезков $[a_n, b_n]$ стремятся к нулю с ростом n.

В силу принципа вложенных отрезков Кантора существует и притом единственная точка c, принадлежащая всем вложенным отрезкам: $c \in [a_n, b_n]$, $n = \overline{1, \infty}$.

I.3. Покажем, что для всех $x \in X$ справедливо $x < c$. Предположим противное, что существует $x_0 \in X$, такое что $x_0 > c$. Из условия, что $l_n = b_n - a_n$ стремится к нулю с ростом n, следует, что существует число N, такое что $b_N - a_N < x_0 - c$. Следовательно,

$$b_N < x_0 - (c - a_N), \tag{6.4}$$

но $c \in [a_N, b_N]$ и поэтому $c - a_N \geqslant 0$, и

$$x_0 - (c - a_N) \leqslant x_0. \tag{6.5}$$

Из неравенств (6.4) и (6.5) следует

$$b_N < x_0,$$

что невозможно, так как по построению для всех n число b_n является верхней гранью множества X. Полученное противоречие показывает, что такое число x_0 не существует.

I.4. Покажем, что для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon > 0$, такое что $x_\varepsilon > c - \varepsilon$. Для выбранного ε существует такой номер N_ε, что $b_{N_\varepsilon} - a_{N_\varepsilon} < \varepsilon$. По построению отрезок $[a_{N_\varepsilon}, b_{N_\varepsilon}]$ содержит хотя бы одну точку множества X. Следовательно, существует $x \in [a_{N_\varepsilon}, b_{N_\varepsilon}]$, $x \in X$, и $x < c$, т.е.

$$a_{N_\varepsilon} \leqslant x \leqslant c \leqslant b_{N_\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что $c - x \leqslant b_{N_\varepsilon} - a_{N_\varepsilon} < \varepsilon$ и $c - \varepsilon < x$.

Таким образом, согласно определению точной верхней грани, $c = \sup X$, что и требовалось доказать.

Доказательство существования точной нижней грани проводится аналогично.

II. Покажем, что из принципа супремума следуют принцип Кантора и принцип Архимеда.

II.1. Предположим, что принцип супремума справедлив, а принцип Архимеда не выполняется, т.е. существует число a, такое что для всех натуральных чисел $n \in \mathbb{N}$ справедливо $n \leqslant a$. Но тогда множество натуральных чисел ограничено сверху и, следовательно, согласно принципу супремума, имеет точную верхнюю грань $z = \sup \mathbb{N}$. По определению верхней грани множества X для любого $\varepsilon > 0$ существует $x \in X$, такое что $x > z - \varepsilon$. Поскольку в нашем случае множество X счётное, положим $\varepsilon = 1$. Тогда существует число n, такое что $z - 1 < n$ и $z < n + 1$. Так как $n + 1 \in \mathbb{N}$, последнее условие противоречит ограниченности множества натуральных чисел. Полученное противоречие означает, что числа z не существует и принцип Архимеда справедлив.

II.2. Пусть $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ — система вложенных отрезков. В силу неравенства (6.2) множество $\{a_n\}$ ограничено сверху, поэтому у него существует точная верхняя грань $a = \sup\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Для любого n числа b_n ограничивают сверху множество $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, а число a является верхней гранью множества $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следовательно, $a \leqslant b_n$ для всех n, т.е. множество $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничено снизу, и у него существует точная нижняя грань $b = \inf\{b_n\}$. По определению нижней грани, $a \leqslant b$. Таким образом, для любого номера n справедливо неравенство $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$. Следовательно, каждая точка отрезка $[a, b]$ содержится во всех отрезках системы $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. для всех $x \in [a, b]$ справедливо $x \in [a_n, b_n]$. Таким образом, принцип Кантора справедлив.

Следовательно, принцип Кантора вместе с принципом Архимеда эквивалентен принципу супремума.

III. Покажем, что принцип Дедекинда следует из принципа супремума.

III.1. Пусть $x \in \mathrm{R}$ — некоторое число. Обозначим через A множество чисел, таких что $x < a$, а через B множество чисел, больших a: $y \in B$, $y > a$. Само число a можно отнести как к классу A, так и к классу B. По построению, множества A и B непустые: $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Таким образом, число a производит сечение $A|B$, если $x \leqslant a \leqslant y$, $x \in A$, $y \in B$.

III.2. Пусть $A|B$ — некоторое сечение множества R. По определению сечения, для любого $x \in A$ и $y \in B$ справедливо $x < y$. Таким образом, множество A ограничено сверху, а множество B снизу, и $\sup A \leqslant \inf B$. Предположим, что $\sup A < \inf B$. Тогда существует число $c = (\sup A + \inf B)/2$, такое что $\sup A < c < \inf B$. Следовательно, $c \notin A$ и $c \notin B$, что невозможно по определению сечения. Поэтому таких чисел c не существует и возможно лишь $\sup A = \inf B$. Таким образом, из принципа супремума следует принцип Дедекинда.

IV. Покажем, что из принципа Дедекинда следует принцип супремума.

IV.1. Пусть $X \subset \mathrm{R}$ — ограниченное сверху непустое множество ($X \neq \emptyset$). Обозначим через B множество всех чисел, ограничивающих сверху множество X, а через A — множество всех остальных чисел ($A = \mathrm{R} \setminus B$). Покажем, что множества A и B образуют сечение.

По построению $A \cup B = \mathrm{R}$. Множество B непусто, так как, по условию, множество X ограничено сверху, т.е. существует число $b \in \mathrm{R}$, такое что для всех $x \in X$ выполняется $x \leqslant b$. По построению $b \in B$.

Убедимся, что множество A также не пусто. По условию, множество X не пусто, следовательно, существует элемент $x \in X$, такое что для любого $\varepsilon > 0$ справедливо $x - \varepsilon < x$. По построению $x - \varepsilon \notin B$, так как множество B состоит из ограничивающих множество X элементов. Следовательно, $x - \varepsilon \in A$, и множество A не пусто.

Покажем, что все числа $a \in A$ меньше любого числа $b \in B$, т.е. $a < b$. Предположим противное, что для некоторого числа $a_0 \in A$ существует $b_0 \in B$, такое что $a_0 \geqslant b_0$. По построению, все элементы множества B ограничивают множество X, т.е. для всех $x \in X$ и всех $b \in B$ справедливо $x \leqslant b$. Следовательно, для всех $x \in X$ выполняется $x \leqslant b_0 \leqslant a_0$, т.е. число a_0 ограничивает множество X и, по построению, $a_0 \in B$. Полученное противоречие показывает, что таких чисел a_0 и b_0 не существует. Следовательно, $a \leqslant b$ для всех $a \in A$ и всех чисел $b \in B$. Кроме того, мы показали, что $A \cup B = \mathrm{R}$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Следовательно, множества A и B образуют сечение множества действительных чисел. Согласно принципу Дедекинда, существует число c, которое порождает это сечение.

IV.2. Покажем теперь, что число c ограничивает сверху множество X. Предположим противное, что существует элемент $x \in X$, такой что $x > c$. Пусть число y удовлетворяет условию $c < y < x$. Поскольку $y > c$, а c порождает сечение $A|B$, то $y \in B$ и, следовательно, оно ограничивает множество X. Последнее невозможно, так как, по построению, $y < x$, $x \in X$. Полученное противоречие показывает, что число c ограничивает сверху множество X и, следовательно, $c \in B$, а поэтому является наименьшим элементом множества B. По построению, множество B состоит из чисел, ограничивающих множество X, следовательно, число c является верхней гранью множества x: $c = \sup X$.

Доказательство для нижней грани аналогично.

Таким образом, мы показали, что принципы Кантора и Архимеда эквивалентны принципу супремума, который, в свою очередь, эквивалентен принципу Дедекинда. Следовательно, теорема доказана. Поскольку все три подхода эквивалентны, то, не уменьшая общности, любой из них можно положить в основу определения непрерывности множества вещественных чисел. Мы будем пользоваться следующим определением.

♦ Упорядоченное числовое поле будем называть *непрерывным*, если для него справедливы принципы Архимеда и вложенных отрезков Кантора.

ГЛАВА 2

Понятие о функции одной вещественной переменной

7. Понятие о функции одной вещественной переменной

7.1. Постоянные и переменные величины

При изучении количественной закономерности какого-то процесса математика отвлекается от характера физических величин, исследует отвлеченную математическую величину, которая обозначается буквой или символом. В математике величиной называют всё то, что может быть выражено числом.

В математическом анализе исследуются постоянные и переменные величины.

♦ *Постоянной величиной* называется величина, которая в данном процессе сохраняет неизменное значение.

♦ *Переменной величиной* называется величина, которая в исследуемом процессе может принимать различные значения.

Данные выше определения условны. Бывает, что одну и ту же величину при одних условиях можно рассматривать как постоянную, а при других — как переменную. Так, при точных расчётах с учётом действия температуры длина стержней конструкции есть величина переменная, а при грубых расчётах считают длины этих стержней постоянными.

Существуют постоянные величины, которые сохраняют неизменное значение при любых условиях. Например, сумма углов любого треугольника на плоскости равна 180° или отношение длины l окружности к диаметру D равно $\pi = 3{,}141592653\ldots$ (независимо от радиуса окружности).

Иногда удобно постоянную величину рассматривать как переменную, которая последовательно принимает значения, равные между собой. Например, $y = C$, $C > 0$.

Например, сумма $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ не будет переменной величиной с изменением x, так как, хотя с изменением угла x изменяются оба слагаемые, сумма эта всегда равна единице.

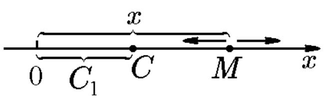


Рис. 12.

Если постоянная величина C_1 геометрически изображается неподвижной точкой числовой оси, абсцисса которой равна числовому значению величины, то переменная величина изображается подвижной точкой, абсцисса которой всякий раз равна значению рассматриваемой переменной величины (рис. 12).

♦ Переменная x называется *ограниченной*, если можно указать такие два числа a и b, что все значения x, начиная с некоторого, удовлетворяют условию $a \leqslant x \leqslant b$. Число a называют *нижней границей*, а число b – *верхней границей* переменной x.

Геометрически переменная x является ограниченной, если можно указать такой конечный отрезок $[a; ???b]$, который содержит, начиная с некоторого значения переменной, все её значения.

Например, переменная $x = \cos t$ является ограниченной, так как все её значения лежат на отрезке $[-1; 1]$ или $-1 \leqslant x \leqslant 1$, который является областью изменения переменной x.

♦ Совокупность всех числовых значений переменной величины x называется *областью её изменения*.

Постоянные величины обозначаются буквами из начала латинского алфавита: $a, b, c, \ldots$, а переменные — буквами из конца этого алфавита: x, y, z, t, u, v, w.

При изучении какого-то процесса можно заметить, что в нем участвуют несколько переменных, которые связаны между собой определённой зависимостью.

Ниже мы рассмотрим частные примеры функций — функции действительных переменных.

Математика интересуют не переменные величины, взятые в отдельности, а связь между переменными и зависимость одних величин от других.

Например, согласно закону Бойля–Мариотта, $pV = C$, откуда $p = C/V$, т.е. при данной температуре t давление газа p газа в замкнутом сосуде обратно пропорционально его объёму V. Если будем изменять объём V, то будет изменяться и давление p.

Площадь круга $S = \pi R^2$. При изменении радиуса R круга будет изменяться его площадь S. Радиус может меняться произвольно, поэтому R можно назвать *независимой переменной.* При изменении R будет изменяться S, поэтому S можно назвать *зависимой переменной.*

Основной целью математического анализа является изучение функциональной зависимости, ибо в ней заложена вся идея овладения явлениями природы. Системный подход к изучению явлений природы и техники требует, чтобы величины, участвующие в реальном процессе, изучались в их взаимной связи, а не порознь. Математическим выражением такой связи реальных величин и является идея функциональной зависимости.

Любой закон природы, дающий связь одних явлений с другими, устанавливает функциональную зависимость между переменными величинами.

7.2. Определение функции и операции над функциями

В разделе «Функция на множестве» мы рассмотрели абстрактное понятие функции как отображения одного множества на другое. Перейдём теперь к изучению конкретных функций одной вещественной переменной.

♦ Переменная величина y называется *однозначной функцией независимой переменной* x, если любому определённому (допустимому) значению x, принадлежащему некоторой области X изменения x ($x \in X$), соответствует одно определённое значение y.

♢ Эту функциональную зависимость между переменными y и x записывают так: $y = f(x)$ и читают: «y есть функция от x». Символ f указывает на те операции (сложение, вычитание, умножение, деление и т.д.), которые нужно совершить над аргументом x, чтобы получить соответствующие им значения функции.

♦ Переменная величина x, которая может принимать свои допустимые числовые значения в зависимости от решаемой задачи, называется *независимой переменной*, или *аргументом.*

♢ Рассматривается и такая зависимость между переменными x и y, при которой одному значению аргумента x соответствуют два или более значений функции. Такие функции называются многозначными. Например, функция $y = \pm\sqrt{x}$, или $y^2 = x$, – двузначная, так как одному значению аргумента x соответствуют два значения функции.

Функциональная зависимость будет считаться заданной, если будет дано правило или закон для определения значения функции при данном значении аргумента. Функция $y = f(x)$ при одних значениях может существовать, а при других не имеет смысла.

♦ Множество всех значений аргумента x, при которых функция определена (имеет смысл), называется *областью существования* функции и обозначается $D(f)$.

♦ Совокупность всех значений, которые функция принимает на множестве $D(f)$, называется *множеством значений функции* и обозначается $E(f)$.

♦ Число $y_0 \in E(f)$, соответствующее значению $x_0 \in D(f)$, называют *частным значением* функции $y = f(x)$ или значением функции при $x = x_0$ и обозначают $y_0 = f(x_0)$ или $y_0 = f(x)\big|_{x=x_0}$. Каждому $y_0 \in E(f)$ соответствует, по крайней мере, одно $x_0 \in D(f)$ такое, что $f(x_0) = y_0$.

Область $D(f)$ существования функции зависит как от самой природы функции, так и от постановки данной задачи. Поэтому нельзя думать, что независимая переменная x может всегда принимать какие угодно значения. Так, для функции $f(x) = \cos x$ или для функции $f_1(x) = x^2$ аргумент x может принимать любые значения $-\infty < x < +\infty$, т.е. $D(f)$ и $D(f_1)$ есть $]-\infty, +\infty[$, а для функции $y = 13/(5 - x)$ аргумент x не может принимать значение, равное 5, ибо в этом случае знаменатель обращается в нуль и функция не существует (не имеет смысла). $D(13/(5 - x))$ состоит из двух интервалов: $-\infty < x < 5$ и $5 < x < +\infty$ или $]-\infty, 5[\cup]5, +\infty[$. В свою очередь, $E(\cos x) = [-1, 1]$, $E(x^2) = [0, +\infty[$, $E(13/(5 - x)) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

Если два множества $D(f)$ и $E(f)$ изобразить промежутками на осях Ox и Oy, то графически функцию $y = f(x)$ можно рассматривать как отображение множества $X = D(f) \subset Ox$ на множество $Y = E(f) \subset Oy$ (рис. 13). Поэтому термин «функция» имеет синонимы: отображение, преобразование, и ещё одно обозначение $f : X \to Y$.

Бóльшую наглядность это отображение приобретает, если оси Ox и Oy рассматривать как оси декартовой системы координат xOy. В этом случае функции $y = f(x)$ будет соответствовать множество точек с координатами $M(x, f(x))$, которые можно объединить в линию, называемую *графиком функции* $y = f(x)$ (рис. 14).

♦ Функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ называются *равными*, если они имеют одну и ту же область определения: $D(f_1) = D(f_2) = X$, и для каждого $x \in X$ значения этих функций совпадают: $f_1(x) = f_2(x)$, $\forall x \in X$.

Например, функции $y = \sqrt{x^2}$ и $y = |x|$ равны (совпадают), поскольку $D(\sqrt{x^2}) = D(|x|) = \mathbb{R}$ и для всех $x \in \mathbb{R}$ $\sqrt{x^2} = |x|$.

♦ Функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ называются *равными на множестве* $D' = D(f_1) \cap D(f_2)$, если $f_1(x) = f_2(x)$ для всех $x \in D'$.

Например, функции $y = |x|$ и $y = x$ равны на множестве $D' = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

♦ Если $f(x) = \varphi(x)$ на множестве $D(\varphi) \subset D(f)$, то функция $\varphi(x)$ называется *сужением функции* $f(x)$ *на множество* $D(\varphi)$.

Естественным образом для функций вводятся арифметические операции. Пусть f_1 и f_2 определены на одном и том же множестве D (или являются соответствующими сужениями на это множество). Тогда функции, значения которых в каж-

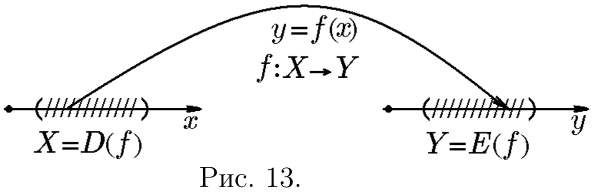


Рис. 13.

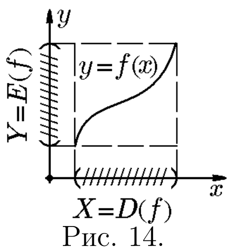


Рис. 14.

дой точке $x \in D$ равны $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$, $f_1(x)/f_2(x)$ ($f_2(x) \neq 0$ для всех $x \in D$), называются *суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным* функций f_1 и f_2 и обозначаются $f_1 \pm f_2$, $f_1 f_2$, f_1/f_2.

Кроме арифметических операций вводится ещё одна, называемая *композицией* функций. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ определены на множествах $D(f)$ и $D(\varphi)$, причём $D(f) \supset E(\varphi)$. Тогда функцию, принимающую при каждом $x \in D(\varphi)$ значение $y(x) = f(\varphi(x))$, называют *композицией* функций f и φ или *сложной функцией* с промежуточным аргументом $\varphi(x)$ и обозначают $y = f(\varphi(x))$ или $y = f \circ \varphi$.

Например, функция $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$, является композицией функций $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - x^2$, или сложной функцией $y = \sqrt{u}$ с промежуточным аргументом $u = 1 - x^2$. Эта функция относится к совокупности элементарных функций, т.е. функций, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и композиций. К основным элементарным функциям относят постоянную, степенную, показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Не останавливаясь на построении графиков функций, являющихся результатом арифметических операций, поясним возможность геометрического построения графика композиции двух функций $f \circ \varphi$, или сложной функции $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. В двух прямоугольных системах координат uOy и $xOy(u)$, расположенных так, как показано на рис. 15, строим график функции $y = f(u)$ и график $u = \varphi(x)$. На графике $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ выбираем точку A с координатами (u, y). На другом графике $u = \varphi(x)$ находим точку B с ординатой u. Ее абсцисса определяет значение аргумента x. Восстановив из этой точки на оси Ox перпендикуляр длиной y, получим точку $C(x, y)$ графика сложной функции $y(x) = f(\varphi(x))$. Аналогично строятся другие точки графика этой функции.

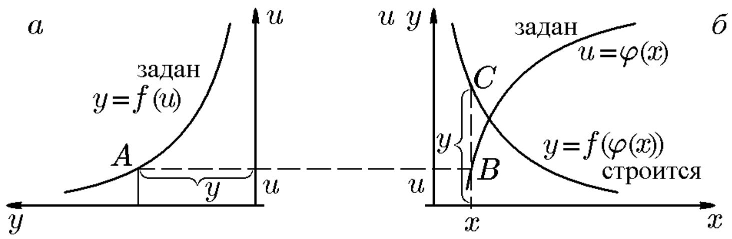


Рис. 15.

7.3. Способы задания функций

Существуют три способа задания функции.

1. *Табличный способ.* Этот способ применяется в экспериментах (в технике и естествознании), когда приходится записывать значения аргумента и функции в виде таблицы, получать функциональную зависимость в виде таблицы, которая содержит ряд числовых значений аргумента и соответствующие им значения функции.

Например, наблюдая за температурой воздуха T в зависимости от времени t, можно получить таблицу

t	6^{00}	7^{00}	8^{00}	9^{00}	10^{00}	11^{00}	12^{00}
T	$-15°$	$-14°$	$-13°$	$-10°$	$-8°$	$-5°$	$0°$

которая определяет температуру T как функцию времени t.

Приведём ещё примеры таблично заданных функций:
• таблицы квадратов и кубов;
• таблицы квадратных и кубических корней;
• таблицы логарифмов;
• таблицы тригонометрических функций и т.д.
Достоинством табличного способа является то, что для значения аргумента в таблице дано значение функции.

Недостатки табличного способа: 1) не обладает наглядностью, так как по таблице трудно составить представление о поведении функции; 2) в таблице даны только некоторые значения аргумента и соответствующие им значения функции, и может не оказаться тех x и соответствующих им значений y, которые нужны.

2. *Графический способ.* Этот способ состоит в том, что в системе координат xOy задаётся некая кривая. Абсцисса каждой точки кривой даёт значение аргумента, а ордината — соответствующее значение функции. Такая кривая называется *графиком функции.* Этот способ применяется в науке и технике как вспомогательное средство наглядного изучения функции и как способ задания неизвестных функций, которые записать в аналитической форме затруднительно. Так, в экспериментальных исследованиях самопишущие приборы автоматически записывают изменение одной величины в зависимости от изменения другой.

Например, барограф записывает изменение атмосферного давления; термограф вычерчивает график температуры; индикатор — график зависимости между объёмом и давлением газа, заключенного в цилиндре газового или парового двигателя; гигрограф — график влажности.

Преимущества графического способа: а) наглядность, что даёт возможность проследить основные свойства функции и ход её изменения (на каком участке функция возрастает или убывает, выпуклая она или вогнутая, в какой точке она имеет максимум или минимум и т.д.); б) в пределах графика можно определить значения функции y для любого x.

Недостатком является ограниченная точность при определении значений y при данных x.

3. *Аналитический способ.* Этот способ состоит в том, что даётся формула (или уравнение), указывающая, какие математические операции нужно выполнить над аргументом, чтобы получить соответствующее ему значение функции. Например, дана функция $y = x^2/(3 + x^2)$, которая определяет y как функцию от x. Можно заметить, что значение функции при любом действительном x положительно; указаны те операции, которые нужно выполнить над аргументом x, чтобы получить соответствующее значение функции; можно вычислить значение функции при данном x с любой точностью и исследовать свойства функции.

Достоинства такого способа: компактность задания функции; возможность определения значения функции для любого действительного x и с любой точностью; возможность использования аппарата математического анализа; возможность перехода к табличному или графическому заданию функции. Недостатки: недостаточная наглядность функциональной зависимости между величинами; необходимость порой громоздких вычислений.

7.4. Классификация функций

Все функции, заданные аналитически в явном виде $y = f(x)$, делятся на два класса: алгебраические и трансцендентные (рис. 16).

К алгебраическим относятся те функции, которые получаются в результате применения к аргументу x четырёх алгебраических операций. К этому классу

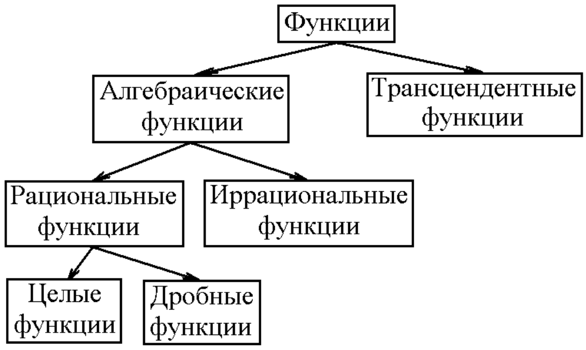


Рис. 16.

можно отнести целую рациональную функцию, или полином:

$P_1(x) = a_1x + a_0$ – полином первой степени;

$P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ – полином второй степени;

$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ – полином n-й степени ($a_n \neq 0$),

где n – целое положительное число; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты полинома (постоянные числа).

Среди функций этого класса можно отметить:

а) $P_1(x) = a_1x + a_0$ или $y = kx + b$ – линейную функцию, график которой есть прямая линия, наклоненная к оси Ox под углом α ($\operatorname{tg}\alpha = k$ – угловой коэффициент прямой) и пересекающая ось Oy в точке $(0; b)$. Если $k = 0$, то линейная функция есть постоянная $y = b$. Если $b = 0$, то линейная функция $y = kx$ – прямо пропорциональная зависимость, график которой проходит через начало координат. На рис. 17 приведены графики линейных функций $y = x + 3$, $y = 3$, $y = x$.

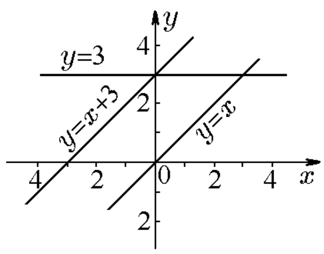


Рис. 17.

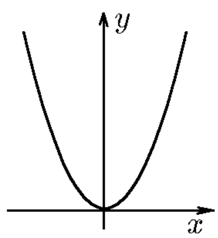


Рис. 18.

б) Квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$. При $a = 1$, $b = c = 0$ получим параболу $y = x^2$ с вершиной в начале координат, симметричную относительно оси Oy (рис. 18). Заметим, что область существования целой рациональной функции $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ есть вся числовая ось $]-\infty, \infty[$ или $-\infty < x < \infty$.

♦ Алгебраическая функция называется *рациональной*, если над аргументом x не совершается действие извлечения корня. Например, $y = x^2 - 2x + 3$, $y = (x + 1)/(1 - x)$.

в) Степенную функцию $y = x^n$ (n — натуральное число).

Алгебраическая функция будет целой в том случае, если её знаменатель не зависит от аргумента, например $y = x^2 - x$, $y = (x^2 + 3)/2$. Дробная рациональная функция представляет собой отношение двух полиномов:

$$\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0}{b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0}, \quad n < m.$$

Заметим, что дробная рациональная функция определена или существует при всех значениях x кроме тех, которые обращают в нуль знаменатель. Простейшей функцией этого вида будет дробно-линейная:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},$$

где $c \neq 0$. При $a = d = 0$, $b = m$, $c = 1$. Функция $y = m/x$ – обратно пропорциональная зависимость, график которой есть гипербола.

♦ Алгебраическая функция называется *иррациональной*, если над аргументом x совершается операция извлечения корня. Примерами иррациональных функций являются

$$y = \pm\sqrt{x}, \quad y = \sqrt[3]{2x+1}, \quad y = \sqrt{\frac{x-1}{x^2+5}}.$$

К классу трансцендентных функций относятся все неалгебраические функции.

♦ Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной*.

К трансцендентным функциям относятся: показательная функция $y = a^x$, $a \neq 0$, $a \neq 1$; логарифмическая функция $y = \log_a x$.

7.5. Функции чётные и нечётные; особенности их графиков

♦ Если для функции $y = f(x)$, определённой на $[-a, a]$, для всех x выполняется условие

$$f(-x) = f(x), \tag{7.1}$$

то функция называется *чётной*. Если выполняется условие

$$f(-x) = -f(x), \tag{7.2}$$

то функция называется *нечётной*.

Например, функция $f(x) = x^2$ – чётная (см. рис. 18), так как для неё выполняется условие (7.1). Действительно,

$$f(x) = x^2. \tag{7.3}$$

Заменив x на $-x$, будем иметь

$$f(-x) = x^2. \tag{7.4}$$

Правые части (7.3) и (7.4) равны, будут равны и левые, т.е. $f(x) = f(-x)$, что и требовалось доказать.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат (см. рис. 18).

Функция $y = x^3$ – нечётная (рис. 19), так как выполняется условие нечётности (7.2). В самом деле, если $f(x) = x^3$ или

$$-f(x) = -x^3. \tag{7.5}$$

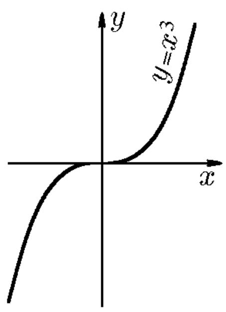


Рис. 19.

Заменив x на $-x$, будем иметь

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3. \tag{7.6}$$

Правые части (7.5) и (7.6) равны, будут равны и левые, т.е. $f(-x) = -f(x)$, что и требовалось доказать.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат (см. рис. 19).

Пример 7.1. Показать, что график функции $y = \sin x/x$ симметричен относительно оси Oy.

Решение. Функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = 1/x$ являются нечётными, следовательно, их произведение является чётной функцией, а график чётной функции, как уже отмечалось, симметричен относительно оси ординат.

Пример 7.2. Показать, что график функции $y = a^x + 1/a^x$ симметричен относительно оси Oy.

Решение. Заменим x на $-x$: $y(-x) = a^{-x} + a^x = a^x + a^{-x} = y(x)$, следовательно функция $y(x)$ является чётной.

Пример 7.3. Показать, что график функции $y = (a^x - 1)/(a^x + 1)$ симметричен относительно начала координат.

Решение. Заменим x на $-x$:

$$y(-x) = \frac{a^{-x} - 1}{a^{-x} + 1} = \frac{1 - a^x}{1 + a^x} = -\frac{a^x - 1}{a^x + 1} = -y(x),$$

следовательно, $y(x)$ — нечётная функция, а график нечётной функции, как уже отмечалось, симметричен относительно начала координат.

Пример 7.4. Показать, что функция $y = x^2 + x$ не является ни чётной, ни нечётной, т.е. её график не симметричен относительно оси Oy и не симметричен относительно начала координат. Построить график этой функции.

Решение. Заменим x на $-x$: $y(-x) = x^2 - x \neq \begin{cases} y(x), \\ -y(x), \end{cases}$ т.е. функция $y(x)$ не является ни чётной, ни нечётной.

Представление $y = x^2 + x = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ задаёт параболу с вершиной в точке $M(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, проходящую через точки $O(0,0)$ и $O'(-1,0)$ (рис. 20).

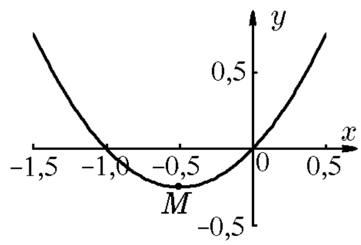


Рис. 20.

Бывает, что функциональная зависимость между x и y задаётся не одной формулой, а несколькими. Например, функция может быть задана двумя аналитическими выражениями для разных областей изменения аргумента x:

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leqslant 1; \\ 2x & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Геометрически образ этой функции задаётся частью параболы $y = x^2$ на $]-\infty, 1]$ и прямой $y = 2x$ при $x > 1$.

Пример 7.5. Построить график функции, заданной двумя аналитическими выражениями

$$\text{а)}\quad y = \begin{cases} x^2 & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ 1 & \text{при } |x| > 1; \end{cases} \qquad \text{б)}\quad y = \begin{cases} -x + 1 & \text{при } x \leqslant -1; \\ x^3 & \text{при } x > -1. \end{cases}$$

Решение. Графики функций изображены на рис. 21,*а* и рис. 21,*б*, соответственно.

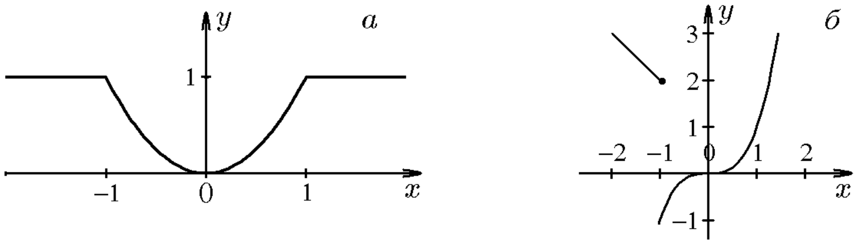


Рис. 21.

7.6. Периодические функции

В математическом анализе в формулах $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и других x рассматривают как радианную меру угла, например $y = \sin 13$. Это значит, что значение функции равно синусу угла в 13 рад (1 рад $= 57°17'44{,}8''$, а $\sin 1$ – значение функции, равное синусу угла в 1 рад, т.е. $\approx 0{,}8414$.

Известно, что все тригонометрические функции периодичны. Так, период функции $\sin x$ и $\cos x$ равен 2π:

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x; \quad \cos(x \pm 2\pi) = \cos x,$$

а период функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ равен π:

$$\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \operatorname{tg} x; \quad \operatorname{ctg}(x \pm \pi) = \operatorname{ctg} x.$$

♦ Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое постоянное число T, от прибавления или вычитания которого к любому x значение функции не изменяется:

$$f(x \pm T) = f(x). \tag{7.7}$$

Условие (7.7) называется *условием периодичности.*

Равенство (7.7) справедливо для любого x, поэтому можно записать

$$f(x \pm 2T) = f(x); \quad f(x \pm 3T) = f(x), \quad \ldots, \quad f(x \pm kT) = f(x).$$

♦ Наименьшее положительное число T, для которого выполняется условие (7.7), называется *периодом функции* $f(x)$.

Условие периодичности (7.7) данной функции можно записать так:

$$f(x + T) - f(x) \equiv 0. \tag{7.8}$$

Пример 7.6. Найти период функции

$$y = \cos rx, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Решение. Используем условие периодичности (7.8). Для нашего случая

$$\cos r(x + T) - \cos rx \equiv 0. \tag{7.9}$$

Если мы сумеем найти такое наименьшее положительное число T, при котором разность (7.9) обратится в нуль при всех x, то тем самым найдём период данной функции:

$$f(x + T) - f(x) = \cos r(x + T) - \cos rx =$$

$$= -2\sin\frac{r(x+T+x)}{2}\sin\frac{r(x+T-x)}{2} = -2\sin r\Big(x+\frac{T}{2}\Big)\sin\frac{rT}{2} \equiv 0.$$

Второй сомножитель не зависит от x. Приравняем его к нулю:

$$\sin\frac{rT}{2} = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{rT}{2} = k\pi, \quad T = \frac{2k\pi}{r} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Из последнего соотношения видно, что наименьшим положительное число T будет при $k = 1$: $T = 2\pi/r$. Период функции $y = \cos x$ будет равен $T = 2\pi$; $T = 2\pi/2 = \pi$ — период функции $y = \cos 2x$; $T = 2\pi/r$ — период функции $y = \cos rx$.

График периодической функции повторяет себя через каждый промежуток длины T, поэтому достаточно рассмотреть поведение периодической функции на интервале, длина которого равна периоду функции.

7.7. Ограниченные и монотонные функции

♦ Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу* на множестве $X \subset D(f)$, если существует число m такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant m$, т.е.

$$\exists m : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geqslant m.$$

♦ Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* на $x \in X \subset D(f)$, если существует число M такое, что при всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$, т.е.

$$\exists M : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leqslant M.$$

♦ Функция $y = f(x)$, ограниченная на $x \in X \subset D(f)$ сверху и снизу, называется *ограниченной на этом множестве*:

$$\exists \mu > 0 : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| < \mu. \tag{7.10}$$

♦ Функция $y = f(x)$ называется *неограниченной на множестве* $X \subset D(f)$, если условие (7.10) не выполняется:

$$\forall \mu > 0 \exists x_\mu \in X \Rightarrow |f(x_\mu)| \geqslant \mu. \tag{7.11}$$

♦ Если неравенства (7.10) и (7.11) выполняются, когда $X = D(f)$, функцию называют *ограниченной* и *неограниченной*, соответственно.

Геометрически ограниченность функции $y = f(x)$ означает, что её график лежит в полосе $|y| \leqslant \mu$. Так, функция $f(x) = \sin(1/x^2)$ ограничена на $\mathbb{R}$, $x \neq 0$, поскольку

$$|y| = \left|\sin\frac{1}{x^2}\right| \leqslant 1,$$

а функция $y = 1/x^2$ не ограничена на $\mathbb{R}$, $x \neq 0$, поскольку для любого положительного μ можно указать такое $x_\mu = 1/\sqrt{2\mu}$, для которого $y(x_\mu) = 2\mu > \mu$, т.е. выполняется условие (7.11).

♦ Функция $y = f(x)$ на множестве X называется

а) *строго убывающей*, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) > f(x_2)$, т.е.

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2);$$

б) *убывающей* (*невозрастающей*), если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, т.е.

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2);$$

в) *строго возрастающей*, если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) < f(x_2)$, т.е.

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

г) *возрастающей* (*неубывающей*), если для любых $x_1, x_2 \in X$, таких что $x_1 < x_2$, справедливо $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, т.е.

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Убывающие и возрастающие функции объединяют одним названием — *монотонные*; строго убывающие и строго возрастающие — *строго монотонными*. Если $X = D(f)$, то указание «на множестве X» обычно опускают.

♦ Если Y — множество значений, которые функция $y = f(x)$ принимает на множестве $X \subset D(f)$, то за её точные верхнюю и нижнюю грани принимают точные грани множества Y: $\inf\limits_{x \in X} f(x) = \inf Y$, $\sup\limits_{x \in X} f(x) = \sup Y$. Если $X = D(f)$, то, как и выше, указание на множество X опускают.

◊ Если для функции $y = f(x)$ существует элемент $x_0 \in X \subset D(f)$, такой что $f(x_1) < f(x_2)$ для всех $x \in X$, т.е.

$$\exists x_0 \in X \subset D(f) : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0),$$

то говорят, что эта функция в точке x_0 принимает *наибольшее* (*максимальное*) значение на множестве X:

$$f(x_0) = \max_{x \in X} f(x) = \sup_{x \in X} f(x).$$

Если же существует элемент $x_0 \in X \subset D(f)$, такой что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ для всех $x \in X$, т.е.

$$\exists x_0 \in X \subset D(f) : \forall x \in X \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0),$$

то говорят, что эта функция в точке x_0 принимает *наименьшее* (*минимальное*) значение на множестве X:

$$f(x_0) = \min_{x \in X} f(x) = \inf_{x \in X} f(x).$$

Как уже отмечалось, если $X = D(f)$, то указание на множество X обычно опускают.

Максимальные и минимальные значения называют *экстремальными*. На графике функции точки, соответствующие экстремальным значениям, разделяют интервалы возрастания и убывания функции.

Пример 7.7. Функцию $y = f(x)$:

$$1)\ \ y = \sin x, \qquad 2)\ \ y = x^3,$$

исследовать на монотонность, ограниченность, указать экстремальные значения.

Решение. 1) Покажем, что на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$ функция $y = \sin x$ строго возрастает. Действительно, пусть $-\pi/2 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \pi/2$, тогда

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \cos \frac{x_2 + x_1}{2} > 0.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $0 \leqslant (x_2 - x_1)/2 < \pi/2$, $-\pi/2 < (x_2 + x_1)/2 < \pi/2$ и синус и косинус этих аргументов положительны. Таким образом, неравенство $\sin x_2 > \sin x_1$ выполняется для всех $x_1, x_2 \in [-\pi/2, \pi/2]$, если $x_2 > x_1$. Аналогично можно показать, что функция $y = \sin x$ строго убывает на отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$. В силу периодичности функции $y = \sin x$ можно утверждать, что функция строго возрастает от -1 до 1 на отрезках $[-\pi/2 + 2n\pi, \pi/2 + 2n\pi]$ и убывает от 1 до -1 на отрезках $[\pi/2 + 2n\pi, 3\pi/2 + 2n\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$. Это означает, что $E(\sin x) = [-1, 1]$ для $D(\sin x) = \mathbb{R}$, т.е.

$$\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(\bar{x}_n), \quad \bar{x}_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

и

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(\underline{x}_n), \quad \underline{x}_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2) Для функции $y = x^3$ область $D(x^3) = \mathbb{R}$. Покажем, что функция $y = x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$. Поскольку функция $y = x^3$ нечётная, достаточно рассмотреть её поведение на промежутке $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Тогда из неравенства $0 \leqslant x_1 < x_2$ следует $x_1^3 < x_2^3$. Таким образом, неравенство $x_1^3 < x_2^3$ выполняется для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, если $x_1 < x_2$.

Функция $y = x^3$ на $\mathbb{R}$ не имеет наибольшего и наименьшего значений в силу своей неограниченности. Однако на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ $E(x^3) = [a^3, b^3]$, т.е.

$$\min_{x \in [a,b]} x^3 = \inf_{x \in [a,b]} x^3 = a^3, \quad \max_{x \in [a,b]} x^3 = \sup_{x \in [a,b]} x^3 = b^3.$$

7.8. Обратная функция

Согласно определению, при задании функции $y = f(x)$ каждому значению $x_0 \in D(f)$ соответствует единственное значение $y_0 = f(x_0) \in E(f)$. Нередко для заданной функции $y = f(x)$ приходится выполнять обратную операцию: по заданному значению $y_0 \in E(f)$ находить соответствующее значение аргумента $x_0 \in D(f)$ так, что $y_0 = f(x_0)$. Это соответствует решению уравнения $f(x) = y_0$. Это уравнение может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много решений. Например, для функции $y = \sin x$, $D(\sin x) = \mathbb{R}$, при $y_0 = 1$ уравнение $\sin x = 1$ имеет бесконечное множество решений $x_n = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, а для функции $y = 1 + 2x$, $D(1 + 2x) = \mathbb{R}$, при $y_0 = 3$ уравнение $3 = 1 + 2x$ имеет единственное решение $x_0 = 1$.

♦ Функция $y = f(x)$ называется *обратимой*, если каждому значению $y_0 \in E(f)$ соответствует одно значение аргумента $x_0 \in D(f)$.

Для обратимой функции решение уравнения $y = f(x)$ относительно x всегда является единственным, т.е. каждому значению $y \in E(f)$ соответствует одно значение $x \in D(f)$. Это соответствие определяет функцию, которую называют *обратной* к функции f и обозначают символом f^{-1}. Очевидно, что условием обратимости функции f, т.е. существования для неё обратной функции f^{-1} является строгая монотонность функции f.

Обозначив, как обычно, аргумент обратной функции буквой x, а её значения — буквой y, обратную для f функцию будем записывать в виде

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in D(f^{-1}).$$

Таким образом, каждой обратимой функции f можно поставить в соответствие обратную ей функцию f^{-1}. В результате мы получим пару взаимно обратимых функций f и f^{-1}, обладающих следующими свойствами:

1) $D(f) = E(f^{-1})$, $E(f) = D(f^{-1})$;
2) Для всех $x \in D(f) \Rightarrow f^{-1}(f(x)) = x$, а для всех $x \in E(f) \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x$;
3) если функция f строго возрастает (убывает), то и обратная ей функция f^{-1} строго возрастает (убывает), при этом, если f является нечётной, то и f^{-1} нечётна;
4) график функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно прямой $y = x$ (рис. 22).

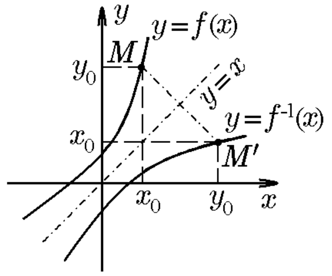


Рис. 22.

Первые три свойства следуют непосредственно из определений обратной, строго монотонной и нечётной функций. Справедливость последнего свойства доказывается простым рассуждением. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит графику $y = f(x)$, т.е. $y_0 = f(x_0)$, но тогда $x_0 = f^{-1}(y_0)$, т.е. точка $M'(y_0, x_0)$ принадлежит графику обратной функции $y = f^{-1}(x)$. Так как точки $M(x_0, y_0)$ и $M'(y_0, x_0)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 22), то график функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику $y = f(x)$ относительно этой прямой.

Если функция $y = f(x)$ не является обратимой на множестве $D(f)$, но в ней возможно выделить некоторое подмножество $D' \subset D(f)$, на котором функция является строго монотонной, то на этом множестве D' для функции $y = f(x)$ можно выделить обратную ей функцию $y = f^{-1}(x)$, $y \in D'$. Например, функция $y = x^2$ не является обратимой на $D(x^2) = \mathbb{R}$. Однако на $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$ и $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ эта функция является строго убывающей и строго возрастающей, соответственно. В этом случае для $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}_-$ можно определить обратную функцию $y = -\sqrt{x}$ (рис. 23,*а*), а для $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}_+$, соответственно, $y = \sqrt{x}$ (рис. 23,*б*).

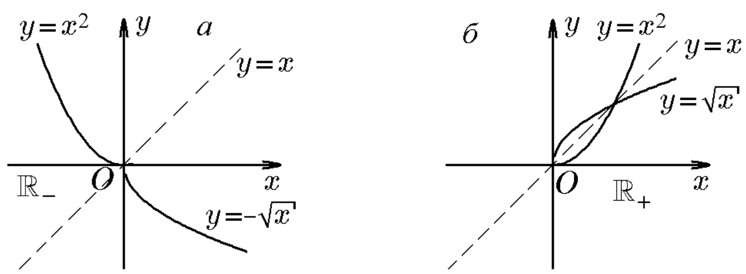


Рис. 23.

7.9. Неявные функции и функции, заданные параметрически

♦ *Графиком уравнения*

$$F(x, y) = 0 \tag{7.12}$$

в произвольной системе координат называется множество точек плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Рассмотрим равенство

$$x^3 - y + 2 = 0. \tag{7.13}$$

Так как оно равносильно равенству

$$y = 2 + x^3, \quad D(2 + x^3) = \mathbb{R}, \quad E(2 + x^3) = \mathbb{R}, \tag{7.14}$$

то график уравнения (7.13) совпадает с графиком функции (7.14). Это означает, что уравнение (7.13) неявно определяет функцию (7.14).

♦ Функция называется *заданной неявно*, если она определена из неразрешенного уравнения (7.12), связывающего аргумент и функцию.

В этом случае естественной является постановка вопроса о том, можно ли уравнение (7.12) однозначно разрешить относительно y, т.е. найти единственную функцию $y = f(x)$ такую, что $F(x, f(x)) \equiv 0$, где x принимает значения из некоторого промежутка. Ответ на этот вопрос даёт теорема о существовании неявной функции, которая формулирует достаточные условия существования неявной функции, задаваемой уравнением (7.12), и которая будет доказана при рассмотрении функций многих переменных.

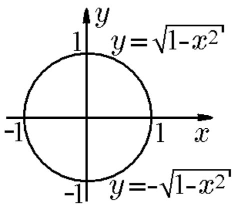


Рис. 24.

Заметим, что уравнение (7.13) удовлетворяет условиям этой теоремы, поскольку допускает задание неявной функции в явном виде (7.14). Для сравнения рассмотрим ещё одно уравнение

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{7.15}$$

Если $|x| > 1$ или $|y| > 1$, то не существует такой пары чисел (x, y), которая удовлетворяла бы уравнению (7.15). Однако, если $|x| \leqslant 1$, то $|y| \leqslant 1$ и в квадрате $K = \{(x, y) : |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$ графиком уравнения (7.15), как известно, является единичная окружность (рис. 24). Это означает, что уравнение (7.15) неявно определяет двузначную функцию. Рассмотрение таких функций, как уже отмечалось, неудобно, и его стараются избежать, разбивая функцию на однозначные ветви, как и при рассмотрении обратных функций. Так, в нашем примере в прямоугольнике $K_+ = \{(x, y) : |x| \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ уравнение (7.15) неявно определяет однозначную ветвь — функцию $y = \sqrt{1 - x^2}$, а в прямоугольнике $K_- = \{(x, y) : |x| \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$ — другую однозначную ветвь $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Заметим, что нередко уравнение (7.12), неявно определяющее некоторую функцию, разрешить относительно y невозможно или нецелесообразно. В этом случае можно попытаться разрешить его относительно x либо так и оставить его неразрешенным. Это, вообще говоря, затруднений не вызывает, поскольку позже мы рассмотрим ряд приемов, приспособленных к изучению функций, заданных в неявной форме (7.12).

Функция одной переменной может быть задана не только в явном виде $y = f(x)$ или неявно уравнением $F(x, y) = 0$, но также параметрически. Этот способ задания состоит в следующем.

Пусть функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определены на некотором множестве D и пусть E — множество значений функции $\varphi(t)$. Предположим, что функция $\varphi(t)$ обратима на множестве E и что $t = \varphi^{-1}(x)$ — обратная к ней функция. Тогда на множестве E определена сложная функция $y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$, которую называют *параметрически заданной* уравнением $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Например, уравнения $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, определяют параметрически заданную функцию $y = f(x)$. В данном случае $t = \arccos x$, $y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$. Наряду с этим уравнения $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, можно рассматривать как параметрическое задание однозначной ветви неявно заданной функции $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

ГЛАВА 3

Теория пределов

8. Предел последовательности

Теория пределов составляет фундамент математического анализа, а понятие предела является его основным понятием. Использование предельного перехода позволяет сложные задачи высшей математики сводить к простым, например нелинейные кривые в пределе рассматривать как совокупность отрезков прямых линий, и т.д.

Значительный вклад в развитие теории пределов внес французский математик О. Коши (1789-1857).

8.1. Бесконечная числовая последовательность. Определение, монотонность и ограниченность

♦ Функцию натурального аргумента, т.е. отображение $f\colon \mathbb{N} \to Y$, $Y \subset \mathbb{R}$, $[y = f(n)]$, называют *последовательностью* и записывают в виде $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Выражение $y_n = f(n)$ называется *общим членом*, или *элементом*, последовательности.

График числовой последовательности $y_n = f(n)$ является не сплошной линией, а состоит из изолированных (дискретно расположенных) точек, лежащих под осью абсцисс или над ней (рис. 25).

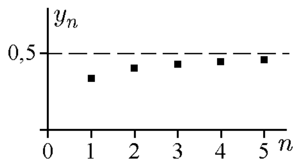


Рис. 25.

♦ Последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *возрастающей*, если

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \ldots,$$

и *неубывающей*, если

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant \ldots$$

Если

$$y_1 > y_2 > \ldots > y_n > \ldots,$$

то последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *убывающей*, если

$$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \ldots \geqslant y_n \geqslant \ldots,$$

то последовательность называется *невозрастающей*. Возрастающую и убывающую последовательности называют *строго монотонными*. Неубывающую и невозрастающую последовательности называют *монотонными*.

Приведём примеры числовых последовательностей.

1. По закону $y_n = 2n - 1$ задаётся бесконечная числовая последовательность $1, 3, 5, 7, \ldots, 2n{-}1, \ldots$ (каждому натуральному числу n соответствует определённое число y_n). Причём элементы этой последовательности по мере увеличения их номера могут стать больше любого произвольно выбранного числа.

2. По правилу $y_n = 1/2^{n-1}$ задаётся убывающая последовательность

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2}, \ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots,$$

причём элементы этой последовательности по мере увеличения их номера могут стать меньше любого произвольно выбранного числа.

3. Рассмотрим последовательность, заданную по закону (см. рис. 25)

$$y_n = \frac{n}{2n+1}. \tag{8.1}$$

Это возрастающая последовательность правильных дробей

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{7},\ \ldots,\ \frac{n}{2n+1},\ \ldots$$

В приведённых выше примерах множества значений последовательностей являются бесконечными. Последовательности, которые мы приведём ниже, имеют конечное множество значений, а, кроме того, не являются монотонными.

4. Элементы последовательности

$$y_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

принимают два значения

$$\{y_n\} : -1, 1, -1, 1, \ldots, -1, 1, \ldots$$

5. Последовательность

$$y_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеет вид

$$\{y_n\} : 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 1, 0, \ldots$$

6. Последовательность

$$y_n = (-1)^{n(n+1)/2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

имеет вид

$$y_1 = (-1)^{1\cdot 2/2} = -1,\ y_2 = (-1)^{2\cdot 3/2} = -1,\ y_3 = (-1)^{3\cdot 4/2} = 1,$$
$$y_4 = (-1)^{4\cdot 5/2} = 1,\ y_5 = (-1)^{5\cdot 6/2} = -1, \ldots$$

т.е.

$$\{y_n\} : -1, -1, 1, 1, -1, -1, \ldots, 1, 1, -1, 1, \ldots$$

Иногда последовательность задаётся рекуррентной формулой, позволяющей находить элементы последовательности по известным предыдущим. При таком способе задания последовательностей обычно указывают:

1) первый или несколько первых элементов последовательности: y_1 или y_1, y_2, y_3;
2) формулу, связывающую n-й член последовательности y_n с соседними, например с y_{n-1} и y_{n+1}.

7. Арифметическая прогрессия с разностью d и геометрическая прогрессия со знаменателем $q \neq 0$ задаются соответственно рекуррентными формулами

$$a_{n+1} = a_n + d, \qquad b_{n+1} = b_n q. \tag{8.2}$$

Зная первые элементы этих прогрессий a_1 и b_1, можно получить значение последующего элемента прогрессии через значение предыдущего. Для арифметической и геометрической прогрессий из рекуррентных соотношений можно найти выражения для общего члена:

$$a_{n+1} = a_1 + nd, \qquad b_{n+1} = b_1 q^n. \tag{8.3}$$

8. Рекуррентной формулой и условием $a_1 = a_2 = 1$ задаётся последовательность Фибоначчи

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},$$

т.е.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

Пример 8.1. Записать общий элемент последовательности, заданной рекуррентным соотношением

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \qquad a_1 = \sqrt{2}. \tag{8.4}$$

Решение. Поскольку $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, то

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\ \text{радикалов}}. \tag{8.5}$$

Пример 8.2. Написать формулу общего элемента последовательности, если известны пять её первых элементов: $3 \cdot 2$, $5 \cdot 2^2$, $7 \cdot 2^3$, $9 \cdot 2^4$, $11 \cdot 2^5$. Является ли она единственной?

Решение. Числа $3, 5, 7, 9, 11$ и т.д. образуют арифметическую прогрессию с первым элементом $a_1 = 3$ и разностью $d = 2$. Ее общий элемент равен $a_n = 3+2(n-1)$. Числа $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ и т.д. образуют геометрическую прогрессию $b_n = 2^n$. Поэтому в качестве искомой можно выбрать формулу

$$x_n = a_n b_n = [3 + 2(n-1)]2^n = (2n+1)2^n.$$

Разумеется, эта формула не является единственной. Например, формулы

$$x_n = (2n+1)2^n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5),$$
$$x_n = (2n+1)2^n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)3^n$$

тоже удовлетворяют условию задачи.

Таким образом, зная конечное число элементов последовательности, нельзя однозначно найти формулу её общего элемента.

Пример 8.3. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется рекуррентным соотношением

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}). \tag{8.6}$$

Выразить общий элемент этой последовательности через x_1 и x_2.

Решение. В силу (8.6) имеем

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad x_5 = \frac{x_3 + x_5}{2}, \quad \ldots$$

Отсюда

$$x_3 - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad x_4 - x_3 = \frac{x_2 - x_3}{2}, \quad x_5 - x_4 = \frac{x_3 - x_4}{2}, \quad \ldots$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&x_2 - x_1 = x_2 - x_1,\\
&x_3 - x_2 = -\frac{x_2 - x_1}{2},\\
&x_4 - x_3 = \frac{x_2 - x_3}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2^2},\\
&x_5 - x_4 = -\frac{x_2 - x_1}{2^3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&x_n - x_{n-1} = (-1)^{n-2}\frac{x_2 - x_1}{2^{n-2}}.
\end{aligned}$$

Просуммировав эти равенства, найдём

$$\begin{aligned}
x_n - x_1 &= x_2 - x_1 - \frac{x_2 - x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2^2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{x_2 - x_1}{2^{n-2}} =\\
&= (x_2 - x_1)\Big[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{1}{2^{n-2}}\Big] =\\
&= (x_2 - x_1)\frac{1 - (-1/2)^{n-1}}{1 + 1/2} = \frac{2}{3}(x_2 - x_1) - (-1)^{n-1}\frac{x_2 - x_1}{3 \cdot 2^{n-2}}.
\end{aligned}$$

Разрешив это равенство относительно x_n, получим

$$x_n = \frac{2x_2 + x_1}{3} - (-1)^{n-1}\frac{x_2 - x_1}{3 \cdot 2^{n-2}}.$$

Пример 8.4. Найти наибольший элемент последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и интервалы её монотонности:

$$\text{а)}\ \ x_n = \frac{90n}{n^2 + 9}, \qquad \text{б)}\ \ x_n = \frac{10^n}{n!}.$$

Решение. а) Рассмотрим разность

$$x_{n+1} - x_n = \frac{90(n+1)}{(n+1)^2 + 9} - \frac{90n}{n^2 + 9} = -\frac{90(n^2 + n - 9)}{[(n+1)^2 + 9](n^2 + 9)}. \tag{8.7}$$

Если x_n – наибольший элемент данной последовательности, то необходимо $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$ и $x_{n-1} - x_n \leqslant 0$. Для первого неравенства с учётом (8.7) имеем

$$n^2 + n - 9 \geqslant 0,$$

откуда

$$n \geqslant -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2} \approx 2{,}54 \text{ и } n \leqslant -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2} \approx -3{,}54.$$

Так как n — натуральное число, то неравенство $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$ выполняется при $n = 3, 4, 5, \ldots$. Стало быть, $x_3 > x_4 > x_5 > \ldots$. Значит, наибольшим элементом последовательности может быть x_1, x_2 или x_3. Поскольку

$$x_1 = \frac{90}{1+9} = 9, \quad x_2 = \frac{90 \cdot 2}{4+9} = \frac{180}{13} \approx 13{,}84, \quad x_3 = \frac{90 \cdot 3}{9+9} = 15,$$

то наибольшим элементом последовательности является $x_3 = 15$. Таким образом, последовательность а) возрастает от $x_1 = 9$ до максимального значения $x_3 = 15$, а далее она монотонно убывает.

б) В этом случае вместо разностей $x_{n+1} - x_n$ и $x_{n-1} - x_n$ рассмотрим отношения x_n/x_{n+1} и x_n/x_{n-1}. Если x_n – наибольший элемент данной последовательности, то, поскольку $x_n > 0$, необходимо

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} \geqslant 1, \qquad \frac{x_n}{x_{n+1}} \geqslant 1.$$

Из первого неравенства

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{10^n/n!}{10^{n-1}/(n-1)!} = \frac{10}{n} \geqslant 1$$

найдём $n \leqslant 10$. Из второго неравенства

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{10^n/n!}{10^{n+1}/(n+1)!} = \frac{n+1}{10} \geqslant 1,$$

соответственно, $n \geqslant 9$. Таким образом, наибольшими могут быть x_9 или x_{10}. Вычислим

$$x_9 = \frac{10^9}{9!}, \qquad x_{10} = \frac{10^{10}}{10!} = \frac{10^9}{9!},$$

т.е. мы имеем два равных наибольших элемента последовательности. Таким образом, последовательность б) монотонно возрастает до x_9, а затем от x_{10} монотонно убывает.

♦ Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной сверху*, если существует такое число M_1, что для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо условие $x_n \leqslant M_1$, т.е.

$$\exists M_1 (\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \leqslant M_1). \tag{8.8}$$

♦ Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной снизу*, если существует такое число M_2, что для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо условие $x_n \geqslant M_2$, т.е.

$$\exists M_2 (\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \geqslant M_2). \tag{8.9}$$

♦ Последовательность, ограниченная как сверху, так и снизу, называется *ограниченной*, если

$$\exists M_1 \exists M_2 (\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow M_2 \leqslant x_n \leqslant M_1). \tag{8.10}$$

Таким образом, последовательность называется ограниченной, если множество её значений ограничено.

Условие (8.10) равносильно условию

$$\exists M(\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n| \leqslant M). \tag{8.11}$$

В самом деле, если взять $M_2 = -M$, а $M_1 = M$, то из (8.10) следует (8.11) при выборе $M = \max(|M_1|, |M_2|)$.

При исследовании последовательностей на ограниченность нам будут полезны результаты следующих примеров.

Пример 8.5. Доказать неравенство Бернулли

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \tag{8.12}$$

где x_i, $i = \overline{1,n}$, – числа одного и того же знака, большие чем (-1): $x_i > -1$, $i = \overline{1,n}$.

Решение. Доказательство проведём методом математической индукции. При $n = 1, 2$ неравенство (8.12) очевидно. Пусть неравенство справедливо при некотором n. Покажем его справедливость при $n+1$. Исходя из условий задачи, имеем

$$\begin{gathered}(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1}) \geqslant (1+x_1+x_2+\ldots+x_n)(1+x_{n+1}) = \\ = 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x_{n+1} \geqslant \\ \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}.\end{gathered}$$

Здесь использовано неравенство

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x_{n+1} \geqslant 0,$$

справедливое при любых x_i, $i = \overline{1,n}$, одного знака.

Пример 8.6. Доказать неравенство Бернулли для бинома Ньютона

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \quad x > -1, \quad n > 1. \tag{8.13}$$

Решение. Напомним, что бином Ньютона расписывается так:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \sum_{k=3}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!}x^k, \tag{8.14}$$

откуда следует справедливость утверждения. Здесь мы учли, что $0! = 1$. Однако неравенство (8.13) можно также получить непосредственно из формулы (8.12), положив $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = x$.

Пример 8.7. Доказать, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

монотонно возрастает, а последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

монотонно убывает и обе они ограничены снизу значением $x_1 = 2$, а сверху – значением $y_1 = 4$.

Решение. Для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ запишем

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{[1+1/(n+1)]^{n+1}}{(1+1/n)^n} = \frac{[1+1/(n+1)]^{n+1}}{(1+1/n)^{n+1}}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) =$$
$$= \Big[\frac{(n+2)/(n+1)}{(n+1)/n}\Big]^{n+1}\frac{n+1}{n} = \Big[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Big]^{n+1}\frac{n+1}{n} =$$
$$= \Big[\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\Big]^{n+1}\frac{n+1}{n} = \Big[1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big]^{n+1}\frac{n+1}{n}.$$

Воспользовавшись для выражения в квадратных скобках неравенством Бернулли (8.13) и положив в нем $x = -1/(n+1)^2$, получим оценку

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant \Big[1-\frac{1}{n+1}\Big]\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n+1}\frac{n+1}{n} = 1.$$

Это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает от наименьшего значения $x_1 = 2$. Для последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, рассуждая аналогично, получим

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{(1+1/n)^{n+1}}{[1+1/(n-1)]^n} = \frac{1}{[1+1/(n^2-1)]^n}\frac{n+1}{n} <$$
$$< \frac{1}{1+n/(n^2-1)}\frac{n+1}{n} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n} < 1.$$

Это означает, что последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает от наибольшего значения $y_1 = (1+1)^{1+1} = 2^2 = 4$. Далее, учитывая очевидное неравенство

$$x_n < y_n \Leftrightarrow \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$$

и приняв во внимание монотонность этих последовательностей, заключаем, что обе последовательности ограничены значениями $x_1 = 2$, $y_1 = 4$.

Пример 8.8. Доказать, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ при

$$x_n = \frac{n^3}{n^3+4}$$

ограниченна.

Решение. Имеем

$$\frac{n^3}{n^3+4} = 1 - \frac{4}{n^3+4},$$

поэтому

$$0 < \frac{n^3}{n^3+4} < 1.$$

Это и означает, что последовательность ограниченна.

Пример 8.9. Доказать, что последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\text{а)}\;\; x_n = \frac{90n}{n^2+9}; \qquad \text{б)}\;\; x_n = \frac{10^n}{n!},$$

из примера 8.4 ограничены сверху.

Решение. Согласно решению примера 8.4, последовательность а) имеет наибольший элемент, равный $x_3 = 15$, следовательно, она ограничена сверху этим значением. В том же примере показано, что последовательность б) имеет два равных наибольших элемента: $x_9 = x_{10} = 10^9/9!$. Именно этим значением она и ограничена сверху.

Пример 8.10. Доказать, что последовательность из примера 8.1 монотонно возрастает и ограниченна.

Решение. Исходя из условий примера 8.1, имеем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}, \qquad x_1 = \sqrt{2}$$

или

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{радикалов}}.$$

Неравенство $x_n > 0$ очевидно. Докажем теперь, что для всех n верно неравенство $x_n < 2$. Предположим, что это неравенство справедливо для n. Тогда для x_{n+1} имеем

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} < \sqrt{2\cdot 2} = 2.$$

Так как $x_1 < 2$, то в силу принципа математической индукции неравенство $x_n < 2$ справедливо для всех n. Таким образом, действительно,

$$0 < x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{радикалов}} < 2.$$

Монотонное возрастание последовательности вытекает ещё из одного неравенства:

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} > \sqrt{2x_n} > \sqrt{x_n^2} = x_n,$$

что и требовалось доказать.

Результат примера 8.10 можно обобщить.

Пример 8.11. Показать, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n = \sqrt{a+x_{n-1}}, \quad x_1 = \sqrt{a}, \quad a > 0, \tag{8.15}$$

ограниченна.

Решение. Соотношение (8.15), аналогично (8.4), можно записать в форме

$$x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ радикалов}}. \tag{8.16}$$

Нетрудно заметить, что $x_n > 0$. Пусть z — положительный корень уравнения $z^2 = z + a$. Покажем, что $x_n < z$. Доказательство проведём методом математической индукции. Поскольку

$$z = \frac{1}{2} + \sqrt{a + \frac{1}{4}},$$

то для $x_1 = \sqrt{a}$ неравенство $x_1 < z$ выполняется. Предположим, что $x_n < z$ для некоторого n. Тогда

$$x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} < \sqrt{a + z} = \sqrt{z^2} = z.$$

Таким образом, $0 < x_n < z$ и последовательность (8.15) ограниченна.

Пример 8.12. Показать, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$$x_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

ограниченна.

Решение. Оценим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1.$$

Следовательно, последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает и $x_n < x_1 = 1$. В силу знакоположительности x_n, $n = \overline{1, \infty}$, запишем

$$0 < x_n < 1.$$

Таким образом, последовательность ограниченна.

Пример 8.13. Показать, что если $x_k > 0$ для всех $k = \overline{1, n}$ и

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 x_2 \cdots x_n = 1, \tag{8.17}$$

то

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geqslant n, \tag{8.18}$$

причём равенство в (8.18) эквивалентно равенствам

$$x_1 = x_1 = ... = x_n = 1.$$

Решение. Доказательство проведём методом математической индукции. При $n = 1$ неравенство (8.18) выполняется автоматически. Пусть $n = 2$. Так как $x_1x_2 = 1$, то либо $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \leqslant 1$, либо $x_1 \leqslant 1$, $x_2 \geqslant 1$. Пусть для определённости $x_1 \geqslant 1$, а $x_2 \leqslant 1$, тогда из тождества

$$x_1 + x_2 = x_1x_2 + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2) \tag{8.19}$$

в силу $x_1x_2 = 1$ следуют неравенство

$$x_1 + x_1 \geqslant 2$$

и условие эквивалентности $x_1 + x_2 = 2$, т.е. $x_1 = x_2 = 1$.

Предположим, что неравенство (8.18) справедливо при некотором n для любых n положительных чисел, произведение которых равно единице, а равенство

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = n$$

при условии (8.17) возможно лишь в случае, когда

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 1.$$

Пусть $x_1, ..., x_n, x_{n+1}$ есть $n + 1$ положительное число, удовлетворяющие условию

$$x_1x_2 \cdots x_nx_{n+1} = 1. \tag{8.20}$$

Предположим, что $x_n \geqslant 1$, $x_{n+1} \leqslant 1$. Обозначим $y_n = x_nx_{n+1} > 0$. Тогда из (8.20) следует, что

$$x_1 \cdots x_{n-1}y_n = 1.$$

Но мы предположили, что неравенство (8.18) справедливо для любых n положительных чисел при условии (8.17). Следовательно,

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + y_n \geqslant n. \tag{8.21}$$

Аналогично (8.19) запишем

$$x_n + x_{n+1} = x_nx_{n+1} + 1 + (x_n - 1)(1 - x_{n+1}) = y_n + 1 + (x_n - 1)(1 - x_{n+1}).$$

Сложив последнее тождество с неравенством (8.21), получим

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + y_n + x_n + x_{n+1} \geqslant n + y_n + 1 + (x_n - 1)(1 - x_{n+1}),$$

т.е. неравенство

$$x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} \geqslant n + 1 + (x_n - 1)(1 - x_{n+1}),$$

из которого следует, что $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} \geqslant 1$, а соотношение

$$x_1 + x_2 + ... + x_{n+1} = n + 1$$

эквивалентно равенству

$$x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_{n+1} = 1.$$

$\Diamond$ Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — набор из n положительных вещественных чисел. Обозначим

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + ... + 1/x_n}, \\ \eta_n &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}, \\ \xi_n &= \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + ... + x_n). \end{aligned} \tag{8.22}$$

Величины γ_n, η_n, ξ_n называются *средним гармоническим*, *средним геометрическим* и *средним арифметическим*, соответственно.

Пример 8.14. Показать, что справедливо неравенство

$$\gamma_n \leqslant \eta_n \leqslant \xi_n, \tag{8.23}$$

где γ_n, η_n и ξ_n определены в (8.22), причём $\gamma_n = \eta_n = \xi_n$, если $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Решение. Из определения среднего геометрического следует, что

$$\frac{x_1}{\eta_n}\frac{x_2}{\eta_n}\cdots\frac{x_n}{\eta_n} = 1.$$

Поскольку $x_n/\eta_n > 0$, то в силу неравенства (8.18) справедливо

$$\frac{x_1}{\eta_n} + \frac{x_2}{\eta_n} + ... + \frac{x_n}{\eta_n} \geqslant n,$$

откуда

$$\eta_n \leqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \xi_n, \tag{8.24}$$

и равенство достигается только тогда, когда

$$\frac{x_1}{\eta_n} = \frac{x_2}{\eta_n} = ... = \frac{x_n}{\eta_n} = 1,$$

что соответствует $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Таким образом, второе неравенство в (8.23) справедливо. Заменив в неравенстве (8.24) $x_k \to 1/x_k$, получим

$$\sqrt[n]{\frac{1}{x_1 x_2 \cdots x_n}} \leqslant \frac{1/x_1 + 1/x_2 + ... + 1/x_n}{n},$$

откуда $1/\eta_n \leqslant 1/\gamma_n$ и, следовательно, $\gamma_n \leqslant \eta_n$. Равенство достигается только тогда, когда

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = ... = \frac{1}{x_n},$$

т.е. при $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

8.2. Предел числовой последовательности

♦ Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, если для любого (в том числе и сколь угодно малого) положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

В логической символике

$$\Big\{\lim_{n\to\infty} x_n = A\Big\} \Leftrightarrow \big\{\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) | (\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - A| < \varepsilon)\big\}. \tag{8.25}$$

Геометрически определение предела означает, что, начиная с некоторого номера N, все элементы числовой последовательности находятся в некоторой ε-окрестности числа A (рис. 26).

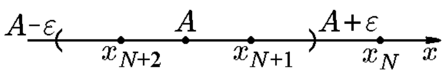


Рис. 26.

С помощью логических символов такая геометрическая интерпретация на «языке окрестностей» запишется так:

$$\Big\{\lim_{n\to\infty} x_n = A\Big\} \Leftrightarrow \big\{\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) | (\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in S(A, \varepsilon))\big\}.$$

Рассмотрим последовательность (8.1):

$$y_n = \frac{n}{2n+1}. \tag{8.26}$$

Сравнив значения переменной $y_n = n/(2n+1)$ с числом $1/2$, можно заметить, что с увеличением номера n разность

$$\Big|y_n - \frac{1}{2}\Big| = \Big|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\Big|$$

может стать меньше любого наперед заданного положительного числа ε. Так,

1) при $n = 5$ $\quad \Big|y_n - \dfrac{1}{2}\Big| = \Big|\dfrac{n}{2n+1} - \dfrac{1}{2}\Big| = \Big|\dfrac{5}{11} - \dfrac{1}{2}\Big| = \dfrac{1}{22}$;

2) при $n = 10$ $\quad \Big|y_n - \dfrac{1}{2}\Big| = \dfrac{1}{44}$;

3) при $n = 1000$ $\quad \Big|y_n - \dfrac{1}{2}\Big| = \dfrac{1}{4002}$

и т.д.

Можно установить, что для заданного $\varepsilon = 1/10000$, начиная от элемента с номером $N = 2500$, абсолютная величина разности будет

$$-\frac{1}{10000} < \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} < \frac{1}{10000}$$

или

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{10000} < y_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{10000}.$$

Для произвольно заданного ε номер $N(\varepsilon)$ найдётся из неравенства

$$\left|y_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

или

$$\left|\frac{N}{2N+1} - \frac{1}{2}\right| = \left| - \frac{1}{2(2N+1)}\right| = \frac{1}{2(2N+1)} < \varepsilon,$$

откуда

$$N(\varepsilon) > \left[\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right].$$

При $\varepsilon = 10^{-4}$ естественно получим

$$N(10^{-4}) > \left[\frac{10^4}{4} - \frac{1}{2}\right] = 2499 \Rightarrow \min N(10^{-4}) = 2500.$$

Итак, значение переменной $y_n = n/(2n+1)$ по мере возрастания номера элемента приближается к числу $1/2$ так, что

$$\left|y_n - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Число $1/2$ является *пределом переменной* $y_n = n/(2n+1)$, т.е. числовой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, при возрастании аргумента n. Кратко это записывают так:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

На рис. 25 все точки графика последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (8.26), начиная с номера $n = N(10^{-4}) = 2500$, попадут внутрь полосы между прямыми

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{10000} \quad \text{и} \quad y = \frac{1}{2} + \frac{1}{10000}.$$

Если n будет безгранично возрастать, то точки графика будут неограниченно приближаться к прямой $y = 1/2$, никогда её не достигая. В нашем примере функция целочисленного (натурального) аргумента $y_n = n/(2n+1)$, возрастая, остается все время меньше своего предела.

Пример 8.15. Показать, что последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

имеет предел

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Решение. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда должно выполняться условие

$$|x_n - A| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n}{n}\right| = \left| - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Выберем $N = [1/\varepsilon]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Тогда для любого $n > N = [1/\varepsilon]$ справедливо неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. В частности, для $\varepsilon = 2/41$ получим $N = [41/2] = [20{,}5] = 20$, $n > 20$, т.е. 21, 22, и т.д., а для $\varepsilon = 0{,}01$ получим $N = [100] = 100$ и $n > 100$; $|x_n - A| < 0{,}01$.

♦ Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

В силу определения предела можно сказать, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся, если существует число $A \in \mathbb{R}$, такое что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $|A - x_n| < \varepsilon$, или в символьной записи:

$$\{\exists A \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) | (\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |A - x_n| < \varepsilon)\}.$$

Из определения (8.25) следует, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, равный A, тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n - A\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, равный нулю, т.е.

$$\Big\{\lim_{n\to\infty} x_n = A\Big\} \Leftrightarrow \Big\{\lim_{n\to\infty} (x_n - A) = 0\Big\}.$$

♦ Числовая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *сходящейся к бесконечности* (*минус бесконечности*) и обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$), если для любого (в том числе и сколь угодно большого) положительного числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N(\varepsilon)$ справедливо неравенство $x_n > \varepsilon$ ($x_n < -\varepsilon$).

В символической записи эти определения имеют вид

$$\Big\{\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty\Big\} \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) | (\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow x_n > \varepsilon)\} \tag{8.27}$$

и

$$\Big\{\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\Big\} \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) | (\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow x_n < -\varepsilon)\}. \tag{8.28}$$

Наряду с последовательностями (8.27) и (8.28) существуют последовательности, удовлетворяющие двустороннему неравенству $-\varepsilon > x_n$, $x_n > \varepsilon$ (например, $x_n = (-2)^n$, см. пример 8.16). В этом случае

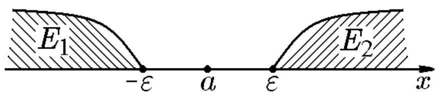


Рис. 27.

$$\Big\{\lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty\Big\} \Leftrightarrow \{\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) | (\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| > \varepsilon)\}. \tag{8.29}$$

Последовательности (8.27), (8.28) и (8.29) носят общее название *бесконечно больших*. Рис. 27 даёт их простейшую интерпретацию.

♦ Множества $E_1 = \{x \in \mathbb{R}(x < -\varepsilon)\}$, $E_2 = \{x \in \mathbb{R}(x > \varepsilon)\}$, $E = \{x \in \mathbb{R}(|x| > \varepsilon)\}$ называются *ε-окрестностями* $-\infty$, $+\infty$ и ∞ соответственно, причём $E = E_1 \cup E_2$. С учётом ранее введённых обозначений $E_1 = S(-\infty, \varepsilon)$, $E_2 = S(+\infty, \varepsilon)$, $E = S(-\infty, \varepsilon) \cup S(+\infty, \varepsilon)$.

Можно говорить, что если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой, то все элементы последовательности, за исключением их конечного числа, лежат в соответствующей ε-окрестности (рис. 27).

♢ Для различия последовательностей, имеющих конечные пределы, и бесконечно больших последовательностей пределы последних называют ещё *пределами в несобственном смысле* (или *несобственными пределами*).

♦ Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, не являющаяся сходящейся (в собственном или несобственном смысле), называется *расходящейся*.

Пример 8.16. Используя определение предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} 0, & a<0,\\ 1, & a=0,\\ +\infty & a>0; \end{cases} \quad 2)\ \lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a|<1,\\ 1, & a=1,\\ \text{не существует}, & a=-1,\\ +\infty, & a>1,\\ \infty, & a<-1; \end{cases}$$

$$3)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1; \quad 4)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1; \quad 5)\ \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Решение. 1) Для $a<0$ воспользуемся записью $a=-|a|$, тогда $x_n = n^a = 1/n^{|a|}$, и, следовательно, для любого $\varepsilon>0$ найдётся число N, для которого

$$\Big|\frac{1}{n^{|a|}} - 0\Big| = \frac{1}{n^{|a|}} < \varepsilon. \tag{8.30}$$

Действительно, если положить $N = [\sqrt[|a|]{\varepsilon}]+1$, то для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство (8.30). Для $a=0$ имеем постоянную последовательность $1,1,\dots,1,\dots$ Очевидно, что для всех n выполняется неравенство $|1-1| = 0 < \varepsilon$. В случае $a>0$ найдём число N, для которого

$$n^a > \varepsilon. \tag{8.31}$$

Действительно, если положить $N = [\sqrt[a]{\varepsilon}]+1$, для всех $n \geqslant N$ выполняется неравенство (8.31).

2) Пусть $|a|<1$. При $a=0$ равенство очевидно. При $0<|a|<1$ из тождества

$$\frac{1}{|a|^n} = \Big[1 + \Big(\frac{1}{|a|} - 1\Big)\Big]^n,$$

согласно неравенству Бернулли (8.13), имеем оценку

$$\frac{1}{|a|^n} = \Big[1 + \Big(\frac{1}{|a|} - 1\Big)\Big]^n > n\Big(\frac{1}{|a|} - 1\Big),$$

из которой следует

$$|a|^n = |a^n| < \frac{1}{n(1/|a|-1)} = \frac{|a|}{n(1-|a|)}.$$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольно, тогда неравенство

$$|a^n - 0| < \frac{|a|}{n(1-|a|)} < \varepsilon$$

выполняется для всех $n > |a|/[\varepsilon(1-|a|)]$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0, \quad |a|<1.$$

При $a=1$ имеем постоянную последовательность $1,1,\dots,1,\dots$, для которой равенство $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$ доказано выше.

При $a = -1$ последовательность $x_n = (-1)^n$ предела не имеет. Предположим противное, т.е. предположим, что последовательность имеет предел, равный A. Значит, для любого $\varepsilon > 0$, и в частности для $\varepsilon = 1/2$, найдётся такое N, что $|x_n - A| < 1/2$ для всех $n > N$. Так как $x_n = \pm 1$, должны выполняться неравенства $|1 - A| < 1/2$ и $|-1 - A| = |1 + A| < 1/2$, из которых будет следовать

$$2 = |(1 - A) + (1 + A)| \leqslant |1 - A| + |1 + A| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

т.е. $2 < 1$. Полученное противоречие и доказывает, что предела $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует.

Пусть теперь $a > 1$, а $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда из тождества

$$a^n = [1 + (a - 1)]^n,$$

согласно неравенству Бернулли (8.13), имеем оценку

$$a^n = [1 + (a - 1)]^n > n(a - 1) > \varepsilon,$$

из которой следует, что $a^n > \varepsilon$ для всех $n > \varepsilon/(a - 1)$. Это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

Пусть теперь $a < -1$. Воспользуемся записью $a = -|a|$. Тогда общий элемент исходной последовательности имеет вид $x_n = (-1)^n|a|^n$, т.е. $x_{2k} = |a|^{2k}$, $x_{2k+1} = -|a|^{2k+1}$, $k = \overline{0, \infty}$, причём $|a| > 1$. Рассуждая как и выше для $|a| > 1$, найдём, что $|a|^n < \varepsilon$ для всех $n > \varepsilon/(|a| - 1)$. Однако элементы последовательности с $n > N = \varepsilon/(|a| - 1)$ попадают как в окрестность $-\infty$, так и $+\infty$, т.е. $S(\varepsilon, -\infty) \cup S(\varepsilon, \infty)$. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \quad \text{при} \quad a < -1.$$

3) При $a = 1$ равенство очевидно. Пусть $a > 1$, тогда $\sqrt[n]{a} > 1$. Из тождества

$$a = [1 + (\sqrt[n]{a} - 1)]^n$$

в силу неравенства Бернулли (8.13) имеем оценку

$$a = [1 + (\sqrt[n]{a} - 1)]^n > n(\sqrt[n]{a} - 1),$$

из которой следует

$$(\sqrt[n]{a} - 1) < \frac{a}{n}.$$

Отсюда при произвольном $\varepsilon > 0$:

$$(\sqrt[n]{a} - 1) < \frac{a}{n} < \varepsilon,$$

заключаем, что это неравенство будет выполняться для всех $n > a/\varepsilon$. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 1.$$

Если $0 < a < 1$, то $1/a > 1$ и, как мы только что доказали, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a} = 1$, но тогда и при $a < 1$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad 0 < a < 1.$$

4) Для оценки тождества

$$n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n$$

вместо неравенства Бернулли воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$n = [1 + (\sqrt[n]{n} - 1)]^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \ldots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n >$$
$$> \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2,$$

т.е.

$$n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

или

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$:

$$\sqrt[n]{n} - 1 < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon,$$

заключаем, что это неравенство будет выполняться для всех $n > 1 + 2/\varepsilon^2$. Это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

5) Равенство нулю предела следует из очевидного неравенства

$$0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdots \frac{|a|}{m} \frac{|a|}{m+1} \cdots \frac{|a|}{n} < \frac{|a|^m}{m!}\Big(\frac{|a|}{m+1}\Big)^{n-m} < \varepsilon,$$

справедливого при любом $\varepsilon > 0$ и $m + 1 > |a|$, если n достаточно велико: $n > m + \log_{|a|/(m+1)}(\varepsilon m!/|a|^m)$.

Из рассмотренных примеров следует, что вычисление пределов непосредственно по определению связано с использованием соответствующих оценок и неравенств и вызывает определённые затруднения. Ниже, определив правила предельных переходов в аналитических выражениях и опираясь на результаты этих примеров, мы сможем упростить задачу вычисления пределов. Для этого наряду с бесконечно большими последовательностями удобно ввести бесконечно малые последовательности.

♦ Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

т.е.

$$\{\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) | (\forall n > N(\varepsilon) \Leftrightarrow |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon)\}. \qquad (8.32)$$

Из определения бесконечно малой последовательности следует, что задание сходящейся последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с пределом A: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, соответствует заданию бесконечно малой последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = x_n - A$.

Обратно: если $x_n = A + a_n$, где $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность, то, согласно определению (8.32),

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A. \tag{8.33}$$

Как следует из примера 8.16, бесконечно малыми последовательностями являются

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \left\{\frac{3^n}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

В этом же примере показано, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Это означает, что последовательность $\{\sqrt[n]{n} - 1\}_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой: $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$, тогда последовательность $\{3 + (\sqrt[n]{n} - 1)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, равный трем:

$$\lim_{n\to\infty} \{3 + (\sqrt[n]{n} - 1)\} = 3.$$

8.3. Признаки существования предела последовательности. Фундаментальная последовательность

Существует целый класс задач, в которых не требуется знать значение предела последовательности, но важно знать, существует он или нет. Поэтому сформулируем некоторые признаки существования предела.

Теорема 8.1. *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Предположим противное: пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет два предела a и b, причём $a \neq b$.

1. Выберем $\varepsilon = (a - b)/2$. Тогда $S(a, \varepsilon) \cap S(b, \varepsilon) = \emptyset$, т.е. ε-окрестности точек a и b не пересекаются.

2. По определению, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то все x_n, для которых $n > N_1$, принадлежат $S(a, \varepsilon)$.

С другой стороны, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, то все числа x_n, для которых $n > N_2$, принадлежат $S(b, \varepsilon)$.

3. Выберем $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда все x_n, для которых $n > N_3$, принадлежат одновременно $S(a, \varepsilon)$ и $S(b, \varepsilon)$. Но это невозможно, так как эти окрестности не пересекаются: $S(a, \varepsilon) \cap S(b, \varepsilon) = \emptyset$.

Полученное противоречие означает, что $a = b$.

Следствие. *Предел постоянной последовательности равен этой постоянной.*

Впрочем, это следует из самого определения предела (см. пример 8.16).

Теорема 8.2 (необходимое условие существования предела последовательности). *Если последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Положим $\varepsilon = 1$ и найдём такое N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Так как $|x_n| = |x_n - a + a| \leqslant |x_n - a| + |a|$, то для всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n| \leqslant 1 + |a|$. Заметим, что для $n < N$ это неравенство может не выполняться. Однако в силу конечности числа N можно найти значения $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|$. В результате получим конечное множество

$$X = \{1 + |a|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}$$

для всех n. Из этого множества в силу его конечности можно выбрать элемент $M = \max X$. Тогда $|x_n| \leqslant M$ для всех $n \in]1, N[\cup]N+1, \infty[= \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

Условие теоремы является необходимым, но не достаточным. Например, последовательность $1, -1, 1, -1$ ограничена, но не имеет предела.

Следствие 8.2.1. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ и $x_n \neq 0$ для всех n, то последовательность $\{1/x_n\}_{n=1}^{\infty}$ также является ограниченной.

Действительно, так как $a \neq 0$, то $|a| > 0$. По заданному числу $|a|/2 = \varepsilon > 0$ в силу определения предела последовательности найдётся номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ справедливо

$$|x_n - a| < \frac{|a|}{2}.$$

Это неравенство с учётом свойств модуля разности:

$$\frac{|a|}{2} > |x_n - a| \geqslant |a| - |x_n|,$$

примет вид

$$|x_n| > \frac{|a|}{2} \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon)$$

или

$$\frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{2}{|a|} \quad \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$

Как и при доказательстве теоремы, составим конечное множество

$$Y = \left\{\frac{2}{|a|}, \left|\frac{1}{x_1}\right|, \left|\frac{1}{x_2}\right|, \ldots, \left|\frac{1}{x_{N-1}}\right|\right\}.$$

Выберем из этого множества элемент $M = \max Y$. Тогда $|1/x_n| \leqslant M$ для всех $n = \overline{1, \infty}$, что и требовалось доказать.

Для доказательства обратной теоремы о пределе монотонной последовательности нам потребуются понятия верхней и нижней граней последовательности.

Рис. 28. $a = \sup\{x_n\}$ (*a*); $a = \inf\{x_n\}$ (*б*)

♦ Число a называется *точной верхней гранью* последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается как $a = \sup\{x_n\}$ (от латинского *supremum* – наивысший), если все элементы последовательности не превосходят a и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся элемент последовательности, больший $a - \varepsilon$ (рис. 28,*a*).

В логической символике это записывается как

$$\{a = \sup\{x_n\}\} \Leftrightarrow \{\forall n (x_n \leqslant a)\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)(x_{N(\varepsilon)} > a - \varepsilon)\}. \tag{8.34}$$

♦ Число a называется *точной нижней гранью* последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается как $a = \inf\{x_n\}$ (от латинского *infimum* – наинизший), если все элементы последовательности не меньше a и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся элемент последовательности, меньший $a + \varepsilon$ (рис. 28,*б*).

В логической символике это записывается как

$$\{a = \inf\{x_n\}\} \Leftrightarrow \{\forall n (x_n \geqslant a)\} \wedge \{\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)(x_{N(\varepsilon)} < a + \varepsilon)\}. \tag{8.35}$$

◊ Нетрудно заметить, что точная верхняя (нижняя) грань последовательности совпадает с точной верхней (нижней) гранью множества X, состоящего из элементов последовательности: $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$.

Теорема 8.3. *Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является монотонно возрастающей и ограниченной сверху, то существует*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\}. \tag{8.36}$$

Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ является монотонно убывающей и ограниченной снизу, то существует

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\}. \tag{8.37}$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает и ограничена сверху. В силу этих условий она имеет точную верхнюю грань $\sup\{x_n\} = a$. Докажем, что

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. По определению (8.34) верхней грани, $x_n \leqslant a$ для всех n и существует номер N такой, что $x_N > a - \varepsilon$. Тогда в силу монотонности последовательности при всех $n > N$ получим оценку

$$a - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant a \leqslant a + \varepsilon \quad \forall n > N$$

или

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon.$$

Таким образом,

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ для } \forall n > N,$$

а это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \sup\{x_n\}.$$

Аналогично доказывается (8.37) для ограниченной снизу монотонно убывающей последовательности.

♢ Теорема 8.3 остается справедливой для последовательности, ограниченной сверху (снизу) и возрастающей (убывающей), начиная с некоторого номера.

♢ Монотонно возрастающая (убывающая) неограниченная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел только в несобственном смысле, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad (\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

С учётом последнего замечания и теоремы 8.3 можно сформулировать следующий признак сходимости монотонной последовательности.

Теорема 8.4 (признак Вейерштрасса). *Для того чтобы неубывающая (невозрастающая) последовательность имела конечный предел, необходимо и достаточно, что она было ограничена сверху (снизу).*

Теорема 8.5. *Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – две последовательности, причём $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и, начиная с некоторого N_0, выполняется неравенство $x_n \geqslant y_n$, то $a \geqslant b$.*

Доказательство. По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ такие, что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n > N_1$ и $|y_n - b| < \varepsilon$ для всех $n > N_2$, или в символьной записи

$$\forall\varepsilon > 0\{(\exists N_1(\varepsilon)|(\forall n > N_1(\varepsilon) \Leftrightarrow |x_n - a| < \varepsilon)) \wedge (\exists N_2(\varepsilon)|(\forall n > N_2(\varepsilon) \Leftrightarrow |y_n - b| < \varepsilon))\}.$$

Предположим противное, т.е. что $a < b$. Выберем $\varepsilon = (b-a)/2 > 0$. Тогда для всех x_n и y_n, у которых $n > N$, где $N = \max\{N_0, N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, справедливы неравенства

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$
$$b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon,$$

т.е.

$$a - \frac{b-a}{2} < x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

и

$$b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < y_n < b + \frac{b-a}{2}.$$

Следовательно,

$$x_n < \frac{a+b}{2}, \qquad y_n > \frac{a+b}{2},$$

т.е. $x_n < y_n$, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает утверждение теоремы.

♢ Если нестрогое неравенство $x_n \geqslant y_n$ заменить строгим $x_n > y_n$, то нет никаких оснований ожидать, что всегда будет выполняться строгое неравенство

$a > b$. В этом можно убедиться, рассмотрев последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{2n},$$

для которых $x_n > y_n$, но $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, или последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad y_n = 1 - \frac{1}{n},$$

для которых $x_n > y_n$, но

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Следствие 8.5.1. Если, начиная с некоторого номера N, элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ неотрицательны: $x_n \geqslant 0$ (неположительны: $x_n \leqslant 0$), то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ неотрицателен (неположителен).

Чтобы убедиться в справедливости утверждения, достаточно в теореме 8.5 положить $y_n \equiv 0$.

Теорема 8.6 (о «сжатой» последовательности). *Пусть даны три последовательности:* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Если, начиная с некоторого номера* N_0, *справедливо неравенство*

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n, \tag{8.38}$$

причём последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходятся к общему пределу* a *(конечному или бесконечному), то последовательность* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *тоже сходится и имеет своим пределом* a, *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a.$$

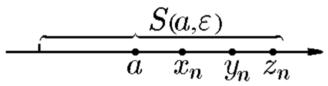


Рис. 29.

Доказательство. По определению предела, для всех $\varepsilon > 0$ существуют $N_1(\varepsilon)$ и $N_2(\varepsilon)$ такие, что $x_n \in S(a,\varepsilon)$ для всех $n > N_1(\varepsilon)$ и $z_n \in S(a,\varepsilon)$ для всех $n > N_2(\varepsilon)$. Тогда для всех $n > N$, где $N = \max\{N_0, N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$, в силу (8.38)

$$y_n \in [x_n, z_n] \subset S(a,\varepsilon)$$

(см. рис. 29), т.е. $|y_n - a| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a,$$

что и требовалось доказать.

◊ Теорему 8.6 о сжатой последовательности называют еще теоремой о «двух миллиционерах», а иногда «теоремой о трёх последовательностях», имея в виду неравенство (8.38).

До сих пор при изучении вопроса о сходимости последовательности мы исследовали поведение элементов последовательности около самого предела, предполагая его известным числом. Другими словами, мы исследовали возможность приближенно выразить с какой угодно точностью некоторые известные числа с помощью последовательности других известных чисел. Если бы понятие предела не давало нам ничего другого, то оно принесло бы нам не очень много пользы. Плодотворность же понятия предела определяется в значительной степени тем, что пределы последовательностей позволяют нам определить новые классы действительных чисел, ещё непосредственно не известные или не допускающие другого представления. В связи с этим зададимся вопросом: «Как по заданной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ выяснить, что она стремится к пределу, не умея заранее указать его значение?». Ответ на этот вопрос можно получить с помощью понятия фундаментальной последовательности.

♦ Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет условию Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

В символической записи это условие имеет вид

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) | (\forall n \geqslant N(\varepsilon) \forall m \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_m - x_n| < \varepsilon), \tag{8.39}$$

или эквивалентный ему

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) | (\forall n \geqslant N(\varepsilon) \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon). \tag{8.40}$$

♦ Множество чисел X, в котором любая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным.*

Ответ на вопрос о полноте множества действительных чисел даёт следующая теорема.

Теорема 8.7 (о вложенных отрезках). *Упорядоченное поле* R *полно тогда и только тогда, когда для него справедлив принцип вложенных отрезков Кантора.*

Доказательство. Переформулируем теорему следующим образом: пространство R полно в том и только том случае, если в нем всякая последовательность вложенных друг в друга отрезков, длины которых стремятся к нулю, имеет непустые пересечения.

1. *Необходимость.* Пусть множество R полно и $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ – последовательность вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, $r_n = b_n - a_n$. Обозначим через $x_n = (b_n + a_n)/2$ середину отрезка $[a_n, b_n]$.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, так как $|x_n - x_m| < r_n$, если $m > n$, а $\lim\limits_{n\to\infty} r_n \to 0$.

В силу полноты R существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in$ R.

Для любого n отрезок $[a_n, b_n]$ содержит все точки $\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}$, следовательно, x_0 – предельная точка $[a_n, b_n]$. Поскольку отрезок $[a_n, b_n]$ — замкнутое множество, $x_0 \in [a_n, b_n]$ для всех n и, следовательно, $x_0 \in \bigcap\limits_n [a_n, b_n]$.

2. *Достаточность.* Пусть всякая последовательность отрезков $[a_n, b_n]$, длины которых стремятся к нулю ($r_n \to 0$), имеет непустое пересечение. Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset$ R и докажем её сходимость в R. По условию, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N_ε, что $|x_n - x_m| < \varepsilon$ для всех $n, m > N_\varepsilon$. Пусть $\varepsilon = 1/2$, тогда существует такой номер n_1, что $|x_n - x_{n_1}| < 1/2$ при всех $n > n_1$. Построим отрезок $[a_1, b_1]$ с центром в точке x_{n_1} и такой, что $|b_1 - a_1| = 2$, $b_1 = x_{n_1} + 1$, $a_1 = x_{n_1} - 1$.

При этом $[x_{n_1} - 1/2, x_{n_1} + 1/2] \subset [a_1, b_1]$ для всех x_n, когда $n > n_1$.

Пусть $\varepsilon = 1/2^2$. Существует такое n_2, что $|x_n - x_{n_2}| < 1/2^2$ при всех $n > n_2$. Построим отрезок $[a_2, b_2]$: $a_2 = x_{n_2} - 1/2$, $b_2 = x_{n_2} + 1/2$, с центром в точке x_{n_2}, длина которого $|b_2 - a_2| = 2 \cdot \frac{1}{2}$. Тогда $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Продолжив аналогично процедуру построения отрезков и выбрав $\varepsilon = 1/2^3$, $\varepsilon = 1/2^4$ и т.д., мы получим последовательность отрезков, длины которых стремятся к нулю:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

В силу принципа вложенных отрезков Кантора существует x, принадлежащее всем отрезкам: $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} [a_k, b_k]$. Так как $|x - x_{n_k}| < 1/2^k$, то x_{n_k} стремится к x с ростом k: $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$.

Но если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна и $x_{n_k} \to x$, то $x_n \to x$. Действительно, согласно неравенству треугольника,

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x|.$$

Перейдя здесь к пределу при $n, n_k \to \infty$, получим

$$x_{n_k} \to x \Rightarrow x_n \to x,$$

что и требовалось доказать.

$\lozenge$ В силу аксиомы 3 определения вещественных чисел из теоремы 8.7 о вложенных отрезках следует, что пространство $\mathbb{R}$ полно.

Лемма 8.1. *Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел, равный a. По определению предела,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) | \Big(\forall p > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}\Big). \tag{8.41}$$

Положив в (8.41) сначала $p = m$, а затем $p = n$ и воспользовавшись неравенством для модуля разности, получим

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) - (x_n - a)| \leqslant |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, для всех $n > N(\varepsilon)$ и $m > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$, т.е. выполняется условие Коши (8.39). Это означает, что сходящаяся последовательность является фундаментальной, что и требовалось доказать.

Лемма 8.2. *Фундаментальная последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная последовательность и пусть $\varepsilon = 1$. Тогда, согласно условию Коши (8.39), найдётся номер $N(1)$ такой, что для всех $n \geqslant N(1)$ и всех $m \geqslant N(1)$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < 1$, и, в частности $|x_m - x_{N(1)}| < 1$. Так как

$$|x_m| = |(x_m - x_{N(1)}) + x_{N(1)}| \leqslant 1 + |x_{N(1)}|$$

для всех $m > N(1)$, то при всех $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x_m| < M$, где $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N(1)}|, |x_{N(1)}| + 1\}$, но это и означает, что последовательность ограничена.

Теорема 8.8 (признак Коши). *Для того чтобы последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

Доказательство. *Необходимость* вытекает непосредственно из леммы 8.1.

Достаточность следует из полноты пространства $\mathbb{R}$, установленного теоремой 8.7 о вложенных отрезках.

Пример 8.17. Используя признак Коши, исследовать на сходимость последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$1)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin 2^k}{2^k}, \quad 2)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k!}{k(k+1)}, \quad 3)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad 4)\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(k+1)}.$$

Решение. Воспользуемся критерием Коши в форме (8.40). Тогда для последовательности 1) имеем

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{\sin 2^{n+2}}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin 2^{n+p}}{2^{n+p}}\right| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} =$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - 1/2^p}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Оценка

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon \tag{8.42}$$

справедлива при любых p. Неравенство $2^n > 1/\varepsilon$ равносильно неравенству

$$n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}. \tag{8.43}$$

Если, исходя из (8.43), положить

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon \geqslant 1/2; \\ [\log_2(1/\varepsilon)], & 0 < \varepsilon < 1/2, \end{cases} \tag{8.44}$$

то из неравенства $n > N(\varepsilon)$ следует справедливость неравенства (8.42). Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Таким образом, формула (8.44) позволяет по заданному значению ε определить число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$ при любых p выполняется условие Коши (8.40), из которого и следует сходимость последовательности 1).

Для последовательности 2) при произвольном $\varepsilon > 0$ и всех натуральных p имеем

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}.$$

Это неравенство после разложения дробей на простейшие примет вид

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p-1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

и выполняется при всех $n > N(\varepsilon) = 1/\varepsilon - 1$.

В случае 3) имеем

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} < \varepsilon.$$

Несложное исследование показывает, что можно указать такие ε и p, при которых это неравенство выполняться не будет. Действительно, для $\varepsilon = 1/5$ и $p = n$ имеем

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon = \frac{1}{5}.$$

Наличие хотя бы одного значения p, при котором основное условие критерия Коши не выполняется, говорит о том, что последовательность конечного предела не имеет.

В случае 4) имеем

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+p)} < \varepsilon.$$

Как и в предыдущем случае, можно указать такие ε и p, при которых это неравенство выполняться не будет. Действительно, для $\varepsilon = 1/5$ и $p = n$ получим противоречие:

$$|x_{2n} - x_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \ldots + \frac{1}{\ln 2n} > \frac{n}{\ln 2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon = \frac{1}{5}.$$

Это означает, что последовательность конечного предела не имеет.

Пример 8.18. Показать, что предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданной рекуррентной формулой

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big), \tag{8.45}$$

где a и x_1 – два любых положительных числа, равен $\sqrt{a}$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}. \tag{8.46}$$

Решение. Воспользуемся принципом вложенных отрезков Кантора, который, как было показано в теореме 8.7, эквивалентен критерию Коши. Положив $y_n = a/x_n$, имеем $x_n y_n = a$, а вместо (8.45)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n).$$

Отсюда следует, что x_{n+1} является средним арифметическим чисел x_n и y_n, а $\sqrt{a} = \sqrt{x_n y_n}$ – их средним геометрическим, для которых справедлива известная оценка (8.23)

$$\frac{1}{2}(x_n + y_n) \geqslant \sqrt{x_n y_n}.$$

Тогда $x_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$ для всех $n \geqslant 1$. Число x_1 можно выбрать произвольно, независимо от a. Замечательно, что если выбрать как раз $x_1 = \sqrt{a}$, то $y_1 = \sqrt{a}$, а затем в силу (8.45) и $x_n = y_n = \sqrt{a}$ для всех n. В результате мы получим постоянную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n = \sqrt{a}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ и вместе в этим $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt{a}$.

Если же $x_1 \neq \sqrt{a}$, то в силу (8.45) $x_n > \sqrt{a}$ для $n > 1$, а, следовательно, $y_n < \sqrt{a}$, ибо $x_n y_n = (\sqrt{a})^2$. Далее следует принять во внимание, что x_{n+1} является средним арифметическим чисел $x_n > \sqrt{a}$ и $y_n < \sqrt{a}$ и, стало быть, серединой предшествующего отрезка $[y_n, x_n]$. Следовательно, $x_{n+1} < x_n$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно убывает, а последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно возрастает. Таким образом, мы получили последовательность отрезков $I_n = [y_n, x_n]$, длины которых с каждым шагом уменьшаются (стягиваются) не менее чем вдвое, а число $\sqrt{a}$ принадлежит всем отрезкам этой последовательности. Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \sqrt{a}$$

в полном соответствии с (8.46).

$\Diamond$ Обобщение примера 8.18 даёт последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой

$$x_{n+1} = \frac{1}{m}\Big[(m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}}\Big], \tag{8.47}$$

где $m > 1$ – натуральное число, а x_1 и a – произвольные положительные числа. Рассуждая, как и выше, найдём

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[m]{a}.$$

8.4. Операции с последовательностями

Для дальнейшей работы с последовательностями введём для них следующие алгебраические операции.

$\blacklozenge$ *Суммой*, *разностью*, *произведением* и *частным* двух последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ с общим членом $z_n = x_n + y_n$, $z_n = x_n - y_n$, $z_n = x_n y_n$, $z_n = x_n/y_n$, соответственно.

Сходимость соответствующей последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, естественно, зависит от сходимости последовательностей, её составляющих.

Теорема 8.9. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Тогда последовательность $\{x_n \pm y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет предел, причём*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b. \tag{8.48}$$

Доказательство. Выберем некоторое ε и для него найдём такой номер N_1, чтобы для всех $n > N_1$ было справедливо неравенство $|x_n - a| < \varepsilon/2$, и такой номер N_2, чтобы для всех $n > N_2$ было справедливо неравенство $|y_n - b| < \varepsilon/2$. Обозначим

$$N = \max(N_1, N_2).$$

Тогда для всех $n > N$ одновременно справедливы неравенства

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно, по определению,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 8.9.1. Сумма (разность) двух бесконечно малых последовательностей есть последовательность бесконечно малая.

Следствие 8.9.2. Суммирование сходящейся последовательности с бесконечно малой не меняет её предела.

Теорема 8.10. *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Тогда последовательность произведения $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет предел, причём*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab. \tag{8.49}$$

Доказательство. Пусть N – число, начиная с которого для всех $n > N$ выполняются неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon, \quad |x_n| < M, \ |y_n| < M, \tag{8.50}$$

вытекающие из сходимости последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ и, следовательно, их ограниченности. Рассмотрим разность $|x_n y_n - ab|$, для которой посредством цепочки неравенств с учётом (8.49) получим оценку

$$\begin{aligned} &|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| = |x_n(y_n - b) + b(x_n - a)| \leqslant \\ &\leqslant |x_n|\,|y_n - b| + |b||x_n - a| \leqslant M\varepsilon + |b|\varepsilon = (M + |b|)\varepsilon, \quad \forall n > N. \end{aligned}$$

Так как величина $(M + |b|)\varepsilon$ становится сколь угодно малой, если только ε само достаточно мало, то при всех $n > N$ числа $x_n y_n$ и ab мало отличаются друг от друга, в чем и заключается утверждение, содержащееся в равенстве

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab.$$

Следствие 8.10.1. Если α – число и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то последовательность $\{\alpha x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha a = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n, \tag{8.51}$$

т.е. постоянный множитель выносится за знак предела.

Действительно, произведение αx_n можно рассматривать как последовательность, являющуюся произведением постоянной последовательности $\{\alpha\}_{n=1}^{\infty}$ и последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha = \alpha$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то из (8.49) следует (8.51).

Следствие 8.10.2. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую является последовательностью бесконечно малой.

Следствие 8.10.3. Для любого целого $m \in \mathbb{N}$ справедливо

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)^m = \big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)^m \tag{8.52}$$

при условии, что предел, стоящий в правой части равенства, существует.

Теорема 8.11. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *все элементы последовательности* $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ *отличны от нуля и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$. *Тогда последовательность* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, *где* $z_n = x_n/y_n$, *имеет предел, причём*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}. \tag{8.53}$$

Доказательство. Пусть N – число, начиная с которого для всех $n > N$ выполняются неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon, \quad |x_n| < M, \quad \left|\frac{1}{y_n}\right| < L, \tag{8.54}$$

вытекающие из сходимости и ограниченности последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, а в силу следствия 8.2.1, и ограниченности последовательности $\{1/y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Рассмотрим разность $|x_n/y_n - a/b|$, для которой с учётом (8.54) получим оценку

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x_n}{b} + \frac{x_n}{b} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n}{b}\frac{1}{y_n}(b - y_n) + \frac{1}{b}(x_n - a)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|x_n|}{|b|}\left|\frac{1}{y_n}\right||y_n - b| + \frac{1}{|b|}|x_n - a| < \frac{ML+1}{|b|}\varepsilon.$$

Так как величина $(ML+1)\varepsilon/|b|$ становится сколь угодно малой, если только ε само достаточно мало, то при всех $n > N$ числа x_n/y_n и a/b мало отличаются друг от друга, в чем и заключается утверждение, содержащееся в равенстве

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

При вычислении пределов полезным оказывается следующее утверждение.

Теорема 8.12 (Теплица). *Пусть последовательность* $\{p_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям*

$$1) \quad p_{nk} \geqslant 0; \quad 2) \quad \sum_{k=1}^{n} p_{nk} = 1; \quad 3) \quad \lim_{n\to\infty} p_{nk} = 0$$

при каждом фиксированном $k = \overline{1, \infty}$. *Тогда, если последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *то последовательность* $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, *где*

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} p_{nk} x_k, \tag{8.55}$$

сходится, причём $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доказательство. 1) Поскольку последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N_1(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N_1(\varepsilon)$ справедливо

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2) Поскольку последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она ограничена, и, следовательно, существует $M > 0$ такое, что для всех $n = \overline{1, \infty}$ справедливо

$$|x_n| \leqslant M, \qquad |x_n - a| \leqslant 2M.$$

3) Поскольку последовательность $\{p_{nk}\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая, то существует номер $N_2(\varepsilon) > N_1(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N_2(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$p_{nk} < \frac{\varepsilon}{4MN}, \quad k = \overline{1, N}, \quad N = N_1(\varepsilon),$$

и тогда

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{k=1}^{n} p_{nk} x_k - a\Big| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} p_{nk}(x_k - a)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_{nk}|x_k - a| = \\ &= p_{n1}|x_1 - a| + \ldots + p_{nN}|x_N - a| + p_{nN+1}|x_{N+1} - a| + \ldots + p_{nn}|x_n - a| \leqslant \\ &\leqslant N\frac{\varepsilon}{4NM}2M + \frac{\varepsilon}{2}(p_{nN+1} + \ldots + p_{nn}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

для всех $n > N_2(\varepsilon)$. Отсюда, согласно определению предела, запишем

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} p_{nk} x_k = a. \tag{8.56}$$

Теорема 8.13. *Если последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *то последовательность её средних гармонических* $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ (8.22) *и последовательность её средних арифметических* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (8.22) *также сходятся, причём*

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{8.57}$$

Доказательство. 1. Положим в условии теоремы Теплица $p_{nk} = 1/n$, тогда

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} x_k = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} = \xi_n$$

и выполняются все условия теоремы 8.12:

$$1)\ \ p_{nk} = \frac{1}{n} > 0; \quad 2)\ \ \sum_{k=1}^{n} p_{nk} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1; \quad 3)\ \ \lim_{n\to\infty} p_{nk} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Это и означает справедливость утверждения теоремы для средних арифметических.

2. Аналогично тому, как это сделано в первой части доказательства, положим

$$p_{nk} = \frac{\dfrac{1}{x_k}}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}} = \frac{\gamma_n}{n x_k}, \quad k = \overline{1, n},$$

для которых выполняются все условия теоремы 8.12. Тогда из (8.55) следует, что

$$z_n = \sum_{k=1}^{n} p_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_n x_k}{n x_k} = \gamma_n,$$

и в силу (8.56) утверждение теоремы для средних гармонических также справедливо.

Аналогичное утверждение справедливо и для средних геометрических.

Теорема 8.14. *Если последовательность* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *имеет конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *и знакоположительна* $(x_n > 0)$, *то последовательность её средних геометрических* $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ (8.22) *также сходится, причём*

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{8.58}$$

Доказательство. В силу (8.23) запишем

$$\gamma_n = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + ... x_n}{n} = \xi_n. \tag{8.59}$$

Поскольку предел последовательности средних арифметических $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и средних гармонических $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ равен пределу последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то в силу (8.57) и теоремы о сжатой последовательности из (8.59) следует (8.58).

Теоремы 8.9–8.11 показывают, что операции вычисления предела последовательностей перестановочны с алгебраическими операциями над последовательностями, если эти последовательности имеют конечные пределы, т.е. сходятся в собственном смысле.

Рассмотрим теперь случаи, когда одна из последовательностей сходится в несобственном смысле. Исходя из определения несобственной сходимости, можно сформулировать вытекающие из этих теорем свойства таких последовательностей.

Свойство 1. Если одна последовательность сходится в несобственном, а другая – в собственном смысле, то их сумма (разность) сходится в несобственном смысле, т.е. остается бесконечно большой последовательностью.

Свойство 2. Если одна последовательность сходится в несобственном смысле, а другая – в собственном и не является бесконечно малой, то их произведение сходится в несобственном смысле, т.е. остается бесконечно большой последовательностью.

◊ Произведение бесконечно большой последовательности на бесконечно малую (символически обозначающееся $\infty \cdot 0$) требует особого рассмотрения в каждом конкретном случае (см. примеры в разд. «Техника вычисления пределов»).

Свойство 3. Отношение последовательности, сходящейся в собственном смысле, к последовательности, сходящейся в несобственном смысле, является последовательностью бесконечно малой. Обратное соотношение является последовательностью бесконечно большой.

Для двух последовательностей, сходящейся в несобственном смысле, справедливо ещё одно следствие.

Свойство 4. Сумма и произведение двух бесконечно больших последовательностей одного знака являются бесконечно большими последовательностями того же знака, тогда как их разность ($\infty - \infty$) и отношение (∞/∞) требуют особого рассмотрения в каждом конкретном случае (см. примеры в разд. «Техника вычисления пределов»).

◊ Особого рассмотрения требуют также правила вычисления пределов последовательностей, полученных в результате алгебраических операций над расходящимися последовательностями (не имеющими конечных или бесконечных пределов).

8.5. Число Непера

Теорема 8.15. *Последовательность*

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{8.60}$$

имеет своим пределом число e, $2 < e < 3$.

Доказательство. В примере 8.7 было показано, что последовательность (8.60) является монотонно возрастающей и ограничена значениями 2 и 4. Уточним эту оценку с помощью бинома Ньютона. По формуле бинома Ньютона

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{1}\right) &= 1+1;\\
\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 &= 1+1+\frac{1}{4};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3}+\ldots+\\
&+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdots n}\frac{1}{n^n}=\\
&=1+1+\frac{1}{2!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{n!}1\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big).$$

Отсюда следует, что, во-первых, последовательность (8.60) является монотонно возрастающей, поскольку с ростом n растет число положительных слагаемых, а, во-вторых, последовательность (8.60) ограничена.

Действительно,

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n \leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

Учтем, что при $n > 2$ выполняется неравенство $n! > 2^{n-1}$, следовательно,

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+\ldots+\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}.$$

Поскольку выражение в правой части есть геометрическая прогрессия, можно записать её сумму:

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < 1+\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 1+2\Big[1-\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\Big] = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3. \tag{8.61}$$

Таким образом,

$$2 < \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < 3.$$

Согласно теореме 8.4 (признаку Вейерштрасса), последовательность (8.60) сходится. Обозначим

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = e. \tag{8.62}$$

♦ Иррациональное число e называется *числом Непера*.

◊ Можно показать, что $e \approx 2{,}718281828459045\ldots$

◊ Справедливости ради заметим, что иногда это название полагают малообоснованным, но методологически оправданным как именное название числа, играющего очень важную роль в современной математике.

Приняты следующие обозначения:

$$\log_e a = \ln a.$$

Такой логарифм называется *натуральным логарифмом*, а число e ещё называется *основанием натурального логарифма*. Ниже будет указан способ его вычисления с заданной точностью.

Связь между натуральными и десятичными логарифмами

Пусть

$$\ln N = k. \tag{8.63}$$

По определению логарифма имеем

$$e^k = N. \tag{8.64}$$

Прологарифмируем (8.64) по основанию 10 и получим

$$k \lg e = \lg N. \tag{8.65}$$

С учётом (8.63) перепишем (8.65) в виде

$$\lg N = \lg e \ln N$$

или

$$\lg N = M \ln N, \tag{8.66}$$

где $M = \lg e = 0{,}43429$. Число M называется *модулем перехода от натуральных логарифмов к десятичным*. Переход от десятичных логарифмов к натуральным осуществляется по формуле

$$\ln N = \frac{1}{M} \lg N. \tag{8.67}$$

Здесь $1/M = 2{,}30258$.

Например, $\lg 5 = 0{,}69897$, тогда

$$\ln 5 = \frac{1}{M} \lg 5 = 2{,}30258 \cdot 0{,}6989 = 1{,}60944.$$

Пример 8.19. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e. \tag{8.68}$$

Решение. С помощью тождественных преобразований получим произведение последовательностей:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1+1} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right),$$

для которой, согласно теореме 8.10, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e \cdot 1 = e,$$

что и требовалось показать.

Пример 8.20. Доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e, \tag{8.69}$$

где $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность целых чисел, стремящаяся к $+\infty$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty$.

Решение. Пусть $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность целых чисел, стремящаяся к $+\infty$. Тогда из неравенства

$$\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n} - e\right] < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N(\varepsilon),\ \varepsilon > 0,$$

следует, что

$$\left[\left(1 - \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} - e\right] < \varepsilon \quad \text{при} \quad n_k > N(\varepsilon),$$

т.е.

$$\lim_{n_k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} = e,$$

что и требовалось доказать.

Пример 8.21. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1\pm\frac{1}{p_n}\right)^{\pm p_n}=e, \tag{8.70}$$

где $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная бесконечно большая последовательность: $\lim\limits_{n\to\infty}p_n=+\infty$.

Решение. Если последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к $+\infty$, то в силу принципа Архимеда существует такая последовательность целых чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $n_k\to+\infty$ и

$$n_k<p_k<n_k+1.$$

Теперь из очевидного неравенства

$$\frac{[1+1/(n_k+1)]^{n_k+1}}{1+1/(n_k+1)}<\left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

с учётом результатов предыдущего примера:

$$\lim_{(n_k+1)\to\infty}\frac{[1+1/(n_k+1)]^{n_k+1}}{1+1/(n_k+1)}=\lim_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e,$$

и согласно теореме о сжатой последовательности, найдём

$$e\leqslant\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k}\leqslant e,$$

что и доказывает (8.70), содержащую знак «+».

Для знака «−» аналогично запишем

$$\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-p_n}=\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)^{-p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)^{p_n-1}\left(1+\frac{1}{p_n-1}\right)=e\cdot1=e.$$

8.6. Техника вычисления пределов последовательностей

Пример 8.22. Вычислить пределы

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+2}{2n^3-n+1};\quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+2}{2n^3-n+1};\quad 3)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+2}{2n^2-n+1}.$$

Решение. Все пределы однотипны и различаются только старшими степенями n в числителе и знаменателе. Однако эти различия существенно влияют на значение соответствующего предела. Действительно, в случае 1) тождественные преобразования позволяют записать

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+2}{2n^3-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(3+1/n^2+2/n^3)}{n^3(2-1/n^2+1/n^3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+1/n^2+2/n^3}{2-1/n^2+1/n^3}=$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3 + 1/n^2 + 2/n^3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2 - 1/n^2 + 1/n^3)} = \frac{3}{2}.$$

В случае 2):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+n+2}{2n^3-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(3/n + 1/n^2 + 2/n^3)}{n^3(2 - 1/n^2 + 1/n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3/n + 1/n^2 + 2/n^3}{2 - 1/n^2 + 1/n^3} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(3/n + 1/n^2 + 2/n^3)}{\lim\limits_{n\to\infty}(2 - 1/n^2 + 1/n^3)} = \frac{0}{2} = 0.$$

В случае 3):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+n+2}{2n^2-n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3n + 1/n + 2/n^2)}{n^2(2 - 1/n + 1/n^2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n + 1/n + 2/n^2}{2 - 1/n + 1/n^2} =$$

$$= \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty} n = \frac{3}{2}(+\infty) = +\infty.$$

Этот пример допускает обобщение.

Пример 8.23. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_l n^l + p_{l-1}n^{l-1} + \ldots + p_0}{q_k n^k + q_{k-1}n^{k-1} + \ldots + q_0} = \begin{cases} 0, & l < k; \\ \dfrac{p_l}{q_l}, & l = k; \\ \operatorname{sign}\left(\dfrac{p_l}{q_k}\right) \cdot \infty, & l > k, \end{cases} \tag{8.71}$$

где

$$p_l, q_k \neq 0; \quad l, k \in \mathbb{N}; \quad \operatorname{sign} x = \begin{cases} +1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Решение. Выражение, стоящее под знаком предела, представляет собой отношение полиномов, которые при $n \to \infty$ являются бесконечно большими. Это не позволяет сразу применить формулу вычисления предела частного. Однако, как и в предыдущем примере, тождественные преобразования позволяют записать
а) $l < k$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k(p_l n^{l-k} + \ldots + p_0 n^{-k})}{n^k(q_k + \ldots + q_0 n^{-k})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(p_l n^{l-k} + \ldots + p_0 n^{-k})}{\lim\limits_{n\to\infty}(q_k + \ldots + q_0 n^{-k})} = \frac{0 + \ldots + 0}{q_k + \ldots + 0} = \frac{0}{q_k} = 0;$$

б) $l = k$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^l(p_l + \ldots + p_0 n^{-l})}{n^l(q_l + \ldots + q_0 n^{-l})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(p_l + \ldots + p_0 n^{-l})}{\lim\limits_{n\to\infty}(q_l + \ldots + q_0 n^{-l})} = \frac{p_l}{q_l};$$

в) $l > k$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k(p_l n^{l-k} + \ldots + p_0 n^{-k})}{n^k(q_k + \ldots + q_0 n^{-k})} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_l}{q_l} n^{l-k} = \frac{p_l}{q_l} \cdot (+\infty) = \operatorname{sign}\left(\frac{p_l}{q_l}\right)\infty.$$

Таким образом, вычисление пределов в (8.71) сводится к сравнению старших степеней числителя и знаменателя и коэффициентов при них. Подобный подход оправдан и в случае нецелых степеней n, что иллюстрируется следующим примером.

Пример 8.24. Вычислить пределы

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+\sqrt{n}+\sin n}+\sqrt[3]{n}}{1-2\sqrt{n(n^2+1)}}, \quad A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+\sqrt{n}+\sin n}+\sqrt[3]{n^5}}{1-2\sqrt{n(n^2+1)}},$$

$$A_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+\sqrt{n}+\sin n}+\sqrt[3]{n}}{1-2\sqrt{n^2(n^2+1)}}.$$

Решение. Для A_1 в числителе первый корень имеет максимальную степень $3/2$, а второй $1/3$; в знаменателе, соответственно, степени 0 и $3/2$. Поступая, как и в предыдущих примерах, с учётом того, что последовательность $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ предела не имеет, но ограничена значением $M = 1$, имеем

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{-2\sqrt{n^3}} = -\frac{1}{2}.$$

Второй предел отличается от первого тем, что при неизменном знаменателе максимальной степенью числителя является теперь не $3/2 = 9/6$, а степень второго корня $5/3 = 10/6$. Следовательно,

$$A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^5}}{-2\sqrt{n^3}} = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n^{5/3-3/2} = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n^{1/6} = -\frac{1}{2}\cdot\infty = -\infty.$$

В третьем пределе максимальная степень числителя, как и в первом, равна $3/2$, а максимальная степень знаменателя равна 2. Следовательно,

$$A_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{-2n^2} = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n^{3/2-2} = -\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} n^{-1/2} = 0.$$

Пример 8.25. Вычислить

$$A = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{n^2}{2n^2+1} + \frac{\sqrt{n}+2}{n+3}\Big).$$

Решение. Согласно результатам предыдущих примеров, имеем

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+1} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+2}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Пример 8.26. Вычислить

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n+3}), \quad A_2 = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+n+3}),$$

$$A_3 = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+4} - \sqrt{n^2+n+3}).$$

Решение. Все выражения, стоящие под знаком предела, представляют собой разность бесконечно больших последовательностей. Домножив и разделив их на сопряженные выражения, получим

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{(4n^2+n+1)-(n^2+n+3)}{\sqrt{4n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{3n} = \infty,$$
$$A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+4n+1)-(n^2+n+3)}{\sqrt{n^2+4n+1}+\sqrt{n^2+n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2},$$
$$A_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+n+4)-(n^2+n+3)}{\sqrt{n^2+n+4}+\sqrt{n^2+n+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

Пример 8.27. Вычислить

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 2^{n-1}+3\cdot 4^n}{5\cdot 2^{n+2}+2^{2n+1}}, \quad A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 2^{n-1}+3\cdot 3^n}{5\cdot 2^{n+2}+2^{2n+1}},$$
$$A_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{7\cdot 2^{n-1}+3\cdot 5^n}{5\cdot 2^{n+2}+2^{2n+1}}.$$

Решение. После тождественных преобразований имеем

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{2}\cdot 2^n+3\cdot 4^n}{5\cdot 4\cdot 2^n+2\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\cdot\left[\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^n+3\right]}{4^n\left[20\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^n+2\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+3}{20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+2} =$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\right]} = \frac{0+3}{0+2} = \frac{3}{2};$$
$$A_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{2}\cdot 2^n+3\cdot 3^n}{5\cdot 4\cdot 2^n+2\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left[\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{4^n\left[20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\right]} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n}{20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+2} = \frac{0+0}{0+2} = 0;$$
$$A_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{2}\cdot 2^n+3\cdot 5^n}{5\cdot 4\cdot 2^n+2\cdot 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n\left[\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n\right]}{4^n\left[20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\right]} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n}{20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+2} = \frac{0+3\cdot\infty}{0+2} = \infty.$$

Пример 8.28. Вычислить предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалов}}. \tag{8.72}$$

Решение. В примере 8.10 было показано, что эта последовательность монотонно возрастает и ограничена, следовательно, она имеет предел. Обозначим

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n. \tag{8.73}$$

Чтобы найти A, воспользуемся рекуррентной записью данной последовательности

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8.74}$$

вытекающей из результатов примера 8.10. Возведя в квадрат равенство (8.74), получим

$$x_{n+1}^2 = 2 + x_n.$$

Перейдя в этом равенстве к пределу, имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty}(2 + x_n) = 2 + \lim_{n\to\infty} x_n.$$

С учётом (8.73) найдём

$$A^2 = 2 + A.$$

Решениями этого уравнения являются $A_1 = -1$, $A_2 = 2$. Так как, согласно (8.72), $x_n > 0$, то предел отрицательным быть не может. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A = A_2 = 2,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}} = 2. \tag{8.75}$$

Этот пример допускает обобщение.

Пример 8.29. Показать, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \quad x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}, \quad a > 0,$$

имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a}.$$

Решение. Последовательность монотонно возрастает, так как $x_n > x_{n-1}$, и, как показано в примере 8.11, ограничена. Следовательно, она имеет предел. Обозначим его

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n-1} = A > 0.$$

Чтобы найти A, воспользуемся соотношением

$$x_n^2 = a + x_{n-1},$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty}(a + x_{n-1}) = a + \lim_{n\to\infty} x_{n-1},$$

или

$$A^2 = a + A.$$

Это уравнение имеет два корня:

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a}.$$

Так как предел A отрицательным быть не может, то

$$A = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a} = \frac{1 + \sqrt{4a+1}}{2}.$$

В частности, при $a = 2$ получим (8.75).

Пример 8.30. В примере 8.18 было показано, что предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданной рекуррентной формулой (8.45):

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big),$$

равен $\sqrt{a}$. Там же в качестве обобщения без доказательства утверждалось, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_{n+1} = \frac{1}{m}\Big[(m-1)x_n + \frac{a}{x_n^{m-1}}\Big], \quad m \in \mathbb{N}, \tag{8.76}$$

имеет предел $\sqrt[m]{a}$. Доказать это утверждение.

Решение. Последовательность (8.76) монотонно возрастает и ограничена, следовательно, она имеет предел, который мы обозначим через A. Чтобы его найти, преобразуем (8.76) к виду

$$mx_{n+1}x_n^{m-1} = (m-1)x_n^m + a.$$

Перейдя в этом равенстве к пределу, получим соотношение

$$\lim_{n\to\infty} mx_{n+1}x_n^{m-1} = \lim_{n\to\infty}[(m-1)x_n^m + a],$$

которое с учётом

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = A$$

и (8.52) запишется как

$$mA^m = (m-1)A^m + a,$$

откуда

$$A^m = a,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A = \sqrt[m]{a}.$$

При $m = 2$ получим предел (8.46)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a},$$

вычисленный в примере 8.18 с помощью признака Коши.

Пример 8.31. Вычислить
$$\lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{2n^5}.$$

Решение. С учётом результатов предыдущих примеров имеем
$$\lim_{n\to\infty} 3\sqrt[n]{2n^5} = 3\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n})^5 = 3\cdot 1\cdot 1^5 = 3.$$
Здесь мы воспользовались пределами
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1,$$
вычисленными в примере 8.16.

Пример 8.32. На графике функции $y = x^2$ задаются точки M_n и L_n с абсциссами $1/n$ и $-1/n$, соответственно. Через эти точки и начало координат проводится окружность с центром в точке P_n (рис. 30). Найти предел последовательности точек P_n.

Решение. Центры окружностей расположены на оси ординат: $P_n = (0, y_n)$. Их уравнения записываются в виде
$$x^2 + (y - y_n)^2 = y_n^2. \tag{8.77}$$
Положив в (8.77) $x = 1/n$, $y = 1/n^2$ и упростив, получим
$$y_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

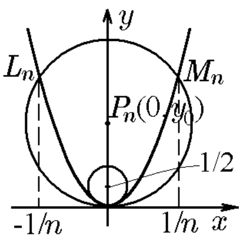


Рис. 30.

Тогда
$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$
Это означает, что точки P_n стремятся к точке P_∞ с координатами $(0; 1/2)$.

Пример 8.33. Найти предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где
$$x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1}), \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Решение. В примере 8.3 найдено выражение для общего члена этой последовательности:
$$x_n = \frac{2x_2 + x_1}{3} - (-1)^{n-1}\frac{x_2 - x_1}{3\cdot 2^{n-2}}.$$
Отсюда при $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ найдём
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3} - (-1)^{n-1}\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}\right] = \frac{2}{3}.$$

Пример 8.34. Вычислить
$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{7\cdot 2^{n+1} + 3\cdot 4^n}{n!}, \quad A_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot n! + n^2 + 1}{(n+1)! + 3n}.$$

Решение. Для A_1 с помощью тождественных преобразований и результатов примера 8.16 найдём

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\left(7\cdot 2\frac{2^n}{n!} + 3\frac{4^n}{n!}\right) = 14\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!} + 3\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{n!} = 14\cdot 0 + 3\cdot 0 = 0.$$

Для A_2, соответственно,

$$A_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\left(n + \dfrac{n^2}{n!} + \dfrac{1}{n!}\right)}{n!\left[(n+1) + \dfrac{3n}{n!}\right]} = \lim_{n\to\infty}\frac{n + \dfrac{n}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n!}}{n + 1 + \dfrac{3}{(n-1)!}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left[1 + \dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n(n!)}\right]}{n\left[1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n}\dfrac{1}{(n-1)!}\right]} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1 + \dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n(n!)}\right]}{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{3}{n}\dfrac{1}{(n-1)!}\right]} = 1.$$

Пример 8.35. Показать, что $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, если

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n},\ a > 1; \qquad A_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n},\ a > 1; \qquad A_3 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Решение. 1. Чтобы вычислить A_1, выберем целое $m \geqslant k$, тогда

$$0 < \frac{n^k}{a^n} \leqslant \frac{n^m}{a^n} = \left(\frac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m = \left(\frac{n}{b^n}\right)^m, \tag{8.78}$$

где $b = \sqrt[m]{a} > 1$. Воспользовавшись выражением для бинома Ньютона (8.14), получим оценку

$$0 < \frac{n}{b^n} = \frac{n}{[1 + (b-1)]^n} = \frac{n}{1 + n(b-1) + \dfrac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 + \ldots + (b-1)^n} <$$

$$< \frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2},$$

из которой, согласно теореме 8.6 (о сжатой последовательности), найдём

$$0 < \lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n} < \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2} = 0.$$

Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{b^n} = 0 \tag{8.79}$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{b^n}\right)^m = 0.$$

Но тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^m}{a^n} = 0$$

и в силу неравенства (8.78)

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

2. Чтобы вычислить A_2, воспользуемся равенством (8.79), из которого при достаточно больших n следует оценка

$$\frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1, \quad b > 1.$$

Положив $b = a^\varepsilon$, где $a > 1$, $\varepsilon > 0$, получим

$$\frac{1}{a^{\varepsilon n}} < \frac{n}{a^{\varepsilon n}} < 1$$

или

$$1 < n < a^{\varepsilon n}.$$

Логарифмирование этого неравенства даёт

$$0 < \log_a n < \varepsilon n,$$

тогда

$$0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

Это означает, что величина $(\log_a n)/n$ в силу произвольности ε может быть сколь угодно малой при больших n, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0.$$

3. Чтобы вычислить A_3, покажем сначала, что

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n. \tag{8.80}$$

Применим метод математической индукции. При $n = 1$ неравенство справедливо. Далее, если оно справедливо для некоторого n, то для $n+1$ имеем

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{3}\right)^n (n+1) = \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1} \frac{3}{(1+1/n)^n} > \left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

Последнее неравенство справедливо, поскольку, согласно (8.61),

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Таким образом, неравенство (8.80) справедливо для любых n, следовательно,

$$0 < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \sqrt[n]{\frac{1}{(n/3)^n}} = \frac{3}{n}.$$

Отсюда в силу теоремы 8.6 (о сжатой последовательности) можем записать

$$0 < \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Пример 8.36. Показать, что если $x_n > 0$, $n = \overline{1, \infty}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \tag{8.81}$$

при условии, что предел, стоящий в правой части равенства, существует.

Решение. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \frac{x_2}{x_1} \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Здесь мы воспользовались соотношением (8.58), поскольку, по условию, последовательность $\{x_n/x_{n-1}\}_{n=2}^{\infty}$ сходится и $x_n/x_{n-1} > 0$.

Пример 8.37. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e. \tag{8.82}$$

Решение. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$x_n = \frac{n^n}{n!},$$

для которой, с одной стороны,

$$\sqrt[n]{x_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}},$$

а с другой,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^n/n!}{(n-1)^{n-1}/(n-1)!} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \frac{(n-1)!}{n!} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}.$$

В примерах 8.16 и 8.35 было показано, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Исходя из равенства (8.81) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n/x_{n-1}$, запишем

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e,$$

а, стало быть,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Пример 8.38. Показать, что

$$1)\quad \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0,$$

$$2)\quad \lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1.$$

Решение. Из результатов примера 8.7 и теоремы 8.15 имеем оценку

$$\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n < e < \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n+1}.$$

Её логарифмирование даёт

$$n\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) < 1 < (n+1)\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big),$$

откуда

$$\frac{1}{n+1} < \ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{n} \tag{8.83}$$

и, соответственно,

$$\frac{n}{n+1} < n\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) < 1. \tag{8.84}$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

то из (8.83) и (8.84) в силу теоремы 8.6 (о сжатой последовательности) получим

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = 0;\\
&\lim_{n\to\infty} n\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to\infty}\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = 1.
\end{aligned} \tag{8.85}$$

Далее логарифмирование известных соотношений

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = e$$

даёт

$$\ln\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big) = 0, \quad \ln\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = 1.$$

Сравнение этих соотношений с (8.85) убеждает в справедливости исходных утверждений.

Пример 8.39. Вычислить

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^{n^3}, \quad A_2 = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^{n}, \quad A_3 = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{\mu}{n^2}\Big)^{n^2}.$$

Решение. С учётом результатов предыдущих примеров имеем

$$\begin{aligned}
A_1 &= \lim_{n\to\infty}\Big[\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^{n^2}\Big]^n = \lim_{n\to\infty} e^n = \infty;\\
A_2 &= \lim_{n\to\infty}\Big[\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)^{n^2}\Big]^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{1/n} = 1;\\
A_3 &= \lim_{n\to\infty}\Big[\Big(1+\frac{\mu}{n^2}\Big)^{n^2/\mu}\Big]^{\mu} = e^{\mu}.
\end{aligned}$$

Пример 8.40. Найти x, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{n^x-(n-1)^n}=\frac{1}{a+1}.$$

Решение. Запишем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{-n^x[(1-1/n)^x-1]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^a n^{1-x}}{-n[(1-1/n)^x-1]}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{a+1-x}}{x}=\frac{1}{a+1}.$$

Следовательно, $x=a+1$.

Пример 8.41. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+...+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}\Big].$$

Решение. Преобразуем k-е слагаемое:

$$\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{k+2}{k![1+(k+1)+(k+1)(k+2)]}=\frac{k+2}{k!(k+2)^2}=$$
$$=\frac{1}{k!(k+2)}=\frac{k+1}{(k+2)!}=\frac{k+2-1}{(k+2)!}=\frac{1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+2)!}.$$

Тогда

$$x_n=\frac{3}{1!+2!+3!}+\frac{4}{2!+3!+4!}+...+\frac{n+2}{n!+(n+1)!+(n+2)!}=$$
$$=\Big(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\Big)+\Big(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\Big)+...+\Big(\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!}\Big)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{(n+2)!}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$

Пример 8.42. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, где

$$x_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},\quad n=\overline{1,\infty}.$$

Решение. В примере 8.12 мы показали, что эта последовательность монотонно убывает и ограничена. Следовательно, она имеет предел. Заметим, что

$$x_n^2=\frac{1^1\cdot 3^2\cdots(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdots(2n)^2}=\frac{1\cdot 3}{2^2}\,\frac{3\cdot 5}{n^2}\cdots\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\,\frac{1}{2n+1}\leqslant\frac{1}{2n+1}.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}1/(2n+1)=0$ и последовательность x_n знакоположительна, то в силу теоремы о сжатой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=0.$$

Пример 8.43. Найти предел последовательности

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}.$$

Решение. Заметим, что $x_n = \sqrt[n]{a_n}$, где

$$a_n = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}.$$

Составим отношение

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)\cdots(2n)(2n+1)}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{(n+1)(n+2)\cdots(2n)} = \Big(\frac{n}{n+1}\Big)^n\frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1)^2}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}[(n+2)(2n+1)/(n+1)^2]}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n} = \frac{2}{e}$$

и в силу (8.81) $A = 2/e$.

Пример 8.44. Вычислить предел

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} n^2\sin^2\Big(\frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\Big);$$

$$A_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln 2n}}\Big[\frac{\ln 3/2}{\sqrt{\ln 2}+\sqrt{\ln 3}} + \frac{\ln 4/3}{\sqrt{\ln 3}+\sqrt{\ln 4}} + ... + \frac{\ln(n/(n-1))}{\sqrt{\ln(n-1)}+\sqrt{\ln n}}\Big].$$

Решение. 1. Поскольку $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha)$, то преобразуем выражение

$$\pi - \frac{\pi\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \pi\Big(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\Big) = \frac{\pi}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}.$$

Воспользуемся первым замечательным пределом:

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} n^2\frac{\pi^2}{(n+1)(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} = \frac{\pi^2}{2}.$$

2. Проведём следующие преобразования:

$$A_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln 2n}}\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln(k/[k-1])}{\sqrt{\ln(k-1)}+\sqrt{\ln k}}\frac{\sqrt{\ln k}-\sqrt{\ln(k-1)}}{\sqrt{\ln k}-\sqrt{\ln(k-1)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln 2n}}\sum_{k=3}^{n}\frac{\ln k-\ln(k-1)}{\ln k-\ln(k-1)}[\sqrt{\ln k}-\sqrt{\ln(k-1)}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln 2n}}\sum_{k=3}^{n}[\sqrt{\ln k}-\sqrt{\ln(k-1)}] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\ln 2n}}[\sqrt{\ln n}-\sqrt{\ln 2}] = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\ln n}-\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\ln n+\ln 2}} = 1.$$

Таким образом, $A_2 = 1$.

Пример 8.45. Найти предел последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Решение. Заметим, что

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}-\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{2(n+2)}+\frac{1}{2(n+3)}=$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}.$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{4}.$$

9. Предел функции

9.1. Определение предела функции по Гейне и по Коши

До сих пор мы рассматривали пределы числовых последовательностей, т.е. функций целочисленной переменной n: $y_n=f(n)$. Однако понятие предела можно распространить и на функцию $y=f(x)$, т.е. на функцию непрерывной переменной x. В этом случае говорят, что функция $y=f(x)$ стремится к пределу A, когда x стремится к значению a, и пишут

$$\lim_{x\to a}f(x)=A, \tag{9.1}$$

при этом важно, что точка $x=a$ не обязана принадлежать области определения функции $y=f(x)$, однако сама функция $f(x)$ должна быть определена хотя бы в одной точке любой проколотой окрестности точки a.

Забегая вперед, отметим, что отсутствие этого предположения сделало бы невозможным рассмотрение предела от функции

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

которая не определена в точке $x=a$, но предел которой в этой точке является важной характеристикой функции $y=f(x)$, называемой её производной.

Для того чтобы воспользоваться уже изученным понятием предела последовательности, рассмотрим на оси Ox некоторую последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящуюся к a. Последовательность аргумента $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ порождает ещё одну последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $y_n=f(x_n)$, которая может сходиться к некоторому значению

A. Если величина A не зависит от выбора вида последовательности аргумента $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, то её можно принять за предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$. В противном случае предел $y = f(x)$ при $x \to a$ не существует. Понятие предела функции $y = f(x)$ при $x \to a$ на языке последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ называют *определением предела по Гейне*, которое имеет следующую строгую формулировку.

♦ Функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$ (или в точке a), если существует такое число A, что для произвольной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \neq a$, $x_n \in D(f(x))$, сходящейся к точке a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к точке A.

Рис. 31,*а* даёт геометрическую иллюстрацию определения предела по Гейне.

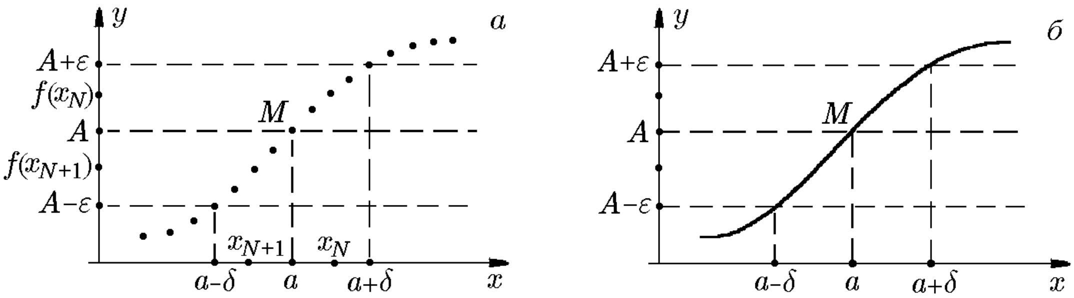


Рис. 31. Иллюстрация определения предела функции $f(x)$ по Гейне (*а*) и по Коши (*б*)

♦ Точка a называется *предельной точкой* множества E, если любая окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку множества E, отличную от a.

♢ Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что x_n, $n = \overline{1, \infty}$, принадлежит области определения функции $f(x)$, а точка a является предельной точкой множества $D(f(x))$.

Пример 9.1. Пользуясь определением предела по Гейне, доказать, что функция

$$y = f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

не имеет предела в точке $x = 0$.

Решение. Достаточно показать, что существуют по меньшей мере две последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ с отличными от нуля элементами, сходящиеся к нулю, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} z_n = 0, \tag{9.2}$$

такие что

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} \neq \lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{z_n}. \tag{9.3}$$

Рассмотрим две последовательности:

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad z_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2},$$

имеющие равные нулевые пределы в полном соответствии с (9.2). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sin 2\pi n = 0$$

и, соответственно,

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{z_n}=\lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

Несовпадение этих пределов и означает, что функция

$$y=\sin\frac{1}{x}$$

в точке $x=0$ предела не имеет. Рис. 32 геометрически иллюстрирует это утверждение.

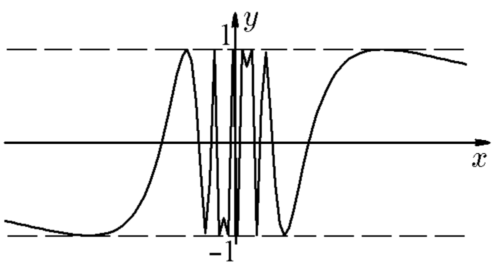


Рис. 32.

♦ Если в определении предела функции по Гейне число a является точной верхней гранью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\neq a$, т.е. $a=\sup x_n$, то число A_- называется *левым* (*левосторонним*) пределом функции и обозначается как

$$A_-=\lim_{x\to a-0}f(x)=f(a-0). \tag{9.4}$$

Если же число a является точной нижней гранью последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\neq a$, т.е. $a=\inf x_n$, то число A_+ называется *правым* (*правосторонним*) пределом функции и обозначается как

$$A_+=\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a+0). \tag{9.5}$$

Очевидно, что существование предела функции в точке $x=a$ определяется совпадением её правого и левого пределов:

$$A_-=A_+=A. \tag{9.6}$$

♦ Если в определении предела функции $y=f(x)$ по Гейне сходимость последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ дополнить сходимостью в несобственном смысле как для одной, так и для другой последовательности, то мы получим пределы вида

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=A_\pm,\quad \lim_{x\to a\pm 0}f(x)=\pm\infty,\quad \lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty. \tag{9.7}$$

В определении предела функции по Гейне фигурируют две последовательности: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$; их сходимость, согласно определению, характеризуют δ-окрестность точки a по x и ε-окрестность точки A по y. В силу этого наряду с определением Гейне можно сформулировать определение предела функции «на языке ε,δ», называемое *определением по Коши*, преимуществом которого является отказ от перебора всех последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, стремящихся к a.

♦ Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε существует такое $\delta > 0$, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется, для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ и $x \in D(f(x))$.

◊ Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что $x \in D(f(x))$, а точка a — предельная точка множества $D(f(x))$.

С помощью логических символов это определение запишется так:

$$\Big\{\lim_{x\to a} f(x) = A\Big\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\},$$

а с использованием понятия проколотой окрестности, соответственно,

$$\Big\{\lim_{x\to a} f(x) = A\Big\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in \dot{S}(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\}.$$

Геометрически (рис. 31,*б*) это означает, что число A есть предел функции $y = f(x)$, если для любой ε-окрестности числа A по оси Oy можно найти такую проколотую δ-окрестность точки a на оси Ox, что для всех x, принадлежащих этой δ-окрестности, соответствующие значения функции содержатся в ε-окрестности числа A.

◊ Постоянную можно рассматривать как переменную, все значения которой равны между собой. Поэтому считают, что предел постоянной величины равен самой постоянной:

$$\lim_{x\to a} C = C.$$

Действительно, пусть $f(x) = C$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ неравенство $|f(x) - C| = |C - C| < \varepsilon$ выполняется для всех x.

В рассмотренном выше определении предела функции аргумент x принимает все значения, достаточно близкие к a, т.е. как меньше a, так и больше a. В этом случае говорят, что x стремится к a произвольным образом. Существуют задачи, в которых накладываются ограничения на способ стремления переменной x к a, что, как и в случае определения по Гейне, приводит к понятию односторонних пределов.

♦ Число A называется *правосторонним пределом*, или *пределом справа* (*левосторонним пределом*, или *пределом слева*) функции $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε существует такое $\delta > 0$, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ выполняется, для всех x, удовлетворяющих условию $0 < x - a < \delta$ ($-\delta < x - a < 0$) и обозначается

$$A_+ = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a + 0), \quad A_- = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a - 0).$$

◊ Чтобы существовал предел функции в точке a, необходимо и достаточно существование односторонних пределов и их равенство между собой: $f(a - 0) = f(a + 0)$ или

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

Если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x),$$

то предел в точке a не существует.

Односторонние пределы, введённые выше из определения Гейне, на языке ε и δ, т.е. из определения Коши, формулируются следующим образом. Правостороннему пределу соответствует логическая запись

$$\Big\{A_+ = \lim_{x\to a+0} f(x)\Big\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in]a, a+\delta[\Rightarrow |f(x) - A_+| < \varepsilon\},$$

а левостороннему –

$$\Big\{A_- = \lim_{x\to a-0} f(x)\Big\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in]a-\delta, a[\Rightarrow |f(x) - A_-| < \varepsilon\}.$$

Теорема 9.1. *Определения предела по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. Отметим, что в каждом определении предполагается, что функция $y = f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки a, т.е. существует $\delta_0 > 0$, при котором $\dot S(a, \delta_0) \subset D(f(x))$.

1. Докажем сначала, что если число A есть предел функции $f(x)$ в точке a по Гейне, то это же число является пределом функции $f(x)$ по Коши, т.е. выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$ существует δ $(0 < \delta \leqslant \delta_0)$ такое, что для всех x из проколотой окрестности $\dot S$ точки a справедливо $|f(x) - A| < \varepsilon$, или

$$\{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta \in]0, \delta_0] : \forall x \in \dot S(a, \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\}. \tag{9.8}$$

Доказательство проведём от противного. Допустим, что (9.8) неверно. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для всех $0 < \delta \leqslant \delta_0$ найдётся x, принадлежащее проколотой окрестности $\dot S$ точки a, для которого выполняется $|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0$, что в символьной форме запишется следующим образом:

$$\exists\varepsilon_0 > 0 : \forall\delta \in]0, \delta_0] \exists x(\delta) \in \dot S(a, \delta) : |f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{9.9}$$

Согласно (9.9), в качестве δ можно взять любое число $\delta = \delta_0/n$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $x_n = x(\delta_0/n)$, тогда в силу (9.9) для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$0 < |x_n - a| < \delta_0/n; \tag{9.10}$$
$$|f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{9.11}$$

Из (9.10) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad x_n \in \dot S(a, \delta_0), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

а из (9.11) заключаем, что число A не может быть пределом последовательности $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$, т.е. число A не может быть пределом функции $f(x)$ в точке a по Гейне. Но это противоречит исходному утверждению, что число A есть предел функции $f(x)$ по Гейне. Это противоречие доказывает невозможность выполнения (9.9), а, следовательно, должно выполняться утверждение (9.8), подтверждающее существование числа A как предела функции $f(x)$ по Коши, что и требовалось доказать.

2. Пусть теперь число A есть предел функции $f(x)$ по Коши, т.е. выполняется утверждение (9.8). Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, сходящуюся к числу a и такую, что $x_n \in \dot S(a, \delta_0)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Согласно определению предела последовательности, для найденного в (9.8) числа $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$

можно указать номер $N(\delta)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ x_n будет принадлежать $\dot{S}(a, \delta)$, откуда в силу (9.8) будет следовать, что $f(x_n) \in S(A, \varepsilon)$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$, такой что для всех $n > N(\varepsilon)$ значения функции $f(x_n)$ принадлежат ε-окрестности точки A, или

$$\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow f(x_n) \in S(A, \varepsilon), \tag{9.12}$$

где $N(\varepsilon) = N(\delta(\varepsilon))$, причём условие (9.12) выполняется для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad x_n \in \dot{S}(a, \delta_0) \subset D(f(x)).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A,$$

т.е. число A – предел функции $f(x)$ в точке a по Гейне. Таким образом, теорема доказана.

Продолжая аналогию определений по Гейне и Коши, введём понятие предела функции $f(x)$ в бесконечности.

♦ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to +\infty$ и обозначается $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, если для любого $\varepsilon > 0$, в том числе и сколь угодно малого, существует число $\delta > 0$, такое что для всех $x > \delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$, или

$$\{\lim_{x\to+\infty} f(x) = A\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\},$$

геометрически (рис. 33,*а*), т.е. на языке δ-окрестности $S(+\infty, \delta)$ точки $x = +\infty$ и ε-окрестности точки $y = f(x) = A$, это означает, что

$$\{\lim f(x) = A\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in S(+\infty, \delta) \Rightarrow f(x) \in S(A, \varepsilon)\}.$$

♦ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$, в том числе и сколь угодно малого, существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x < -\delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$, или

$$\{\lim_{x\to-\infty} f(x) = A\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x < -\delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\}.$$

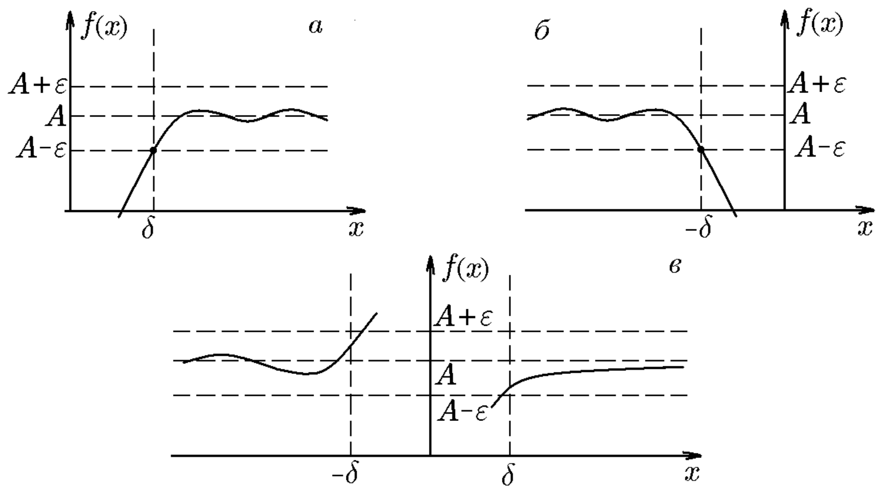


Рис. 33.

В геометрической интерпретации (рис. 33,*б*)

$$\{\lim f(x) = A\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in S(-\infty, \delta) \Rightarrow f(x) \in S(A, \varepsilon)\}.$$

♦ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$, в том числе и сколь угодно малого, существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $|x| > \delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$, или

$$\{\lim_{x\to\infty} f(x) = A\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x : |x| > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\},$$

и, соответственно (рис 33,*в*),

$$\{\lim_{x\to\infty} f(x) = A\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in \rho(-\infty, \delta) \cup S(+\infty, \delta) \Rightarrow f(x) \in S(A, \varepsilon)\}.$$

♦ Функция $f(x)$ называется *удовлетворяющей условию Коши* в точке $x = a$, если она определена в некоторой проколотой окрестности этой точки и для любого $\varepsilon > 0$, в том числе и сколь угодно малого, существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x' и x'', принадлежащих δ-окрестности точки a, выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, или в символьной форме

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x', x'' \in \dot{S}(a, \delta) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{9.13}$$

Теорема 9.2 (критерий Коши). *Для того чтобы существовал конечный предел функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла в точке a условию Коши* (9.13).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

тогда, по определению предела, для любого положительного ε существует положительное число δ такое, что для всех $x \in \dot{S}(a, \delta)$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon/2$, или

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in \dot{S}(a, \delta') \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.14}$$

Если x' и x'' — любые точки из проколотой окрестности $\dot{S}(a, \delta)$, то из (9.14) следует

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) - (f(x'') - A)| \leqslant |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. выполняется условие Коши (9.13).

Достаточность. Теперь докажем, что если выполняется условие (9.13), то существует предел функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.

Воспользуемся определением предела по Гейне: пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность, такая что $x_n \in \dot{S}(a, \delta)$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a. \tag{9.15}$$

Покажем, что соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет конечный предел, не зависящий от выбора последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

При выполнении условия (9.13) для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех $x', x'' \in \dot{S}(a, \delta)$, выполняется $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, или

$$\forall x', x'' \in \dot{S}(a, \delta) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{9.16}$$

Теперь из существования предела (9.15) для $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ из (9.16) можно указать номер $n(\delta) = N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется $0 < |x_n - a| < \delta$.

Это означает, что для любого $n \geqslant N(\varepsilon)$ и любого $m \geqslant N(\varepsilon)$ выполняются условия $x_n, x_m \in \dot{S}(a, \delta)$ и $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$, и, таким образом, последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность, имеющая конечный предел A. Значение этого предела не зависит от того, как выбиралась последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Действительно, допустим, что для двух последовательностей $\{x'_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{x''_n\}_{n=1}^\infty$, стремящихся к a, последовательности $\{f(x'_n)\}_{n=1}^\infty$ и $\{f(x''_n)\}_{n=1}^\infty$ имеют различные пределы: $f(x'_n) \to A'$ и $f(x''_n) \to A''$. Тогда, перемешав элементы обеих последовательностей, составим новую последовательность

$$x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, \ldots, x'_n, x''_n, \ldots$$

Её предел, очевидно, равен a, поскольку для достаточно больших n x'_n и x''_n отличаются от a произвольно мало. В то же время последовательность

$$f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \ldots, f(x'_n), f(x''_n), \ldots,$$

вопреки предположению, не имеет предела вовсе, так как последовательности из её чётных и нечётных членов стремятся к разным пределам. Полученное противоречие и доказывает, что все последовательности $\{f(x_n)\}_{n=1}^\infty$ стремятся к одному пределу.

$\Diamond$ Теорема 9.2 остается справедливой, если a заменить символами $a - 0$, $a + 0$, $\pm\infty$, ∞, при этом условие (9.13) должно выполняться в соответствующей окрестности.

Пример 9.2. Используя определение Коши, показать, что

$$\lim_{x\to 3}(2x + 1) = 7.$$

Каково должно быть δ, чтобы при $0 < |x - 3| < \delta$ выполнялось неравенство $|(2x + 1) - 7| < 10^{-3}$?

Решение. Согласно определению Коши, следует доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что из неравенства $0 < |x - 3| < \delta$ следует, что $|(2x + 1) - 7| < \varepsilon$. Зададим $\varepsilon > 0$ и запишем $|(2x + 1) - 7| = |2x - 6| = 2|x - 3|$. Если взять $\delta = \varepsilon/2$, то для всех x, удовлетворяющих условию $|x - 3| < \delta$ будет

$$|(2x + 1) - 7| = 2|x - 3| = 2\delta < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 3}(2x + 1) = 7.$$

Число δ определяется из неравенства $\delta < \varepsilon/2$. В частности, если $\varepsilon = 10^{-3}$, то можно взять $\delta < 10^{-3}/2 = 5 \cdot 10^{-4}$.

Пример 9.3. Используя определение Коши, показать, что

$$1)\quad \lim_{x\to-1}\frac{2x+1}{x+3}=-\frac{1}{2};\qquad 2)\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+3}=2.$$

Решение. 1. Согласно определению Коши, следует доказать, что для любого числа $\varepsilon>0$ можно подобрать число $\delta>0$ так, что как только $|x+1|<\delta$, то

$$\Big|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\Big|=\Big|\frac{5x+5}{2(x+3)}\Big|<\varepsilon$$

или

$$\frac{|x+1|}{|x+3|}<\frac{2}{5}\varepsilon.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $0<\delta<1$. Но если $|x+1|<1$, то имеем

$$\Big|\frac{2x+1}{x+3}+\frac{1}{2}\Big|=\frac{|x+1|}{|x+3|}<|x+1|<1.$$

С другой стороны, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{|x+1|}{|x+3|}<\frac{2}{5}\varepsilon,$$

достаточно, чтобы $|x+1|<2\varepsilon/5$.

Таким образом, в качестве δ можно выбрать меньшее из чисел 1 и $2\varepsilon/5$: $\delta=\min(1,2\varepsilon/5)$.

2. Равенство

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+3}=2$$

на языке ε,δ означает, что для всякого $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>\delta$, выполняется неравенство

$$\Big|\frac{2x+1}{x+3}-2\Big|=\Big|-\frac{5}{x+3}\Big|=\Big|\frac{5}{x+3}\Big|<\varepsilon.$$

Отсюда

$$|x+3|>\frac{5}{\varepsilon}.$$

Так как

$$|x+3|\geqslant|x|-3,$$

то достаточно решить неравенство

$$|x|-3>\frac{5}{\varepsilon}.$$

Положим теперь

$$\delta=3+\frac{5}{\varepsilon}.$$

Из наших рассуждений следует, что при $|x| > \delta$ выполняется неравенство

$$\Big|\frac{2x+1}{x+3} - 2\Big| < \varepsilon,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x+3} = 2,$$

что и требовалось доказать.

Пример 9.4. Показать, что

$$1)\quad \lim_{x\to 4} \sqrt{x+12} = 4, \qquad 2)\quad \lim_{x\to 2}(x^2+12) = 16.$$

Решение. 1. Согласно определению, составим выражение

$$|\sqrt{x+12} - 4| = \Big|(\sqrt{x+12} - 4)\frac{\sqrt{x+12}+4}{\sqrt{x+12}+4}\Big| = \Big|\frac{x-4}{\sqrt{x+12}+4}\Big| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x+12}+4}. \tag{9.17}$$

Покажем, что для заданного $\varepsilon > 0$ можно подобрать $\delta > 0$ так, что как только $|x-4| < \delta$, то $|\sqrt{x+12} - 4| < \varepsilon$. Так как

$$\sqrt{x+12} + 4 > 4,$$

то, согласно (9.17),

$$|\sqrt{x+12} - 4| = \frac{|x-4|}{\sqrt{x+12}+4} < \frac{|x-4|}{4} < \frac{\delta}{4}.$$

Выбрав $\delta < 4\varepsilon$, получим

$$|\sqrt{x+12} - 4| < \frac{1}{4}4\varepsilon < \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{x+12} = 4.$$

2. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Тогда

$$|x^2+12-16| = |x^2-4| = |(x-2)^2 + 4(x-2)| \leqslant |x-2|^2 + 4|x-2| \leqslant \varepsilon,$$

как только

$$0 < |x-2| < \sqrt{4+\varepsilon} - 2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2}.$$

Последнее неравенство тем более будет выполняться, если

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon}+2} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4+\varepsilon}} > \frac{\varepsilon}{2\sqrt{4+4\varepsilon+\varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)} = \delta(\varepsilon) > |x-2|,$$

например, для $\varepsilon = 10^{-2}$ получим $\delta(\varepsilon)\big|_{\varepsilon=10^{-2}} = 1/402 \approx 25\cdot 10^{-4}$.

9.2. Бесконечно большая функция

В предыдущем разделе мы рассмотрели два определения предела: по Гейне и по Коши. В определении Гейне мы переформулировали, согласно Коши, сходимость последовательностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ в собственном смысле на языке δ, ε как существование конечного предела A функции $f(x)$ в точке a на оси Ox, т.е.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

и сформулировали условия его существования в виде критерия Коши.

Случай, когда последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся, но первая — в несобственном, а вторая по-прежнему в собственном смыслах, в рамках определения Коши соответствует существованию конечного предела A функции $f(x)$ в бесконечно удалённых точках: $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to \infty$.

Перейдём теперь к рассмотрению пределов, когда в несобственном смысле сходится последовательность $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

♦ Функция $y = f(x)$, определённая в некоторой проколотой окрестности точки a, называется *бесконечно большой* (или имеющей в этой точке бесконечный предел) при $x \to a$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \tag{9.18}$$

если если для любого положительного, в том числе и сколь угодно малого, числа ε существует число $\delta > 0$ такое, что для всех x, принадлежащих проколотой δ-окрестности точки a, выполняется $f(x) > \varepsilon$, или

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon. \tag{9.19}$$

Если множество, удовлетворяющее условию $y = f(x) > \varepsilon$ по оси Oy, обозначить через $S(+\infty, \varepsilon)$ и, как и на оси Ox, рассматривать его как ε-окрестность бесконечно удалённой точки $+\infty$, то в геометрической интерпретации определение (9.19) запишется как

$$\{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in \dot{S}(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in S(+\infty, \varepsilon)\}, \tag{9.20}$$

т.е. график функции $y = f(x)$ для всех $x \in \dot{S}(a, \delta)$ должен лежать выше горизонтальной прямой $y = \varepsilon > 0$ (рис. 34,a).

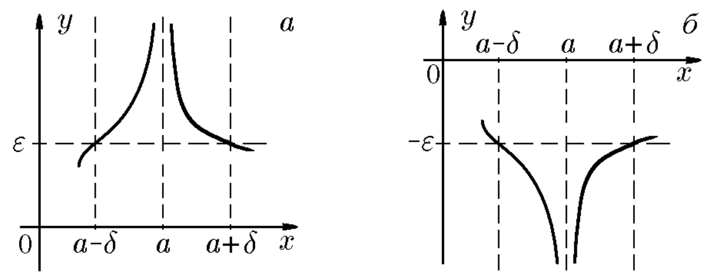


Рис. 34. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (a); $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ (*б*)

Аналогично бесконечно большой функции с положительным знаком вводится бесконечно большая в точке a функция с отрицательным знаком:

$$\{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\varepsilon\} \tag{9.21}$$

или в геометрической интерпретации

$$\{\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in \dot{S}(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in \rho(-\infty,\varepsilon)\}, \qquad (9.22)$$

где $S(-\infty,\varepsilon)$ — ε-окрестность бесконечно удалённой точки $-\infty$. В этом случае график функции $y = f(x)$ для всех $x \in \dot{S}(a,\delta)$ лежит ниже горизонтальной прямой $y = -\varepsilon$ (рис. 34,*б*).

Отметим, что для определённых выше бесконечно больших в точке a функций $y = f(x)$ соответствующие односторонние пределы имеют один знак (рис. 34). Если односторонние пределы имеют разные знаки, то предел такой бесконечно большой в точке a функции $y = f(x)$ обозначают

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

при этом определения (9.19) и (9.21) для $+\infty$ и $-\infty$ можно объединить в одно:

$$\{\lim_{x\to a} f(x) = \infty\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \varepsilon\} \qquad (9.23)$$

и, соответственно,

$$\{\lim_{x\to a} f(x) = \infty\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x \in \dot{S}(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in S(\infty,\varepsilon)\}, \qquad (9.24)$$

где $S(\infty,\varepsilon) = S(-\infty,\varepsilon) \cup S(+\infty,\varepsilon)$ — так называемая ε-окрестность бесконечно удалённой точки. В этом случае график функции $y = f(x)$ для всех $x \in \dot{S}(a,\delta)$ лежит вне горизонтальной полосы $-\varepsilon < y < \varepsilon$ (рис. 35), что соответствует односторонним пределам ($x \to a \pm 0$) разных знаков.

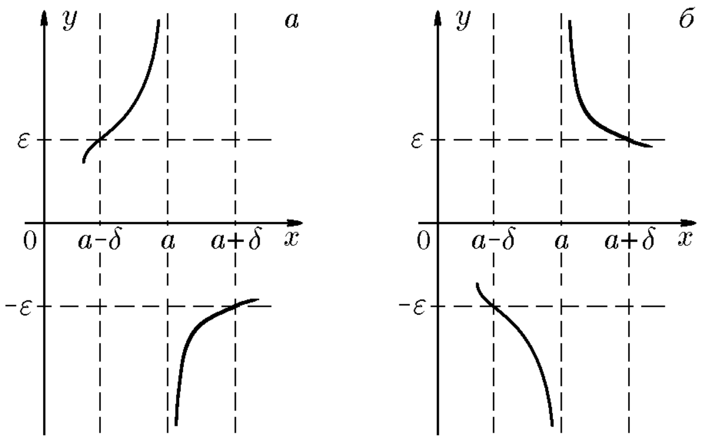


Рис. 35. $\{\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty\} \Leftrightarrow \{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty\} \Leftrightarrow \{\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty; \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty\}$

Перечень различных типов пределов замыкает случай, когда в рамках определения Гейне обе последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся в несобственном смысле. В рамках определения Коши это соответствует бесконечно большим функциям в бесконечно удалённых точках $+\infty$, $-\infty$ или ∞ по оси Ox. Так, например, запись

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$$

означает, что если для любого положительного ε существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x < -\delta$ выполняется $f(x) > \varepsilon$, или

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 : \forall x < -\delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon,$$

или на языке окрестностей бесконечно удалённых точек (рис. 36):

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 : \forall x \in \dot{S}(-\infty, \delta) \Rightarrow f(x) \in S(+\infty, \varepsilon).$$

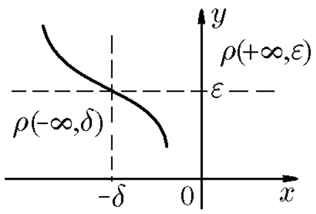


Рис. 36.

♢ Всякая бесконечно большая в точке a функция является неограниченной в некоторой её окрестности. Обратное неверно: не всякая неограниченная в окрестности точки a функция является бесконечно большой в этой точке. Например, функция $y = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ является неограниченной в точке $x = 0$, но не является бесконечно большой в этой точке, поскольку в любой её окрестности можно указать точку x_0, в которой $y(x_0) = 0$.

♢ Функция $y = f(x)$, определённая в точке a любым большим значением $f(a)$, не является в этой точке бесконечно большой функцией. Другими словами, термин «бесконечно большая» функция является характеристикой исключительно поведения функции в окрестности точки a, но не её значения $f(a)$.

Пример 9.5. Показать, что функция

$$y = \frac{1}{x-2}$$

является бесконечно большой при $x \to 2$ и не является таковой при $x \to 2{,}00001$.

Решение. По определению,

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2} = \infty,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех $0 < |x-2| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$\Big|\frac{1}{x-2}\Big| = \frac{1}{|x-2|} > \varepsilon.$$

Положив $|x-2| < \delta$ и выбрав $\delta = 1/\varepsilon$, получим

$$\frac{1}{|x-2|} > \frac{1}{\delta} = \varepsilon.$$

это и означает, что

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2} = \infty,$$

т.е. функция $y = 1/(x-2)$ является бесконечно большой при $x \to 2$.

Теперь, рассуждая, как в примере 9.4 (см. случай 2), находим, что

$$\lim_{x\to 2{,}00001}\frac{1}{x-2} = 10^5.$$

Это означает, что функция $y = 1/(x-2)$ при $x \to 2{,}00001$ бесконечно большой не является, что и требовалось доказать.

9.3. Бесконечно малые функции

♦ Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0. \tag{9.25}$$

Определение остается справедливым, если число a заменить одним из символов $\pm\infty$ или ∞.

Пример 9.6. Записать определение бесконечно малой функции с помощью логической символики.

Решение. Например,

$$\{\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon\}$$

или

$$\{\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 0\} \Leftrightarrow \{\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 : \forall x : |x| > \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon\}.$$

Пример 9.7. Показать, пользуясь определением, что при $x \to 1$ функция $y = 1 - x^2$ является бесконечно малой, а при $x \to 2$ нет.

Решение. Пусть ε — любое положительное число. Требуется доказать, что можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x-1| < \delta$, будет выполняться неравенство $|1 - x^2| < \varepsilon$.

Если $|x - 1| < \delta$, то $|x + 1| = |x - 1 + 2| \leqslant |x - 1| + 2 < \delta + 2$ и

$$|1-x^2| = |1-x||1+x| = |1-x||-1-x| = |1-x||-2+(1-x)| = |1-x|(2+|1-x|) < \delta(\delta+2).$$

Для выполнения неравенства $|1-x^2| < \varepsilon$ достаточно потребовать, чтобы $\delta(\delta+2) = \varepsilon$, откуда

$$\delta = -1 + \sqrt{1+\varepsilon},$$

поскольку

$$|1 - x^2| < \delta(\delta + 2) = (\sqrt{1+\varepsilon} - 1)(\sqrt{1+\varepsilon} + 1) = \varepsilon.$$

Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что из неравенства $0 < |x - 1| < \delta$ следует неравенство $|1 - x^2| < \varepsilon$. Следовательно, функция $1 - x^2$ есть бесконечно малая переменная при $x \to 1$ и

$$\lim_{x\to 1}(1 - x^2) = 0.$$

Далее, рассуждая, как в примере 9.4 (см. случай 1), находим

$$\lim_{x\to 2}(1 - x^2) = -3.$$

Следовательно, функция $y = 1 - x^2$, являясь при $x \to 1$ бесконечно малой, при $x \to 2$ таковой не является.

♢ Понятие бесконечно малой функции играет важную роль в теории пределов. С её помощью любую функцию, имеющую в некоторой точке конечный или бесконечный предел, можно в окрестности этой точки представить как функцию от бесконечно малой $\alpha(x)$.

Это представление определяет следующая теорема.

Теорема 9.3. *Всякую функцию, имеющую конечный предел*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

в некоторой окрестности точки a можно представить суммой

$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{9.26}$$

если $\alpha(x)$ — произвольная бесконечно малая при $x \to a$ функция:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0,$$

а любую функцию $f(x)$, имеющую в этой точке бесконечный предел:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

т.е. бесконечно большую функцию, можно в некоторой окрестности этой точки представить отношением

$$f(x) = \frac{1}{\alpha(x)}, \tag{9.27}$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$ функция и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой окрестности этой точки a.

Справедливо и обратное утверждение.

Доказательство. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то по определению $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. Обозначив $f(x) - A = \alpha(x)$, получим, что $|\alpha(x)| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$, но это и означает, что $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция. Следовательно, $f(x) = A + \alpha(x)$.

Обратно, если $f(x) = A + \alpha(x)$ и $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$, то $|\alpha(x)| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$. Поскольку $\alpha(x) = f(x) - A$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$, но это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

При любом сколь угодно большом числе $\varepsilon > 0$ неравенство $1/|\alpha(x)| > \varepsilon$ будет выполнено, если $|\alpha(x)| < 1/\varepsilon$. Последнее неравенство выполняется для всех значений $\alpha(x)$, начиная с некоторого ε, поскольку $\alpha(x) \to 0$.

$\Diamond$ Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая, а $f(x)$ – бесконечно большая при $x \to a$, то условимся писать

$$\alpha = \frac{1}{f}, \quad f = \frac{1}{\alpha}, \quad x \to a.$$

Другими словами: если знаменатель $f \to \infty$, то дробь $1/f$ – бесконечно малая; если знаменатель α стремится к нулю, то дробь $1/\alpha$ – бесконечно большая.

Теорема 9.4. *Сумма, разность и произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций есть бесконечно малая функция при $x \to a$.*

Доказательство. Пусть $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ — две бесконечно малые при $x \to a$. Согласно определению бесконечно малой существуют такие положительные числа δ_1

и δ_2, что для всех x, удовлетворяющих условиям $0 < |x-a| < \delta_1$ и $0 < |x-a| < \delta_2$, следует выполнение неравенств

$$|\alpha(x)| < \varepsilon_1(\delta_1), \quad |\alpha_2(x)| < \varepsilon_2(\delta_2), \tag{9.28}$$

соответственно.

Выбрав теперь из чисел δ_1 и δ_2 наименьшее, для которого $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$, получим, что для $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и всех x: $|x-a| < \delta$ из (9.27) следует

$$|\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)| < |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это и означает, что функции $\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$.

Если из δ_1 и δ_2 выбрать наименьшее, для которого $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon}$, получим, что для $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ и всех x: $|x-a| < \delta$ из (9.27) следует

$$|\alpha_1(x)\alpha_2(x)| < |\alpha_1(x)|\,|\alpha_2(x)| < \varepsilon_1\varepsilon_2 < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Это, в свою очередь, означает, что функция $\alpha_1(x)\alpha_2(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Обобщение доказательства на любое конечное число слагаемых и сомножителей проводится аналогично. Действительно, функция $[\alpha_1(x) + \alpha_2(x)]\alpha_3(x)$, где α_i — бесконечно малые при $x \to a$, также является бесконечно малой при $x \to a$.

♢ Заметим, что теорема 9.3 не рассматривает отношение двух бесконечно малых. Этот вопрос мы рассмотрим позднее, при раскрытии неопределённостей $\alpha_1(x)/\alpha_2(x)$ (или 0/0).

Далее будет полезно ещё одно свойство бесконечно малых функций.

Теорема 9.5. *Произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ на ограниченную в некоторой окрестности точки a функцию $f(x)$ есть бесконечно малая при $x \to a$ функция $f(x)\alpha(x)$.*

Доказательство. Поскольку $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$, а $f(x)$ — функция, ограниченная в окрестности точки a, то для последней существует число $M > 0$, для которого можно указать окрестность этой точки, в которой $|f(x)| < M$. Кроме того, для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать проколотую окрестность точки a, в которой выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon/M$.

В наименьшей из этих окрестностей будет выполняться неравенство

$$|\alpha(x)f(x)| < |\alpha(x)|\,|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon,$$

которое означает, что $\alpha(x)f(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$ функция, что и требовалось показать.

♢ Никакая постоянная величина, отличная от нуля, как бы мала она ни была, не может быть бесконечно малой, ибо предел постоянной равен самой постоянной.

9.4. Локальные свойства функций, имеющих предел

В этом разделе речь пойдёт о конечных пределах функций в заданной точке $x \to a$.

$\Diamond$ Отметим, что все сформулированные ниже утверждения останутся справедливыми при замене символа $x \to a$ одним из символов $x \to a \pm 0$, $x \to \pm\infty$, $x \to \infty$.

Как и выше, предполагается, что функция определена в некоторой окрестности или полуокрестности точки a, не содержащей саму точку a.

Теорема 9.6. *Если функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке a, то существует такая проколотая окрестность этой точки, в которой функция $f(x)$ ограничена.*

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x \to a} f(x) = A. \tag{9.29}$$

Согласно определению предела, по заданному $\varepsilon > 0$ можно установить такое $\delta > 0$, что для всех $x \in \dot{S}(a, \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ или

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \tag{9.30}$$

Это и означает, что функция $f(x)$ ограничена на множестве $\dot{S}(a, \delta)$.

Следствие 9.6.1. Если предел A в (9.29) не равен нулю, то найдётся такая проколотая окрестность точки a, в которой значения функции $f(x)$ имеют тот же знак, что и число A.

Действительно, положив в (9.30) $\varepsilon = |A|/2 > 0$, имеем

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}. \tag{9.31}$$

Отсюда, если
$A > 0$, то из левого неравенства (9.31) следует, что

$$f(x) > \frac{A}{2} > 0 \quad \text{для } \forall x \in \dot{S}(a, \delta).$$

Если же
$A < 0$, то из правого неравенства (9.31) следует, что

$$f(x) < \frac{A}{2} < 0 \quad \text{для } \forall x \in \dot{S}(a, \delta).$$

$\Diamond$ Следствие 9.6.1 часто называют *свойством сохранения знака предела.*

Теорема 9.7. *Если функция $f(x)$ в точке a имеет предел, отличный от нуля, то существует проколотая окрестность $\dot{S}(a, \delta)$ этой точки, в которой функция $1/f(x)$ является ограниченной.*

Доказательство. Пусть
$$\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 0.$$
В силу определения предела по заданному $\varepsilon = |A|/2$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \dot{S}(a,\delta)$ выполняется неравенство
$$|f(x) - A| < \frac{|A|}{2}.$$
Отсюда и из известного неравенства
$$|A| - |f(x)| \leqslant |f(x) - A|$$
следует, что
$$|A| - |f(x)| < \frac{|A|}{2},$$
откуда
$$|f(x)| > \frac{|A|}{2},$$
и поэтому
$$\frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|A|} \quad \text{для } \forall x \in \dot{S}(a,\delta).$$
Но это и означает, что функция $1/f(x)$ ограничена на множестве $\dot{S}(a,\delta)$.

9.5. Теоремы о пределах

Сформулируем теоремы о вычислении пределов функций, полученных в результате арифметических действий над другими функциями. Обратим внимание на то, что в рамках определения Гейне соответствующие теоремы достаточно лишь сформулировать, поскольку аналогичные утверждения уже доказаны для последовательностей и, стало быть, нет необходимости их заново доказывать. Тем не менее, мы приведём их доказательства, исходя из определения Коши, поскольку методы и приемы, используемые в этих доказательствах, оказываются полезными в технике вычисления пределов функций и в других приложениях.

Теорема 9.8. *Функция $f(x)$ при $x \to a$ не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $f(x)$ при $x \to a$ имеет два различных предела
$$\lim_{x\to a} f(x) = A_1, \qquad \lim_{x\to a} f(x) = A_2, \quad A_1 \neq A_2.$$
Согласно теореме 9.3, из этих равенств следует, что
$$f(x) = A_1 + \alpha_1(x), \quad f(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$
где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ — бесконечно малые, поэтому
$$A_1 + \alpha_1(x) = A_2 + \alpha_2(x)$$
или
$$A_1 - A_2 = \alpha_2(x) - \alpha_1(x).$$
Последнее равенство невозможно, так как в левой части стоит постоянная, отличная от нуля, а в правой — бесконечно малая функция. Таким образом, сделанное предположение неверно, а, значит, $A_1 = A_2$.

Теорема 9.9. *Если каждая из функций* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *имеет конечный предел при* $x \to a$, *то их сумма, разность и произведение также имеют пределы, причём*

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x); \tag{9.32}$$

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \lim_{x\to a} f_2(x). \tag{9.33}$$

Если, кроме того,

$$\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0,$$

то их частное имеет предел, причём

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}. \tag{9.34}$$

Доказательство. Пусть

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A_1, \qquad \lim_{x\to a} f_2(x) = A_2.$$

Тогда на основании теоремы 9.3 получим

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x), \quad f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$

где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$.

С учётом этого можно записать

$$\begin{aligned} &f_1(x) \pm f_2(x) = A_1 \pm A_2 + [\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)];\\ &f_1(x) f_2(x) = A_1 A_2 + [A_1\alpha_1(x) + A_2\alpha_2(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x)];\\ &\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2} + \frac{A_2\alpha_1(x) - A_1\alpha_2(x)}{A_2[A_2 + \alpha_2(x)]}. \end{aligned} \tag{9.35}$$

Поскольку вторые слагаемые в этих равенствах являются бесконечно малыми функциями при $x \to a$, то, согласно теореме 9.3, первые слагаемые являются пределами при $x \to a$ от левых частей равенств, что и требовалось доказать.

Следствие 9.9.1. Теорема справедлива для любого конечного числа слагаемых и сомножителей.

Действительно, используя представление (9.35), нетрудно показать, например, что

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) + f_2(x)] f_3(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) \lim_{x\to a} f_3(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) \lim_{x\to a} f_3(x)$$

и т.д.

Следствие 9.9.2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C \lim_{x\to a} f(x),$$

поскольку $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

Следствие 9.9.3. Если n — натуральное число, то

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n;$$
$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{1/n} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{1/n},$$

в частности, $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

Действительно, первая формула справедлива как произведение конечного числа сомножителей. С её помощью можно записать

$$\left[\lim_{x\to a}[f(x)]^{1/n}\right]^n = \lim_{x\to a}[f(x)]^{n/n} = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{n/n},$$

что и доказывает справедливость второго соотношения.

Теорема 9.10. *Если при $x \to a$ для конечных пределов двух функций выполняется неравенство*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) > \lim_{x\to a} f_2(x),$$

то существует такая проколотая окрестность $\dot{S}(a,\delta)$ этой точки, в которой

$$f_1(x) > f_2(x).$$

Доказательство. Согласно предыдущей теореме, имеем

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) - f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) - \lim_{x\to a} f_2(x) > 0.$$

Отсюда, согласно свойству сохранения знака предела (следствие 9.6.1), существует проколотая окрестность $S(a,\delta)$, в которой

$$f_1(x) - f_2(x) > 0 \quad \forall x \in S(a,\delta),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 9.11. *Если в некоторой проколотой δ-окрестности $\dot{S}(a,\delta)$ точки a выполняется неравенство*

$$f_1(x) > f_2(x),$$

то

$$\lim_{x\to a} f_1(x) \geqslant \lim_{x\to a} f_2(x)$$

при условии, что эти пределы существуют.

Доказательство. Предварительно заметим, что эту теорему нельзя считать обратной к предыдущей, поскольку строгое неравенство между функциями при переходе к пределу, вообще говоря, не сохраняется. Само доказательство проведём от противного. Предположим, что

$$\lim_{x\to a} f_1(x) < \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Но тогда, согласно предыдущей теореме, можно выделить окрестность $\dot{S}(a,\delta')$, целиком расположенную в $\dot{S}(a,\delta)$, в которой выполняется неравенство

$$f_1(x) < f_2(x),$$

что полностью противоречит условию теоремы, доказывая её справедливость.

$\lozenge$ Положив $f_1(x) = 1 + x^2$, $f_2(x) = 1 - x^2$, имеем $1 + x^2 > 1 - x^2$, $x \neq 0$, но

$$\lim_{x\to 0}(1 + x^2) = \lim_{x\to 0}(1 - x^2) = 1.$$

Теорема 9.12. *Если в некоторой проколотой δ-окрестности $\dot{S}(a,\delta)$ точки a выполняется неравенство*

$$f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant f_3(x) \tag{9.36}$$

и если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_3(x) = A, \tag{9.37}$$

то существует

$$\lim_{x\to a} f_2(x) = A.$$

Доказательство. Запишем неравенство (9.36) в виде

$$f_1(x) - A \geqslant f_2(x) - A \geqslant f_3(x) - A.$$

Из существования пределов (9.37) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют две окрестности: $\dot{S}(a,\delta_1)$ и $\dot{S}(a,\delta_2)$, для которых выполняются неравенства

$$|f_1(x) - A| < \varepsilon, \quad |f_3(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначим через δ' наименьшее из чисел δ_1 и δ_2. Тогда для всех $x \in \dot{S}(a,\delta') \subset \dot{S}(a,\delta)$ будут выполняться оба неравенства, а потому и неравенство

$$-\varepsilon < f_2(x) - A < \varepsilon$$

или

$$|f_2(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in \dot{S}(a,\delta').$$

Но это и означает, что

$$\lim_{x\to a} f_2(x) = A.$$

Пример 9.8. Найти

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + 2x - 1).$$

Решение. На основании свойств пределов имеем

$$\lim_{x\to 1}(x^2 + 2x - 1) = \lim_{x\to 1} x^2 + 2\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 1 = 1^2 + 2 - 1 = 2.$$

Пример 9.9. Вычислить

$$1)\ \lim_{x\to 4}\frac{2x^2 - 3x - 4}{\sqrt{x}(x^2 - 5x + 6)}, \quad 2)\ \lim_{x\to 3}\sqrt[3]{x^2 + 18}.$$

Решение. На основании свойств пределов имеем

1) $$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x}(x^2-5x+6)}=\frac{2\lim\limits_{x\to 4}x^2-3\lim\limits_{x\to 4}x-\lim\limits_{x\to 4}4}{(\lim\limits_{x\to 4}x^2-5\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}6)\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}}=$$
$$=\frac{2\cdot 4^2-3\cdot 4-4}{(4^2-5\cdot 4+6)\sqrt{4}}=\frac{32-12-4}{(16-20+6)\cdot 2}=\frac{1}{4};$$

2) $$\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{x^2+18}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 3}(x^2+18)}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 3}x^2+18}=\sqrt[3]{27}=3.$$

Лемма 9.1. *Справедливы следующие утверждения:*

$$\lim_{x\to a}e^x=e^a, \tag{9.38}$$

$$\lim_{x\to a}\ln x=\ln a. \tag{9.39}$$

Доказательство. Как следует из примера 8.16,

$$\lim_{n\to\infty}e^{1/n}=\lim_{n\to\infty}e^{-1/n}=1.$$

Это означает, что для произвольного числа $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что

$$1-\frac{\varepsilon}{e^a}<e^{-1/N}<e^{1/N}<1+\frac{\varepsilon}{e^a}.$$

Тогда при $|x-a|<1/N$ имеем

$$1-\frac{\varepsilon}{e^a}<e^{-1/N}<e^{x-a}<e^{1/N}<1+\frac{\varepsilon}{e^a}$$

или

$$-\frac{\varepsilon}{e^a}<e^{x-a}-1<\frac{\varepsilon}{e^a}.$$

Стало быть,

$$|e^{x-a}-1|<\frac{\varepsilon}{e^a}$$

или

$$|e^x-e^a|<\varepsilon.$$

Это неравенство при выполнении условия $|x-a|<1/N=\delta$ означает существование предела

$$\lim_{x\to a}e^x=e^a.$$

Для доказательства второго соотношения воспользуемся оценками (см. пример 8.38)

$$\frac{1}{n+1}<\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)<\frac{1}{n},\quad -\frac{1}{n-1}<\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)<-\frac{1}{n}$$

при $n>1$. Таким образом, при $n>1$

$$-\frac{1}{n-1}<\ln\Big(1-\frac{1}{n}\Big)<\ln\Big(1+\frac{1}{n}\Big)<\frac{1}{n}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, не превосходящее 0,5. Тогда существует такой номер N, что

$$-\varepsilon < \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \varepsilon.$$

Если взять

$$-\frac{1}{N} < \frac{x-a}{a} < \frac{1}{N},$$

то для разности

$$\ln x - \ln a = \ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right)$$

получим оценку

$$-\varepsilon < \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \ln\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \varepsilon.$$

Это означает, что $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$, если только $|x - a| < a\varepsilon$, т.е.

$$\lim_{x\to a} \ln x = \ln a.$$

Теорема 9.13. *Если существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to a} u(x) = A, \quad \lim_{x\to a} v(x) = B,$$

причём

$$\lim_{x\to a} v(x) \ln[u(x)] = B \ln A,$$

то для показательно-степенной функции справедливо соотношение

$$\lim_{x\to a} [u(x)]^{v(x)} = [\lim_{x\to a} u(x)]^{\lim\limits_{x\to a} v(x)}. \tag{9.40}$$

Доказательство. Согласно условию теоремы и в силу (9.39) леммы 9.1, имеем

$$\lim_{x\to a} v(x) \ln[u(x)] = B \ln A.$$

Тогда, согласно определению показательно-степенной функции и на основании (9.38) леммы 9.1, можем записать

$$\lim_{x\to a} [u(x)]^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln[u(x)]} = e^{B\ln A} = A^B = [\lim_{x\to a} u(x)]^{\lim\limits_{x\to a} v(x)},$$

что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Можно также показать, что если существует предел

$$\lim_{x\to 0} v \ln u = C,$$

конечный или бесконечный, то $\lim\limits_{x\to 0} u^v = u^C$ при конечном C, нулю при $C = -\infty$ и бесконечности при $C = +\infty$.

Следствие 9.13.1. Справедливы следующие соотношения:

$$\lim_{x\to a} A^{v(x)} = A^{\lim\limits_{x\to a} v(x)};$$
$$\lim_{x\to a} \log_A u(x) = \log_A \lim_{x\to a} u(x),$$

и, в частности,

$$\lim_{x\to a} A^x = A^a, \quad \lim_{x\to a} \log_A x = \log_A a.$$

Пример 9.10. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}.$$

Решение. Поскольку

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{2x+1} = \frac{1}{2},$$

а

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

то

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{2x+1}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2} = 0.$$

Пример 9.11. Доказать равенства

$$1)\quad \lim_{x\to a} \sin x = \sin a, \quad 2)\quad \lim_{x\to a} \cos x = \cos a,$$
$$3)\quad \lim_{x\to a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a, \quad a \neq \frac{2n-1}{2}\pi,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Решение. 1) Имеем

$$0 \leqslant |\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| < 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant 2|x-a|,$$

а также

$$\lim_{x\to a}(x-a) = 0,$$

следовательно,

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a.$$

2) Аналогично $0 \leqslant |\cos x - \cos a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}\right| \leqslant 2|x-a|$, следовательно,

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a.$$

3) В силу теоремы 9.9 имеем $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{tg} x = \dfrac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x} = \dfrac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a$, если $\cos a \neq 0$, т.е. $a \neq \dfrac{2n-1}{2}\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.

Пример 9.12. Доказать равенства

1) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a$; 2) $\lim\limits_{x\to a} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} a$;

3) $\lim\limits_{x\to a} \arcsin x = \arcsin a,\ |a| \leqslant 1$; 4) $\lim\limits_{x\to a} \arccos x = \arccos a,\ |a| \leqslant 1$.

Решение. 1) Положим $t = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} a$ для $x > 0$ и $a > 0$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем оценку

$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} a| = |t| \leqslant |\operatorname{tg} t| = \left|\frac{x-a}{1+xa}\right| < |x-a| < \varepsilon,$$

как только $|x-a| < \delta(\varepsilon) = \varepsilon$. Таким образом, для $x > 0$ и $a > 0$

$$\lim_{x\to a} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} a.$$

Если $a < 0$, то в силу нечётности функции $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$ доказательство сводится к уже рассмотренному. Справедливость утверждения при $a = 0$ вытекает из очевидного равенства

$$0 \leqslant |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0| = |\operatorname{arctg} x| < |x|.$$

2) Пользуясь тождеством $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2$, справедливым при всех x, и теоремой 9.9, получим

$$\lim_{x\to a} \operatorname{arcctg} x = \lim_{x\to a}\Big(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\Big) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} a = \operatorname{arcctg} a.$$

3) Рассмотрим случай $a \in]0,1[$. Воспользуемся свойствами обратных тригонометрических функций, а именно: если $0 \leqslant x < 1$, то

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Если же $0 < x \leqslant 1$, то

$$\arcsin x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

поэтому для $x \in]0,1[$

$$\lim_{x\to a} \arcsin x = \lim_{x\to a} \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to a} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$$
$$= \operatorname{arctg}\Big[\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\Big] = \arcsin a.$$

В точке $a = 1$:

$$\lim_{x\to 1-0} \arcsin x = \lim_{x\to a} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} = \arcsin 1.$$

В силу нечётности функции $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ задача для полуинтервала $a \in [-1,0[$ сводится к рассмотренной выше. А поскольку для $a = 0$ правый и левый пределы равны нулю, то доказательство завершено для отрезка $|a| \leqslant 1$.

4) Справедливость утверждения очевидным образом вытекает из известного тригонометрического соотношения

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

и теоремы 9.9, поскольку

$$\lim_{x\to a} \arccos x = \frac{\pi}{2} - \lim_{x\to a} \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin a = \arccos a.$$

9.6. Пределы монотонных и сложных функций

Теорема 9.14. *Если функция $f(x)$ определена и является монотонной на отрезке $[x_1, x_2]$, то в любой внутренней точке $x = a \in]x_1, x_2[$ эта функция имеет конечные правосторонние и левосторонние пределы, а в граничных точках x_1 и x_2, соответственно, правосторонний и левосторонний пределы.*

Доказательство. Предположим, что функция $f(x)$ не убывает на отрезке $[x_1, x_2]$. Зафиксируем внутреннюю точку $a \in]x_1, x_2]$. Тогда для возрастающей функции справедлива оценка

$$\forall x \in [x_1, a[\Rightarrow f(x) \leqslant f(a), \tag{9.41}$$

в силу которой множество значений функции $f(x)$ на промежутке $[x_1, a[$ ограничено сверху точной верхней гранью

$$\sup_{x_1\leqslant x\leqslant a} f(x) = y_s,$$

где $y_s \leqslant f(a)$.

Согласно определению точной верхней грани, имеем два условия:

$$\forall x \in [x_1, a[\Rightarrow f(x) \leqslant y_s \tag{9.42}$$

и

$$\forall \delta > 0 \exists x_\delta \in [x_1, a[: y_s - \delta < f(x_\delta). \tag{9.43}$$

Так как $x_\delta < a$, то величина $\Delta = a - x_\delta > 0$ и для всех x из промежутка $]x_\delta, a[$, или $x \in]a - \Delta, a[$,

$$f(x_\delta) \leqslant f(x) \tag{9.44}$$

в силу неубывания $f(x)$.

Таким образом, для любого числа $\delta > 0$ существует число $\Delta > 0$ такое, что для всех $x \in]a-\Delta, a[$ следует $y_s - \delta < |f(x) < \delta$, что в символьной форме записывается как

$$\forall \delta > 0 \exists \Delta > 0 : \forall x \in]a - \Delta, a[\Rightarrow f(x) \in]y_s - \delta, y_s].$$

Но это и означает, что существует левосторонний предел

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a - 0) = y_s = \sup_{x_1\leqslant x<a} f(x).$$

Аналогично доказывается, что неубывающая функция $f(x)$ имеет в точке $a \in [a, x_2[$ правосторонний предел

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a + 0) = \inf_{a<x\leqslant x_2} f(x).$$

Для неубывающей и строго монотонной функции доказательство аналогично.

Следствие 9.14.1. Если функция $f(x)$ определена и возрастает на отрезке $[x_1, x_2]$, то в точке $a \in]x_1, x_2[$

$$f(a-0) \leqslant f(a) \leqslant f(a+0).$$

Если же функция $f(x)$ определена и убывает на отрезке $[x_1, x_2]$, то в точке $a \in]x_1, x_2[$

$$f(a-0) \geqslant f(a) \geqslant f(a+0).$$

$\Diamond$ Теорема 9.14 остается справедливой как для бесконечного промежутка, так и для монотонных неограниченных функций. При этом если $f(x)$ — возрастающая и неограниченная сверху на $]x_1, x_2[$ функция $f(x)$, то

$$\lim_{x\to x_2-0} f(x) = +\infty.$$

Последнее соотношение остается справедливым, если положить $x_2 = +\infty$, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Соответственно, для возрастающей и неограниченной снизу на $]x_1, x_2[$ функции $f(x)$ имеем

$$\lim_{x\to x_1+0} f(x) = -\infty$$

или

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Для убывающей и неограниченной снизу (возрастающей и неограниченной сверху) функции $f(x)$ аналогично:

$$\lim_{x\to x_2-0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

и

$$\lim_{x\to x_1+0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Теперь обратимся к рассмотрению пределов сложных функций.

Теорема 9.15. *Если существуют пределы*

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = A, \qquad \lim_{y\to A} f(y) = B, \tag{9.45}$$

причём для всех x из некоторой проколотой окрестности точки a выполняется условие $\varphi(x) \neq A$, то в точке a существует предел сложной функции $f(\varphi(x))$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim_{y\to A} f(y). \tag{9.46}$$

Доказательство. Существование пределов (9.45) означает, что функции φ и f определены в проколотых окрестностях $\dot S(a,\delta)$ и $\dot S(A,\varepsilon)$, соответственно. При этом для всех $x \in \dot S(a,\delta)$ выполняется условие $\varphi(x) \in \dot S(A,\varepsilon)$. Это означает, что на множестве $\dot S(a,\delta)$ определена сложная функция $f(\varphi(x))$. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность из окрестности $\dot S(a,\delta)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Обозначим $y_n = \varphi(x_n)$. Тогда, по определению предела функции,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = A, \quad y_n \in \dot{S}(A,\varepsilon).$$

Так как существует предел

$$\lim_{y\to A} f(y) = B,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = B.$$

Это означает, что

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = B,$$

т.е. справедливо утверждение (9.46).

$\Diamond$ Формулу (9.46) зачастую называют *формулой замены переменной при вычислении предела.*

Пример 9.13. Вычислить

$$\lim_{x\to a} \sin x^2.$$

Решение. Имеем сложную функцию $\sin y$, $y = x^2$. Вычислив

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a} x^2 = a^2,$$

получим

$$\lim_{x\to a} \sin x^2 = \lim_{y\to a^2} \sin y = \sin a^2.$$

10. Неопределённости и замечательные пределы

10.1. Неопределённости и их виды

При вычислении пределов от функций, получающихся в результате алгебраических операций над другими функциями, мы специально оговаривали условия корректности таких операций. Так, например, предел отношения

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \tag{10.1}$$

мы определили при условии, что

$$\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0,$$

т.е. когда функция $f_2(x)$ не является бесконечно малой. Одновременно с этим мы установили, что в случае, когда $f_2(x)$ является бесконечно малой, не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки a, а

$$\lim_{x\to a} f_1(x) \neq 0,$$

отношение (10.1) представляет собой бесконечно большую величину. Перейдём теперь к рассмотрению очень важного случая, когда бесконечно малыми являются обе функции: $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

$\blacklozenge$ Отношение двух бесконечно малых называется *неопределённостью* вида $0/0$, а вычисление предела этого отношения — *раскрытием неопределённости.*

Рассмотрим простейшие примеры раскрытия таких неопределённостей.

Пример 10.1. Вычислить пределы

$$1)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1};\quad 2)\ \lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1};\quad 3)\ \lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^4-2x^2+1}.$$

Решение. 1) Так как

$$\lim_{x\to1}(x^2-2x+1)=0,\quad \lim_{x\to1}(x-1)=0,$$

необходимо раскрыть неопределённость вида $0/0$:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\Big(\frac{0}{0}\Big).$$

Для этого представим $x^2-2x+1=(x-1)^2$. Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-1)=1-1=0.$$

2) В силу того, что

$$\lim_{x\to1}(x^2-1)=0,\quad \lim_{x\to1}(x-1)=0,$$

имеем неопределённость вида $0/0$.

Чтобы её раскрыть, представим $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Тогда

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2.$$

3) Поскольку

$$\lim_{x\to1}(x^4-2x^2+1)=0,$$

имеем также неопределённость вида $0/0$.

Раскроем её:

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^4-2x^2+1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x^2-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)(x+1)^2}=\infty.$$

Рассмотренные примеры наглядно иллюстрируют возможные результаты раскрытия неопределённостей вида $0/0$, а именно: отношение двух бесконечно малых может быть как бесконечно малой, так и бесконечно большой величиной, но может быть и величиной конечной.

$\Diamond$ Отметим, что процедура вычисления предела отношения (10.1), по сути дела, является операцией сравнения двух бесконечно малых в окрестности точки $x=a$ функций. Более подробно этот вопрос мы рассмотрим ниже.

Кроме неопределённостей вида $0/0$ можно выделить неопределённости других видов:

$$0\cdot\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\quad \infty-\infty, \tag{10.2}$$

которые с помощью тождественных преобразований легко сводятся к виду $0/0$. Действительно, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — две бесконечно малые в окрестности точки

$x = a$ и $f_2(x)$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности точки a, то

$$\lim_{x\to a} f_1(x)\Big(\frac{1}{f_2(x)}\Big) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \Big(\frac{0}{0}\Big);$$

$$\lim_{x\to a}\Big(\frac{1/f_2(x)}{1/f_1(x)}\Big) = \Big(\frac{\infty}{\infty}\Big) = \lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \Big(\frac{0}{0}\Big);$$

$$\lim_{x\to a}\Big(\frac{1}{f_1(x)} - \frac{1}{f_2(x)}\Big) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to a}\frac{f_2(x)-f_1(x)}{f_1(x)f_2(x)} = \Big(\frac{0}{0}\Big).$$

На практике раскрытие неопределённостей вида (10.2) зачастую удобнее проводить, приводя их не к виду $0/0$, а к виду, допускающему применение подходящих свойств пределов.

Пример 10.2. Найти

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}).$$

Решение. Прямая подстановка даёт неопределённость вида $\infty-\infty$. Чтобы раскрыть эту неопределённость, домножим её на дробь, числитель и знаменатель которой равны $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}$. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x-1-x}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}} = 0.$$

Пример 10.3. Вычислить

$$1)\quad \lim_{x\to 1}\frac{2+\frac{1}{x-1}}{1+\frac{2}{x-1}};\qquad 2)\quad \lim_{x\to 1}\Big(2+\frac{1}{x-1}\Big)(x^2-2x+1).$$

Решение. Для предела 1) имеем неопределённость вида ∞/∞. С помощью тождественных преобразований приведём её к виду, допускающему использование свойств пределов. Действительно,

$$\lim_{x\to 1}\frac{2+\frac{1}{x-1}}{1+\frac{2}{x-1}} = \Big(\frac{\infty}{\infty}\Big) = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{2x-1}{x-1}}{\frac{x+1}{x-1}} = \lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{x+1} = \frac{1}{2}.$$

Для предела 2) имеем неопределённость вида $\infty\cdot 0$, которая раскрывается так:

$$\lim_{x\to 1}\Big(2+\frac{1}{x-1}\Big)(x^2-2x+1) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{x-1}(x-1)^2 = \lim_{x\to 1}(2x-1)(x-1) = 0.$$

Заметим, что в некоторых случаях наиболее простым способом раскрытия неопределённостей является непосредственное использование определения предела.

Пример 10.4. Показать, что

$$1.\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x} = 0,\qquad 2.\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k} = 0,\quad a>1,\ k>0.$$

Решение. Оба предела представляют собой неопределённость вида ∞/∞. В первом случае воспользуемся результатом примера 8.35:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0,\quad a>1,\ k>0,$$

одновременно с которым будет и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{a^n}=0.$$

Следовательно, для заданного числа $\varepsilon>0$ найдётся такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n>N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\Bigl|\frac{(n+1)^k}{a^n}-0\Bigr|=\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon.$$

Пусть $x>N(\varepsilon)+1$. Положим $n=[x]$ (целая часть x). Тогда для $n>N(\varepsilon)$ и $n\leqslant x\leqslant n+1$ справедлива оценка

$$0<\frac{x^k}{a^x}<\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon,$$

из которой следует

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0.$$

Во втором случае воспользуемся заменой переменной

$$t=x^k,\quad \lim_{x\to+\infty}t=\lim_{x\to+\infty}x^k=+\infty,$$

и ещё одним результатом примера 8.35:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0,\quad a>1.$$

В результате имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=\frac{1}{k}\lim_{t\to\infty}\frac{\log_a t}{t}=0$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a(n+1)}{n}=0.$$

Последнее равенство означает, что для заданного $\varepsilon>0$ можно указать такое $N(\varepsilon)$, что для всех $n>N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$0<\Bigl|\frac{\log_a(n+1)}{n}-0\Bigr|=\frac{\log_a(n+1)}{n}<\varepsilon.$$

Если положить $t>N(\varepsilon)+1$ и считать, что $n=[t]$, то для $n>N(\varepsilon)$ и $n\leqslant t\leqslant n+1$ справедлива оценка

$$0<\frac{\log_a t}{t}<\frac{\log_a(n+1)}{n}<\varepsilon,$$

из которой следует
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\log_a t}{t}=0,$$
а тем самым и
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^k}=\frac{1}{k}\lim_{t\to\infty}\frac{\log_a t}{t}=0,$$
что и требовалось доказать.

Наряду с неопределённостями вида (10.2) существует ещё одна группа неопределённостей:
$$1^\infty,\quad \infty^0,\quad 0^0,$$
которая возникает при вычислении пределов от показательно-степенной функции
$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)]}. \tag{10.3}$$
Действительно, если
$$\lim_{x\to a}u(x)=1,\quad \text{а}\quad \lim_{x\to a}v(x)=\infty, \tag{10.4}$$
то левая часть (10.3) является неопределённостью вида
$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=(1^\infty),$$
которая с помощью правой части (10.3) сводится к уже рассмотренной неопределённости вида $0\cdot\infty$, поскольку
$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)]}=e^{(\infty\cdot 0)}.$$
Если же
$$\lim_{x\to a}u(x)=\infty,\quad \text{а}\quad \lim_{x\to a}v(x)=0,$$
то левая часть (10.3) является неопределённостью вида
$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=(\infty^0),$$
которая с помощью правой части соотношения (10.3) также сводится к уже рассмотренной неопределённости вида $0\cdot\infty$, поскольку
$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=(\infty^0)=e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)]}=e^{(0\cdot\infty)}.$$
И, наконец, неопределённость вида 0^0 можно свести к неопределённости вида ∞^0, поскольку
$$0^0=\Big(\frac{1}{\infty}\Big)^0=\frac{1}{\infty^0}.$$

Из всех видов неопределённостей наиболее важную роль играют две:
$$\frac{0}{0},\quad 1^\infty. \tag{10.5}$$

По сути дела, раскрытие остальных неопределённостей можно свести к раскрытию именно этих неопределённостей. Отметим, что некоторые неопределённости вида (10.5), например

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

невозможно вычислить с помощью тождественных преобразований, в силу чего они требуют дополнительных исследований. Эти два предела имеют важное значение в курсе математического анализа и носят название *замечательных пределов*. К их рассмотрению мы и переходим.

10.2. Первый замечательный предел

Рассмотрим отношение

$$\frac{\sin x}{x},$$

предел которого, например, при $x\to\pi/2$ легко вычисляется:

$$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\pi/2}\sin x}{\lim\limits_{x\to\pi/2}x}=\frac{1}{\pi/2}=\frac{2}{\pi}.$$

Теперь рассмотрим предел этого отношения, когда x стремится не к $\pi/2$, а к нулю:

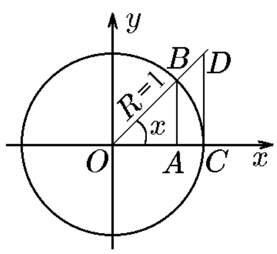
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

В этом случае мы имеем неопределённость вида $0/0$.

Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{10.6}$$

Соотношение (10.6) называется *первым замечательным пределом*.



Для доказательства соотношения (10.6) рассмотрим окружность единичного радиуса ($R=1$) с центром в точке $O(0,0)$ и центральный угол $\angle COB$, равный x (в радианах, $0<x<\pi/2$). Из точки B опустим перпендикуляр BA на ось Ox. Длина отрезка BA равна синусу угла COB, а отрезка OA косинусу. Из точки C проведём перпендикуляр CD к оси Ox. Здесь D — точка пересечения перпендикуляра с лучом OB. Длина отрезка CD равна тангенсу угла COB. В результате мы получили треугольник $\triangle OAB$, круговой сектор OBC и треугольник $\triangle ODC$, площади которых связаны неравенствами

$$S_{\triangle OAB}<S_{OBC}<S_{\triangle ODC}$$

или

$$\frac{1}{2}\frac{|OA|}{1}\frac{|AB|}{1}<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}|OC|\frac{|CD|}{1},\quad R=1,$$

или

$$\cos x \sin x < x < \operatorname{tg} x, \tag{10.7}$$

так как

$$\frac{|OA|}{1} = \cos x, \quad \frac{|AB|}{1} = \sin x, \quad \frac{|CD|}{1} = \operatorname{tg} x.$$

Из (10.7) при $\sin x > 0$ найдём

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[. \tag{10.8}$$

Неравенство (10.8) остается справедливым и при $x \in]-\pi/2, 0[$ в силу чётности входящих в него функций. Если $x \to 0$, то $\cos x \to 1$, и переменная $x/(\sin x)$ заключена между двумя величинами, имеющими один и тот же предел, равный 1:

$$1 \leqslant \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} < 1.$$

В силу теоремы 8.6 о «сжатой последовательности»

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Предел вида (10.6) часто используется при вычислении пределов.

Пример 10.5. Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

Решение. Выделим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Пример 10.6. Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$

Решение. Выделим первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin 2x)/(2x)}{3(\sin 3x)/(3x)} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \Big/ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}.$$

Пример 10.7. Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^3}.$$

Решение. Поскольку

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \lim_{x\to 0} \frac{1}{x},$$

то с учётом первого замечательного предела получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Пример 10.8. Доказать, что

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1, \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$$

Решение. Согласно правилу замены переменной при вычислении предела, проведём в первом случае замену

$$y=\arcsin x,$$

тогда

$$x=\sin y$$

и $\{x\to 0\}\Leftrightarrow\{y\to 0\}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1.$$

Таким образом, с помощью первого замечательного предела доказывается справедливость формулы 1).

Для второго предела проведём замену $y=\operatorname{arctg} x$, $x=\operatorname{tg} y$, $\{x\to 0\}\Leftrightarrow\{y\to 0\}$. Тогда с учётом результата примера 10.5 имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y}=\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg} y}{y}}=\frac{1}{1}=1,$$

что и требовалось доказать.

10.3. Второй замечательный предел

Рассмотрим показательно-степенную функцию

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

и найдём её предел, например, при $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{x}\right)=2, \quad \lim_{x\to 1}x=1,$$

$$\lim_{x\to 1}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=(\lim_{x\to 1}x)\lim_{x\to 1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=1\ln 2=\ln 2,$$

то

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left[\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]^{\lim\limits_{x\to 1}x}=2^1=2, \tag{10.9}$$

или, что то же самое,

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{\lim\limits_{x\to 1}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\ln 2}=2. \tag{10.10}$$

Теперь рассмотрим предел, когда x стремится не к единице, а к ∞, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x. \tag{10.11}$$

В этом случае

$$\lim_{x\to\infty} x=\infty,\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1,$$

и мы имеем неопределённость вида 1^∞.

Покажем, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{10.12}$$

Выражение (10.12) называется *вторым замечательным пределом*.

Докажем сначала утверждение (10.12) при $x\to+\infty$, опираясь на известное равенство (8.62):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Для доказательства выберем такое x, что $n\leqslant x<n+1$, $n\in\mathbb{N}$. При таком выборе

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{n}$$

или

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}.$$

Усилим это неравенство:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

При $x\to+\infty$ переменная n также стремится к бесконечности.

Оценим правую и левую части неравенства:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}n\right)^{n+1}\Big/\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}n\right)=\frac{e}{1}=e;$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot e=e;$$

$$e\leqslant\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leqslant e.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{10.13}$$

Сделаем в (10.13) замену $x=-1-t$ или $t=-1-x$, тогда при $x\to-\infty$ имеем $t\to+\infty$ и, соответственно,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{-1-t}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{1+t}\right)^{-1-t}=$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1+t}{t}\right)\left(\frac{1+t}{t}\right)^t = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = 1\cdot e = e.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

что и доказывает справедливость второго замечательного предела (10.12).

Из второго замечательного предела вытекает ряд важных следствий.

Следствие 1. Справедливо соотношение

$$\lim_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)} = e, \tag{10.14}$$

если $\alpha(x)\neq 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности точки $x=a$ и $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

В частности,

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e. \tag{10.15}$$

Действительно, исходя из теоремы о замене переменных при вычислении пределов, проведём замену

$$y=\frac{1}{\alpha(x)} \quad \text{или} \quad \alpha(x)=\frac{1}{y}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to a} y = \lim_{x\to a}\frac{1}{\alpha(x)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)} = \infty,$$

получим

$$\lim_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Следствие 2. Справедливо соотношение

$$\lim_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{1/\beta(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[\alpha(x)/\beta(x)]}, \tag{10.16}$$

если для бесконечно малых $\alpha(x)$ и $\beta(x)$:

$$\lim_{a\to a}\alpha(x) = \lim_{a\to a}\beta(x) = 0,$$

существует предел их отношения

$$\lim_{a\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

и, в частности,

$$\lim_{x\to a}[1+A\alpha(x)]^{1/\alpha(x)} = \lim_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{A/\alpha(x)} = e^A, \tag{10.17}$$

где A — конечное число ($|A|\neq 0$).

Действительно, представив

$$[1+\alpha(x)]^{1/\beta(x)} = \{[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}\}^{\alpha(x)/\beta(x)}$$

и воспользовавшись правилом вычисления предела от показательно-степенной функции, а также равенством (10.14), получим

$$\lim_{x\to a}[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\beta(x)}} = (1^\infty) = \lim_{x\to a}\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\}^{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} = e^{\lim\limits_{x\to a}\ln[1+\alpha(x)]^{1/\alpha(x)}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\ln e} = e^{\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} = \begin{cases} e^A, & \text{если } \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A,\ |A|\neq\infty; \\ +\infty, & \text{если } \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = +\infty; \\ 0, & \text{если } \lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = -\infty. \end{cases}$$

Равенство (10.16) является обобщением второго замечательного предела (10.12) не только по смыслу, но и по форме. Запишем его в ещё одной, иногда более удобной, форме:

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}v(x)[u(x)-1]}, \tag{10.18}$$

если

$$\lim_{x\to a}u(x) = 1, \quad \lim_{x\to a}v(x) = \infty.$$

Действительно, представив

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = (1^\infty) = \lim_{x\to a}\left\{[1+(u(x)-1)]^{1/[u(x)-1]}\right\}^{[u(x)-1]v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x)},$$

убеждаемся в справедливости (10.18).

Пример 10.9. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x.$$

Решение. 1. При $x\to\infty$ получим неопределённость

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = 1^\infty.$$

2. Воспользуемся вторым замечательным пределом. Обозначим $3/x = \alpha$. Тогда $\alpha = 3/x \to 0$ при $x\to\infty$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^3 = e^3.$$

Пример 10.10. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{2}\right)^{1/x}.$$

Решение. Предел этого выражения при $x \to 0$ не определён. Выделим второй замечательный предел. Обозначим $x/2 = \alpha$, тогда $x = 2\alpha$ и

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/x} = \left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}\right]^{1/2} = e^{1/2} = \sqrt{e}.$$

Пример 10.11. Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}.$$

Решение. Так как

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty,$$

имеем неопределённость вида 1^∞.

Воспользуемся формулой (10.18):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}-1\right)x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\frac{3}{x^2-2}} = e^{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-2/x^2}} = e^3.$$

$\Diamond$ Этот же результат получается, если воспользоваться формулой (10.16). Положив

$$\frac{x^2+1}{x^2-2} = \frac{x^2-2+3}{x^2-2} = 1+\frac{3}{x^2-2} = 1+\alpha(x), \quad \beta(x) = \frac{1}{x^2},$$

убеждаемся, что $\alpha(x) = 3/(x^2-2)$ и $\beta(x) = 1/x^2$ являются бесконечно малыми:

$$\lim_{x\to\infty}\alpha(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2-2} = 0, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0,$$

а поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2} = 3,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}} = e^3.$$

Пример 10.12. Вычислить

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x}; \quad 2)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^3}; \quad 3)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^3}.$$

Решение. Все три предела представляют собой неопределённости вида 1^∞, поскольку

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2} = 1,$$

а

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty.$$

Как и в предыдущем примере, $u(x) = (x^2+1)/(x^2-2)$, а следовательно,

$$u(x) - 1 = \frac{x^2+1}{x^2-2} - 1 = \frac{3}{x^2-2}.$$

Тогда в случае 1):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}x\frac{3}{x^2-2}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\frac{3}{x^2-2}} = e^{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-2/x}} = e^0 = 1.$$

В случае 2):

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^3} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{3}x\frac{3}{x^2-2}} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty} x^3\frac{3}{x^2-2}} =$$
$$= e^{3\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2-2}} = e^{3\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{1-2/x^2}} = e^{3\lim\limits_{x\to-\infty} x} = e^{-\infty} = 0.$$

В случае 3) аналогично:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^3} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\frac{3}{x^2-2}} = e^{3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2-2}} = e^{3\lim\limits_{x\to+\infty} x} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Пример 10.13. Вычислить

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to1}(4-2x-x^2)^{\frac{1}{(x-1)^3}}$; 3) $\lim\limits_{x\to2}\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$.

Решение. В случае 1) имеем неопределённость вида 1^∞, поскольку

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

Тогда с учётом

$$u(x) - 1 = \sin\frac{1}{x} + \left(\cos\frac{1}{x} - 1\right)$$

имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left[1+\sin\frac{1}{x}+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\left[\sin\frac{1}{x}+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{-1}x\left[\sin\frac{1}{x}+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\sin\frac{1}{x}+\left(\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x}} = e.$$

Для предела 2) также имеем неопределённость вида 1^∞, поскольку

$$\lim_{x\to1} u(x) = \lim_{x\to1}(4-2x-x^2) = 1, \quad \lim_{x\to1}\frac{1}{(x-1)^3} = \infty.$$

Тогда с учётом

$$u(x) - 1 = 4 - 2x - x^2 - 1 = -x^2 - 2x + 3 = -(x-1)(x+3)$$

найдём

$$\lim_{x\to 1}(4-2x-x^2)^{\frac{1}{(x-1)^3}} = \lim_{x\to 1}[1+(3-2x-x^2)]^{\frac{3-2x-x^2}{(x-1)^3(3-2x-x^2)}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^3}(3-2x-x^2)} =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 1} -\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^3}} = e^{-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+3}{(x-1)^2}} = (e^{-\infty}) = 0.$$

В случае 3) имеем неопределённость вида 1^∞, поскольку $\alpha(x) = \sin(\pi x/2)$ и $\beta(x) = \operatorname{tg}(\pi x/2)$ являются бесконечно малыми:

$$\lim_{x\to 2}\sin\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 2}\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2} = 0.$$

Для данного предела удобнее воспользоваться равенством (10.16). Так как

$$\lim_{x\to 2}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 2}\frac{\sin(\pi x/2)}{\operatorname{tg}(\pi x/2)} = \lim_{x\to 2}\cos\frac{\pi x}{2} = -1,$$

то

$$\lim_{x\to 2}\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^{\operatorname{ctg}(\pi x/2)} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sin(\pi x/2)}{\operatorname{tg}(\pi x/2)}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Следствие 3. Справедливо соотношение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}, \tag{10.19}$$

в частности

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{10.20}$$

Действительно, используя свойства логарифмов

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$$

и сделав замену $t = (1+x)^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to 0} t = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, найдём

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to e}\ln y = \ln e = 1,$$

но это и означает справедливость равенства (10.20). Далее, преобразовав левую часть равенства (10.19), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x\ln a} = \frac{1}{\ln a}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} = \log_a e.$$

Следствие 4. Справедливо соотношение

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a = \frac{1}{\log_a e}, \quad a>0, \tag{10.21}$$

в частности,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1. \tag{10.22}$$

Действительно, после замены $t = a^x - 1$, $x = \ln(1+t)$,

$$\lim_{t\to 0} t = \lim_{x\to 0}(a^x - 1) = 0,$$

в формуле (10.21):

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{\ln(1+t)} = \ln a \lim_{t\to 0}\frac{1}{[\ln(1+t)]/t} = \ln a,$$

убеждаемся в её справедливости.

◊ В простоте формул (10.20) и (10.22) по сравнению с формулами (10.19) и (10.21) и коренятся, по существу, те преимущества, которые предоставляет система натуральных логарифмов.

Следствие 5. Справедливо соотношение

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, \quad r \in \mathbb{R}. \tag{10.23}$$

Действительно, представим при $r \neq 0$ левую часть (10.23) в виде

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r - 1}{x} = r\lim_{x\to 0}\Big[\frac{e^{r\ln(1+x)} - 1}{r\ln(1+x)}\ \frac{\ln(1+x)}{x}\Big].$$

Учитывая, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r - 1}{x} = r\lim_{x\to 0}\frac{e^{r\ln(1+x)} - 1}{r\ln(1+x)}.$$

Теперь, сделав замену $t = r\ln(1+x)$,

$$\lim_{x\to 0} t = \lim_{x\to 0} r\ln(1+x) = 0,$$

имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r - 1}{x} = r\lim_{t\to 0}\frac{e^t - 1}{t} = r.$$

Пример 10.14. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1.$$

Решение. Так как

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x},$$

то, применив формулу (10.22), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1}{2x}\frac{1}{e^x} = 1.$$

Рассмотрение других примеров по вычислению пределов функций мы продолжим, введя понятие асимптотически равных функций.

11. Сравнение функций (переменных величин)

11.1. Асимптотические оценки и их классификация

Две постоянные величины сравниваются между собой простым отношением их. Сравнивать две функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ простым отношением нельзя, так как оно является функцией (переменной величиной) $\alpha(x)/\beta(x) = h(x)$. Поведение функции $h(x)$ на промежутке $]a, b[= E$ позволяет оценить отношение функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ на этом множестве E. В свою очередь, оценка этого отношения в точке $a \in E$ будет определяться значением предела функции $h(x)$:

$$\lim_{x\to a\in E} h(x). \tag{11.1}$$

Три возможных значения предела (11.1) лежат в основе определения трёх типов асимптотических оценок.

♦ Если в некоторой проколотой окрестности точки a определены функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $h(x)$, такие что

$$\alpha(x) = \beta(x)h(x) \tag{11.2}$$

и

$$\lim_{x\to a} h(x) = 1, \tag{11.3}$$

то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *асимптотически равными*, или *эквивалентными*, при $x \to a$ и обозначаются

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \quad \text{при} \quad x \to a,$$

или короче

$$\alpha \sim \beta; \quad x \to a,$$

или совсем коротко

$$\alpha \overset{a}{\sim} \beta$$

(читается: α при $x \to a$ эквивалентна, или асимптотически равна, β).

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ из определения (11.2) в некоторой проколотой окрестности точки a не имеют нулей, то их эквивалентность можно определить предельным равенством

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1. \tag{11.4}$$

Пример 11.1. Показать, что

$$1)\quad \sin x \overset{0}{\sim} x; \quad 2)\quad \frac{x^4}{1+x^2} \overset{\infty}{\sim} x^2; \quad 3)\quad (1+x)^3 \overset{0}{\sim} 1+3x.$$

Решение. 1) Имеем $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = x$. Тогда из равенства

$$\sin x = x\frac{\sin x}{x}$$

получим

$$h(x) = \frac{\sin x}{x}$$

и с учётом первого замечательного предела

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{11.5}$$

Равенство единице предела (11.5) означает эквивалентность

$$\sin x \overset{0}{\sim} x.$$

Этот же результат следует из формулы (11.4):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2) Так как $\alpha(x) = x^4/(1+x^2)$, $\beta(x) = x^2$, $h(x) = x^2/(1+x^2)$, то

$$\frac{x^4}{1+x^2} = x^2 \frac{x^2}{1+x^2}$$

и

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1,$$

следовательно,

$$\frac{x^4}{1+x^2} \overset{\infty}{\sim} x^2.$$

3) В этом случае

$$\alpha(x) = (1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3, \quad \beta(x) = 1 + 3x, \quad h(x) = \frac{(1+x)^3}{1+3x},$$

а поскольку

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^3}{1+3x} = \lim_{x\to 0} \Big(1 + x^2 \frac{3+x}{1+3x}\Big) = 1,$$

то

$$(1+x)^3 \overset{0}{\sim} 1 + 3x.$$

♦ Если в некоторой проколотой окрестности точки a определены функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $h(x)$, такие что

$$\alpha(x) = \beta(x)h(x) \tag{11.6}$$

и

$$\lim_{x\to a} h(x) = 0, \tag{11.7}$$

то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* по сравнению с функцией $\beta(x)$ при $x \to a$ и обозначается

$$\alpha(x) = o(\beta(x)), \qquad x \to a,$$

или коротко

$$\alpha = o(\beta), \qquad x \to a,$$

или совсем коротко

$$\alpha \overset{a}{=} o(\beta). \tag{11.8}$$

Формула (11.8) читается так: $\alpha(x)$ при x, стремящемся к a, есть o малое от $\beta(x)$.

Если в некоторой проколотой окрестности точки a

$$\beta(x) \neq 0,$$

то определения (11.6), (11.7) можно заменить предельным равенством

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0. \tag{11.9}$$

Положив в (11.9) $\beta(x) = \text{const}$, в частности $\text{const} = 1$, получим предельное равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\text{const}} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{1} = 0,$$

совпадающее с определением введённой ранее бесконечно малой функции $\alpha(x)$ при $x \to a$. Это означает, что все введённые ранее бесконечно малые $\alpha(x) \to 0$, $x \to a$, можно считать бесконечно малыми по сравнению, например, с постоянными величинами, в частности с единицей, т.е.

$$\alpha \overset{a}{=} o(\text{const}), \quad \alpha \overset{a}{=} o(1).$$

Наряду с этим следует иметь в виду, что функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, фигурирующие в (11.8), не обязательно являются бесконечно малыми при $x \to a$. Например, если $x \to \infty$, то $x^2 = o(x^4)$, а функции x^2 и x^4 являются бесконечно большими при $x \to \infty$. В тех же случаях, когда $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to a$ функциями, функцию $\alpha(x)$ называют *бесконечно малой высшего порядка* по сравнению с бесконечно малой $\beta(x)$. Соответственно, функцию $\beta(x)$ — *бесконечно малой низшего порядка* по сравнению с $\alpha(x)$. Например, $\alpha(x) = x^4$ является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\beta(x) = x^2$ при $x \to 0$:

$$x^4 \overset{0}{=} o(x^2).$$

♦ Если в некоторой проколотой окрестности точки a определены функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $h(x)$, такие что

$$\alpha(x) = \beta(x)h(x) \tag{11.10}$$

где $h(x)$ — ограниченная в указанной окрестности функция, то функцию $\alpha(x)$ называют *ограниченной* по сравнению с функцией $\beta(x)$ и обозначают

$$\alpha(x) = O(\beta(x)), \qquad x \to a, \tag{11.11}$$

или коротко:

$$\alpha \overset{a}{=} O(\beta). \tag{11.12}$$

Формула (11.11) читается так: $\alpha(x)$ при x, стремящемся к a, есть O большое от $\beta(x)$. Например,

$$x^2 + x^3 + x^4 \overset{0}{=} O(x^2),$$

но

$$x^2 + x^3 + x^4 \overset{\infty}{=} O(x^4). \tag{11.13}$$

♦ Если определение (11.10) выполняется для всех точек некоторого множества E, то функцию $\alpha(x)$ называют *ограниченной по сравнению с функцией* $\beta(x)$ на этом множестве и пишут

$$\alpha(x) = O(\beta(x)), \qquad x \in E. \tag{11.14}$$

Например,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x} = O\Big(\frac{1}{x^2}\Big), \quad |x| < 1;\\
&\frac{1}{x^2} = O\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad |x| > 1;\\
&\sin x = O(1), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{11.15}$$

Как и в предыдущем случае, для того чтобы установить связь между ограниченной функцией и функцией, ограниченной относительно другой функции, обратимся к определению ограниченной функции. Функция $h(x)$ является ограниченной на множестве E (или $\dot{S}(a,\delta)$), если

$$\exists M > 0 : \forall x \in E \Rightarrow |h(x)| \leqslant M. \tag{11.16}$$

С учётом этого определение (11.10) для функции $\alpha(x)$, ограниченной по сравнению с функцией $\beta(x)$, можно записать в виде

$$|\alpha(x)| \leqslant M|\beta(x)|, \quad x \in E \quad (\text{или } x \in \dot{S}(a,\delta)). \tag{11.17}$$

Если в качестве функции $\beta(x)$ выбрать некоторую постоянную: $\beta(x) = C$, и в частности $C = 1$, то из (11.17) следуют соотношения

$$|\alpha(x)| \leqslant MC, \quad \text{в частности, } |\alpha(x)| \leqslant M, \quad x \in E \text{ (или } x \in \dot{S}(a,\delta)), \tag{11.18}$$

являющиеся определением ограниченной функции $\alpha(x)$ на E. Это означает, что ограниченные функции можно рассматривать как функции, ограниченные по сравнению с постоянными, и в частности с функциями $\beta(x) = 1$:

$$\alpha(x) = O(\text{const}), \quad \alpha(x) = O(1), \quad x \in E \text{ (или } x \in \dot{S}(a,\delta)). \tag{11.19}$$

Наряду с этим следует иметь в виду, что функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, фигурирующие в соотношении (11.11), могут так же быть бесконечно большими или бесконечно малыми, как и в формулах (11.13).

Таким образом, мы ввели в рассмотрение три типа оценок отношения двух функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$:

$$\alpha \overset{a}{\sim} \beta, \qquad \alpha \overset{a}{=} o(\beta), \qquad \alpha \overset{a}{=} O(\beta). \tag{11.20}$$

♦ Соотношения вида (11.20) называются *асимптотическими формулами* или *асимптотическими оценками.*

Сами символы $\sim$, o малое и O большое были введены немецкими математиками П. Дюбуа-Реймоном (1870), П. Бахманом (1894) и Э. Ландау (1909) и в настоящее время известны под названием «символы Ландау».

Следует отметить, что равенства в асимптотических формулах (11.20), вообще говоря, не являются равенствами в обычном смысле. Так, например, символ $o(x)$ служит для обозначения множества, или, как говорят, класса, функций, бесконечно малых более высокого порядка, чем x, при $x \to 0$. Поэтому правильнее было бы вместо $x^2 \overset{0}{=} o(x)$ писать $x^2 \in o(x)$. Однако вторая запись неудобна для применения при выполнении асимптотических оценок функций. Это же справедливо и для оценок асимптотического равенства и отношения ограниченности. Асимптотические равенства (11.19) следует читать только слева направо, поскольку правая часть их обозначает класс функций, а левая — какую-либо функцию из этого класса.

Пример 11.2. Какая из асимптотических оценок $o(\beta)$ или $O(\beta)$ является более «сильной»?

Решение. Оценка $o(\beta)$ является более «сильной», так как, согласно определению, из выполнения $\alpha \overset{a}{=} o(\beta)$ следует выполнение $\alpha \overset{a}{=} O(\beta)$.

Пример 11.3. Для функций x^2, x, 1, $1/x$, $1/x^2$ записать асимптотические оценки ограниченности при $x \to 0$ и $x \to \infty$.

Решение. I. При $x \to 0$ функции x^2 и x являются бесконечно малыми, функция 1 — ограниченной, а $1/x$ и $1/x^2$ — бесконечно большими. Исходя из очевидных неравенств при $|x| < 1$, можем записать

$$x^2 \overset{0}{=} O(x), \quad x \overset{0}{=} O(1), \quad 1 \overset{0}{=} O\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad \frac{1}{x} \overset{0}{=} O\Big(\frac{1}{x^2}\Big),$$
$$x^2 + x \overset{0}{=} O(1), \quad \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 \overset{0}{=} O\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

II. При $x \to \infty$ функции x^2 и x являются бесконечно большими, функция 1 — ограниченной, а $1/x$ и $1/x^2$ — бесконечно малыми. Исходя из очевидных неравенств при $|x| > 1$, можем записать

$$\frac{1}{x^2} \overset{\infty}{=} O\Big(\frac{1}{x}\Big), \quad \frac{1}{x} \overset{\infty}{=} O(1), \quad 1 \overset{\infty}{=} O(x), \quad x \overset{\infty}{=} O(x^2),$$
$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \overset{\infty}{=} O(x), \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x \overset{\infty}{=} O(x^2).$$

Теперь от определения асимптотических оценок (11.19) перейдём к более детальному их рассмотрению.

11.2. Асимптотические равенства. Таблица эквивалентности

Начнем с рассмотрения асимптотического равенства, или отношения эквивалентности.

Отношение эквивалентности функций (как и множеств) обладает свойством симметричности

$$(\alpha \overset{a}{\sim} \beta) \Rightarrow (\beta \overset{a}{\sim} \alpha)$$

и транзитивности

$$(\alpha \overset{a}{\sim} \gamma \wedge \gamma \overset{a}{\sim} \beta) \Rightarrow (\alpha \overset{a}{\sim} \beta). \qquad (11.21)$$

Действительно, свойство симметричности очевидным образом вытекает из определения (11.2), (11.3):

$$\alpha \overset{a}{\sim} \beta \Rightarrow \alpha(x) = \beta(x)h(x), \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1,$$

поскольку

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{h(x)} = 1.$$

Для транзитивности, исходя из равенств

$$\alpha(x) = \gamma(x)h_1(x), \quad \gamma(x) = \beta(x)h_2(x), \quad \lim_{x\to a} h_1(x) = \lim_{x\to a} h_2(x) = 1,$$

имеем

$$\alpha(x) = \beta(x)h_1(x)h_2(x), \quad \lim_{x\to a} h_1(x)h_2(x) = 1,$$

что и доказывает справедливость (11.21).

Пример 11.4. Показать, что

$$(\alpha_1 \overset{a}{\sim} \beta_1 \wedge \alpha_2 \overset{a}{\sim} \beta_2) \Rightarrow \alpha_1\alpha_2 \overset{a}{\sim} \beta_1\beta_2.$$

Решение. Так как

$$\alpha_1(x) = \beta_1(x)h_1(x), \quad \alpha_2(x) = \beta_2(x)h_2(x), \quad \lim_{x\to a} h_1(x) = \lim_{x\to a} h_2(x) = 1,$$

то

$$\alpha_1(x)\beta_1(x) = \alpha_2(x)\beta_2(x)h_1(x)h_2(x) = \alpha_2(x)\beta_2(x)h(x), \quad h(x) = h_1(x)h_2(x).$$

Поскольку

$$\lim_{x\to a} h(x) = 1,$$

имеет место

$$\alpha_1\beta_1 \overset{a}{\sim} \alpha_2\beta_2.$$

Понятие эквивалентности приобретает особенно важное значение при сравнении двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, т.е. при раскрытии неопределённостей вида $(0/0)$ или (∞/∞) путем замены под знаком предела одних функций другими — эквивалентными им, но более простыми.

Теорема 11.1. *Если $\alpha_1 \overset{a}{\sim} \beta_1$ и $\alpha_2 \overset{a}{\sim} \beta_2$, то из существования предела*

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \tag{11.22}$$

следует существование предела

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)} \tag{11.23}$$

и справедливость равенства

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}. \tag{11.24}$$

Доказательство. Из условия теоремы следует

$$\alpha_1(x) = \beta_1(x)h_1(x), \quad \alpha_2(x) = \beta_2(x)h_2(x)$$

и

$$\lim_{x\to a} h_1(x) = \lim_{x\to a} h_2(x) = 1. \tag{11.25}$$

Так как существует предел (11.22), то найдётся такая проколотая окрестность точки a, в которой определены функции $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ и $h_1(x)$, причём $\beta_1(x) \neq 0$ и $h_1(x) \neq 0$. Отсюда следует, что в этой проколотой окрестности определена функция $\beta_2(x) = \beta_1(x)h_1(x)$, такая что $\beta_2(x) \neq 0$.

Следовательно, в некоторой проколотой окрестности точки a определена функция $\alpha_2(x)/\beta_2(x)$ и

$$\frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)} = \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\frac{h_2(x)}{h_1(x)}.$$

Поскольку существует предел (11.22) и имеет место равенство (11.25), то существует и предел (11.23) и справедливо равенство (11.24).

Если только что доказанную теорему 11.1 дополнить таблицей эквивалентных функций, то их совместное использование зачастую позволяет упростить процедуру раскрытия неопределённостей вида (0/0) или (∞/∞).

С учётом этого и исходя из двух замечательных пределов и вытекающих из них соотношений, составим таблицу основных эквивалентностей:

$$\begin{gathered}
\sin x \overset{0}{\sim} x; \quad \operatorname{tg} x \overset{0}{\sim} x; \quad \arcsin x \overset{0}{\sim} x; \quad \operatorname{arctg} x \overset{0}{\sim} x; \\
a^x - 1 \overset{0}{\sim} x\ln a; \quad e^x - 1 \overset{0}{\sim} x; \quad \log_a(1+x) \overset{0}{\sim} x\log_a e; \quad \ln(1+x) \overset{0}{\sim} x; \\
(1+x)^r - 1 \overset{0}{\sim} rx.
\end{gathered} \tag{11.26}$$

Таблицу (11.26) можно расширить следующим образом.

Пример 11.5. Показать, что

$$1)\ 1-\cos x \overset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}; \quad 2)\ \operatorname{sh} x \overset{0}{\sim} x; \quad 3)\ \operatorname{ch} x - 1 \overset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}; \quad 4)\ \cos x - \cos 3x \overset{0}{\sim} 4x^2.$$

Решение. 1. Пользуясь тем, что

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \quad \text{и} \quad \sin\frac{x}{2} \sim \frac{x}{2},$$

получим

$$1-\cos x \overset{0}{\sim} 2\Big(\frac{x}{2}\Big)^2 = \frac{x^2}{2}.$$

2. Согласно определению,

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}[(e^x-1)-(e^{-x}-1)] \overset{0}{\sim} \frac{1}{2}(x+x) = x.$$

3. Поскольку

$$\operatorname{ch} x - 1 = 2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2} \overset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}.$$

4. Так как

$$\cos x - \cos 3x = 2\sin x \sin 2x \overset{0}{\sim} 2x \cdot 2x = 4x^2.$$

Кроме того, соотношения эквивалентности, приведённые в таблице (11.26), останутся справедливыми при $x \to a$, если заменить в них x на функцию $\gamma(x)$ такую, что $\gamma(x) \to 0$ при $x \to a$:

$$\begin{gathered}\sin\gamma(x) \overset{a}{\sim} \gamma(x); \quad \operatorname{tg}\gamma(x) \overset{a}{\sim} \gamma(x); \quad \arcsin\gamma(x) \overset{a}{\sim} \gamma(x); \quad \operatorname{arctg}\gamma(x) \overset{a}{\sim} \gamma(x);\\ a^{\gamma(x)} - 1 \overset{a}{\sim} \gamma(x)\ln a; \quad e^{\gamma(x)} - 1 \overset{a}{\sim} \gamma(x); \quad \log_a[1+\gamma(x)] \overset{a}{\sim} \gamma(x)\log_a e;\\ \ln[1+\gamma(x)] \overset{a}{\sim} \gamma(x); \quad [1+\gamma(x)]^r - 1 \overset{0}{\sim} r\gamma(x);\\ \operatorname{sh}\gamma(x) \overset{a}{\sim} \gamma(x); \quad 1-\cos\gamma(x) \overset{a}{\sim} \frac{\gamma^2(x)}{2}; \quad \operatorname{ch}\gamma(x) - 1 \overset{a}{\sim} \frac{\gamma^2(x)}{2}.\end{gathered} \tag{11.27}$$

Пример 11.6. Записать соотношения эквивалентности для функции $\sin(x-1)^2$ при $x \to 1$ и $(1+x^3)^r$ при $x \to 0$.

Решение. Поскольку $(x-1)^2 = \gamma(x)$ и $\gamma(x) = (x-1)^2 \to 0$ при $x \to 1$, то

$$\sin(x-1)^2 \overset{1}{\sim} (x-1)^2.$$

Аналогично $\gamma(x) = x^3 \to 0$ при $x \to 0$ и

$$(1+x^3)^r \overset{0}{\sim} rx^3.$$

Теорема 11.2 (критерий эквивалентности функций). *Для того чтобы функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)), \quad x \to a. \tag{11.28}$$

Доказательство. Пусть

$$\alpha(x) \overset{a}{\sim} \beta(x).$$

Тогда выполняются условия (11.2), (11.3) и, стало быть,

$$\alpha(x) - \beta(x) = \beta(x)[h(x) - 1] = \beta(x)h_1(x).$$

Поскольку

$$\lim_{x\to a} h_1(x) = \lim_{x\to a}[h(x) - 1] = 1 - 1 = 0,$$

то по определению символа o малое (11.6), (11.7) имеем

$$\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x)), \tag{11.29}$$

откуда и следует (11.28).

Обратно: из равенства (11.28), согласно определению $o(\beta(x))$, следует

$$\alpha(x) = \beta(x) + \beta(x)h_1(x),$$

где

$$\lim_{x\to a} h_1(x) = 0.$$

Тогда

$$\alpha(x) = \beta(x)[1 + h_1(x)] = \beta(x)h(x),$$

а поскольку

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a}[1 + h_1(x)] = 1,$$

то

$$\alpha(x) \overset{a}{\sim} \beta(x).$$

Следствие 11.2.1. Справедливо соотношение

$$\{\alpha \overset{a}{\sim} \beta\} \Leftrightarrow \{\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)), \quad x \to a\}. \tag{11.30}$$

Действительно, теорему 11.2 можно записать в виде утверждения

$$\{\alpha \overset{a}{\sim} \beta\} \Leftrightarrow \{\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)), \quad x \to a\}.$$

В силу свойства симметрии:

$$\{\alpha \overset{a}{\sim} \beta\} \Leftrightarrow \{\beta \overset{a}{\sim} \alpha\},$$

его можно записать как

$$\{\beta \overset{a}{\sim} \alpha\} \Leftrightarrow \{\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x)), \quad x \to a\}.$$

Отсюда после переобозначения α на β приходим к выражению

$$\{\alpha \overset{a}{\sim} \beta\} \Leftrightarrow \{\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x)), \quad x \to a\},$$

совпадающему с (11.30).

Следствие 11.2.2. Разность двух эквивалентных функций есть величина, бесконечно малая по сравнению с каждой из них. Справедливо и обратное утверждение:

$$\{\alpha(x) \overset{a}{\sim} \beta(x)\} \Leftrightarrow \{\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha(x)) = o(\beta(x)), \quad x \to a\}. \tag{11.31}$$

Действительно, (11.31) очевидным образом вытекает из теоремы 11.2 с учётом (11.30).

Если эквивалентные функции являются бесконечно малыми, то их разность есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них:

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to a} \frac{o(\alpha(x))}{\alpha(x)} = \lim_{x\to a} \frac{o(\beta(x))}{\beta(x)} = 0.$$

Следствие 11.2.3. Сумма функции с любой бесконечно малой по сравнению с ней эквивалентна этой функции:

$$\alpha(x) + o(\alpha(x)) \overset{a}{\sim} \alpha(x). \tag{11.32}$$

Справедливость (11.32) вытекает из равенства

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) + o(\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1.$$

Если $\alpha(x)$ сама является бесконечно малой, то (11.32) можно переформулировать так: сумма двух бесконечно малых эквивалентна слагаемому, являющемуся бесконечно малой низшего порядка.

11.3. Порядок малости и главная часть функции

До сих пор при сравнении двух функций мы оперировали понятиями бесконечно малых высшего и низшего порядков. Зачастую возникает потребность не только в такой грубой оценке, но в более точной численной характеристике малости их отношения.

♦ Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка* $p > 0$ *относительно бесконечно малой функции* $\beta(x)$ при $x \to a$, если выполняется асимптотическое равенство

$$\alpha(x) \overset{a}{=} c\beta^p(x) + o(\beta^p(x)), \quad 0 < |c| < \infty, \tag{11.33}$$

где c — некоторая константа; при этом слагаемое $c\beta^p(x)$ называется *главной частью* функции $\alpha(x)$ при $x \to a$, а число p — её *порядком малости* относительно функции $\beta(x)$.

Очевидно, что главная часть функции при $x \to a$ эквивалентна самой функции:

$$\alpha(x) \overset{a}{\sim} c\beta^p(x). \tag{11.34}$$

♦ Две функции называются *функциями одного порядка* при $x \to a$, если порядки их главных частей относительно одной и той же функции совпадают.

При $p = 1$ три функции $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta(x)$:

$$\alpha_1(x) \overset{a}{\sim} c_1\beta(x),$$
$$\alpha_2(x) \overset{a}{\sim} c_2\beta(x)$$

при $x \to a$ являются функциями одного порядка.

Пример 11.7. Показать, что две функции одного порядка связаны асимптотической оценкой ограниченности:

$$\alpha_1(x) \overset{a}{=} O(\alpha_2(x)). \tag{11.35}$$

Решение. Пусть

$$\alpha_1(x) \overset{a}{=} c_1\beta^p(x) + o(\beta^p(x)),$$
$$\alpha_2(x) \overset{a}{=} c_2\beta^p(x) + o(\beta^p(x)),$$

тогда

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}\right| = \left|\frac{c_1}{c_2}\right|, \quad 0 < \left|\frac{c_1}{c_2}\right| < \infty,$$

что соответствует асимптотической оценке

$$\alpha_1(x) \overset{a}{=} O(\alpha_2(x)).$$

Функцию $\beta(x)$, которая фигурирует в асимптотической оценке малости (11.33) различных функций, можно считать своего рода «эталоном». Конечно её выбор в известной мере произволен, но логично выбрать простейшие из них. Такими «эталонами» являются, например, функции

$$x,\ x - a,\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{x-a}. \tag{11.36}$$

Выбрав одну из них, в зависимости от условий $x \to 0$, $x \to a$ или $x \to \infty$, и возведя её в различные степени, получим шкалу для оценки других, более сложных функций, включая ограниченные, бесконечно малые и бесконечно большие.

Считая $\beta(x) = x$ эталонной функцией при $x \to 0$, таблицу эквивалентности (11.26) с помощью теоремы 11.2 можно записать в виде

$$\begin{gathered}
\sin x \overset{0}{=} x + o(x); \quad \operatorname{tg} x \overset{0}{=} x + o(x); \quad \arcsin x \overset{0}{=} x + o(x); \quad \operatorname{arctg} x \overset{0}{=} x + o(x);\\
a^x - 1 \overset{0}{=} x \ln a + o(x); \quad e^x - 1 \overset{0}{=} x + o(x); \quad \log_a(1+x) \overset{0}{=} x\frac{1}{\ln a} + o(x);\\
\ln(1+x) \overset{0}{=} x + o(x); \quad (1+x)^r - 1 \overset{0}{=} rx + o(x);\\
\operatorname{sh} x \overset{0}{=} x + o(x); \quad 1 - \cos x \overset{0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2); \quad \operatorname{ch} x - 1 \overset{0}{=} \frac{x^2}{2} + o(x^2).
\end{gathered} \tag{11.37}$$

Все функции в этой таблице, за исключением последних двух, имеют первый порядок малости при $x \to 0$ относительно функции x и, следовательно, относительно друг друга. Две последние функции имеют второй порядок малости относительно x, а значит, и всех остальных функций.

Пример 11.8. Определить порядок функций

$$\begin{gathered}
\alpha_1(x) = \ln(1 + \sqrt{x}\sin\sqrt[3]{x}); \quad \alpha_2(x) = \ln(\cos\sqrt{2}x);\\
\alpha_3(x) = e^{\operatorname{arctg} 2x^3} - 1; \quad \alpha_4(x) = \sqrt[3]{8 + 12x + x^2} - 2
\end{gathered}$$

относительно друг друга при $x \to 0$.

Решение. Таблица эквивалентности (11.27) позволяет определить порядки этих функций при $x \to 0$ относительно $\gamma(x) = x$. Действительно,

$$\alpha_1(x) = \ln(1 + \sqrt{x}\sin\sqrt[3]{x}) \overset{0}{\sim} \ln(1 + \sqrt{x}\sqrt[3]{x}) \overset{0}{\sim} = x^{1/2+1/3} = x^{5/6}.$$

Следовательно, при $x \to 0$ порядок функции $\alpha_1(x)$ относительно x равен $p_1 = 5/6$. Далее,

$$\begin{aligned}
&\alpha_2(x) = \ln(\cos\sqrt{2}x) = \ln[1 - (1 - \cos\sqrt{2}x)] \overset{0}{\sim} \ln\Big(1 - \frac{(\sqrt{2}x)^2}{2}\Big) \overset{0}{\sim} -x^2, \quad p_2 = 2;\\
&\alpha_3(x) = e^{\operatorname{arctg} 2x^3} - 1 \overset{0}{\sim} e^{2x^3} - 1 \overset{0}{\sim} 2x^3, \quad p_3 = 3;\\
&\alpha_4(x) = \sqrt[3]{8 + 12x + x^2} - 2 = 2\Big(\sqrt[3]{1 + \frac{12}{8}x + \frac{1}{8}x^2} - 1\Big) \overset{0}{\sim} 2\Big(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{2}x} - 1\Big) \overset{0}{\sim}\\
&\qquad \sim 2\frac{3x}{6} = x, \quad p_4 = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, наименьший порядок малости $p_1 = 5/6$ имеет функция $\alpha_1(x)$, а наибольший $p_3 = 3$ — функция $\alpha_3(x)$.

Поскольку функции $\alpha_4(x)$ и x одного порядка:

$$x \overset{0}{\sim} \alpha_4(x),$$

то

$$\alpha_1(x) \overset{0}{\sim} [\alpha_4(x)]^{5/6}, \quad p_{14} = \frac{5}{6};$$
$$\alpha_2(x) \overset{0}{\sim} -[\alpha_4(x)]^2, \quad p_{24} = 2;$$
$$\alpha_3(x) \overset{0}{\sim} 2[\alpha_4(x)]^3, \quad p_{34} = 3.$$

В свою очередь, поскольку

$$x \overset{0}{\sim} [\alpha_1(x)]^{6/5},$$

то порядок функции x относительно $\alpha_1(x)$ равен $p = 6/5$, а тогда

$$\alpha_2(x) \overset{0}{\sim} -[\alpha_1(x)]^{(6/5)\cdot 2} = -[\alpha_1(x)]^{2,4}, \quad p_{21} = 2{,}4;$$
$$\alpha_3(x) \overset{0}{\sim} 2[\alpha_1(x)]^{(6/5)\cdot 3} = 2[\alpha_1(x)]^{3,6}, \quad p_{31} = 3{,}6;$$
$$\alpha_4(x) \overset{0}{\sim} [\alpha_1(x)]^{6/5} = [\alpha_1(x)]^{1,2}, \quad p_{41} = 1{,}2.$$

◊ Аналогичным образом в любой паре функций можно определить порядок малости одной из функций относительно другой.

Пример 11.9. Показать, что для функции $\sin(\pi/4 - x)$ при $x \to \pi/4$ и $x \to 0$ справедливы асимптотические оценки

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \overset{\pi/4}{=} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) + o\left(\frac{\pi}{4} - x\right);$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \overset{0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1).$$

Решение. Поскольку

$$\lim_{x\to\pi/4} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0,$$

то, согласно таблице эквивалентностей (11.37), имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \overset{\pi/4}{=} \left(\frac{\pi}{4} - x\right) + o\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

Во втором случае, при $x \to 0$, после тригонометрических преобразований получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x),$$

откуда

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \overset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}x \overset{0}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} + o(1).$$

◊ Отметим, что не все бесконечно малые можно сравнивать по порядку малости.

Пример 11.10. Определить порядок функций $\ln x$ и e^x относительно x при $x \to +\infty$.

Решение. Согласно результатам примера 10.4, имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}=0,\quad \forall p>0.$$

Это означает, что функция $\ln x$ при $x\to+\infty$ является по сравнению с функцией x бесконечно малой более высокого порядка, чем x в любой степени, т.е. x^p $(p>0)$. В этом случае говорят, что $\ln x$ — бесконечно малая сколь угодно большого порядка:

$$\ln x \overset{+\infty}{=} o(x^p),\quad \forall p>0. \tag{11.38}$$

Если заметить, что сами функции $\ln x$ и x при $x\to+\infty$ являются бесконечно большими, то, вспомнив о связи бесконечно малых и бесконечно больших, в этом случае удобнее говорить, что бесконечно большая функция $\ln x$ является бесконечно большой более низкого порядка, чем x в любой степени, т.е. x^p $(p>0)$.

Далее, согласно результатам примера 10.4, имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^p}{e^x}=0,\quad \forall p>0.$$

Это означает, что функция x в любой положительной степени, т.е. x^p $(p>0)$, является бесконечно малой при $x\to+\infty$ относительно функции e^x:

$$x^p \overset{+\infty}{=} o(e^x),\quad \forall p>0. \tag{11.39}$$

А поскольку функции e^x и x при $x\to+\infty$ являются бесконечно большими, то говорят, что e^x является бесконечно большой высшего порядка, чем x в любой степени, т.е. x^p $(p>0)$.

Таким образом, для функций $\ln x$ и e^x установить порядок малости не удаётся. Другими словами, при $x\to+\infty$ бесконечно большая функция $\ln x$ является бесконечно большой низшего порядка, чем x^p ($p>0$ — произвольное), а функция e^x является бесконечно большой высшего порядка, чем x в любой степени p $(p>0)$.

При $x\to+0$ формулы, аналогичные (11.38) и (11.39), получаются заменой $x\to 1/x$ и для бесконечно малых $e^{-1/x}$ и x имеют вид

$$e^{-1/x} \overset{+0}{=} o(x^p),\quad x^p \overset{+0}{=} o\Big(\frac{1}{\ln x}\Big),\quad \forall p>0. \tag{11.40}$$

Пример 11.11. Вычислить

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x+\sqrt[3]{1+x}-2}{2\operatorname{arctg}x-\arcsin x}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида $(0/0)$. Так как

$$e^x-1\overset{0}{=}x+o(x),\quad \sqrt[3]{1+x}-1\overset{0}{=}\frac{x}{3}+o(x),\quad \operatorname{arctg}x\overset{0}{=}x+o(x),\quad \arcsin x\overset{0}{=}x+o(x),$$

то

$$\lim_{x\to0}\frac{(e^x-1)+(\sqrt[3]{1+x}-1)}{2\operatorname{arctg}x-\arcsin x}=\lim_{x\to0}\frac{x+o(x)+x/3+o(x)}{2x+o(x)-[x+o(x)]}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(4/3x)+o(x)}{x+o(x)}=\lim_{x\to0}\frac{4/3+o(x)/x}{1+o(x)/x}=\frac{4}{3}.$$

Здесь мы воспользовались соотношениями $2o(x)=o(x)$, $o(x)+o(x)=o(x)$, $o(x)-o(x)=o(x)$, следующими из свойств асимптотических оценок, к рассмотрению которых мы и переходим.

11.4. Свойства асимптотических оценок

Напомним, что асимптотические оценки

$$\alpha \overset{a}{=} o(\beta), \quad \alpha \overset{a}{=} O(\beta)$$

читаются слева направо, причём правая часть их указывает на некоторый класс функций, а левая — на одну функцию из этого класса, т.е.

$$\alpha \in o(\beta), \quad \alpha \in O(\beta).$$

Это означает, что действия с оценками $o(\beta)$ и $O(\beta)$, вообще говоря, аналогичны действиям с некоторыми множествами, что и определяет специфику их алгебры.

Теорема 11.3. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{array}{|c|c|}
\hline
o(\beta)+o(\beta)=o(\beta); & O(\beta)+O(\beta)=O(\beta); \\
o(C\beta)=o(\beta), \quad Co(\beta)=o(\beta); & O(C\beta)=O(\beta), \quad CO(\beta)=O(\beta); \\
o(o(\beta))=o(\beta); & O(O(\beta))=O(\beta); \\
o(\beta+o(\beta))=o(\beta); & O(\beta+O(\beta))=O(\beta); \\
o(\beta)o(\gamma)=o(\beta\gamma); & O(\beta)O(\gamma)=O(\beta\gamma); \\
o(O(\beta))=o(\beta); & O(o(\beta))=o(\beta); \\
\hline
\multicolumn{2}{|c|}{o(\beta)+O(\beta)=O(\beta);} \\
\multicolumn{2}{|c|}{o(\beta)O(\gamma)=o(\beta\gamma).} \\
\hline
\end{array} \tag{11.41}$$

Здесь всюду $x \to a$ и C — отличная от нуля постоянная.

Доказательство. Докажем по две первые формулы для каждой оценки, остальные доказываются аналогично. Начнем с соотношения

$$o(\beta)+o(\beta)=o(\beta), \quad x \to a.$$

В этом случае следует показать, что сумма двух любых функций $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, принадлежащих классу $o(\beta)$, т.е.

$$\{\alpha_1(x)=\beta(x)h_1(x),\ \lim_{x\to a} h_1(x)=0\} \Leftrightarrow \{\alpha_1 \overset{a}{=} o(\beta)\};$$

$$\{\alpha_2(x)=\beta(x)h_2(x),\ \lim_{x\to a} h_2(x)=0\} \Leftrightarrow \{\alpha_2 \overset{a}{=} o(\beta)\},$$

также принадлежит этому классу. Для этого запишем сумму

$$\alpha(x)=\alpha_1(x)+\alpha_2(x)=\beta(x)h_1(x)+\beta(x)h_2(x)=\beta(x)[h_1(x)+h_2(x)]=\beta(x)h(x).$$

Так как

$$\lim_{x\to a} h(x)=\lim_{x\to a}[h_1(x)+h_2(x)]=0,$$

то

$$\alpha(x)=\beta(x)h(x), \quad \lim_{x\to a} h(x)=0.$$

Согласно определению, это означает, что

$$\alpha \overset{a}{=} o(\beta),$$

т.е.

$$o(\beta) + o(\beta) \overset{a}{=} o(\beta),$$

что и требовалось доказать.

Для следующей формулы нужно доказать, что любая функция, принадлежащая классу функций $o(C\beta)$, принадлежит и к классу функций $o(\beta)$, т.е., если $\alpha \overset{a}{=} o(C\beta)$, то $\alpha \overset{a}{=} o(\beta)$.

Условие $\alpha = o(C\beta)$ означает, что

$$\alpha(x) = C\beta(x)h_1(x), \quad \lim_{x\to a} h_1(x) = 0,$$

но тогда

$$\alpha(x) = \beta(x)Ch_1(x) = \beta(x)h(x), \quad h(x) = Ch_1(x),$$

где

$$\lim_{x\to a} h(x) = \lim_{x\to a} Ch_1(x) = 0,$$

а это и означает, что

$$\alpha \overset{a}{=} o(\beta),$$

т.е.

$$o(C\beta) = o(\beta).$$

Перейдём к соотношению

$$O(\beta) + O(\beta) = O(\beta), \quad x \to a.$$

В этом случае следует доказать, что сумма двух любых функций $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$, принадлежащих классу $O(\beta)$, также принадлежит этому классу. Пусть, согласно определению,

$$\alpha_1(x) = \beta(x)h_1(x), \quad \alpha_2(x) = \beta(x)h_2(x),$$

где $h_1(x)$, $h_2(x)$ — ограниченные функции в проколотой окрестности $\dot{S}(a,\delta)$. Запишем сумму

$$\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x) = \beta(x)h_1(x) + \beta(x)h_2(x) = \beta(x)h(x),$$

где $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$. Поскольку сумма двух ограниченных функций является ограниченной, то функция $\alpha(x)$ принадлежит классу $O(\beta)$, т.е. справедлива оценка

$$O(\beta) + O(\beta) \overset{a}{=} O(\beta),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 11.3.1. Справедливы соотношения

$$\begin{gathered}
o(\beta^n)o(\beta^m) \overset{a}{=} o(\beta^{n+m}); \quad \beta^{n-1}o(\beta) \overset{a}{=} o(\beta^n), \quad [o(\beta)]^n \overset{a}{=} o(\beta^n), \\
\frac{o(\beta^n)}{\beta} \overset{a}{=} o(\beta^{n-1}), \quad \beta(x) \neq 0 \forall x \in \dot{S}(a,\delta); \\
o(\beta^n) \overset{a}{=} o(\beta^m), \quad m \leqslant n, \quad o\biggl(\sum_{k=1}^{N} C_k\beta^k\biggr) \overset{a}{=} o(\beta);
\end{gathered} \tag{11.42}$$

C_k — постоянные; $n, m \in \mathbb{N}$, а β — бесконечно малая при $x \to a$ функция.

Пример 11.12. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2-3x)+\sin(x+2x^3)}{\sin 6x+\operatorname{tg}^3 x-(e^{2x}-1)^2}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида $0/0$. Чтобы её раскрыть, выделим главные части всех слагаемых при $x\to 0$:

$$\ln(1+x^2-3x)\overset{0}{=}x^2-3x+o(x^2-3x)\overset{0}{=}o(x)-3x+o(o(x)-3x)\overset{0}{=}$$
$$=o(x)-3x+o(-3x)\overset{a}{=}o(x)-3x+o(x)\overset{0}{=}-3x+o(x);$$
$$\sin(x+2x^3)\overset{0}{=}x+2x^3+o(x+2x^3)\overset{0}{=}x+2o(x)+o(x+2o(x))\overset{0}{=}$$
$$=x+o(x)+o(x)\overset{0}{=}x+o(x);$$
$$\sin 6x\overset{0}{=}6x+o(6x)\overset{0}{=}6x+o(x);$$
$$\operatorname{tg}^3 x\overset{0}{=}[x+o(x)]^3\overset{0}{=}x^3+3x^2o(x)+3xo^2(x)+o^3(x)\overset{0}{=}$$
$$=x^3+3o(x^3)+3o(x^2)o(x)+o(x^3)\overset{0}{=}x^3+o(x^3)+o(x^3)+o(x^3)\overset{0}{=}x^3+o(x^3);$$
$$(e^{2x}-1)^2\overset{0}{=}(2x+o(2x))^2\overset{0}{=}4x^2+4xo(2x)+o^2(2x)\overset{0}{=}4x^2+o(x^2)+o(x^2)\overset{0}{=}4x^2+o(x^2).$$

Здесь мы использовали соотношения (11.41) и (11.42).

Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2-3x)+\sin(x+2x^3)}{\sin 6x+\operatorname{tg}^3 x-(e^{2x}-1)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x+o(x)+x+o(x)}{6x+o(x)+x^3+o(x^3)-4x^2-o(x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+o(x)}{6x+o(x)+o(x)+o(o(x))-4o(x)-o(o(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-2x+o(x)}{6x+o(x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2+[o(x)]/x}{6+[o(x)]/x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2+o(1)}{6+o(1)}=-\frac{1}{3}.$$

Пример 11.13. Показать справедливость асимптотических оценок

$$1.\ (1+x)^n\overset{0}{=}1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+o(x^2);$$
$$2.\ x^{\frac{1}{n}}\overset{a}{=}a^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}(x-a)+\frac{1-n}{2n^2}(x-a)^2+o((x-a)^2);$$
$$3.\ a^x\overset{0}{=}1+x\ln a+o(x);\quad 4.\ a^x-b^x\overset{0}{=}x\ln\frac{a}{b}+o(x);\quad 5.\ \operatorname{tg}x-\sin x\overset{0}{=}o(x).$$

Решение. 1. Воспользовавшись формулой бинома Ньютона, получим

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\ldots+x^n\overset{0}{=}$$
$$\overset{0}{=}1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+o(x^2)+o(x^3)+\ldots+o(x^{n-1})=$$
$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+o(x^2).$$

2. С помощью тождественных преобразований найдём

$$(a-x-a)^{1/n} = a^{1/n}\Big(1-\frac{x-a}{a}\Big)^{1/n} \overset{a}{=} a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}(x-a) + \frac{1-n}{2n^2}(x-a)^2 + o((x-a)^2).$$

3. Эта оценка очевидным образом вытекает из формулы

$$a^x - 1 \overset{0}{=} x\ln a + o(x)$$

таблицы (11.37).

4. Использование предыдущей оценки даёт

$$a^x - b^x \overset{0}{=} 1 + x\ln a + o(x) - 1 - x\ln b - 0(x) = x\ln\frac{a}{b} + o(x) + (-1)o(x) =$$
$$= x\ln\frac{a}{b} + o(x) + o(x) = x\ln\frac{a}{b} + o(x).$$

5. Из формулы

$$\operatorname{tg} x \overset{0}{=} x + o(x)$$

таблицы (11.37) с учётом

$$x \overset{0}{=} \sin x + o(x)$$

найдём

$$\operatorname{tg} x \overset{0}{=} x + o(x) \overset{0}{=} \sin x + o(x) + o(x) \overset{0}{=} \sin x + o(x).$$

11.5. Примеры вычисления пределов функций

Выше для иллюстрации некоторых теорем и теоретических положений мы уже рассматривали примеры вычисления пределов функций. Здесь мы более систематизированно рассмотрим задачи вычисления пределов функций, решая их, по возможности, более простыми методами, включая методы с использованием асимптотических оценок.

Пример 11.14. Пусть

$$P_n(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0, \quad p_n \neq 0,$$

— полином степени n с действительными коэффициентами p_i, $i = \overline{1, n}$. Показать, что

$$\lim_{x\to\infty} |P_n(x)| = +\infty.$$

Решение. Поскольку

$$\frac{1}{x^n}P_n(x) = p_n + p_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + p_0\frac{1}{x^n} \overset{\infty}{=} p_n + o(p_n) = \overset{\infty}{=} p_n + o(1),$$

то

$$\lim_{x\to\infty} |P_n(x)| = \lim_{x\to\infty} |x|^n \Big|\frac{P_n(x)}{x^n}\Big| = \lim_{x\to\infty} |x|^n \lim_{x\to\infty} |p_n + o(1)| = |p_n| \lim_{x\to\infty} |x|^n = +\infty,$$

что и требовалось показать.

Пример 11.15. Показать, что для полиномов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}\infty, & n>m;\\ p_n/q_n, & n=m;\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

Решение. Имеем неопределённость вида ∞/∞. Поскольку

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n[p_n+o(1)]}{x^m[q_m+o(1)]}=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\lim_{x\to\infty}\frac{p_n+o(1)}{q_m+o(1)},$$

то при $n>m$ $(n-m>0)$

$$A=\frac{p_n}{q_m}\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=\infty;$$

при $n=m$

$$A=\frac{p_n}{q_n}\lim_{x\to\infty}1=\frac{p_n}{q_n}$$

и при $n<m$ $(n-m<0)$

$$A=\frac{p_n}{q_m}\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=\frac{p_n}{q_m}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{m-n}}=0,$$

что и требовалось показать.

Пример 11.16. Вычислить пределы

$$A_1=\lim_{x\to0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2};\quad A_2=\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1};$$
$$A_3=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1};\quad A_4=\lim_{x\to1}\Big(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\Big),\ n,m\in\mathbb{N}.$$

Решение. Первые три выражения представляют собой неопределённости вида $0/0$, а последний — вида $\infty-\infty$. Воспользуемся результатом примера 11.13:

$$(1+x)^n\overset{0}{=}1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+o(x^2).$$

Тогда для первого предела имеем

$$A_1=\lim_{x\to0}\frac{1+n(mx)+\frac{n(n-1)}{2}(mx)^2+o(m^2x^2)-1-m(nx)-\frac{m(m-1)}{2}(nx)^2-o(n^2x^2)}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{[n(n-1)m^2-m(m-1)n^2]x^2+o(x^2)}{2x^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\Big[mn(n-m)+\frac{o(x^2)}{x^2}\Big]=\frac{mn(n-m)}{2}.$$

Чтобы вычислить второй предел, воспользуемся ещё одним результатом примера 11.13:

$$x^m \overset{a}{=} a^m + ma^{m-1}(x-a) + o(x-a).$$

Тогда

$$x^m \overset{1}{=} 1 + m(x-1) + o(x-1) \tag{11.43}$$

и, следовательно,

$$A_2 = \lim_{x\to1} \frac{1+m(x-1)+o(x-1)-1}{1+n(x-1)+o(x-1)-1} = \lim_{x\to1} \frac{m+[o(x-1)]/(x-1)}{n+[o(x-1)]/(x-1)} = \frac{m}{n}.$$

Этот же результат можно получить с помощью замены $x = 1+t$, $t \to 0$ при $x \to 1$, и далее, как при вычислении первого предела:

$$A_2 = \lim_{t\to0} \frac{(1+t)^m - 1}{(1+t)^n - 1} = \lim_{t\to0} \frac{mt + o(t)}{nt + o(t)} = \frac{m}{n}.$$

Для третьего предела использование равенства (11.43) даёт

$$A_3 = \lim_{t\to1} \frac{1+(x-1)/m+o(x-1)-1}{1+(x-1)/n+o(x-1)-1} = \lim_{t\to1} \frac{1/m+[o(x-1)]/(x-1)}{1/n+[o(x-1)]/(x-1)} = \frac{n}{m}.$$

Этот же результат получается с помощью замены

$$x = (1+t)^{mn}, \quad t \to 0 \text{ при } x \to 1,$$

дающей

$$A_3 = \lim_{t\to0} \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t)^m - 1}.$$

Этот предел полностью совпадает с пределом A_2, если в нем поменять местами степени n и m. В силу этого

$$A_3 = \lim_{x\to1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \lim_{t\to0} \frac{(1+t)^n - 1}{(1+t)^m - 1} = \frac{n}{m}.$$

В четвёртом пределе также проведём замену $x = 1+t$, $t \to 0$ при $x \to 1$. Тогда

$$A_4 = \lim_{x\to1} \Big(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \Big) = \lim_{t\to0} \Big(\frac{m}{1-(1+t)^m} - \frac{n}{1-(1+t)^n} \Big).$$

Далее, как и для первого предела, воспользуемся асимптотической оценкой

$$1-(1+t)^p \overset{0}{=} -pt - \frac{p(p-1)}{2} t^2 - o(t^2),$$

с учётом которой запишем

$$A_4 = \lim_{t\to0} \left(\frac{n}{nt + \dfrac{n(n-1)}{2} t^2 + o(t^2)} - \frac{m}{mt + \dfrac{m(m-1)}{2} t^2 + o(t^2)} \right) =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{n\left(mt + \dfrac{m(m-1)}{2}t^2 + o(t^2)\right) - m\left(nt + \dfrac{n(n-1)}{2}t^2 + o(t^2)\right)}{\left[nt + \dfrac{n(n-1)}{2}t^2 + o(t^2)\right]\left[mt + \dfrac{m(m-1)}{2}t^2 + o(t^2)\right]} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{mn\left[\dfrac{m-1}{2} - \dfrac{n-1}{2}\right] + \dfrac{o(t^2)}{t^2}}{mn + [o(t^2)]/t^2} = \frac{m-n}{2}.$$

Здесь мы учли, что

$$\left[nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + o(t^2)\right]\left[mt + \frac{m(m-1)}{2}t^2 + o(t^2)\right] = mnt^2 + o(t^2).$$

Пример 11.17. Раскрыть неопределённости вида $0/0$:

$$A_1 = \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}; \quad A_2 = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}.$$

Решение. Приняв во внимание соотношения

$$\sqrt{x+2} = 3\sqrt{1 + \frac{x-7}{9}} \overset{7}{=} 3\Big(1 + \frac{x-7}{18}\Big) + o(x-7);$$

$$\sqrt[3]{x+20} = 3\sqrt[3]{1 + \frac{x-7}{27}} \overset{7}{=} 3\Big(1 + \frac{x-7}{81}\Big) + o(x-7);$$

$$\sqrt[4]{x+9} = 2\sqrt[4]{1 + \frac{x-7}{16}} \overset{7}{=} 2\Big(1 + \frac{x-7}{64}\Big) + o(x-7),$$

для первого предела найдём

$$A_1 = \lim_{x\to 7} \frac{3\Big(1 + \dfrac{x-7}{18}\Big) + o(x-7) - 3\Big(1 + \dfrac{x-7}{81}\Big) - o(x-7)}{2\Big(1 + \dfrac{x-7}{64}\Big) + o(x-7) - 2} =$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{\dfrac{7}{54}(x-7) + o(x-7)}{\dfrac{1}{32}(x-7) + o(x-7)} = \frac{112}{27}.$$

Чтобы вычислить второй предел, можно обойтись алгебраическими преобразованиями:

$$A_2 = \lim_{x\to 2}\Big[\frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}\Big] = \lim_{x\to 2}\Big[\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}(\sqrt{x}+\sqrt{2})} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}\Big] =$$

$$= \lim_{x\to 2}\Big[\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x}+\sqrt{2})} - \frac{1}{\sqrt{x+2}}\Big] = \frac{1}{2}\lim_{x\to 2}\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{2}} - \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x+2}} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 11.18. Вычислить

$$A_1 = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx},\ m, n \in \mathbb{N}; \quad A_2 = \lim_{x\to\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\cos(x+\pi/6)}; \quad A_3 = \lim_{x\to\pi/3} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\pi/6)}.$$

Решение. Чтобы раскрыть неопределённость вида $0/0$ в первом пределе, проведём замену

$$x = t + \pi, \quad x \to \pi \text{ при } t \to 0,$$

тогда

$$A_1 = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(mt + m\pi)}{\sin(nt + n\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{(-1)^m \sin mt}{(-1)^n \sin nt} = (-1)^{m-n}\frac{m}{n}.$$

Чтобы раскрыть неопределённость вида $0/0$ во втором пределе, проведём замену

$$x = t + \frac{\pi}{3}, \quad x \to \frac{\pi}{3} \text{ при } t \to 0,$$

тогда

$$A_2 = \lim_{x\to\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\cos(x+\pi/6)} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg}(t+\pi/3) - \sqrt{3}}{\cos(t+\pi/2)} = -\lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{\operatorname{tg} t + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} t} - \sqrt{3}}{-\sin t} =$$

$$= -\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t + \sqrt{3} - \sqrt{3}(1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} t)}{(1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} t)\sin t} = -\lim_{t\to 0} \frac{4\operatorname{tg} t}{\sin t} = -4\lim_{t\to 0} \frac{1}{\cos t} = -4.$$

Чтобы раскрыть неопределённость в третьем пределе, предварительно проделаем алгебраические преобразования:

$$A_3 = \lim_{x\to\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg}^2 x - 3)}{\cos(x+\pi/6)} = \lim_{x\to\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})(\operatorname{tg} x - \sqrt{3})}{\cos(x+\pi/6)} =$$

$$= \lim_{x\to\pi/3} [\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})] \lim_{x\to\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}}{\cos(x+\pi/6)} = 6A_2 = 6\cdot(-4) = -24.$$

Пример 11.19. Доказать, что

$$\lim_{x\to+\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}) = 0.$$

Решение. Исходный предел невозможно вычислить по правилу (9.35) как разность пределов, поскольку каждый из них по отдельности не существует, однако использование тригонометрических формул даёт

$$\lim_{x\to+\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x}) = 2\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \cos\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}.$$

Учтём далее, что произведение ограниченной функции

$$\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

на бесконечно малую функцию:

$$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0,$$

даёт функцию бесконечно малую, т.е.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0,$$

что и требовалось доказать.

Пример 11.20. Вычислить

$$A_1=\lim_{x\to a}\frac{x^x-x^a}{x-a};\quad A_2=\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a};\quad A_3=\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a},\quad a>0.$$

Решение. Воспользовавшись алгебраическими преобразованиями, получим

$$A_1=\lim_{x\to a}\frac{x^a(x^{x-a}-1)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^a\ln x(e^{(x-a)\ln x}-1)}{(x-a)\ln x}=\lim_{x\to a}x^a\lim_{x\to a}\ln x\lim_{x\to a}\frac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x}.$$

Первые два предела уже вычислены:

$$\lim_{x\to a}x^a=a^a,\quad \lim_{x\to a}\ln x=\ln a,$$

а в последнем пределе проведём замену

$$t=(x-a)\ln x,\quad t\to 0 \text{ при } x\to a,$$

тогда

$$A_1=a^a\ln a\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=a^a\ln a\cdot 1=a^a\ln a.$$

Для второго предела можем записать

$$A_2=\lim_{x\to a}\frac{a^a\Big[\Big(\dfrac{x}{a}\Big)^a-1\Big]}{x-a}=a^a\lim_{x\to a}\frac{\Big(\dfrac{x}{a}-1+1\Big)^a-1}{x-a}=a^a\lim_{x\to a}\frac{\Big(\dfrac{x-a}{a}+1\Big)^a-1}{x-a},$$

а после замены

$$\frac{x-a}{a}=t,\quad t\to 0 \text{ при } x\to a$$

получим

$$A_2=a^a\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^a-1}{at}=a^a\lim_{t\to 0}\frac{at+o(at)}{at}=a^a\cdot 1=a^a.$$

Наконец, для третьего предела имеем

$$A_3=\lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^x-x^a+x^a-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^x-x^a}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=$$
$$=A_1+A_2=a^a\ln a+a^a=a^a\ln ae.$$

Пример 11.21. Вычислить

$$A_1 = \lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2},\ a > 0,\ b > 0; \quad A_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}.$$

Решение. Воспользовавшись асимптотической оценкой

$$a^x \overset{0}{=} 1 + x\ln a + o(x),$$

получим

$$a^x - b^x \overset{0}{=} 1 + x\ln a + o(x) - 1 - x\ln b - o(x) \overset{0}{=} x\ln\frac{a}{b} + o(x)$$

и, соответственно,

$$a^{x^2} - b^{x^2} \overset{0}{=} x^2\ln\frac{a}{b} + o(x^2).$$

Тогда

$$A_1 = \lim_{x\to 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\ln(a/b) + o(x^2)}{x^2\ln^2(a/b) + o(x^2)} = \frac{1}{\ln(a/b)}.$$

Для второго предела с помощью асимптотических оценок

$$\begin{aligned}
&\operatorname{sh}^2 x \overset{0}{=} [x + o(x)]^2 \overset{0}{=} x^2 + 2xo(x) + o^2(x) \overset{0}{=} x^2 + o(x^2);\\
&\ln(\operatorname{ch} 3x) \overset{0}{=} \ln\Big[1 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)\Big] \overset{0}{=} \frac{9}{2}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

найдём

$$A_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{9}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{2}{9}.$$

Пример 11.22. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\Big)^{1/\sin x}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида 1^∞. Чтобы её раскрыть, воспользуемся формулой (10.18):

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\Big)^{1/\sin x} = \exp\Big\{\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} - 1\Big)\frac{1}{\sin x}\Big\} = \exp\Big\{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{(1 + \sin x)\sin x}\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1 + \sin x}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin x}\Big\} = \exp\Big\{1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x + o(x) - x + o(x)}{x + o(x)}\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}\Big\} = e^0 = 1.$$

12. Непрерывность функции одного аргумента

12.1. Приращение аргумента и функции. Непрерывность функции в точке и на отрезке

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана однозначная функция $y = f(x)$, которая определена на этом отрезке (рис. 37). Пусть x – некоторое значение аргумента, называемое начальным, которому соответствует значение функции

$$y = f(x). \tag{12.1}$$

Это значение называют *начальным*, или «старым», значением функции.

Дадим x приращение (некоторую прибавку) Δx. Тогда новое или наращённое значение аргумента будет равно $x + \Delta x$, и ему будет соответствовать новое или наращённое значение функции

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x). \tag{12.2}$$

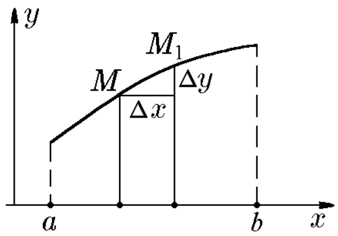


Рис. 37.

Вычитая из наращённого значения функции (12.2) начальное значение (12.1), получим приращение функции Δy:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{12.3}$$

♦ Разность (12.3) между новым и начальным значениями функции называется *приращением функции.*

Пример 12.1. Найти приращение функции $y = x^2 + 1$.

Решение. 1. Пусть x получит приращение Δx. Тогда новое значение функции будет равно

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 1 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 1.$$

2. Вычтя из нового значения функции её начальное значение, получим приращение функции

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

♦ Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{12.4}$$

Это определение требует выполнения следующих условий:

1) функция $f(x)$ должна быть определена в некоторой окрестности $]x_0-\delta, x_0+\delta[= S(x_0, \delta)$ точки x_0;
2) должны существовать конечные пределы слева

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$$

и справа

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

3) пределы слева и справа должны быть одинаковыми;
4) эти пределы должны быть равны $f(x_0)$ – значению функции при $x = x_0$.

Определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0, выраженное условием (12.4), можно сформулировать, исходя из определения предела по Коши, с помощью неравенств или окрестностей:

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon;$$
$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 : \forall x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in S(f(x_0), \varepsilon),$$

или из определения предела по Гейне с помощью последовательностей:

$$\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Подчеркнем, что в определении непрерывности, в отличие от определения предела, рассматривается полная, а не проколотая окрестность точки x_0, и пределом функции является значение этой функции в точке x_0. Отметим, что условие (12.4) можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\Big(\lim_{x\to x_0} x\Big) \tag{12.5}$$

и

$$\lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0, \tag{12.6}$$

из которых следует, что для непрерывных функций, во-первых, операции вычисления предела и вычисления значения функции перестановочны, а, во-вторых, бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример 12.2. Показать, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

1) $y = x^3,\ x_0 = 1$; 2) $y = \sin x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; 3) $y = \ln x,\ x_0 > 0$; 4) $y = \dfrac{1}{x},\ |x_0| > 0$.

Решение. 1) Если $x \to 1$, то (см. следствие 9.9.3)

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n,$$

а значит,

$$\lim_{x\to 1} x^3 = 1,$$

т.е. для функции $y = x^3$ выполняется условие (12.4). Поэтому функция x^3 непрерывна в точке $x = x_0 = 1$.

Этот же результат можно получить, используя формулу (12.6) для приращения функции. Действительно, возьмем произвольное значение $x_0 \in \mathbb{R}$ и зададим ему приращение Δx, тогда

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

или

$$\Delta y = 3x_0^2\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при } \Delta x \to 0, \tag{12.7}$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[3x_0^3\Delta x + o(\Delta x)] = 0.$$

Равенство предела нулю означает, что функция $y = x^3$ непрерывна в произвольной точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$, а значит, и в точке $x_0 = 1$.

2) Если $x \to \pi/4$, то (см. пример 9.11)

$$\lim_{x\to\pi/4} \sin x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

т.е. для функции $y = \sin x$ выполняется условие (12.4). Это означает, что функция $\sin x$ непрерывна в точке $x = x_0 = \pi/4$. Этот же результат можно получить, используя формулу (12.6). Действительно, возьмем произвольное значение $x_0 \in \mathbb{R}$ и зададим ему приращение Δx, тогда

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = -\sin x_0(1 - \cos\Delta x) + \cos x_0 \sin\Delta x$$

или

$$\Delta y = (\cos x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при } \Delta x \to 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[(\cos x_0)\Delta x + o(\Delta x)] = 0.$$

Равенство предела нулю означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$, а значит, и в точке $x_0 = \pi/4$.

3) Для доказательства непрерывности воспользуемся формулой (12.6). Возьмем произвольное значение $x_0 > 0$ и зададим ему приращение Δx, тогда

$$\Delta y = \ln(x_0 + \Delta x) - \ln x_0 = \ln\frac{x_0 + \Delta x}{x_0} = \ln\Big(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\Big)$$

или, согласно таблице (11.37),

$$\Delta y = \frac{\Delta x}{x_0} + o(\Delta x) \quad \text{при } \Delta x \to 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\Big(\frac{\Delta x}{x_0} + o(\Delta x)\Big) = 0.$$

Это означает, что функция $y = \ln x$ непрерывна в любой точке, в которой она определена, т.е. при $x_0 > 0$.

4) Рассуждая, как и в предыдущем случае, имеем для $x_0 \neq 0$

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = -\frac{\Delta x}{(x_0 + \Delta x)x_0} = -\frac{\Delta x}{x_0^2}\frac{1}{1 + \Delta x/x_0}$$

или

$$\Delta y = -\frac{\Delta x}{x_0^2} + o(\Delta x) \quad \text{при } \Delta x \to 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\Big(-\frac{\Delta x}{x_0^2} + o(\Delta x)\Big) = 0.$$

Это означает, что функция $y = 1/x$ непрерывна в любой точке, в которой она определена, т.е. для всех x_0, кроме $x_0 = 0$.

Пример 12.3. Показать, что функция

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}$$

непрерывна в точке $x = 1$.

Решение. 1. Данная функция непрерывна в точке $x = 1$, так как она определена в окрестности точки $x = 1$ $(1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon)$ и

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \frac{2}{3} = f(1).$$

2. Выполняются все четыре условия непрерывности:
а) функция определена в окрестности точки $x = 1$;
б) существуют пределы справа и слева:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \lim_{\substack{x\to 1+\varepsilon,\\ \varepsilon\to +0}} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \lim_{\varepsilon\to +0} \frac{(1+\varepsilon)^2+1}{(1+\varepsilon)^2+2} = \frac{2}{3},$$
$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \lim_{\substack{x\to 1-\varepsilon,\\ \varepsilon\to +0}} \frac{x^2+1}{x^2+2} = \lim_{\varepsilon\to +0} \frac{(1-\varepsilon)^2+1}{(1-\varepsilon)^2+2} = \frac{2}{3};$$

в) эти пределы равны;
г) эти пределы равны значению данной функции в точке $x = 1$:

$$f(1) = \frac{2}{3}.$$

По аналогии с понятием предела слева (справа) можно ввести понятие непрерывности слева (справа).

♦ Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева* (*справа*), если она определена на полуинтервале $]x_0 - \delta, x_0]$ ($[x_0, x_0 + \delta[$) и $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ $(f(x_0 + 0) = f(x_0))$.

◊ Согласно определению, непрерывность является локальной (местной) характеристикой функции: функция может обладать этим свойством в одних точках и не обладать им в других. Например, как следует из примера 12.2, функция $y = 1/x$ непрерывна во всех точках за исключением $x_0 = 0$, в которой она не определена.

Те значения x, при которых функция $f(x)$ непрерывна, называются *точками непрерывности* этой функции.

♦ Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке внутри отрезка, а на его границах

$$\lim_{x\to a+0} = f(a)$$

(т.е. она непрерывна в точке $x = a$ справа) и

$$\lim_{x\to b-0} = f(b)$$

(т.е. она непрерывна в точке $x = b$ слева).

Как показано в примере 12.2, функции x^3 и $\sin x$ непрерывны на любом конечном отрезке действительной оси, функция $\ln x$ — на любом конечном отрезке положительной полуоси, а функция $y = 1/x$ — на любом конечном отрезке, не содержащем точку $x_0 = 0$.

12.2. Точки разрыва и их классификация

♦ Точка, в которой функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва.*

Функция $f(x)$ имеет разрыв при $x = x_0$, если она определена слева и справа от x_0, но в этой точке не соблюдено хотя бы одно из условий непрерывности.

Различают два основных вида разрывов.

1. Разрыв первого рода

♦ Точка разрыва, в которой существуют конечные пределы слева и справа:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x),$$

т.е. когда выполняется *второе условие непрерывности*, но не выполняется хотя бы одно из остальных (рис. 38), называется *точкой разрыва первого рода.*

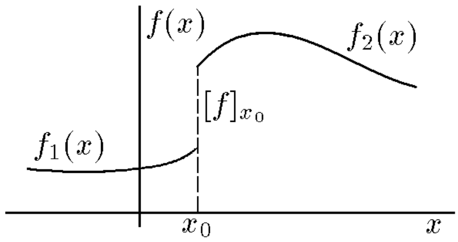


Рис. 38.

♦ Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0) = [f]_{x_0}$ называется *скачком функции.*

Если выполняется равенство $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, т.е. если предел слева равен пределу справа, но их значение не совпадает со значением $f(x_0)$ функции в точке x_0, то точка разрыва называется *устранимой*, так как, изменив значение $f(x_0)$ так, чтобы оно совпало с $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, мы устраним разрыв. В этом случае говорят, что функция *доопределена по непрерывности* в точке x_0.

Если три величины: $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ и $f(x_0)$, не совпадают, то, изменив значение $f(x_0)$ на значение $f(x_0 - 0)$ или же $f(x_0 + 0)$, получим функцию $f(x)$, непрерывную в точке x_0 слева или же справа, т.е. доопределённую по непрерывности в точке x_0 слева или справа.

◊ Иногда, характеризуя различие графиков непрерывной и разрывной функций, говорят, что график непрерывной функции можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги, тогда как для разрывной этого сделать нельзя.

Пример 12.4. Определить, имеет ли функция

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{x}, \quad x \neq 0,$$

разрыв в точке $x = 0$, если $f(0) = 1$.

Решение. Вычислим пределы слева

$$f(0 - 0) = \lim_{x\to 0-0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = 2$$

и справа

$$f(0 + 0) = \lim_{x\to 0+0} 2\frac{\sin 2x}{2x} = 2.$$

Значит, $f(0 - 0) = f(0 + 0) = 2$. Но $f(0) = 1 \neq 2$, и в точке $x = 0$ функция имеет разрыв.

Если же вместо $f(0) = 1$ положить $f(0) = 2$, то функция будет непрерывной при $x = 0$, так как $f(-0) = f(+0) = f(0) = 2$. Следовательно, разрыв устранен и функция доопределена по непрерывности условием $f(0) = 2$.

Пример 12.5. Показать, что функция (рис. 39)

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$$

в точке $x = 0$ имеет разрыв первого рода.

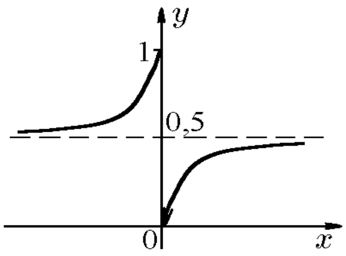


Рис. 39.

Решение. 1. Найдём предел слева:

$$f(-0) = \lim_{x\to -0} \frac{1}{1 + 2^{1/x}} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{x\to -0} 2^{1/x}} = 1,$$

так как

$$\lim_{x\to -0} 2^{1/x} = 0.$$

Найдём теперь предел справа:

$$f(+0) = \lim_{x\to +0} \frac{1}{1 + 2^{1/x}} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{x\to +0} 2^{1/x}} = 0,$$

так как

$$\lim_{x\to +0} 2^{1/x} = \infty.$$

Итак, существуют пределы слева и справа, но они не равны, т.е. точка $x = 0$ есть точка разрыва первого рода.

2. Вычислим скачок функции: $[f]_0 = f(0 - 0) - f(0 + 0) = 1 - 0 = 1$.

3. Заданную функцию можно доопределить следующим образом по непрерывности слева:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{1/x}}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

или справа:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + 2^{1/x}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Пример 12.6. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

в точке $x_0 = 0$.

Решение. Функция не определена в точке $x_0 = 0$, однако её предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

существует. Следовательно, точка $x_0 = 0$ является устранимой точкой разрыва, поскольку эту функцию можно доопределить по непрерывности следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Пример 12.7. Функция задана различными аналитическими выражениями:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leqslant 1; \\ x - 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Требуется: 1) сделать схематичный чертеж; 2) показать, что заданная функция имеет разрыв 1-го рода в точке $x = 1$; 3) найти скачок функции.

Решение. 1. Данная функция изображена на рис. 40.

2. Найдём предел функции слева от $x = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0}(x^2+1) = \lim_{x\to 1-0} x^2 + 1 = 2.$$

Найдём предел функции справа от $x = 1$:

$$f(1+0) = \lim_{x\to 1+0}(x-1) = \lim_{x\to 1+0} x - 1 = 0.$$

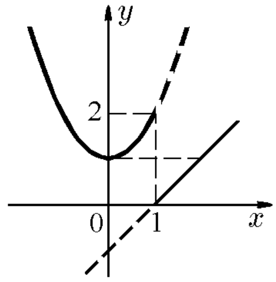


Рис. 40.

Итак, существуют пределы данной функции слева и справа, и они не равны. Следовательно, точка $x = 1$ есть точка разрыва 1-го рода, однако данная функция в этой точке является непрерывной слева.

3. Вычислим скачок функции: $[f]_1 = f(1-0) - f(1+0) = 2 - 0 = 2$.

2. Разрыв второго рода

♦ Точка разрыва функции $f(x)$, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется *точкой разрыва второго рода.*

В этой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен. По этой причине в точке разрыва 2-го рода функцию невозможно доопределить по непрерывности.

Все дробные функции, знаменатель которых при $x = c$ равен нулю, а числитель не равен нулю, имеют разрыв 2-го рода. Например, функция

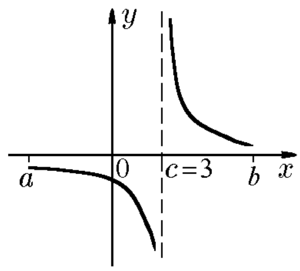


Рис. 41.

$$f(x) = \frac{2}{x-3}$$

имеет разрыв 2-го рода в точке $x = 3$, так как предел слева $f(3-0) = -\infty$, а предел справа $f(3+0) = +\infty$ (рис. 41).

Пример 12.8. Найти точки разрыва функции

$$y = \frac{3}{x^2-1}$$

и установить их характер.

Решение. Знаменатель дроби обращается в нуль, если $x^2 - 1 = 0$, т.е. в точках $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Следовательно, эти точки являются точками разрыва. Чтобы определить их характер, вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0}\frac{3}{x^2-1} = \lim_{x\to -1-0}\frac{3}{(x+1)(x-1)} = -\frac{3}{2}\lim_{x\to -1-0}\frac{1}{x+1} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{3}{x^2-1}=\lim_{x\to-1+0}\frac{3}{(x+1)(x-1)}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to-1+0}\frac{1}{x+1}=-\infty.$$

Следовательно, точка $x_1=-1$ является точкой разрыва 2-го рода.

Впрочем, чтобы установить этот факт, достаточно было вычислить первый из односторонних пределов. Воспользуемся этим замечанием для исследования характера разрыва в точке $x_2=1$:

$$\lim_{x\to1-0}\frac{3}{x^2-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{3}{(x+1)(x-1)}=\frac{3}{2}\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty.$$

Следовательно, точка $x_2=1$ также является точкой разрыва 2-го рода.

Пример 12.9. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\cos^2\frac{1}{x}$$

в точке $x_0=0$.

Решение. Воспользуемся определением непрерывности по Гейне. Пусть $x_n=1/\pi n$, $y_n=2/[\pi(2n+1)]$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=0,$$

однако

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\cos^2\pi n=1$$

и

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\cos^2\frac{\pi}{2}(2n+1)=0.$$

Несовпадение пределов означает, что для данной функции в точке $x_0=0$ предела не существует и эта точка является точкой разрыва 2-го рода.

Пример 12.10. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & \text{для рациональных } x\ (x\in\mathbb{Q});\\ 0 & \text{для иррациональных } x\ (x\in\mathbb{J}).\end{cases}$$

Решение. Пусть x_0 произвольно, но не равно $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, т.е. $\sin\pi x_0\neq0$. И пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность рациональных чисел, сходящаяся к x_0, а $\{y_n\}$ — последовательность иррациональных чисел, сходящаяся к x_0. Из равенств

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\pi x_n=\sin\pi x_0\neq0,$$
$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=0$$

вытекает, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ не существует, т.е. x_0 — точка разрыва 2-го рода.

Пусть теперь $x_0=n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, в этом случае $\sin\pi x_0=0$, причём

$$|f(x_0)-f(x)|<|\sin\pi x_0-\sin\pi x|=|\sin\pi x|=|\sin[\pi n+\pi(x-n)]|=$$
$$=|\cos\pi n\sin\pi(x-n)|=|\sin\pi(x-n)|=|\sin\pi(x-x_0)|<\varepsilon,$$

если $|x - x_0| < \varepsilon/\pi = \delta$. Это означает, что в точках x_0 существуют пределы

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

Следовательно, $x_0 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — точки непрерывности.

♦ Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a, b]$, за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

Так, например, функции из примеров 12.5–12.7 являются кусочно непрерывными на отрезке $[-3, 3]$, поскольку содержат в них только точки разрыва 1-го рода $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$, соответственно.

Теорема 12.1. *Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a, b]$ и монотонная, может иметь внутри этого отрезка точки разрыва только первого рода.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная внутренняя точка отрезка. Согласно следствию 9.14.1, функция $f(x)$ имеет в этой точке конечные пределы слева и справа $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, соответственно. Если эти пределы равны, то точка x_0 является точкой непрерывности. Если же они не равны, то их разность $f(x_0+0) - f(x_0 - 0)$ является ограниченной, что возможно только в точке разрыва первого рода.

Теорема 12.2. *Монотонная функция, определённая на отрезке $[a, b]$ и принимающая все значения между $f(a)$ и $f(b)$, является непрерывной.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка отрезка $[a, b]$. Допустим, что в этой точке функция $f(x)$ имеет разрыв. Согласно предыдущей теореме, этот разрыв может быть только разрывом первого рода, причём в случае возрастающей функции $f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$. Тогда $f(x) < f(x_0 - 0)$ для $x < x_0$, а $f(x) > f(x_0 + 0)$ для $x > x_0$. Это означает, что функция не может принимать значения между $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, но это противоречит условию теоремы, и, стало быть, функция $f(x)$ разрывов не имеет, т.е. непрерывна.

Доказательство для убывающей функции аналогично.

Пример 12.11. Доказать непрерывность функции $y = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Пусть x — произвольная внутренняя точка отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Поскольку функция $y = 2^x$ монотонно возрастает на этом отрезке и принимает все значения от 2^a до 2^b, то она непрерывна в точке x. В силу произвольности точки x и отрезка $[a, b]$ это справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$.

12.3. Локальные свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 12.3. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки, т.е.*

$$\exists \delta > 0 \exists M > 0 : \forall x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow |f(x)| \leqslant M.$$

Доказательство. Из непрерывности функции в точке x_0 следует существование конечного предела $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Следовательно, согласно теореме 9.6, для $f(x)$ существует некоторая окрестность точки x_0, в которой она ограничена.

Теорема 12.4. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, причём $f(x_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности этой точки знак функции совпадает со знаком числа $f(x_0)$, т.е.*

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow \big(\operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0)\big).$$

Доказательство. Из непрерывности функции в точке x_0 следует существование конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \neq 0$. Следовательно, согласно свойству сохранения знака предела (следствие 9.6.1), для $f(x)$ существует некоторая окрестность точки x_0, в которой значения этой функции имеют тот же знак, что и число $f(x_0)$.

Теорема 12.5. *Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$, то функции $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$ и $f_1(x)/f_2(x)$ (при $f_2(x_0) \neq 0$) есть функции, непрерывные в точке x_0.*

Доказательство. Из непрерывности функции в точке x_0 следует существование конечных пределов

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = f_1(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_2(x_0).$$

Следовательно, согласно теореме 9.9, существуют пределы

$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) \pm f_2(x_0) = [f_1(x) \pm f_2(x)]\big|_{x=x_0};$$
$$\lim_{x \to x_0} f_1(x)f_2(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0)f_2(x_0) = [f_1(x)f_2(x)]\big|_{x=x_0};$$
$$\lim_{x \to x_0} [f_1(x)/f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x)/ \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0)/f_2(x_0) = [f_1(x)/f_2(x)]\big|_{x=x_0},$$

из которых, согласно определению непрерывности функции в точке x_0, следует непрерывность функций $f_1(x) \pm f_2(x)$, $f_1(x)f_2(x)$ и $f_1(x)/f_2(x)$.

Теорема 12.6. *Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, причём $u_0 = \varphi(x_0)$, то в некоторой окрестности точки x_0 определена сложная функция $y = f(\varphi(x))$, непрерывная в точке x_0.*

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу непрерывности функции $f(u)$ в точке u_0 существует число $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ такое, что Δ-окрестность точки целиком принадлежит области определения функции, т.е. $S(u_0, \Delta) \subset D(f)$, и значение функции $f(u)$ лежит в ε-окрестности точки y_0, т.е.

$$\forall u \in S(u_0, \Delta) \Rightarrow f(u) \in S(y_0, \varepsilon), \quad y_0 = f(u_0). \tag{12.8}$$

В силу непрерывности $\varphi(x)$ в точке x_0 для найденного в (12.8) числа $\Delta > 0$ можно указать число $\delta = \delta(\Delta) > 0$ такое, что для любого x_0 значение $\varphi(x)$ лежит в Δ-окрестности точки u_0, т.е.

$$\forall x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow \varphi(x) \in S(u_0, \Delta). \tag{12.9}$$

Из условий (12.8) и (12.9) следует, что в окрестности $S(x_0, \delta)$ определена сложная функция $f(\varphi(x))$, причём (рис. 42)

$$\forall x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow f(u) = f(\varphi(x)) \in S(y_0, \varepsilon), \quad y_0 = f(\varepsilon(x_0)) = f(x_0),$$

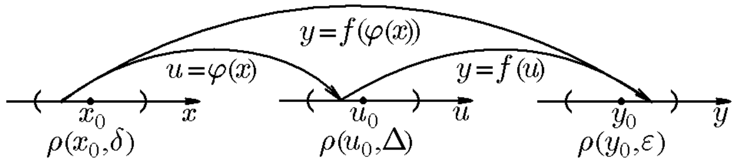


Рис. 42.

т.е.

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0 : \forall x \in S(x_0,\delta) \Rightarrow f(\varphi(x)) \in S(\varphi(x_0),\varepsilon).$$

Это означает, что в силу определения непрерывности функция $f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

◊ Зачастую смысл теоремы 12.6 выражают более простой формулировкой: сложная функция, составленная из непрерывных функций, является непрерывной.

Пользуясь доказанными теоремами и определением непрерывности функции, легко установить непрерывность многих элементарных функций.

◊ В вещественном анализе основными элементарными функциями принято считать полиномы, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Все остальные элементарные функции получаются из основных с помощью четырех арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) и композиций (построение сложных функций), применяемых конечное число раз.

Пример 12.12. Исследовать на непрерывность функции

$$y_1 = 2^x\sin x + x^3; \quad y_2 = \sin^3(2^x); \quad y_3 = 2^{\sin(x^2)}; \quad y_4 = 2^{x^3}\ln x.$$

Решение. Воспользуемся результатами примеров 12.2 и 12.11, из которых следует, что функции $\sin x$, x^2, 2^x, $\ln x$ непрерывны в своих областях определения. В силу теорем 12.5 и 12.6 любые функции, являющиеся результатом конечного числа арифметических действий и композиций этих функций, являются непрерывными в соответствующих областях. Так, функция y_1 как произведение и сумма непрерывна в $\mathbb{R}$. Функция y_2 как композиция $y_2 = u^3$, $u = \sin v$, $v = 2^x$ и функция y_3 как композиция $y_3 = 2^u$, $u = \sin v$, $v = x^3$ также непрерывны в $\mathbb{R}$. Функция y_4 как произведение $y_4 = y_5\ln x$, где y_5 — композиция $y_5 = 2^u$, $u = x^3$, непрерывна для $x > 0$, что обусловлено областью определения функции $\ln x$.

12.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Исходя из данного выше определения, рассмотрим свойства функций, непрерывных на отрезке. Для иллюстрации свойств таких функций рассмотрим график произвольной функции, непрерывной на отрезке $[a,b]$ (рис. 43). Из него со всей наглядностью вытекают следующие выводы.

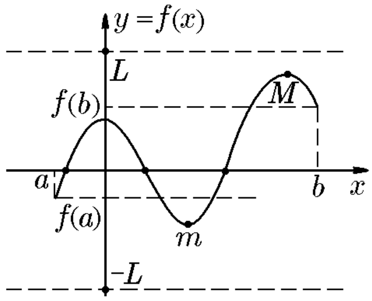


Рис. 43.

Во-первых, график функции целиком расположен в горизонтальной полосе $|y| < L$, что означает ограниченность функции на этом отрезке: $|f(x)| < L$ для всех $x \in [a,b]$.

Во-вторых, график функции имеет наибольшее значение в точке M и наименьшее в точке m. Это означает, что функция $f(x)$, изменяясь на отрезке $[a,b]$, достигает своего наибольшего и наименьшего значений и принимает все промежуточные между ними значения.

И, наконец, если график функции располагается по обе стороны оси Ox, то он обязательно её пересечёт хотя бы один раз. Это означает, что для непрерывной на отрезке $[a,b]$ функции найдётся хотя бы одна точка, в которой функция $f(x)$ обращается в нуль.

Несмотря на геометрическую очевидность этих утверждений, мы приведём их аналитические доказательства, которые также позволят доказать некоторые свойства непрерывных на отрезке функций, не имеющие столь наглядной геометрической интерпретации.

Теорема 12.7 (1-ая теорема Вейерштрасса). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке, т.е.*

$$\exists L > 0 : \forall x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)| < L. \tag{12.10}$$

Доказательство проведём от противного: допустим, что функция $f(x)$ на $[a,b]$ оказывается неограниченной, т.е.

$$\forall L > 0 \exists x_L \in [a,b] : |f(x_L)| > L. \tag{12.11}$$

Положив в (12.11) $L = 1, 2, \ldots, n, \ldots$, получим, что

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in [a,b] : |f(x_n)| > n$$

или

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty. \tag{12.12}$$

Поскольку последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена:

$$a \leqslant x_n \leqslant b, \tag{12.13}$$

то из неё можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \bar{x},$$

причём с учётом (12.13)

$$a \leqslant \bar{x} \leqslant b,$$

но тогда в силу непрерывности функции $f(x)$ должно быть

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}\right) = f(\bar{x}),$$

а это невозможно, так как из (12.12) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = +\infty.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

$\Diamond$ Первая теорема Вейерштрасса не применима для промежутков, не являющихся замкнутыми, т.е. интервалов $]a,b[$ и полуинтервалов $]a,b]$, $[a,b[$. Так, функция $f(x) = x^2$ непрерывна на $\mathbb{R}$, но не ограничена на $\mathbb{R}$, а функция $f(x) = 1/x^2$ непрерывна на интервале $]0,1[$, но не ограничена на этом интервале.

Теорема 12.8 (2-ая теорема Вейерштрасса). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает своей верхней и нижней грани, т.е.*

$$\exists \bar{x} \in [a, b] : f(\bar{x}) = \sup_{x\in[a,b]} f(x); \quad \exists \underline{x} \in [a, b] : f(\underline{x}) = \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

Доказательство. Так как непрерывная на отрезке функция $f(x)$ в силу первой теоремы Вейерштрасса ограничена, т.е. множество значений, принимаемых функцией $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, ограничено, то для этого множества существуют $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Положим

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x) \tag{12.14}$$

и вопреки тому, что нужно доказать, предположим, что для всех x из $[a, b]$ $f(x) < M$, т.е. верхняя грань не достигается. В таком случае можно рассмотреть вспомогательную функцию

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

Так как, по предположению, знаменатель здесь в нуль не обращается, то эта функция будет непрерывна на отрезке $[a, b]$, а, следовательно, по первой теореме Вейерштрасса — ограниченной: $F(x) \leqslant p$ $(p > 0)$. Но отсюда следует, что

$$f(x) \leqslant M - \frac{1}{p},$$

т.е. число $M - 1/p$, меньшее чем M, оказывается верхней гранью для множества значений $f(x)$ на $[a, b]$, чего не может быть, поскольку M, согласно (12.14), есть точная верхняя грань этого множества. Полученное противоречие доказывает первое утверждение теоремы: на отрезке $[a, b]$ найдётся такое значение $\bar{x}$, что $f(\bar{x}) = M$ будет наибольшим из всех значений $f(x)$.

Аналогично доказывается утверждение относительно наименьшего значения $f(x)$.

$\Diamond$ Вторая теорема Вейерштрасса, как и первая, неверна для интервалов: функция, непрерывная на интервале, может не достигать своих точных граней. Например, функция $f(x) = x^2$, непрерывная на интервале $]0, 1[$, не достигает своей точной нижней грани, равной нулю, и точной верхней грани, равной единице. Другими словами, функция $f(x) = x^2$ на интервале $]0, 1[$ не имеет наибольшего и наименьшего значений.

Теорема 12.9 (теорема Коши о нулях непрерывной функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, т.е. $f(a)f(b) < 0$, то на отрезке $[a, b]$ имеется хотя бы один нуль функции, т.е.*

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим все точки $x = \tilde{x}$ отрезка $[a, b]$, для которых $f(\tilde{x}) < 0$. Предположим, что к их числу относится, например, точка a, но тогда в силу теоремы 12.4 к ним относятся и близлежащие к ней точки. Множество $\{\tilde{x}\}$ ограничено сверху числом b. Положим теперь $x_0 = \sup\{\tilde{x}\}$ и покажем, что $f(x_0) = 0$.

Действительно, если $f(x) < 0$, тогда $x_0 < b$, поскольку $f(b) > 0$. Кроме того, согласно теореме 12.4, правее точки x_0 в окрестности $[x_0, x_0 + \delta[$ нашлись бы значения $\tilde{x}$, для которых $f(\tilde{x}) < 0$, а это невозможно, так как противоречит определению x_0 как верхней грани множества $\{\tilde{x}\}$.

Если же $f(x) > 0$, то на основании той же теоремы 12.4, но уже левее точки x_0 в окрестности $]x_0 - \delta, x_0]$ для всех x должно быть $f(x) > 0$. Это означает отсутствие в ней точек $\tilde{x}$, а это также невозможно, так как x_0, по определению, есть точная верхняя грань множества $\{\tilde{x}\}$. Следовательно, остается одно: $f(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Обратим внимание, что требование непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существенно. Функция, имеющая разрыв хотя бы в одной точке, может принимать как отрицательные, так и положительные значения, и не обращаясь в нуль. Так будет, например, с функцией $f(x) = [x] - 1/2$, $x \in [0, 1]$, которая нигде не принимает значение нуль, хотя $f(0) = -1/2$, а $f(1) = 1/2$; скачок функции при $x = 1$ равен $f(1) - f(0) = 1$.

Теорема 12.10 (теорема Коши о промежуточных значениях). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) \neq f(b)$, то для каждого значения μ, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, найдётся хотя бы одна точка $x_0 \in [a, b]$, в которой $f(x_0) = \mu$.*

Доказательство. Будем считать, например, что $f(a) < f(b)$, тогда $f(a) \leqslant \mu \leqslant f(b)$. Если $f(a) = \mu$, то $x_0 = a$, если же $f(b) = \mu$, то $x_0 = b$. Если $f(a) < \mu < f(b)$, введём вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \mu$. Эта функция непрерывна на $[a, b]$ и на концах имеет значения разных знаков:

$$F(a) = f(a) - \mu < 0, \qquad F(b) = f(b) - \mu > 0.$$

Тогда, согласно теореме 12.9, на отрезке $[a, b]$ найдётся точка x_0, в которой $F(x_0) = f(x_0) - \mu = 0$, т.е. $f(x_0) = \mu$, что и требовалось доказать.

Следствие 12.10.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, то множество значений, которые принимает $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, есть отрезок $[m, M]$.

Другими словами, значения $f(x)$ сплошь заполняют отрезок $[m, M]$.

Действительно, согласно 2-ой теореме Вейерштрасса, для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существуют точки x_m и x_M, в которых она принимает наименьшее $m = f(x_m)$ и наибольшее $M = f(x_M)$ значения. Но тогда, согласно теореме 12.10, на отрезке $[x_m, x_M]$ она принимает все значения от m до M включительно, т.е.

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \qquad x \in [x_m, x_M] \subset [a, b].$$

Отрезок $[m, M]$ вырождается в точку, если $f(x) = \mathrm{const}$ на отрезке $[a, b]$.

$\Diamond$ Напомним, что для монотонных функций сплошное заполнение значениями $f(x)$ на отрезке $[f(a), f(b)]$ влечёт за собой непрерывность $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (теорема 12.2). Условие монотонности здесь очень важно. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не будучи монотонной и заполняя все значения от -1 до 1 (см. рис. 32), не является непрерывной на любом отрезке, содержащем точку разрыва $x = 0$. Это замечание существенно для следующей теоремы.

Теорема 12.11 (о непрерывности обратной функции). *Если функция $f(x)$ непрерывна и строго возрастает (убывает) на отрезке $[a,b]$, то на отрезке $[f(a),f(b)]$ ($[f(b),f(a)]$) определена функция $x=\varphi(y)$, обратная к функции $y=f(x)$, непрерывная и строго возрастающая (убывающая).*

Доказательство геометрически очевидно из рис. 44, а теоремы о свойствах непрерывных функций делают и аналитическое доказательство достаточно простым.

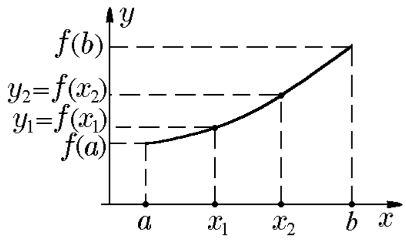


Рис. 44.

Действительно, согласно теореме 12.10, непрерывная и монотонная на $[a,b]$ функция $y=f(x)$ сплошь заполняет отрезок $[f(a),f(b)]$. Это значит, что для каждого значения y_0 из этого отрезка найдётся хоть одно значение x_0 из $[a,b]$ такое, что $y_0=f(x_0)$. Но вследствие строгого возрастания этой функции такое значение x_0 будет только одно, поскольку если

$$x_1 < x_0, \quad \text{то } y_1 < y_0, \tag{12.15}$$

а если

$$x_1 > x_0, \quad \text{то } y_1 > y_0. \tag{12.16}$$

Сопоставив именно это значение x_0 значению y_0, мы получим однозначную функцию

$$x=\varphi(y), \tag{12.17}$$

обратную $y=f(x)$.

Строгое возрастание функции $x=\varphi(y)$ очевидным образом вытекает из неравенств (12.15), (12.16). Наконец, непрерывность $x=\varphi(y)$ следует из теоремы 12.2, справедливой для монотонной функции $x=\varphi(y)$, занимающей сплошь весь отрезок значений $[a,b]$ на оси Ox.

◊ Теорема 12.11 остается справедливой, если её условия выполняются не на отрезке, а на интервале (конечном $]a,b[$ или бесконечном $]-\infty,\infty[$) или полуинтервале ($]-\infty,b]$ или $[a,+\infty[$). Значения $f(a)$, $f(b)$ в этом случае определяются как

$$f(a)=\lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{или} \quad f(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

и

$$f(b)=\lim_{x\to b-0} f(x) \quad \text{или} \quad f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty} f(x),$$

существование этих пределов следует из непрерывности $f(x)$. Здесь мы воспользуемся геометрической очевидностью этого замечания, не вдаваясь в его аналитическое обоснование.

Пример 12.13. Для функции $y=x-\dfrac{1}{2}\sin x$ доказать однозначность обратной функции.

Решение. Доказательство начнем с исследования непрерывности функции на интервале $]-\infty,+\infty[$. Пусть $x_2>x_1$ и y_2,y_1 — соответствующие значения $y(x)$. Тогда

$$y_2-y_1=\Big[x_2-\frac{1}{2}\sin x_2\Big]-\Big[x_1-\frac{1}{2}\sin x_1\Big]=(x_2-x_1)-\frac{1}{2}(\sin x_2-\sin x_1),$$

а поскольку $|\sin x_2 - \sin x_1| \leqslant x_2 - x_1$, то

$$y_2 - y_1 \leqslant (x_2 - x_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1).$$

Следовательно, при $x_2 > x_1$

$$y_2 > y_1.$$

Это означает, что непрерывная исходная функция является строго возрастающей на $]-\infty, +\infty[$. С учётом сделанного выше замечания убеждаемся в однозначности обратной функции $x(y)$.

12.5. Непрерывность и вычисление пределов

Для ряда элементарных функций в примерах 12.2, 12.3 и 12.11, исходя из определения предела (по Коши или Гейне), мы вычислили конкретные значения их пределов в различных точках. Например, мы показали, что

$$\lim_{x\to x_0} x^n = x_0^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12.18}$$

Введение понятия непрерывности функции в точке и, в частности её формулировки, в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\Big(\lim_{x\to x_0} x\Big), \tag{12.19}$$

позволяет равенство (12.18) рассматривать как доказательство непрерывности функции $y = x^n$ в точке x_0, поскольку

$$\lim_{x\to x_0} x^n = \Big(\lim_{x\to x_0} x\Big)^n. \tag{12.20}$$

С другой стороны, записав определение непрерывности функции $y = f(x)$ в форме

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0, \tag{12.21}$$

можно установить непрерывность функции $y = x^n$ в точке x_0 с помощью асимптотических оценок. Действительно, для $\Delta x \to 0$ имеем

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n = n x_0^{n-1}\Delta x + o(\Delta x), \tag{12.22}$$

откуда

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} [n x_0^{n-1}\Delta x + o(\Delta x)] = 0. \tag{12.23}$$

Это предельное равенство в силу (12.21) означает непрерывность функции $y = x^n$ в точке x_0. Но теперь, установив непрерывность функции $y = x^n$ посредством формул (12.20) или (12.23), мы другим способом пришли к равенству (12.18), полученному ранее на языке ε-δ.

В связи с этим следует отметить, что зачастую непрерывность функции можно также установить, исходя из некоторых её свойств. Так, в силу строгого возрастания функции $y = x^n$ из теоремы 12.2 следует её непрерывность для всех $x \geqslant 0$, а из теоремы 12.11 следует непрерывность и возрастание обратной ей функции $y = \sqrt[n]{x}$, а следовательно, и справедливость формулы

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad x_0 \geqslant 0,$$

которую мы получили ранее, используя свойства пределов (см. следствие 9.9.3).

Принимая во внимание все вышесказанное, мы ещё раз обратимся к основным элементарным функциям, приводя необходимые дополнения к их свойствам, известным из курса элементарной алгебры.

I. Полиномы и рациональные функции

Полином степени n, т.е. функция

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_k = \mathrm{const}, \quad a_n \neq 0,$$

непрерывен на $\mathbb{R}$, так как

$$\lim_{x\to x_0} P_n(x) = P_n(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

или

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta P_n(x) = 0.$$

Это утверждение является следствием непрерывности функции $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, вытекающей из (12.20) и (12.21), а следовательно, и их суммы.

Рациональная (или дробно-рациональная) функция, т.е. функция вида

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — полиномы степени n и m, соответственно, непрерывны во всех точках, которые не являются нулями полинома $Q_m(x)$. Действительно, если $Q_m(x) \neq 0$, то из непрерывности полиномов $P_n(x)$, $Q_m(x)$ следует непрерывность их частного в точке x_0.

II. Тригонометрические функции

Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ непрерывны на $\mathbb{R}$.

Это утверждение вытекает из равенств

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0; \quad \lim_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0,$$

полученных для любых x_0 в примере 9.11.

Кроме того, для них справедливы асимптотические оценки (см. пример 12.2)

$$\Delta(\sin x) = (\cos x_0)\Delta x + o(\Delta x); \quad \Delta(\cos x) = (-\sin x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x = x - x_0 \to 0,$$

из которых следует

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta(\sin x) = \lim_{\Delta x\to 0} \Delta(\cos x) = 0.$$

Из непрерывности функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ следует, что функция $\mathrm{tg}\, x = \sin x/\cos x$ непрерывна, если $\cos x \neq 0$, т.е. $x \neq \pi/2 + \pi n$; $\mathrm{ctg}\, x = \cos x/\sin x$ непрерывна, если $\sin x \neq 0$, т.е. $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

III. Обратные тригонометрические функции

1. Исследуем на непрерывность функцию $y = \arcsin x$. Напомним, что функция $\arcsin x$ является обратной не к необратимой периодической функции $\sin x \in \mathbb{R}$; функция $\arcsin x$ является обратной по отношению к функции $\sin x$, заданной на

отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$. Поскольку функция $y = \sin x$ на этом отрезке монотонно возрастает и занимает весь отрезок $[-1, 1]$, то, согласно теореме 12.11, обратная ей функция $y = \arcsin x$ непрерывна и монотонно возрастает от $-\pi/2$ до $\pi/2$ на отрезке $[-1, 1]$. Графики обеих функций для наглядности изображены на одном рис. 45 (их графики, как и для любой пары взаимно обратных функций, симметричны относительно прямой $y = x$).

Кроме того, непрерывность функции $y = \arcsin x$ вытекает из равенства

$$\lim_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0,$$

полученного в примере 11.12 для любых $x_0 \in [-1, 1]$.

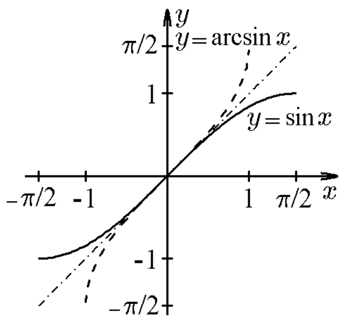


Рис. 45.

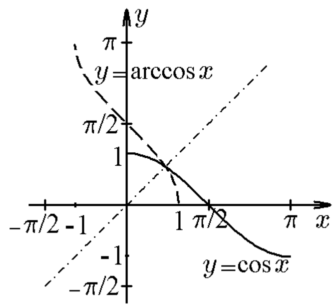


Рис. 46.

2. Функция $y = \arccos x$ является обратной для функции $y = \cos x$, заданной на отрезке $[0, \pi]$. Поскольку функция $y = \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$ монотонно убывает, принимая все значения от 1 до -1, то, согласно теореме 12.11, обратная ей функция $y = \arccos x$ является непрерывной монотонно убывающей от π до 0 функцией на отрезке $[-1, 1]$. Графики обеих функций для наглядности изображены на одном рис. 46.

Кроме того, непрерывность функции $y = \arccos x$ вытекает из равенства

$$\lim_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0,$$

полученного в примере 11.12 для всех $x_0 \in [0, \pi]$, а также из соотношения

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 12.14. Построить график функции $y = \arcsin(\sin x)$.

Решение. Поскольку функции $\sin x$ и $\arcsin x$ ($\cos x$ и $\arccos x$) — взаимно обратные, то в силу свойств таких функций имеем

$$\begin{aligned} &\sin(\arcsin x) = x, \quad x \in [-1, 1]; \\ &\arcsin(\sin x) = x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \end{aligned} \tag{12.24}$$

а также

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \quad x \in [-1, 1], \tag{12.25}$$

т.е. функция $y = \arcsin x$ нечётная. Вместе с этим из равенства

$$\arcsin(\sin(x + 2\pi n)) = \arcsin(\sin x), \quad n \in \mathbb{Z},$$

следует, что функция $y = \arcsin(\sin x)$ определена на $\mathbb{R}$ и является периодической с периодом $T = 2\pi$. Поэтому достаточно построить её график на отрезке $[-\pi/2, 3\pi/2]$. Если $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, то в силу (12.24)

$$y = \arcsin(\sin x) = x.$$

Если же $\pi/2 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, то $-\pi/2 \leqslant x - \pi \leqslant \pi/2$, и согласно (12.24),

$$y = \arcsin(\sin(x - \pi)) = x - \pi.$$

Таким образом,

$$y = \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi/2, \pi/2]; \\ \pi - x, & x \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases} \tag{12.26}$$

График функции (12.26) изображен на рис. 47.

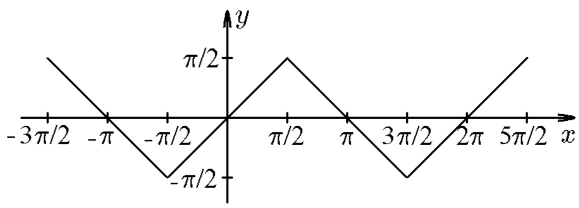


Рис. 47.

3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, является обратной к функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. Функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна и строго возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, следовательно, обратная ей функция $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in]-\infty, +\infty[$, непрерывна и строго возрастает от $-\pi/2$ до $\pi/2$ (рис 48).

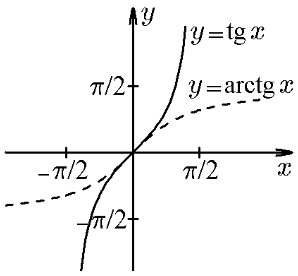


Рис. 48.

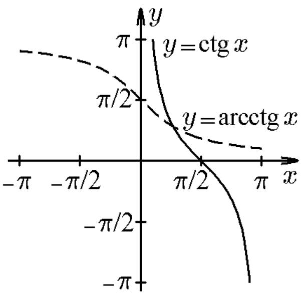


Рис. 49.

4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, является обратной к функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in [0, \pi]$. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывна и строго убывает от $+\infty$ до $-\infty$, следовательно, обратная функция $y = \operatorname{arcctg} x$, $x \in]-\infty, +\infty[$, непрерывна и строго убывает от π до нуля (рис 49).

Кроме того, непрерывность этих функций вытекает из результатов примера 11.12:

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad x_0 \in [-\pi/2, \pi/2];$$

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0, \quad x_0 \in [0, \pi].$$

IV. Показательная функция

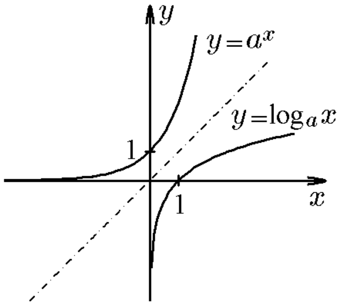


Рис. 50.

Показательная функция $y = a^x$ при $a > 1$ непрерывна и монотонно возрастает на $\mathbb{R}$ (рис. 50). Это вытекает из следствия 9.13.1:

$$\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$$

и пределов

$$\lim_{x\to -\infty} a^x = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} a^x = +\infty.$$

Этот же результат можно получить из асимптотической оценки при $\Delta x \to 0$:

$$\Delta y = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) = a^{x_0}\ln a\Delta x + o(\Delta x),$$

поскольку

$$\lim_{x\to x_0}[a^{x_0}\ln a\Delta x + o(\Delta x)] = 0.$$

Очевидно, что при $a < 1$ показательная функция $y = a^x$ непрерывна и монотонно убывает на $\mathbb{R}$.

V. Гиперболические функции

Их непрерывность, согласно теореме 9.9, непосредственно вытекает из непрерывности показательной функции, поскольку все они рационально выражаются через e^x (рис. 51):

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$$
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

Из определения гиперболических функций следует, что ряд их свойств «аналогичен» свойствам тригонометрических, например

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

и т.д.

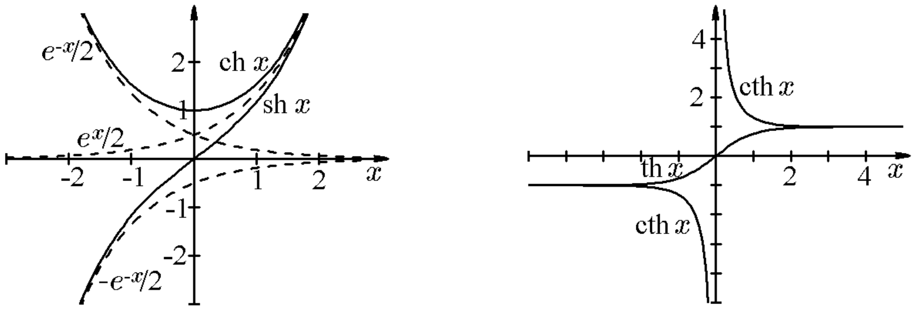


Рис. 51.

◊ Само название «гиперболические» объясняется тем, что уравнения $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$ можно рассматривать как параметрические уравнения (см. [11]) гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, тогда как уравнения $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ которые задают эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

VI. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 1$, непрерывна на промежутке $]0, \infty[$ и монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 50).

Это утверждение очевидно, поскольку $\log_a x$ является обратной к непрерывной и монотонно возрастающей показательной функции $y = a^x$, $a > 1$ (рис. 50). Кроме того, этот же результат вытекает из следствия 9.13.1:

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0,$$

или асимптотической оценки при $\Delta x = x - x_0 \to 0$:

$$\Delta y = \log_a(x_0 + \Delta x) - \log_a x_0 = \log_a\Big(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\Big) = \frac{1}{x_0 \ln a}\Delta x + o(\Delta x),$$

из которой следует

$$\lim_{x\to x_0} \Delta y = \lim_{x\to x_0}\Big[\frac{1}{x_0 \ln a}\Delta x + o(\Delta x)\Big] = 0.$$

VII. Обратные гиперболические функции

Поскольку гиперболические функции $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{th} x$ (рис. 51) являются строго возрастающими и непрерывными на $\mathbb{R}$, то для них существуют обратные функции $y = \operatorname{arsh} x$, $y = \operatorname{arth} x$, которые также являются непрерывными и возрастающими. Функция $y = \operatorname{ch} x$, непрерывная на $\mathbb{R}$, на интервале $\mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$ убывает, а на интервале $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ возрастает. В силу этого на промежутках $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$ для неё существуют обратные функции $y = \operatorname{arch}_+ x$ и $y = \operatorname{arch}_- x$ (рис. 52). Явный вид этих функций выражается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),\ x \in \mathbb{R}; \qquad &&\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1},\ x \in]-1, 1[;\\ &\operatorname{arch}_+ x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}),\ x > 1; \qquad &&\operatorname{arch}_- x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}),\ x > 1. \end{aligned} \tag{12.27}$$

Справедливость этих формул покажем на примере функции $\operatorname{sh} x$. Действительно, согласно определению, имеем

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

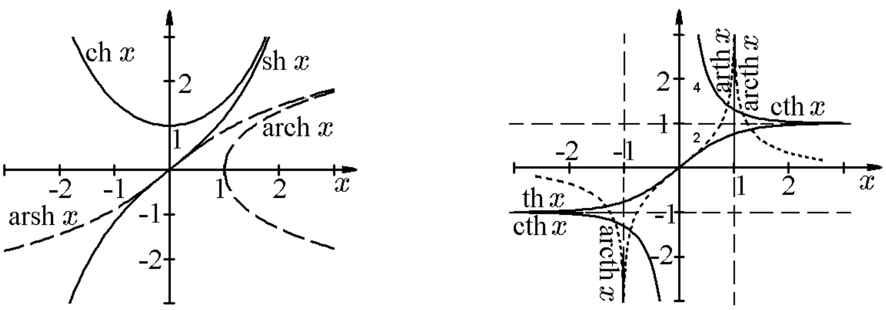


Рис. 52.

Обозначив $z = e^x > 0$, это равенство запишем в виде

$$2y = z - \frac{1}{z}.$$

Тогда относительно z получим квадратное уравнение

$$z^2 - 2yz - 1 = 0.$$

Из двух корней этого уравнения

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

в силу условия $z > 0$ имеем

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1},$$

откуда

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}).$$

Заменив x на y, а y на x, для функции, обратной гиперболическому синусу, получим

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Из явного вида формул (12.27) вытекает непрерывность и монотонность обратных функций в областях их определения.

$\lozenge$ В названиях обратных тригонометрических и гиперболических функций используются приставки arc и ar ($\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arsh} x$). В первом случае обозначение происходит от латинского *arc* — дуга и пояснений не требует, во втором — от латинского *area* — площадь, поскольку параметр t в параметрическом уравнении гиперболы $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ равен удвоенной площади гиперболического сектора (см. [11]).

VIII. Степенная функция с произвольным вещественным показателем

Выше мы рассмотрели степенную функцию $y = x^\mu$, когда $\mu \in \mathbb{Q}$. Степенная функция с произвольным вещественным показателем μ при $x > 0$ выражается следующим образом:

$$x^\mu = e^{\mu \ln x}. \tag{12.28}$$

Будучи композицией показательной функции e^v и логарифмической $\ln u$, она является непрерывной при $x > 0$. Причём при $\mu > 0$ функция x^μ строго возрастает, а при $\mu < 0$ строго убывает. Из (12.28) следует

$$\ln x^\mu = \mu \ln x, \quad \mu \in \mathbb{R},\ x > 0.$$

$\lozenge$ Отметим, что основные элементарные функции оказываются непрерывными в своих естественных областях определения. Это же относится и к элементарным функциям, полученным из основных с помощью конечного числа арифметических действий и композиций.

Непрерывность функций значительно упрощает вычисление целого ряда пределов.

Пример 12.15. Вычислить пределы функций из примеров 9.2, 9.3, 9.4, 9.8, 9.9

Решение. Поскольку все значения аргумента, при которых следует вычислить пределы, принадлежат областям определения этих функций, то соответствующие пределы равны значениям функций в этих точках.

Пример 12.16. Показать справедливость представления показательной функции

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Решение. Исходное выражение под знаком предела при $x \neq 0$ можно представить в виде

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right]^x.$$

Так как при $n \to \infty$ $x/n \to 0$, то выражение в квадратных скобках стремится к e, но тогда в силу непрерывности степенной функции (при фиксированном x) все выражение имеет своим пределом e^x.

Пример 12.17. Вычислить предел

$$A = \lim_{x\to 0} x^{4/(4+\ln x)}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида (0^0). Логарифмическая функция непрерывна, поэтому неопределённость можно привести к виду $(0\cdot\infty)$. Действительно,

$$\ln A = \ln[\lim_{x\to 0} x^{4/(4+\ln x)}] = \lim_{x\to 0}\ln[x^{4/(4+\ln x)}] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{4}{4+\ln x}\ln x\right] = (0\cdot\infty) = \\ = 4\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{4+\ln x} = 4\cdot 1 = 4,$$

откуда $A = e^4$.

Пример 12.18. Вычислить пределы из примера 10.13.

Решение. Функция $y = \ln x$ непрерывна, поэтому предел

1) $A_1 = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x,$

можно записать в виде

$$\ln A_1 = \lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to\infty}\left\{x\ln\left[\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)+1+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\right\} = \\ = \lim_{x\to\infty}\frac{1+1/x}{1/x} = 1,$$

т.е. $A_1 = e$.

Аналогично вместо предела

2) $A_2 = \lim\limits_{x\to 1}(4-2x-x^2)^{\frac{1}{(x-1)^3}}$

вычислим предел

$$\ln A_2 = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(4-2x-x^2)}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln[1-(x+3)(x-1)]}{(x-1)^3} = -\lim_{x\to 1} \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)^3} = \\ = -4\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)^3} = -\infty,$$

т.е. $A_2 = e^{-\infty} = 0$. Здесь мы воспользовались соотношением $\ln(1+z) \sim z$, $z \to 0$.

Вместо предела

3) $A_3 = \lim\limits_{x\to 2} \left(1 + \sin\dfrac{\pi x}{2}\right)^{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$

удобно вычислить предел

$$\ln A_3 = \lim_{x\to 2} \left[\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2} \ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)\right] = -\lim_{x\to 2} \frac{\ln[1+\sin(\pi x/2)]}{\sin(\pi x/2)} = -1,$$

т.е. $A_3 = e^{-1}$.

ГЛАВА 4

Дифференциальное исчисление

13. Производная и дифференциал функции одной переменной

13.1. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной, её геометрическое и механическое толкования

Известно, что методы элементарной математики не применимы к решению ряда задач. Так, можно вычислить среднюю скорость неравномерного движения в заданный промежуток времени, но невозможно методами элементарной математики найти мгновенную скорость в произвольный момент времени.

Изучение производной, или скорости изменения функции (правила дифференцирования, свойства производной), и составляет предмет дифференциального исчисления.

Рассмотрим задачи из физики и геометрии, приводящие к понятию производной, а затем дадим определение производной и выясним её механический и геометрический смысл.

Мгновенная скорость неравномерного прямолинейного движения

Пусть материальная точка движется по прямой из начального положения O (рис. 53) и за время t проходит путь S. Очевидно, что пройденный путь S есть функция времени:

$$S = f(t). \tag{13.1}$$

К моменту времени $t + \Delta t$ материальная точка пройдёт путь

$$S + \Delta S = f(t + \Delta t), \tag{13.2}$$

а за время Δt:

$$\Delta S = f(t + \Delta t) - f(t). \tag{13.3}$$

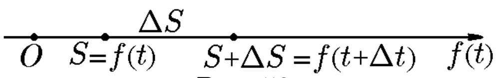


Рис. 53.

При равномерном движении точки её скорость за промежуток времени Δt постоянна и равна средней скорости

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

Если же точка движется неравномерно, то средняя скорость не совпадает со скоростью в данный момент времени t.

С уменьшением промежутка времени Δt отклонение $v_{\text{ср}} = \Delta S/\Delta t$ от скорости в момент t уменьшается. Истинная скорость движения точки в момент t определяется как предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = v(t).$$

Этот предел, если он существует, называется *скоростью движения в данный момент времени* или *мгновенной скоростью.*

Пример 13.1. Найти скорость равномерно ускоренного движения в произвольный момент времени t и в момент $t = 3$ с, если зависимость пути от времени выражается формулой $S = gt^2/2$. Здесь g — ускорение свободного падения.

Решение. В момент времени t пройденный путь $S = gt^2/2$, а в момент времени $t + \Delta t$ он равен $S + \Delta S = g(t + \Delta t)^2/2$. Приращение пути за промежуток времени Δt

$$\Delta S = \frac{g}{2}(t + \Delta t)^2 - \frac{gt^2}{2} = gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2.$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

Тогда по определению будем иметь

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \Big(gt + \frac{1}{2}g\Delta t\Big) = gt.$$

В момент времени $t = 3$ с имеем $v(3) = gt\big|_{t=3} = 3g \approx 3 \cdot 9{,}8 = 29{,}4$ м/с.

Пример 13.2. При нагревании тела его температура T изменяется в зависимости от времени нагрева t по закону $T = \ln(1 + t)$. С какой скоростью нагревается тело в момент $t_1 = 5$ с.

Решение. В момент времени t_1 температура тела $T_1 = \ln(1 + t_1)$. В момент $t_2 = t_1 + \Delta t$ температура тела

$$T_2 = \ln(1 + t_2) = \ln(1 + t_1 + \Delta t).$$

Вычитая T_1 из T_2, получим приращение температуры за время Δt:

$$\Delta T = \ln(1 + t_1 + \Delta t) - \ln(1 + t_1) = \ln\Big(\frac{1 + t_1 + \Delta t}{1 + t_1}\Big) = \ln\Big(1 + \frac{\Delta t}{1 + t_1}\Big).$$

Составим отношение

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\ln[1 + \Delta t/(1 + t_1)]}{\Delta t}.$$

Это средняя скорость нагревания тела за время от t_1 до $t_2 = t_1 + \Delta t$.

Чтобы определить скорость нагревания тела в момент t_1, найдём предел средней скорости нагревания при $\Delta t \to 0$:

$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ln[1 + \Delta t/(1 + t_1)]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta t(1 + t_1)} = \frac{1}{1 + t_1},$$

т.е.

$$v(t_1)\big|_{t_1=5} = \frac{1}{1 + 5} = \frac{1}{6} \text{ град/с}.$$

Касательная к кривой в данной точке. Угловой коэффициент касательной

♦ *Касательной* к кривой в точке M этой кривой называется предельное положение секущей, проходящей через точку M и отличную от неё точку M_1 кривой, когда точка M_1 стремится по кривой к точке M.

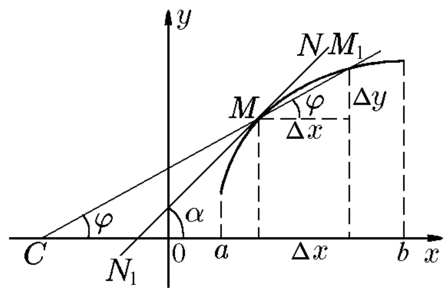


Рис. 54.

Пусть заданы кривая $y = f(x)$ $x \in [a, b]$ и фиксированная точка $M(x, y)$ этой кривой (рис. 54). Проведём секущую через точки M и произвольную точку M_1. Если точка M_1 будет неограниченно приближаться по кривой к точке M, то положение секущей будет изменяться, и, когда точка M_1 совпадёт с точкой M, она займёт положение касательной N_1MN к точке M. Итак, при некотором значении x функция имеет значение $y = f(x)$. Зададим x некоторое приращение Δx. Тогда значению аргумента $x + \Delta x$ будет соответствовать значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Секущая M_1MC образует с осью Ox угол φ такой, что $\Delta y/\Delta x = \operatorname{tg}\varphi$. Если $\Delta x \to 0$, то точка M_1 будет стремиться по кривой к точке M, секущая M_1MC – к касательной N_1MN, а угол φ – к углу α, который образует касательная к кривой в данной точке M с положительным направлением оси Ox. Угловой коэффициент касательной определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{13.4}$$

Можно написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_1(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = \operatorname{tg}\alpha(x - x_1), \qquad y - y_1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}(x - x_1). \tag{13.5}$$

Производная функции одной переменной

Теперь дадим определение производной данной функции $y = f(x)$, заданной на интервале $]a, b[$.

♦ *Производной данной функции* $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения Δy функции к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x), \tag{13.6}$$

если он существует и конечен.

Из определения следует правило нахождения производной функции: чтобы найти производную функции $y = f(x)$, нужно

1) найти приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ и составить отношение приращения Δy функции к приращению Δx аргумента;
2) найти предел этого отношения при $\Delta x \to 0$.

Производную данной функции $y = f(x)$ обозначают символами $f'(x)$ или y' (по Лагранжу), или df/dx, dy/dx (по Лейбницу).

Пример 13.3. Найти производную от функции $y = x^3$ в произвольной точке x и в точке $x = 2$. Написать уравнения касательной и нормали в этой точке.

Решение. 1. Найдём приращение Δy функции $y = x^3$:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

и составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2.$$

2. Найдём предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}[3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2] = 3x^2$$

или $y' = (x^3)' = 3x^2$ — производная от функции $y = x^3$.

3. Конкретное значение производной при $x = a$ обозначается так: $f'(a)$ или $y'\big|_{x=a}$. Для нашего случая

$$y'\big|_{x=2} = y'(2) = 3x^2\Big|_{x=2} = 3\cdot 4 = 12.$$

С геометрической точки зрения $y'|_{x=2}$ равна угловому коэффициенту касательной к кривой $y = x^3$ в точке, где $x = 2$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = 12$.

4. Поскольку $y(x)\big|_{x=2} = 2^3 = 8$, то уравнение касательной: $y - 8 = 12(x-2)$, а нормали: $y - 8 = -\dfrac{1}{12}(x-2)$.

Рассмотренные выше задачи, приводящие к понятию производной, после определения производной (13.6) можно переформулировать следующим образом.

В задаче о неравномерном прямолинейном движении мы нашли, что

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = v$$

есть скорость в момент t. Следовательно, $S' = dS/dt = v$, т.е. производная от пути по времени есть скорость v точки, движущейся по прямой. Таков механический смысл производной. В общем случае производная есть скорость изменения функции в точке.

В задаче о касательной мы нашли, что

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha$$

или

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha,$$

т.е. значение производной y' при данном значении аргумента x равно тангенсу угла, образованного касательной к кривой $y = f(x)$ в соответствующей точке $M(x, y)$ и положительным направлением оси Ox. Таков геометрический смысл производной. В силу этого уравнения касательной и нормали (13.5) запишутся как

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1), \quad y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

♦ Процесс вычисления производной от функции $y = f(x)$ называется *дифференцированием этой функции.*

Пример 13.4. Показать, что функции $y = C$, $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x$ имеют производные в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, причём
1) $y' = (C)' = 0$;
2) $y' = (x^n)' = nx^{n-1}$, в частности при $n = 1$ $y' = x' = 1$;
3) $y' = (\sin x)' = \cos x$;
4) $y' = (\cos x)' = -\sin x$;
5) $y' = (a^x)' = a^x \ln a$, в частности $y' = (e^x)' = e^x$ при $a = e$.

Решение. Выше было показано, что все указанные функции определены и непрерывны в каждой точке $x \in \mathbb{R}$. Следуя определению производной, имеем:
1) $y = C$, где C — постоянная, тогда $\Delta y = C - C = 0$ и поэтому

$$y' = (C)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0;$$

2) $y = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$, тогда, как было показано выше (см. формулу (12.22)),

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n = nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x)$$

и, следовательно,

$$y' = (x^n)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0}(nx^{n-1} + o(1)) = nx^{n-1} + 0 = nx^{n-1};$$

3) $y = \sin x$: согласно примеру 12.2,

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = (\cos x)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0,$$

следовательно,

$$y' = (\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\cos x)\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(\cos x + o(1)) = \cos x;$$

4) $y = \cos x$: как и в примере 13.3,

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = \cos x \cos \Delta x - \sin x \sin \Delta x - \cos x = \\ = \cos x(\cos \Delta x - 1) - \sin x \sin \Delta x,$$

тогда при $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = (-\sin x)\Delta x + o(\Delta x)$$

и, следовательно,

$$y' = (\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(-\sin x)\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(-\sin x + o(1)) = -\sin x;$$

5) $y = a^x$: как показано в разд. «Непрерывность функции одного аргумента», при $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1) = (a^x \ln a)\Delta x + o(\Delta x),$$

и, следовательно,

$$y' = (a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(a^x \ln a)\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(a^x \ln a + o(1)) = a^x \ln a;$$

Пример 13.5. Показать, что функции $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$), $y = x^r$ ($r \in \mathbb{R}$) имеют производные в каждой точке $x > 0$, причём

$$1)\ y' = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad 2)\ y' = (x^r)' = rx^{r-1}.$$

Решение. 1) $y = \log_a x$, тогда $\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a(1 + \Delta x/x)$. Как показано в разд. «Непрерывность функции одного аргумента», при $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = \log_a\Big(1 + \frac{\Delta x}{x}\Big) = \frac{\Delta x}{x \ln a} + o(\Delta x)$$

и, следовательно,

$$y' = (\log_a x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Big[\frac{\Delta x}{x \ln a} + o(\Delta x)\Big] = \lim_{\Delta x \to 0}\Big[\frac{1}{x \ln a} + o(1)\Big] = \frac{1}{x \ln a},$$

и, в частности, $(\ln x)' = 1/x$.

2) $y = x^r$, тогда

$$\Delta y = (x + \Delta x)^r - x^r = x^r\Big[\Big(1 + \frac{\Delta x}{x}\Big)^r - 1\Big]$$

и при $\Delta x \to 0$ в силу (11.37)

$$\Delta y = x^r\Big[r\frac{\Delta x}{x} + o(\Delta x)\Big] = rx^{r-1}\Delta x + o(\Delta x),$$

и, следовательно,

$$y' = (x^r)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{rx^{r-1}\Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}[rx^{r-1} + o(1)] = rx^{r-1}.$$

В разд. «Непрерывность и вычисление пределов» было показано, что функции $y = \log_a x$ и $y = x^r$ непрерывны для всех $x > 0$, в этой же области справедливы и формулы дифференцирования. Отметим, что при $r = n$, $r = 1/(1 + 2n)$ ($n \in \mathbb{N}$) формулы дифференцирования остаются справедливыми для всех $x \in \mathbb{R}$.

Пример 13.6. Показать, что график функции $y = f(x)$, имеющей в точке x_0 производную $f'(x_0)$, в некоторой окрестности этой точки проходит между двумя прямыми, составляющими с касательной в точке x_0 произвольно малый угол (рис. 55).

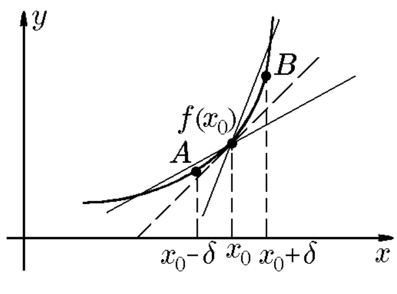


Рис. 55.

Решение. Касательная к графику $y = f(x)$ в точке x_0 записывается уравнением $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Существование производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

означает, что при любом $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$, для которого при $|x - x_0| < \delta$ выполняется

$$-\varepsilon(x-x_0) \leqslant f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \leqslant \varepsilon(x-x_0)$$

или

$$f(x_0) + [f'(x_0) - \varepsilon](x - x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + [f'(x_0) + \varepsilon](x - x_0).$$

Это и означает, что точки A и B, лежащие на графике функции $y = f(x)$, заключены между прямыми, проходящими через точку x_0 и имеющими угловые коэффициенты наклона $f'(x_0) \pm \varepsilon$, произвольно мало отличающиеся от углового коэффициента наклона касательной $f'(x_0)$.

13.2. Дифференцируемость и приращение функции

Теорема 13.1. *Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ конечную производную тогда и только тогда, когда в некоторой проколотой окрестности точки x_0 эта функция представима в виде*

$$f(x) = f(x_0) + f_1(x)(x - x_0), \tag{13.7}$$

где $f_1(x)$ — функция, непрерывная в точке x_0 и такая, что

$$f_1(x_0) = f'(x_0). \tag{13.8}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \tag{13.9}$$

которая определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Если существует $f'(x)$, то существует

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x_0) = f'(x_0).$$

Доопределим функцию $f_1(x)$ по непрерывности в точке x_0, положив $f_1(x_0) = f'(x_0)$. Тогда функция, определяемая соотношением (13.9) и условием (13.8), непрерывна в точке x_0, а из равенства (13.9) следует представление (13.7).

Обратно, из (13.7) следует (13.9), а из непрерывности $f_1(x)$ в точке x_0 следует, что существует

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = f_1(x_0),$$

т.е. существует

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

и выполняется равенство (13.8).

Теорема 13.2. *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную $f'(x_0)$, то приращение функции может быть представлено в виде*

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{13.10}$$

где величина $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x = x - x_0 \to 0$ (т.е. $\alpha(\Delta x) = o(1)$, $\Delta x \to 0$).

Доказательство. Из определения производной

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

и теоремы 9.3 можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x = x - x_0 \to 0$. Тогда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \tag{13.11}$$

или

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0. \tag{13.12}$$

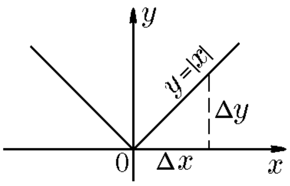
Следствие 13.2.1. *Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 конечную производную, то в этой точке функция $y = f(x)$ непрерывна.*

Доказательство. Действительно, из (13.12) имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

т.е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, что означает непрерывность функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Можно сказать, что непрерывность является необходимым, но не достаточным условием дифференцируемости функции, ибо не всякая непрерывная функция дифференцируема.



Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна при $x_0 = 0$, но производной в этой точке не имеет. Действительно, пусть $\Delta x > 0$. Тогда

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x| - 0 = \Delta x$$

и $\Delta y/\Delta x = 1$, откуда следует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Пусть теперь $\Delta x < 0$. Тогда

$$\Delta y = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x| - 0 = -\Delta x$$

и, значит,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Поскольку результат зависит от способа стремления Δx к нулю, единственного предела отношения $\Delta y/\Delta x$ не существует. Следовательно, функция $f(x) = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

В подобных случаях по аналогии с понятием односторонних пределов вводится понятие односторонних (левосторонней и правосторонней) производных.

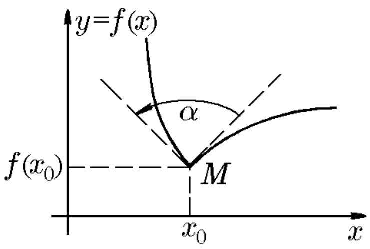


Рис. 56.

♦ Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечный предел слева $f(x_0 - 0)$ и существует предел

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0 - 0)}{\Delta x},$$

то этот предел называют *левосторонней производной* функции $f(x)$ в точке x_0, и, соответственно, предел

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0 + 0)}{\Delta x},$$

называют *правосторонней производной* этой функции в точке x_0.

♦ Прямые, проходящие через точку $M_0(x_0, f(x_0))$, с угловыми коэффициентами $f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$ называют, соответственно, *левой* и *правой полукасательными* к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 (рис. 56).

Из существования производной $f'(x_0)$ следует существование производных $f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$ и равенство

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0). \tag{13.13}$$

В этом случае левая и правая полукасательные образуют касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

Обратно, если существуют левосторонняя и правосторонняя производные функции $f(x)$ в точке x_0 и выполняется условие $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$, то существует $f'(x_0)$ и справедливо равенство (13.13). Если же $f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0)$, то разность $f'(x_0 - 0) - f'(x_0 + 0)$ характеризует угол α, на который нужно повернуть правую полукасательную, чтобы она заняла положение левой полукасательной (рис. 56).

Возвращаясь к примеру с функцией $y = |x|$, можем сказать, что для неё в точке x_0 существуют левосторонняя и правосторонняя производные:

$$|x - 0|'\Big|_{x=0} = -1, \quad |x + 0|'\Big|_{x=0} = 1,$$

соответственно.

Остаётся ещё один случай, когда предел

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

определяет бесконечную производную.

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \infty. \tag{13.14}$$

Тогда прямую $x = x_0$ называют *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Действительно, эту прямую, как и выше, можно рассматривать как предельное положение при $\Delta x \to 0$ секущей, если её уравнение записать в виде

$$x - x_0 = \frac{\Delta x}{\Delta y}(y - y_0).$$

Воспользовавшись тем, что $\Delta x/\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу условия (13.14), имеем $x - x_0 = 0$.

♦ Если

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty,$$

то говорят, что *функция* $y = f(x)$ *имеет в этой точке производную*, равную $+\infty$, и пишут $y'(x_0) = f'(x_0) = +\infty$.

Аналогично, если

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

то говорят, что *функция* $y = f(x)$ *имеет в этой точке производную*, равную $-\infty$, и пишут $y'(x_0) = f'(x_0) = -\infty$.

Как и выше, определяются односторонние производные:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty, \quad f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty,$$

причём если $f'(x_0) = +\infty$, то $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = +\infty$.

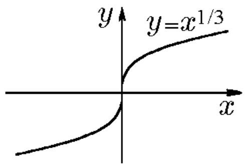


Рис. 57.

В связи с этим рассмотрим ещё один пример. Функция $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ определена и непрерывна при всех x, но её производная в точке $x = 0$ равна

$$y'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{0+\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{|\Delta x|^2}} = +\infty,$$

т.е. эта функция в точке $x = 0$ не имеет производную в собственном смысле, но имеет бесконечную производную. Для нашего примера $y'(0) = +\infty$. Геометрически (рис. 57) это означает, что касательная к кривой $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$ перпендикулярна оси Ox и совпадает с осью Oy.

Пример 13.7. Найти односторонние производные функции $y = \sqrt{|x|}$ в точке $x_0 = 0$ (рис. 58).

Решение. Согласно определению, имеем

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{\sqrt{|0+\Delta x|} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x} = -\infty;$$

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{\sqrt{|0+\Delta x|} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x} = +\infty.$$

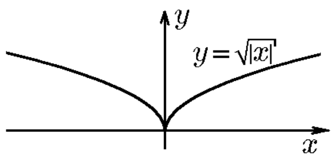


Рис. 58.

Это означает, что левой полукасательной является луч, исходящий из начала координат, совпадающий с осью Oy и направленный в её отрицательном направлении. Правой полукасательной является луч, выходящий из начала координат и совпадающий с положительной полуосью Oy.

Пример 13.8. Показать, что функция

$$y = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ не имеет даже односторонних производных.

Решение. Поскольку

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = y(0),$$

то функция является непрерывной в точке $x = 0$. Найдём в этой точке её производную:

$$y'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{y(0+\Delta x) - y(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(0+\Delta x)\sin[1/(0+\Delta x)] - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \sin\frac{1}{\Delta x}.$$

Этот предел не существует ни при $\Delta x \to 0$, ни при $\Delta x \to \pm 0$, следовательно, не существуют даже односторонние производные, что и требовалось показать.

13.3. Дифференциал аргумента и функции. Геометрический и физический смысл дифференциала

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую в δ-окрестности точки x_0: $S(x_0, \delta) \subset D(f)$. Тогда, как мы уже отмечали, приращению аргумента Δx при условии $x_0 + \Delta x \in S(x_0, \delta) \subset D(f)$ отвечает приращение функции

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{13.15}$$

В связи с этим возникает вопрос: можно ли для приращения Δy, по аналогии с формулой (13.10), выделить главную часть, линейную по Δx, и бесконечно малую более высокого порядка $o(\Delta x)$, т.е. представить его в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{13.16}$$

где $A = \text{const}$, а $o(\Delta x) = \alpha(\Delta x)\Delta x$, $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ ($\alpha(\Delta x) \overset{0}{=} o(1)$). Для ответа на этот вопрос введём ещё одну характеристику функции, тесно связанную с понятием производной.

♦ Функция $y = f(x)$, определённая в δ-окрестности точки x_0, приращение которой в точке x_0 представимо в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{13.17}$$

где $A = A(x_0)$ не зависит от Δx, а $o(\Delta x) = \alpha(\Delta x)\Delta x$ ($\alpha(\Delta x) = o(1)$ при $\Delta x \to 0$), называется *дифференцируемой* в точке x_0, а главная часть приращения $A\Delta x$ называется её *дифференциалом* в точке x_0 и обозначается

$$dy = df(x_0) = A\Delta x. \tag{13.18}$$

Таким образом, при $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = dy + o(\Delta x), \tag{13.19}$$

что соответствует их эквивалентности, или асимптотическому равенству

$$\Delta y \sim dy \quad \text{при } \Delta x \to 0. \tag{13.20}$$

Теорема 13.3 (о дифференцируемости функции). *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы эта функция имела конечную производную в точке x_0. При этом дифференциал и производная связаны равенством*

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{13.21}$$

Доказательство. *Необходимость.* Если функция дифференцируема в точке x_0, то выполняется условие (13.17), поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) = o(\Delta x)/\Delta x = o(1)$ при $\Delta x \to 0$, а следовательно, существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A = f'(x_0).$$

Достаточность. Пусть в точке x_0 существует конечная производная $f'(x_0)$. Тогда в силу теоремы 13.2 справедливо равенство $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$, и поэтому выполняется условие (13.17). Это означает, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, причём коэффициент A в формулах (13.17) и (13.18) равен $f'(x_0)$, и дифференциал можно записать в виде (13.21).

♢ Приращение Δy, задаваемое формулой (13.15), можно рассматривать только для таких Δx, при которых точка $x_0 + \Delta x$ принадлежит области определения функции $D(f)$, в то время как дифференциал

$$dy = y'\Delta x \tag{13.22}$$

определён для любых Δx, т.е. под Δx в выражении (13.22) подразумевается произвольное приращение независимой переменной, которое удобно считать не зависящим от x. При этом совсем не обязательно предполагать Δx бесконечно малой, но если Δx считать бесконечно малой, то и дифференциал dy также будет бесконечно малой, и именно (при $y' \neq 0$) главной частью бесконечно малого приращения Δy, линейной по Δx.

♢ Асимптотическое равенство (13.20) при малых Δx можно рассматривать как приближенное равенство

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x, \tag{13.23}$$

которое может быть использовано для приближенного вычисления значений $f(x_0 + \Delta x)$ при известных $f(x_0)$ и Δx с тем большей точностью, чем меньше Δx.

♢ Для функции $y = x$ производная $y' = (x)' = 1$, а значит, $\Delta x = dy$. Это равенство означает, что приращение аргумента Δx совпадает с его дифференциалом dx. В силу этого формулу (13.21) для дифференциала можно записать в виде

$$dy = f'(x)dx, \tag{13.24}$$

отсюда для производной получаем выражение

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}. \tag{13.25}$$

Согласно этой формуле, производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной.

♦ Вычисление дифференциала функции называется *дифференцированием.*

Перед доказательством теоремы 13.3 мы определили понятие функции, дифференцируемой в точке. Особая важность теоремы 13.3 состоит в том, что она, по сути, устанавливает равносильность дифференцируемости функции в данной точке и существования её конечной производной в этой точке. Поэтому, как мы уже отмечали, функцию, имеющую производную в точке, также принято называть *дифференцируемой в этой точке*, а вычисление производной — *дифференцированием.*

Таким образом, и для вычисления дифференциала, и для вычисления производной в русском языке существует один термин — дифференцирование, что подчеркивает тесную связь между этими понятиями. Любопытно, что в большинстве европейских языков для обозначения этих операций существуют два различных термина.

Понятие дифференцируемости функции легко обобщается на соответствующие промежутки.

♦ Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала $]a, b[$, называется *дифференцируемой на этом интервале*. Если функция дифференцируема на интервале $]a, b[$ и, кроме того, существуют односторонние конечные производные $f'(a+0)$, $f'(b-0)$, то функция называется *дифференцируемой на отрезке* $[a, b]$.

Пример 13.9. Найти дифференциалы функций

$$1)\ y = x^2; \quad 2)\ y = \sin x; \quad 3)\ y = \ln x.$$

Решение. Согласно (13.24), получим

$$1)\ dy = d(x^2) = (x^2)'dx = 2xdx;$$
$$2)\ dy = d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x\, dx;$$
$$3)\ dy = d(\ln x) = (\ln x)'dx = \frac{dx}{x}.$$

Выясним геометрический смысл дифференциала функции.

Пусть дана дифференцируемая функция $y = f(x)$ (рис. 59). Аналитически мы показали, что $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, т.е. $dy \neq \Delta y$. Возьмем на кривой точки $M(x, y)$ и $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Проведём касательную к этой кривой в точке M. Из рис. 59 следует, что $|MP| = \Delta x$, $|PM_1| = \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, $\operatorname{tg}\alpha = y'_M$. Тогда

$$dy = y'_M dx = \operatorname{tg}\alpha \cdot |MP| = |PQ| \neq |PM_1| = \Delta y.$$

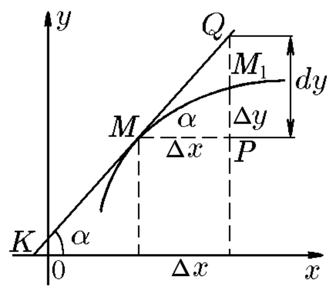


Рис. 59.

Итак, геометрически дифференциал функции изображается отрезком PQ, представляющим собой приращение ординаты касательной MK на интервале от x до $x + \Delta x$ и не совпадающим с отрезком PM_1, который изображает приращение функции (ординаты самой кривой на $]x, x + \Delta x[$). Имеем

$$dy = |PQ| = \Delta y + |M_1Q|,$$

т.е. dy отличается от Δy на длину отрезка M_1Q. И, как мы показали выше, при $\Delta x \to 0$, разность $dy - \Delta y = |M_1Q|$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx.

Обратимся ещё раз к задаче о неравномерном движении. Пусть $S(t)$ — путь, пройденный материальной точкой за время t от начала движения. Тогда, как мы установили,

$$S'(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = v(t)$$

есть мгновенная скорость точки в момент времени t. По определению дифференциала, $dS = v\Delta t$. Поэтому дифференциал функции $S(t)$ равен расстоянию, которое прошла бы точка за промежуток времени Δt, если бы она двигалась со скоростью, равной мгновенной скорости точки в момент времени t. В этом заключается физический (механический) смысл дифференциала.

Пример 13.10. Сравнить приращение Δy функции

$$y = x^2 + 2x \tag{13.26}$$

с её дифференциалом dy.

Решение. Пусть $x = 2$, $\Delta x = 0{,}01$. Наращённое значение функции будет

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x. \qquad (13.27)$$

Вычтя (13.26) из (13.27), получим приращение функции

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x.$$

Для нашего случая

$$\Delta y = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}01 + 0{,}01^2 + 2 \cdot 0{,}01 = 0{,}0601.$$

Найдём теперь дифференциал заданной функции:

$$dy = (x^2 + 2x)'dx = (2x + 2)\Delta x.$$

В нашем случае $dy = (2 \cdot 2 + 2)0{,}01 = 0{,}060$.

Итак, $\Delta y = 0{,}0601$, $dy = 0{,}060$. Видим, что значения dy и Δy совпадают до третьего десятичного знака.

Абсолютная ошибка, допущенная при использовании приближенного равенства $\Delta x \approx dy$, есть

$$S = \Delta y - dy = 0{,}0001.$$

Относительная ошибка

$$\delta = \frac{0{,}0001}{0{,}0601} 100\% \approx 0{,}2\ \%.$$

$\Diamond$ Основоположниками современного дифференциального исчисления являются выдающиеся ученые рубежа XVII и XVIII веков И. Ньютон и Г. Лейбниц. Оба они совершенно независимо друг от друга в разных подходах и обозначениях пришли фактически к одним и тем же результатам.

Так, Ньютон, исходя из понятия времени как всеобщего аргумента физических переменных величин, обращался к скорости их изменения. Переменную величину, т.е. то, что мы сейчас называем функцией, он назвал флюентой (от латинского — текущий), а скорость её изменения, т.е. то, что мы сейчас называем производной, — флюксией (от латинского — истечение). Таким образом, главными понятиями в методе Ньютона являлись флюенты (функции) и флюксии (их производные), которые он обозначал как $x, y, \ldots$ и $\dot{x}, \dot{y}, \ldots$, соответственно. Для вычисления флюксий вводилось вспомогательное понятие момента, соответствующее современному понятию дифференциала.

Заслуга Лейбница заключается в том, что он обобщил предложенные ранее Декартом, Гюйгенсом, Паскалем и др. методы решения геометрических задач по отысканию касательных, экстремумов, по вычислению квадратур и т.п. Именно Лейбниц ввел понятие дифференциала как бесконечно малой разности двух соседних значений переменной величины. Отсюда современный символ d как первая буква слова *differentia* — разность. Кривые рассматривались им как многоугольники с бесконечно большим числом бесконечно малых сторон, касательная — как прямая, продолжающая одну из этих сторон и т.п. На основе дифференциала он ввел понятие дифференциальных частных, т.е. отношения дифференциалов, что соответствует современным производным.

Вокруг вопроса о приоритете создания дифференциального исчисления между Ньютоном и Лейбницем возник длительный спор, подогревавшийся их сторонниками, обращавшими внимание на недостатки и недоработки, содержавшиеся в каждом из методов. Конец этим спорам был положен только в XIX веке работами Коши, который своей теорией пределов создал фундамент всего математического анализа и впервые отчётливо определил производную как предел. После работ Коши стало обычным отправляться от производной, а понятие дифференциала строить на её основе. Тем не менее, от Лейбница нам осталось обозначение дифференциала dy и производной dy/dx, а от Ньютона то, что в физике производную по времени до сих пор обозначают как $\dot{x}(t)$.

14. Правила дифференцирования. Таблица производных

Вычисление производной непосредственно по определению (13.6), использованное в примере 13.3, как и вычисление пределов, зачастую громоздко и неудобно. Однако операция вычисления пределов существенно упрощается, если воспользоваться таблицей эквивалентностей и правилами предельного перехода. Поэтому представляется естественным разработать аналог таблицы эквивалентностей для производных и обосновать правила дифференцирования функций, которые позволят значительно упростить вычисление производных.

14.1. Правила дифференцирования

Теорема 14.1. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x, то в этой же точке дифференцируемы функции $u+v$, uv, u/v (при условии $v(x) \neq 0$), причём*

$$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x), \tag{14.1}$$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x), \tag{14.2}$$

$$\Big(\frac{u(x)}{v(x)}\Big)' = \frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}. \tag{14.3}$$

Доказательство. Пусть

$$\Delta u = u(x+\Delta x)-u(x), \quad u(x+\Delta x) = u(x)+\Delta u,$$
$$\Delta v = v(x+\Delta x)-v(x), \quad v(x+\Delta x) = v(x)+\Delta v.$$

В силу дифференцируемости, а значит, и непрерывности функций $u(x)$, $v(x)$ в точке x при $\Delta x \to 0$ имеем

$$\Delta u \to 0, \Delta v \to 0, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x), \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x). \tag{14.4}$$

1. Если $y(x) = u(x)+v(x)$, то

$$\Delta y = u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x) = \Delta u+\Delta v,$$

откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta[u(x)+v(x)]}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Правая часть этого соотношения при $\Delta x \to 0$ имеет предел, равный $u'(x)+v'(x)$. Поэтому существует предел левой части, который, по определению, равен $[u(x)+v(x)]'$, что и доказывает соотношение (14.1).

2. Если $y(x) = u(x)v(x)$, то аналогично

$$\Delta y = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = [u(x)+\Delta u][v(x)+\Delta v] - u(x)v(x) = \\ = u(x)\Delta v + v(x)\Delta u + \Delta u \Delta v$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v.$$

Отсюда с учётом (14.4) и оценки $\Delta v = o(1)$ при $\Delta x \to 0$ следует соотношение (14.2).

3. Если $y(x) = u(x)/v(x)$, то

$$\Delta y = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(x)\Delta u - u(x)\Delta v}{[v(x)+\Delta v]v(x)}$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{v^2 + v\Delta v}\Big[v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\Big].$$

Отсюда с учётом (14.4) и оценки $\Delta v = o(1)$ при $\Delta x \to 0$, когда $v(x) \neq 0$, следует формула (14.3).

Следствие 14.1.1. Постоянный множитель можно вынести за знак производной:

$$[Cu(x)]' = Cu'(x). \tag{14.5}$$

Действительно, положив в (14.2) $v(x) = C$ и учитывая, что $(C)' = 0$, приходим к (14.5).

Следствие 14.1.2. Производная линейной комбинации конечного числа дифференцируемых функций равна такой же линейной комбинации их производных:

$$[C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + ... + C_nu_n(x)]' = C_1u_1'(x) + C_2u_2'(x) + ... + C_nu_n'(x). \tag{14.6}$$

Следствие 14.1.3. Произведение конечного числа дифференцируемых функций $u_1(x), u_2(x), ..., u_k(x)$ дифференцируется по правилу

$$[u_1(x)u_2(x)\cdots u_k(x)]' = u_1'(x)u_2(x)\cdots u_k(x) + u_1(x)u_2'(x)\cdots u_k(x) + ... \\ + u_1(x)u_2(x)\cdots u_k'(x). \tag{14.7}$$

Действительно, последовательно применяя (14.2) к левой части этого равенства, убеждаемся в справедливости (14.7).

Следствие 14.1.4. Все правила вычисления производных (14.1)–(14.7) с помощью соотношения $dy = y'dx$ обобщаются на вычисление дифференциалов:

$$\begin{aligned}
&d[u(x)+v(x)] = du(x) + dv(x);\\
&d[u(x)v(x)] = v(x)du(x) + u(x)dv(x);\\
&d\Big[\frac{u(x)}{v(x)}\Big] = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)};\\
&d[Cu(x)] = Cdu(x);\\
&d[C_1u_1(x) + C_2u_2(x) + ... + C_nu_n(x)] = C_1du_1(x) + C_2du_2(x) + ... + C_ndu_n(x);\\
&d[u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)] = du_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x) + u_1(x)du_2(x)\cdots u_n(x) + ...+\\
&\qquad + u_1(x)u_2(x)\cdots du_n(x).
\end{aligned} \tag{14.8}$$

Пример 14.1. Найти $f'(x)$, $f'(0)$, $f'(2)$ от функции

$$f(x) = \frac{x}{2x-1}.$$

Решение. Найдём производную:

$$f'(x) = \frac{x'(2x-1)-(2x-1)'x}{(2x-1)^2} = \frac{2x-1-2x}{(2x-1)^2} = -\frac{1}{(2x-1)^2}.$$

Вычислим производную в заданных точках:

$$f'(0) = -1; \quad f'(2) = -\frac{1}{(4-1)^2} = -\frac{1}{9}.$$

Пример 14.2. Показать, что

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Решение. Применив правило дифференцирования частного (14.3), с учётом того, что $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ (см. пример 13.4), получим

$$(\operatorname{tg} x)' = \Big(\frac{\sin x}{\cos x}\Big)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$
$$(\operatorname{ctg} x)' = \Big(\frac{\cos x}{\sin x}\Big)' = \frac{(\cos x)'\sin x - (\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

♢ Теорема 14.1 определяет правила вычисления производных от функций, полученных из дифференцируемых функций посредством арифметических операций. На следующем этапе найдём формулы, позволяющие вычислить производные от сложных функций, т.е. полученных в результате композиции дифференцируемых функций.

Теорема 14.2 (о дифференцировании сложной функции). *Если функции $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ дифференцируемы в точках x_0, $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0, причём*

$$y'(x_0) = f'(u_0)\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \tag{14.9}$$

Доказательство. Сложная функция $y = f(\varphi(x))$ как композиция дифференцируемых, а следовательно, и непрерывных в точке x_0 функций, согласно теореме 12.6, также является непрерывной в этой точке. Как непрерывная функция она определена в некоторой окрестности точки x_0. Из дифференцируемости функции $y = f(u)$ в точке u_0, согласно теореме 13.3 о дифференцируемости функции, следует, что существует окрестность этой точки $S(u_0, \varepsilon)$, в которой она имеет представление

$$f(u) = f(u_0) + f_1(u)(u - u_0), \tag{14.10}$$

где функция $f_1(u)$ удовлетворяет условию

$$f_1(u_0) = f'(u_0). \tag{14.11}$$

Так как функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, то существует δ-окрестность точки x_0, такая что функция $u = \varphi(x)$ принадлежит ε-окрестности точки u_0:

$$\exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in S(x_0, \delta) \Rightarrow \varphi(x) \in S(u_0, \varepsilon).$$

Поэтому, подставив в равенство (14.10) $\varphi(x)$ вместо u, получим равенство

$$y = f(\varphi(x)) = f(u_0) + f_1(\varphi(x))[\varphi(x) - \varphi(x_0)], \tag{14.12}$$

справедливое для всех $x \in S(x_0, \delta)$. Но

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi_1(x)(x - x_0), \tag{14.13}$$

где φ_1 — непрерывная в точке x_0 функция, такая что

$$\varphi_1(x_0) = \varphi'(x_0). \tag{14.14}$$

Из (14.12) и (14.13) следует, что

$$y(x) = y(x_0) + f_1(\varphi(x))\varphi_1(x)(x - x_0), \tag{14.15}$$

где $y_1 = f_1(\varphi(x))\varphi_1(x)$ — непрерывная в точке x_0 функция, которую в силу (14.11) и (14.14) можно записать как

$$y_1(x_0) = f_1(\varphi(x_0))\varphi_1(x_0) = f_1(u_0)\varphi'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0). \tag{14.16}$$

Таким образом, из (14.15), (14.16) и теоремы о дифференцируемой функции следует, что существует производная $y'(x_0)$ и справедлива формула (14.9) для производной сложной функции.

Следствие 14.2.1. Правило дифференцирования сложной функции $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ (14.9) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u u'_x. \tag{14.17}$$

Действительно, заменив в формуле

$$f'(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\varphi'(x),$$

$\varphi(x)$ на u, получим (14.17).

Следствие 14.2.2. Правило дифференцирования сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций. Например, для трёх функций $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}, \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u u'_v v'_x.$$

Следствие 14.2.3 (свойство инвариантности первого дифференциала). Дифференциал функции $y = f(x)$ имеет один и тот же вид

$$dy = f'(x)dx \tag{14.18}$$

как в случае, когда x — независимая переменная, так и в случае, когда x — дифференцируемая функция какой-либо другой переменной.

Действительно, пусть $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция переменной t, тогда $y = f(x(t))$ — сложная функция и

$$dy = f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

но так как $\varphi'(t)dt = dx$, то

$$dy = f'(x)dx,$$

т.е. формула (14.18) остаётся справедливой при замене x на функцию $\varphi(t)$.

Пример 14.3. Дана сложная функция $y = (x^3+1)^4$ или $y = u^4$, $u = x^3+1$. Найти dy/dx.

Решение. Воспользуемся формулой (14.9). Тогда

$$\frac{dy}{du} = (u^4)'_u = 4u^3,$$

а

$$\frac{du}{dx} = (x^3+1)'_x = 3x^2,$$

т.е.

$$y'_x = y'_u u'_x = 4u^3 3x^2 = 4(x^3+1)^3 3x^2 = 12x^2(x^3+1)^3.$$

Пример 14.4. Найти производные функций $y = \ln(x^2 - 2x)$ и $y = \sin\sqrt{x}$.

Решение. В примере 13.5 было показано, что $(\ln x)' = 1/x$. Тогда, согласно правилу дифференцирования сложной функции,

$$y' = [\ln(x^2-2x)]' = \frac{(x^2-2x)'}{x^2-2x} = \frac{2x-2}{x^2-2x} = \frac{2(x-1)}{x(x-2)}.$$

Согласно формуле (14.9), имеем

$$y' = (\sin\sqrt{x})' = \cos\sqrt{x}(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}.$$

Пример 14.5. Продифференцировать функции $y = (x-x^3)^{100}$, $y = \sqrt{3-x^4}$.

Решение. На основании формулы (14.17) имеем

$$y' = [(x-x^3)^{100}]' = 100(x-x^3)^{100-1}(x-x^3)' = 100(x-x^3)^{99}(1-3x^2).$$

Аналогично

$$y' = (\sqrt{3-x^4})' = \frac{(3-x^4)'}{2\sqrt{3-x^4}} = \frac{0-4x^3}{2\sqrt{3-x^4}} = -\frac{2x^3}{\sqrt{3-x^4}}.$$

Пример 14.6. Показать, что

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; \quad (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Решение. Поскольку

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}; \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

то по правилу дифференцирования сложной функции

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$
$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}(-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x,$$

а по правилу (14.3) дифференцирования частного

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{(\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x - (\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$
$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{(\operatorname{ch} x)' \operatorname{sh} x - (\operatorname{sh} x)' \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Пример 14.7. Показать, что если $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \neq 0, \tag{14.19}$$

и, в частности,

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Решение. Пусть $x > 0$, тогда $|x| = x$ и $\log_a |x| = \log_a x$. Из примера 13.5 следует, что $(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$, т.е. формула (14.19) верна при $x > 0$.

Пусть $x < 0$, тогда $\log_a |x| = \log_a(-x)$. Применив правило дифференцирования сложной функции, найдём

$$[\log_a(x)]' = \frac{1}{(-x) \ln a} \cdot (-1) = \frac{1}{x \ln a},$$

т.е. формула (14.19) верна и при $x < 0$. Следовательно, формула (14.19) верна для всех $x \in \mathbb{R}$, кроме $x = 0$.

При $a = e$ из (14.19) следует

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

В заключение раздела, посвященного правилам дифференцирования явно заданных функций, сформулируем следующую теорему.

Теорема 14.3 (о дифференцировании обратной функции). *Если функция $y = f(x)$ обратима в окрестности $S(x_0, \delta)$ точки x_0 и существует конечная производная $f'(x_0) \neq 0$, то функция $x = \varphi(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, причём*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{14.20}$$

Доказательство. Если $y = f(x)$ обратимая в окрестности $S(x_0, \delta)$ функция, то, согласно определению обратной функции, имеет место равенство

$$x = \varphi(f(x)). \tag{14.21}$$

Продифференцировав соотношение (14.21) с учётом того, что правая его часть является сложной функцией, получим

$$\frac{dx}{dx} = 1 = \varphi'_y f'_x.$$

Отсюда при условии $f'(x_0) \neq 0$ найдём

$$\varphi'_y(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Следствие 14.3.1. Для пары взаимно обратимых функций справедлива формула

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(\varphi(x))}. \tag{14.22}$$

Действительно, если функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ взаимно обратимы на некотором множестве, содержащем точку x_0, то, обозначив, как обычно, аргумент обратной функции буквой x, а её значение буквой y, из (14.20) получим (14.22).

Формула (14.20) имеет простой физический смысл. Если $\varphi'(y_0)$ рассматривать как скорость изменения переменной x по отношению к переменной y, а $f'(x_0)$ как скорость изменения переменной y по отношению к переменной x, то формула (14.20) выражает тот факт, что эти скорости являются взаимно обратимыми.

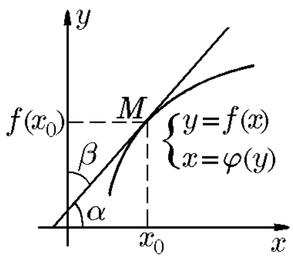


Рис. 60.

Чтобы дать геометрическую интерпретацию формулы (14.20), предположим, что $f'(x_0) \neq 0$. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ в окрестности точки x_0 (рис. 60). Пусть M — точка с координатами $M(x_0, f(x_0))$, тогда через эту точку проходит касательная к графику $y = f(x)$ с угловым коэффициентом наклона $k_\alpha = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, где α — угол между касательной и положительным направлением оси Ox. Если рассматривать y как независимую переменную, а x как функцию от y, то кривая, заданная уравнением $y = f(x)$, будет графиком и обратной функции $x = \varphi(y)$ с касательной ℓ', которая получится при замене $x \to y$, $y \to x$. Если α — угол, образованный касательной ℓ и осью Ox, то через β обозначим угол, образованный касательной ℓ' и осью Oy. Тогда $k_\beta = \operatorname{tg}\beta = \varphi'(y_0)$. Так как $\alpha + \beta = \pi/2$, то $\operatorname{tg}\beta = 1/\operatorname{tg}\alpha$.

Отсюда следует, что угловые коэффициенты касательных ℓ и ℓ' связаны соотношением

$$k_\alpha = \frac{1}{k_\beta}.$$

Это соотношение и является геометрической интерпретацией равенства $\varphi'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

Пример 14.8. Показать, что

$$1)\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 2)\ y' = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1;$$

$$3)\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad 4)\ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}; \quad 5)\ (\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0.$$

Решение. 1) Если $y = \varphi(x) = \arcsin x$, $|x| < 1$, то обратная функция $x = f(y) = \sin y$, где $|y| < \pi/2$. Согласно правилу (14.22) дифференцирования взаимно обратных функций, имеем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}.$$

Так как $\sin y = x$ и $|y| < \pi/2$, то $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, и, следовательно,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2) Воспользуемся известным тригонометрическим равенством

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Его дифференцирование даёт

$$(\arcsin x)' + (\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2}\right)',$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (\arccos x)' = 0$$

или

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) Если $y = \operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$, то $x = \operatorname{tg} y$, $|y| < \pi/2$. Применив правило дифференцирования обратной функции (14.22), имеем

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y,$$

а поскольку

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

получим

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

4) Воспользуемся известным тригонометрическим равенством

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Его дифференцирование даёт

$$(\operatorname{arctg} x)' + (\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2}\right)',$$

откуда

$$\frac{1}{1+x^2} + (\operatorname{arcctg} x)' = 0$$

или

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

5) Если $y = \ln x$, $x > 0$, то обратная функция есть $x = e^y$. Согласно правилу (14.22) дифференцирования взаимно обратных функций, имеем

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Заметим, что этот же результат был получен в примере 13.5 исходя из определения производной. В примере 14.7 было получено его обобщение: $(\ln |x|)' = 1/x$, с использованием правила дифференцирования сложной функции.

Пример 14.9. Найти производную функции $y = \arcsin \sqrt{x}$.

Решение. С учётом результатов примера 14.8 и согласно правилу дифференцирования сложной функции (14.9), получим

$$y' = (\arcsin \sqrt{x})' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}.$$

Пример 14.10. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}(\cos x)$.

Решение. С учётом результатов примера 14.8 и согласно правилу дифференцирования сложной функции

$$y' = (\operatorname{arctg} \cos x)' = \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x} = -\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}.$$

Аналогично можно доказать, что

$$y' = (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}. \tag{14.23}$$

Пример 14.11. Найти производную функции $y = \operatorname{arcctg}(e^x)$.

Решение. С учётом результатов примера 14.8 и согласно правилу дифференцирования сложной функции, запишем

$$y' = (\operatorname{arcctg} e^x)' = -\frac{e^x}{1+e^{2x}}.$$

14.2. Таблица производных. Техника дифференцирования

Непосредственно из определения производной и с помощью правил дифференцирования в примерах 13.4, 13.5, 14.6–14.8 мы нашли производные основных элементарных функций. Оформим теперь полученные результаты в виде таблицы, которую принято называть *таблицей производных.* В левом столбце таблицы указаны производные функций независимой переменной x, а в правом — композиции с функцией $u(x)$.

1.	$(C)' = 0$, $C = \mathrm{const}$;		
2.	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;	2a.	$[u(x)^\alpha]' = \alpha[u(x)]^{\alpha-1}u'(x)$;
3.	$(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$; $(e^x)' = e^x$;	3a.	$(a^{u(x)})' = a^{u(x)}u'(x)\ln a$; $(e^{u(x)})' = e^{u(x)}u'(x)$;
4.	$(\log_a \lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$; $(\ln \lvert x\rvert)' = \dfrac{1}{x}$;	4a.	$(\log_a \lvert u(x)\rvert)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)\ln a}$; $(\ln \lvert u(x)\rvert)' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$;
5.	$(\sin x)' = \cos x$;	5a.	$[\sin u(x)]' = \cos u(x)u'(x)$;
6.	$(\cos x)' = -\sin x$;	6a.	$[\cos u(x)]' = -\sin u(x)u'(x)$;
7.	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;	7a.	$[\mathrm{tg}\, u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$;
8.	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;	8a.	$[\mathrm{ctg}\, u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{\sin^2 u(x)}$;
9.	$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$;	9a.	$[\mathrm{sh}\, u(x)]' = \mathrm{ch}\, u(x)u'(x)$;
10.	$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$;	10a.	$[\mathrm{ch}\, u(x)]' = \mathrm{sh}\, u(x)u'(x)$;
11.	$(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;	11a.	$[\mathrm{th}\, u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\mathrm{ch}^2 u(x)}$;
12.	$(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$;	12a.	$[\mathrm{cth}\, u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{\mathrm{sh}^2 u(x)}$;
13.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	13a.	$[\arcsin u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$;
14.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	14a.	$[\arccos u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$;
15.	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;	15a.	$[\mathrm{arctg}\, u(x)]' = \dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$;
16.	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;	16a.	$[\mathrm{arcctg}\, u(x)]' = -\dfrac{u'(x)}{1+u^2(x)}$.

Таблицу производных можно дополнить производными других, реже встречающихся, функций. Например, в таблицу включена производная функции $\arcsin x$ и не включена производная функции $\mathrm{arsh}\, x$, встречающейся гораздо реже. Следующие примеры показывают, как обоснованные выше правила дифференцирования позволяют найти производные обратных гиперболических и других функций.

Пример 14.12. Показать, что

$$\text{а)}\ \ (\mathrm{arsh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \text{б)}\ \ (\mathrm{arth})' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Решение. I способ. Воспользуемся формулами (12.27):

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),\ x \in \mathbb{R}; \quad \operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x| < 1.$$

Тогда по правилу дифференцирования сложной функции найдём

$$(\operatorname{arsh} x)' = [\ln(x + \sqrt{1+x^2})]' = \frac{1 + x/\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(\operatorname{arth} x)' = \Big(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\Big)' = \frac{1}{2}\{[\ln(1+x)]' - [\ln(1-x)]'\} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\Big) = \frac{1}{1-x^2}.$$

II способ. Воспользуемся правилом дифференцирования обратных функций. Если $y = \varphi(x) = \operatorname{arsh} x$, то обратная функция есть $x = f(y) = \operatorname{sh} y$. Тогда

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y}.$$

Так как $\operatorname{sh} y = x$, то $\operatorname{ch} y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$ и, следовательно,

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Аналогично, если $y = \operatorname{arth} x$, то $x = \operatorname{th} y$ тогда

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{(\operatorname{th} y)'} = \operatorname{ch}^2 y.$$

Поскольку $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$, то $\operatorname{ch}^2 y = 1/(1 - \operatorname{th}^2 y) = 1/(1-x^2)$ и, следовательно,

$$(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$$

Выше мы уже рассматривали функцию $y = |x|$ и показали, что она дифференцируема во всех точках, за исключением $x = 0$, причём при $x < 0$ производная определяется соотношением $|x|' = -1$, а при $x > 0$ — соотношением $|x|' = 1$. Отсюда следует, что функцию

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

можно рассматривать как результат дифференцирования $|x|$ и дополнить таблицу производных равенством

$$|x|' = \operatorname{sign} x, \quad x \neq 0. \tag{14.24}$$

С его помощью можно ещё одним способом получить формулу 4 из таблицы производных. Действительно, рассматривая функцию $y = \ln|x|$ как сложную, найдём

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}|x|' = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|} = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Ещё одной формулой из таблицы производных, имеющей широкое применение, является формула 4а:

$$[\ln|u(x)|]' = \frac{u'(x)}{u(x)}, \tag{14.25}$$

которую зачастую называют ещё *логарифмической производной* функции $u(x)$. Использование этой формулы при предварительном логарифмировании дифференцируемой функции называется *логарифмическим дифференцированием.*

С помощью логарифмического дифференцирования можно значительно упростить процедуру вычисления производной от показательно-степенной функции; функций, содержащих большое число сомножителей, и т.п. Следующие примеры иллюстрируют эту возможность.

Пример 14.13. Показать, что производная показательно-степенной функции находится по правилу

$$[u(x)^{v(x)}]' = u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x) + v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x), \tag{14.26}$$

т.е. состоит из двух слагаемых, первое из которых равно производной показательной функции в предположении, что $u(x) = \text{const}$, а второе — производной степенной функции в предположении, что $v(x) = \text{const}$.

Решение. Положим

$$y(x) = u(x)^{v(x)} \tag{14.27}$$

и воспользуемся методом логарифмического дифференцирования. Для этого прологарифмируем равенство (14.27):

$$\ln y(x) = v(x)\ln u(x).$$

Продифференцировав это соотношение с учётом логарифмической производной (14.25), получим

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

или

$$y'(x) = y(x)\Big(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\Big).$$

Подставив сюда $y(x)$ из (14.27) и раскрыв скобки, найдём

$$(u(x)^{v(x)})' = u(x)^{v(x)}v'(x)\ln u(x) + v(x)u^{v(x)-1}(x)u'(x),$$

что и доказывает справедливость (14.26).

Пример 14.14. Вычислить производную функции

$$y(x) = e^{-\sin x^2}\ln(2+x^4)\frac{x^2}{1+x}.$$

Решение. I способ. Использование правил дифференцирования и таблицы производных даёт

$$
\begin{aligned}
y'(x) &= (e^{-\sin x^2})' \ln(2+x^4)\frac{x^2}{1+x} + e^{-\sin x^2}[\ln(2+x^4)]'\frac{x^2}{1+x}+ \\
&+ e^{-\sin x^2}\ln(2+x^4)\Big(\frac{x^2}{1+x}\Big)' = \\
&= e^{-\sin x^2}(-\cos x^2)2x\ln(2+x^4)\frac{x^2}{1+x} + e^{-\sin x^2}\frac{4x^3}{2+x^4}\frac{x^2}{1+x}+ \\
&+ e^{-\sin x^2}\ln(2+x^4)\frac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}.
\end{aligned}
$$

II способ. Воспользуемся логарифмическим дифференцированием, тогда

$$
\ln y(x) = \ln\Big[e^{-\sin x^2}\ln(2+x^4)\frac{x^2}{1+x}\Big] = -\sin x^2 + \ln[\ln(2+x^4)] + 2\ln x - \ln(1+x),
$$

и, следовательно,

$$
y'(x) = e^{-\sin x^2}\ln(2+x^4)\frac{x^2}{1+x}\Big[-(\cos x^2)2x + \frac{4x^3}{\ln(2+x^4)(2+x^4)} + \frac{2}{x} - \frac{1}{1+x}\Big].
$$

Пример 14.15. Вычислить производные функций

$$
y_1 = x^x, \qquad y_2 = x^{x^x}.
$$

Решение. Так как

$$
\ln y_1 = x\ln x, \qquad \ln y_2 = x^x\ln x = y_1\ln x,
$$

то

$$
\begin{aligned}
&y_1' = y_1(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1); \\
&y_2' = y_2\Big(y_1'\ln x + y_1\frac{1}{x}\Big) = x^{x^x}\Big[x^x(\ln x+1)\ln x + x^x\frac{1}{x}\Big] = x^{x^x+x-1}[x\ln x(\ln x+1)+1].
\end{aligned}
$$

Пример 14.16. Для функции $y = x^x$ найти $y'(1)$.

Решение. Согласно результатам примера 14.15,

$$
y' = (x^x)' = xx^{x-1} + x^x\ln xx' = x^x + x^x\ln x = x^x(1+\ln x)
$$

и $y'(1) = 1 + \ln 1 = 1$.

Пример 14.17. Показать, что если дифференцируемая функция $f(x)$ чётная, то её производная $f'(x)$ — нечётная, а если $f(x)$ нечётная, то $f'(x)$ — чётная.

Решение. Если $f(x)$ — чётная функция, то

$$f(-x) = f(x).$$

Дифференцирование этого равенства даёт

$$f'(-x)(-1) = f'(x)$$

или

$$f'(-x) = -f'(x),$$

но это соотношение является определением нечётной функции, что и требовалось показать. Аналогично для нечётной функции

$$f(-x) = -f(x),$$
$$f'(-x)(-1) = -f'(x)$$

или

$$f'(-x) = f'(x),$$

т.е. $f'(x)$ — чётная функция, что и требовалось показать.

14.3. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$, то, продифференцировав тождество $F(x, f(x)) \equiv 0$ как сложную функцию, найдём производную $dy/dx = f'(x)$. Следующий пример поясняет эту возможность.

Пример 14.18. Продифференцировать функции

а) $y^2 - 2px = 0$;
б) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$;
в) $\sin(x - y) - x - y - 3 = 0$.

Решение. а) Продифференцируем обе части по x, считая, что $y = y(x)$. Воспользовавшись таблицей производных и правилами дифференцирования, получим

$$(y^2)' - (2px)' = 0,$$

т.е. $2yy' - 2p = 0$, откуда следует, что $y' = p/y$.

б) Аналогично

$$(x^3)' - (y^3)' - (3xy)' = 0,$$

т.е.

$$3x^2 + 3y^2y' - 3y - 3xy' = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

в) Аналогично $[\sin(x - y)]' - 1 - y' = 0$, т.е. $\cos(x - y)(1 - y') - 1 - y' = 0$, откуда $y'[1 + \cos(x - y)] = \cos(x - y) - 1$ и, следовательно,

$$y' = \frac{\cos(x - y) - 1}{1 + \cos(x - y)}.$$

$\Diamond$ Чтобы найти значение производной неявной функции при заданном значении аргумента x, нужно знать и значение функции y при данном x.

Рассмотрим теперь функцию, заданную параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где t – параметр.

Мы будем предполагать, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы по параметру t в рассматриваемой области его изменения и что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда

$$y'_x(x) = \frac{dy}{dx},$$

но в силу свойства инвариантности $dy = \psi'_t(t)dt$ и $dx = \varphi'_t(t)dt$. Следовательно,

$$y'_x(t) = \frac{\psi'_t(t)}{\varphi'_t(t)}. \tag{14.28}$$

Пример 14.19. Найти производные функций, заданных параметрически:

$$\text{а)}\ \begin{matrix} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t; \end{matrix} \qquad \text{б)}\ \begin{matrix} x = 3\log_2 \operatorname{ctg} t, \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t; \end{matrix} \qquad \text{в)}\ \begin{matrix} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{matrix}$$

Решение. а) Так как

$$x'_t = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2},$$

то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1 - 1/(1+t^2)}{2t/(1+t^2)} = \frac{t}{2}.$$

б) Поскольку

$$x'_t = 3\frac{1}{\operatorname{ctg} t}\Big(-\frac{1}{\sin^2 t}\Big)\frac{1}{\ln 2} = -\frac{3}{\ln 2 \cos t \sin t},$$

$$y'_t = \frac{1}{\cos^2 t} - \frac{1}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos^2 t \sin^2 t} = -\frac{\cos 2t}{\cos^2 t \sin^2 t},$$

то

$$y'_x = \Big(-\frac{\cos 2t}{\cos^2 t \sin^2 t}\Big)\Big(-\frac{\ln 2 \cos t \sin t}{3}\Big) = \frac{\ln 2}{3}\frac{\cos 2t}{\cos t \sin t} = \frac{2\ln 2}{3}\frac{\cos 2t}{\sin 2t} = \frac{\ln 4}{3}\operatorname{ctg} 2t.$$

в) Так как

$$x'_t = -e^{-t}, \qquad y'_t = e^{2t}2,$$

то

$$y'_x = \frac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t}.$$

Разрешив данное уравнение $x = \varphi(t)$ относительно t, параметрически заданную функцию удаётся записать в явном виде: $y = \psi(t(\varphi^{-1}(x))$. Действительно, поскольку $e^t = 1/x$, то $y = 1/x^2$ и, следовательно, $y'_x = -2/x^3$.

15. Производные и дифференциалы высших порядков

15.1. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Эта производная от заданной функции может оказаться, в свою очередь, непрерывной и дифференцируемой функцией в некотором интервале $]a, b[$. Поэтому можно говорить о производной от первой производной.

♦ Производная от первой производной называется *второй производной* и символически обозначается так

$$y'' = f''(x) = [f'(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Если вторая производная также дифференцируема, то можно говорить о производной от второй производной.

♦ Производную от второй производной называют *производной третьего порядка* и обозначают через $f'''(x) = [f''(x)]'$.

Вообще *производной n-го порядка функции* $y = f(x)$ называют производную от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = [f^{(n-1)}]' = f^{(n)}.$$

Итак, чтобы найти, например, производную пятого порядка от заданной функции, нужно найти 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю, а пятая производная есть производная от четвертой.

♦ Функцию, имеющую в каждой точке множества X производные до n-го порядка включительно, называют *n раз дифференцируемой на множестве* X.

Пример 15.1. Найти $y^{(5)}$ от функции $y = x^4$.

Решение. По правилу дифференцирования степенной функции

$$\begin{aligned}
&y' = (x^4)' = 4x^3;\\
&y'' = (4x^3)' = 12x^2;\\
&y''' = (12x^2)' = 23x;\\
&y^{(4)} = (24x)' = 24;\\
&y^{(5)} = 24' = 0.
\end{aligned}$$

Пример 15.2. Найти $y^{(n)}$ от функции $y = e^{ax}$.

Решение. Чтобы найти n-ю производную заданной функции, нужно найти первую, вторую, третью производные. Может быть, этого будет достаточно, чтобы подметить закон, определяющий n-ю производную.

Для нашего примера

$$y' = (e^{ax})' = ae^{ax}, \quad y'' = a^2e^{ax}, \quad y''' = a^3e^{ax}, \quad y^{(n)} = a^ne^{ax}.$$

Пример 15.3. Найти n-ю производную функции $y = \sin x$.

Решение. Согласно правилам дифференцирования, последовательно получим

$$\begin{aligned}
&y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\\
&y'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right);\\
&y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

Иногда нужно указывать ту переменную, по которой производится дифференцирование. Тогда пишут y''_{xx} или y'''_{xxx}.

15.2. Механический смысл второй производной

Пусть движение материальной точки по прямой описывается законом $S = f(t)$. Известно, что производная от пути по времени есть скорость, т.е. если $S = f(t)$, где S – пройденный путь, а t – время, то

$$\frac{dS}{dt} = f'(t) = v(t).$$

Найдём вторую производную, которая представляет собой $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \Delta v/\Delta t$. Отношение $\Delta v/\Delta t$ характеризует быстроту изменения скорости за промежуток времени Δt и даёт среднее ускорение за этот промежуток, а предел этого отношения даёт ускорение a рассматриваемого движения в момент времени t:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$$

или

$$\frac{dv}{dt} = a,$$

или

$$\frac{d(dS/dt)}{dt} = a,$$

окончательно

$$\frac{d^2S}{dt^2} = a,$$

т.е. вторая производная от пути по времени есть ускорение.

Скорость $S'_t = v$ и ускорение $S''_t = a$ играют важную роль в физике и механике. Так, по закону Ньютона ускорение пропорционально действующей силе.

Кроме того, первая и вторая производные имеют важные геометрические приложения, с которыми мы познакомимся позднее.

Пример 15.4. Известно, что высота S, которой достигает за t секунд тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v м/с, даётся формулой

$$S = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

а) Найти скорость и ускорение в любой момент;
б) сколько времени тело поднимается до наибольшей высоты;
в) какова эта наибольшая высота;
г) найти скорость в конце второй секунды и наибольшую высоту при $v_0 =$ 100 м/с.

Решение. а) Скорость v есть производная от пути по времени:

$$v = \frac{dS}{dt} = \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2}\right)'_t = v_0 - gt,$$

а ускорение есть вторая производная по времени:

$$a = \frac{d^2 S}{dt^2} = (v_0 - gt)'_t = -g.$$

б) При тех t, для которых $v = v_0 - gt > 0$, тело летит вверх, а при тех, для которых $v = v_0 - gt < 0$, тело падает. Наибольшей высоты тело достигнет в тот момент, когда скорость обращается в нуль: $v = v_0 - gt = 0$, откуда $t = v_0/g$.

в) Если в уравнение движения подставить найденное значение $t = v_0/g$, то мы получим наибольшую высоту, которой достигнет тело: $S_{\max} = v^2/2g$.

г) Если $v_0 = 100$ м/с, то скорость в конце второй секунды будет равна

$$v|_{t=2} = v_0 - 2g = 100 - 2 \cdot 9{,}81 \approx 80{,}4 \text{ м/с}$$

и наибольшая высота

$$S_{\max} = 10000/2 \cdot 9{,}8 \approx 510 \text{ м.}$$

15.3. Дифференциалы высших порядков

Выше мы выяснили, что дифференциал непрерывной и дифференцируемой функции определяется соотношением

$$dy = f'(x)dt.$$

Как мы знаем, дифференциал dx независимой переменной совпадает с её произвольным приращением Δx. Значит, эта величина есть число, не зависящее от x. Зафиксируем dx, т.е. будем считать, что dx некоторым постоянным числом. Тогда dy будет функцией от x, и можно поставить вопрос о нахождении дифференциала этой функции.

♦ Дифференциал от первого дифференциала есть *дифференциал второго порядка* и символически обозначается так:

$$d^2 y = d(dy).$$

Итак,

$$d^2 y = d(dy) = d[f'(x)dx] = [f'(x)dx]'dx = f''(x)dx^2,$$

т.е. дифференциал второго порядка равен второй производной, умноженной на dx^2.

Сам дифференциал dy функции $y = f(x)$ обычно называют *дифференциалом первого порядка*, или *первым дифференциалом*, функции.

Аналогично дифференциал третьего порядка есть дифференциал от второго дифференциала:

$$d^3y = d(d^2y) = d[f''(x)dx^2] = [f''(x)dx^2]'dx = f'''(x)dx^3.$$

Вообще дифференциал n-го порядка от функции равен произведению n-ой производной на n-ю степень дифференциала аргумента. Итак,

$$\begin{aligned}
&dy = y'dx;\\
&d^2y = y''dx^2;\\
&d^3y = y'''dx^3;\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&d^ny = y^{(n)}dx^n.
\end{aligned}$$

Эти формулы позволяют представить $y', y'', \dots, y^{(n)}$ в виде частного:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n},$$

т.е. отношения n-го дифференциала к n-ой степени дифференциала аргумента.

15.4. Вычисление производных высших порядков

В примерах 15.1–15.3 мы нашли производные высших порядков для некоторых простейших элементарных функций. Обобщим правила дифференцирования и дополним таблицу производных правилами вычисления производных любых порядков.

Теорема 15.1. *Если $u(x)$ и $v(x)$ являются n раз дифференцируемыми функциями, то для них справедливы следующие соотношения:*

$$[Cu(x)]^{(n)} = Cu^{(n)}(x), \quad C = \text{const}; \tag{15.1}$$

$$[u(x) + v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x) + v^{(n)}(x); \tag{15.2}$$

$$[u(x)v(x)]^{(n)} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k(x)}{k!}\frac{v^{(n-k)}(x)}{(n-k)!}. \tag{15.3}$$

Доказательство. Для $n = 1$ и $n = 2$ эти соотношения очевидны. Справедливость их для произвольного n проверяется методом математической индукции.

♦ Формула (15.3) называется *формулой Лейбница.*

При вычислении производных n-го порядка основную таблицу производных можно дополнить следующими формулами:

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-[n-1])x^{\alpha-n}; \tag{15.4}$$

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}x^{m-n} & \text{при } n < m;\\ m! & \text{при } n = m,\ n, m \in \mathbb{N};\\ 0 & \text{при } n > m; \end{cases} \tag{15.5}$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad a > 0,\ a \neq 1; \tag{15.6}$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x; \tag{15.7}$$

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}; \tag{15.8}$$

$$(\ln|x+a|)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}; \tag{15.9}$$

$$(\sin ax)^{(n)} = a^n \sin\Big(ax + n\frac{\pi}{2}\Big); \tag{15.10}$$

$$(\cos ax)^{(n)} = a^n \cos\Big(ax + n\frac{\pi}{2}\Big). \tag{15.11}$$

Формулы (15.5), (15.7), (15.10) выведены в примерах 15.1–15.3. Остальные можно получить аналогично методом математической индукции.

Пример 15.5. Найти $f^{(n)}(x)$, если

$$1)\ \ f(x) = \sin^3 x; \qquad 2)\ \ f(x) = \frac{1}{x^2-1}.$$

Решение. 1) Из известного тригонометрического равенства следует, что

$$\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

Применив формулы (15.2) и (15.10), найдём

$$(\sin^3 x)^{(n)} = \frac{3}{4}(\sin x)^{(n)} - \frac{3^n}{4}(\sin 3x)^{(n)} = \frac{3}{4}\sin\Big(x + n\frac{\pi}{2}\Big) - \frac{3^n}{4}\sin\Big(3x + n\frac{\pi}{2}\Big).$$

2) Так как

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\Big],$$

то, применив соотношение (15.8), получим

$$\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\Big[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\Big].$$

Пример 15.6. Найти $f^{(n)}(x)$ для $n > 2$, если

$$1)\ \ f(x) = x^2\sin x; \qquad 2)\ \ f(x) = (1-2x^2)\ln x.$$

Решение. 1) Воспользуемся формулой Лейбница, учитывая при этом, что $(x^2)' = 2x$, $(x^2)'' = 2$, $(x^2)''' = \ldots = (x^2)^{(n)} = 0$, и формулу (15.10). Получим

$$(x^2\sin x)^{(n)} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(x^2)^{(k)}}{k!}\frac{(\sin x)^{(n-k)}}{(n-k)!} =$$

$$= n!\Big[x^2\frac{(\sin x)^{(n)}}{n!} + 2x\frac{(\sin x)^{(n-1)}}{1!(n-1)!} + 2\frac{(\sin x)^{(n-2)}}{2!(n-2)!} + 0\Big] =$$

$$= x^2\sin\Big(x+n\frac{\pi}{2}\Big)+2xn\sin\Big(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\Big)+n(n-1)\sin\Big(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\Big)=$$
$$=[x^2-n(n-1)]\sin\Big(x+\frac{\pi n}{2}\Big)+2xn\sin\Big(x+\frac{\pi(n-1)}{2}\Big).$$

2) Поскольку $(1-2x^2)'=-4x$, $(1-2x^2)''=-4$, $(1-2x^2)'''=\ldots=(1-2x^2)^{(n)}=0$, то по формуле Лейбница с учётом (15.9) найдём

$$[(1-2x^2)\ln x]^{(n)}=n!\Big[(1-2x^2)\frac{(\ln x)^{(n)}}{n!}-4x\frac{(\ln x)^{(n-1)}}{1}!(n-1)!-4\frac{(\ln x)^{(n-2)}}{2!(n-2)!}+0\Big]=$$
$$=(1-2x^2)\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}-4xn\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}-4\frac{(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!}{2x^{n-2}}.$$

Для параметрически заданных функций

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

производные высших порядков находятся по правилу

$$y'_x=y'_t\frac{1}{x'_t},\quad y''_x=(y'_x)'_t\frac{1}{x'_t},\quad \ldots,\quad y^{(n)}_x=(y^{(n-1)}_x)'_t\frac{1}{x'_t}=\Big(\frac{1}{x'_t}\frac{d}{dt}\Big)^{n-1}\frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (15.12)$$

Пример 15.7. Найти d^2y/dx^2 для первых двух параметрически заданных функций из примера 14.19.

Решение. Как следует из примера 14.19, для случая а): $x=\ln(1+t^2)$, $y=t-\operatorname{arctg} t$ имеем

$$x'_t=\frac{2t}{1+t^2},\quad y'_x=\frac{t}{2}.$$

Следовательно, согласно (15.12),

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t\frac{1}{x'_t}=\Big(\frac{t}{2}\Big)'_t\frac{1}{2t/(1+t^2)}=\frac{1+t^2}{4t}.$$

Для случая б): $x=3\log_2\operatorname{ctg} t$, $y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t$, мы в примере 14.19 нашли

$$x'_t=-\frac{6}{\ln 2\sin 2t},\quad y'_x=\frac{2\ln 2}{3}\operatorname{ctg} 2t.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(y'_x)'_t\frac{1}{x'_t}=\frac{2\ln 2}{3}(\operatorname{ctg} 2t)'_t\Big(-\frac{\ln 2\sin 2t}{6}\Big)=$$
$$=-\frac{(\ln 2)^2}{9}\Big(-\frac{2}{\sin^2 2t}\Big)\sin 2t=\frac{2}{9}(\ln 2)^2\frac{1}{\sin 2t}.$$

Пример 15.8. Показать, что для параметрически заданной функции $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ справедлива формула

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''_x=\frac{\psi''_t\varphi'_t-\varphi''_t\psi'_t}{(\varphi'_t)^3}, \qquad (15.13)$$

и с её помощью найти вторую производную функции в): $x=e^{-t}$, $y=e^{2t}$ из примера 14.19.

Решение. Согласно (15.12), имеем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_x = (y'_x)'_t \frac{1}{x'_t}.$$

Поскольку

$$y'_x = \frac{\psi'_t}{\varphi'_t}, \quad (y'_x)'_t = \frac{\psi''_t\varphi'_t - \varphi''_t\psi'_t}{(\varphi'_t)^2}, \quad x'_t = \varphi'_t,$$

то

$$y''_x = \frac{\psi''_t\varphi'_t - \varphi''_t\psi'_t}{(\varphi'_t)^2}\frac{1}{\varphi'_t} = \frac{\psi''_t\varphi'_t - \varphi''_t\psi'_t}{(\varphi'_t)^3},$$

что и требовалось доказать.

Из примера 14.19,в) для $x = e^{-t} = \varphi(t)$, $y = e^{2t} = \psi(t)$ имеем $\varphi'_t = -e^{-t}$, $\varphi''_t = e^{-t}$, $\psi'_t = 2e^{2t}$, $\psi''_t = 4e^{2t}$, следовательно,

$$y''_x = \frac{4e^{2t}(-e^{-t}) - e^{-t}2e^{2t}}{(-e^{-t})^3} = 6e^{2t}.$$

В заключение рассмотрим пример на вычисление производных высших порядков функций, заданных неявно.

Если нужно найти вторую производную от неявной функции, следует продифференцировать полученное для y' равенство (снова рассматривая y как функцию от x), а затем заменить y' его выражением, полученным при первом дифференцировании. Аналогично находятся y''', $y^{(4)}$ и т.д.

Пример 15.9. Найти y'', если

$$\operatorname{arctg} y + x - y = 0.$$

Решение. Продифференцируем неявно заданную функцию:

$$(\operatorname{arctg} y)' + x' - y' = 0,$$

т.е.

$$\frac{y'}{1+y^2} + 1 - y' = 0,$$

откуда

$$\Big(\frac{1}{1+y^2} - 1\Big)y' = -1$$

или $y' = y^{-2} + 1$.

Снова продифференцируем полученное выражение:

$$(y')' = (y^{-2})' + 1',$$

т.е.

$$y'' = -2y^{-3}y' + 0,$$

откуда

$$y'' = -\frac{2y'}{y^3},$$

но

$$y' = \frac{1}{y^2} + 1,$$

тогда

$$y'' = -\frac{2}{y^3}\,\frac{1+y^2}{y^2} = -\frac{2(1+y^2)}{y^5}.$$

16. Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема 16.1 (Теорема Ролля о корнях производной). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$; дифференцируема в промежутке $]a,b[$ и принимает равные значения $f(a) = f(b)$ на концах $[a,b]$, то между a и b существует по крайней мере одна такая точка c, в которой производная этой функции обратится в нуль: $f'(c) = 0$. Число c называется корнем производной функции $f(x)$.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она достигает на $[a,b]$ своего наибольшего M и наименьшего m значений:

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Если $m = M$, то $f(x)$ в $]a,b[$ сохраняет постоянное значение $f(x) = M$. Поэтому $f'(x)$ как производная постоянной равна нулю во всех точках $]a,b[$, и за точку c можно взять любую точку этого отрезка. Если же $M \neq m$, то или $M \neq 0$, или $m \neq 0$.

Пусть $M > 0$ и $y = f(x)$ принимает наибольшее значение при $x = c$, т.е. $f(c) = M$ $(a < c < b)$. Тогда

$$f(c+\Delta x) - f(c) \leqslant 0$$

как при $\Delta x > 0$, так и при $\Delta x < 0$. Следовательно,

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0 \quad \text{при } \Delta x > 0; \tag{16.1}$$

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geqslant 0 \quad \text{при } \Delta x < 0. \tag{16.2}$$

По условию теоремы, производная при $x = c$ существует. Поэтому в пределе при $\Delta x \to 0$ получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \leqslant 0 \text{ при } \Delta x > 0; \tag{16.3}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c) \geqslant 0 \text{ при } \Delta x < 0. \tag{16.4}$$

Таким образом, мы пришли к противоречию: $f'(c) \leqslant 0$ и $f'(c) \geqslant 0$. Противоречие разрешимо в том случае, когда $f'(c) = 0$. Следовательно, внутри $[a,b]$ найдётся точка $x = c$, в которой $f'(c) = 0$.

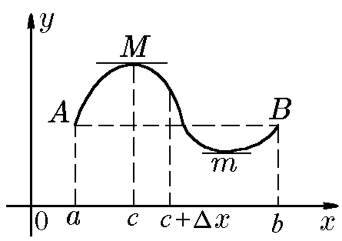


Рис. 61.

Теорема Ролля имеет следующую геометрическую интерпретацию: если непрерывная кривая, имеющая в каждой точке касательную (в этом случае говорят, что кривая гладкая), принимает равные значения на границах отрезка $[a,b]$, то на этой кривой найдётся по крайней мере одна точка с абсциссой $x = c$, $a < c < b$, в которой касательная параллельна оси Ox (см. рис. 61).

$\Diamond$ Если функция $f(x)$ такова, что производная существует не во всех точках $]a,b[$, то утверждение теоремы неверно, т.е. в этом случае между a и b нет такой точки $x = c$, в которой $f'(c) = 0$. Например, функция $y = f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $f(-1) = f(1) = 0$, но её производная

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

в этом промежутке в нуль не обращается. Причина этого – внутри $[-1, 1]$ существует точка $x = 0$, в которой производная не существует (обращается в бесконечность), и условия теоремы не выполнены.

Пример 16.1 Доказать, что на $[-1, 2]$ для функции

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$$

справедлива теорема Ролля.

Решение. Действительно, на концах отрезка $[-1, 2]$ значения функции совпадают: $f(-1) = f(2) = 0$. Вместе с тем функция как полином 3-го порядка на этом отрезке является непрерывной и дифференцируемой. Следовательно, все условия теоремы Ролля выполняются, поэтому на отрезке $[-1, 2]$ существует по крайней мере одна точка c, в которой $f'(c) = 0$. Теорема Ролля не указывает правило, по которому можно найти точку c в общем случае. Тем не менее, используя явный вид функции, мы можем найти точку c для конкретных функций. Так как

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 7,$$

то из уравнения

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 7 = 0$$

находим два корня:

$$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{148}}{6} \approx -3{,}4; \quad x_2 = \frac{-8 + \sqrt{148}}{6} \approx 0{,}7,$$

из которых $x_2 \approx 0{,}7$ принадлежит отрезку $[-1, 2]$, т.е. $c = (-4 + \sqrt{37})/3 \approx 0{,}7$.

Теорему Ролля можно сформулировать и так: между двумя нулями дифференцируемой функции $f(x)$ заключен по крайнем мере один нуль производной.

Теорема 16.2 (Лагранжа). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в любой точке $]a, b[$, то разность значений функции $y = f(x)$ на концах $[a, b]$ равна длине $b - a$ отрезка $[a, b]$, умноженной на производную функции, вычисленной для некоторого промежуточного среднего значения $x = c$, $a < c < b$, т.е.*

$$\Delta y \equiv f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \tag{16.5}$$

или

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{16.6}$$

Доказательство. Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a). \tag{16.7}$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна на $[a, b]$, так как функция $f(x)$ непрерывна на этом отрезке; она дифференцируема, т.е. имеет конечную производную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

так как существует конечная производная $f'(x)$ в $]a, b[$; значения функции на концах промежутка равны, так как $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, согласно теореме Ролля, в $]a, b[$ существует такая точка c, что $F'(c) = 0$, откуда

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 16.2.1. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[a, b]$ и $f'(x) = k$, где k — постоянная, то $f(x)$ — линейная функция:

$$f(x) = k(x - a) + f(a). \tag{16.8}$$

Действительно, функция $f(x)$ удовлетворяет теореме Лагранжа на любом отрезке $[a, x] \subset [a, b]$, и, следовательно, согласно формуле (16.6), $f(x) - f(x) = k(x - a)$, что и требовалось доказать.

$\Diamond$ Важным частным случаем следствия 16.2.1 является случай, когда $k = 0$. Тогда функция постоянна и $f(x) = f(a)$.

Следствие 16.2.2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ дифференцируемы при $b > x \geqslant a$ и удовлетворяют условиям $f_1(a) = f_2(a)$, $f_1'(x) > f_2'(x)$ при $x > a$, то $f_1(x) > f_2(x)$ при $a < x < b$.

Рассмотрим функцию $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, для которой $f(a) = 0$ и $f'(x) = f_1'(x) - f_2'(x)$. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на отрезке $[a, x] \subset [a, b]$. Тогда, согласно теореме Лагранжа, существует точка $c \in [a, x]$ такая, что $f(x) = f'(c)(x - a)$. Отсюда, учитывая, что $c > a$ и $f'(c) = f_1'(c) - f_2'(c) > 0$, получим $f(x) = f'(c)(x - a) > 0$, т.е. $f_1(x) > f_2(x)$ при $a < x < b$.

Пример 16.2. Доказать, что

$$\text{а)}\quad \ln(1 + x) > x - \frac{x^2}{2}; \qquad \text{б)}\quad \operatorname{arctg} x > x - \frac{x^3}{3}$$

при $x > 0$.

Решение. а) Пусть $f_1(x) = \ln(x+1)$, $f_2(x) = x - x^2/2$, тогда $f_1(0) - f_2(0) = 0$. Для производных $f_1'(x) = 1/(1+x)$ и $f_2'(x) = 1 - x$ справедливо неравенство $1/(x+1) > 1 - x$, так как при $x > 0$ это неравенство равносильно очевидному неравенству $1 > 1 - x^2$. Применив следствие 16.2.2 к функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$, получим неравенство $\ln(1+x) > x - x^2/2$, что и требовалось показать.

б) Аналогично, пусть $f_1(x) = \operatorname{arctg} x$, $f_2(x) = x - x^3/3$, тогда $f_1(0) - f_2(0) = 0$. Для производных $f_1'(x) = 1/(1+x^2)$ и $f_2'(x) = 1 - x^2$ справедливо неравенство $1/(x^2+1) > 1 - x^2$, так как это неравенство равносильно очевидному неравенству $1 > 1 - x^4$. Применив следствие 16.2.2 к функциям $\operatorname{arctg} x$ и $x - x^3/3$, получим неравенство $\operatorname{arctg} x > x - x^3/3$, что и требовалось показать.

♦ Теорема Лагранжа называется также *теоремой о конечных приращениях*, а равенство (16.6) — *формулой Лагранжа.*

◊ Формула Лагранжа даёт точное выражение для приращения функции $f(x)$, поэтому её и называют *формулой конечных приращений* в отличие от приближенного равенства

$$f(b) - f(a) \approx f'(a)(b - a),$$

где $b - a = o(1)$ при $b \to a$, которое иногда называют *формулой бесконечно малых приращений.*

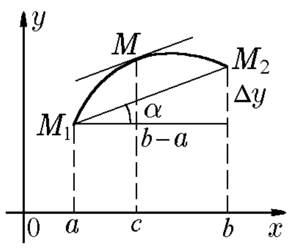


Рис. 62.

Теорема Лагранжа допускает следующую геометрическую интерпретацию: между двумя различными точками M_1 и M_2 непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющей касательную в каждой точке (гладкая кривая), существует хотя бы одна точка M с абсциссой $x = c$, в которой касательная параллельна хорде, соединяющей точки M_1 и M_2 (рис. 62).

По условию теоремы $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема в $]a, b[$. Координаты точки $M_1[a, f(a)]$, а точки $M_2[b, f(b)]$; $x = c$ – абсцисса точки M. Тогда угловой коэффициент хорды M_1M_2

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha,$$

а угловой коэффициент касательной в точке M

$$k_1 = f'(c).$$

Касательная параллельна хорде M_1M_2, поэтому $k = k_1$ или

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{16.9}$$

◊ Теорема Лагранжа утверждает: для непрерывной на $[a, b]$ и дифференцируемой в $]a, b[$ функции $y = f(x)$ существует внутри этого интервала хотя бы одна точка c ($a < c < b$), для которой имеет место равенство (16.9), т.е. средняя скорость изменения функции совпадает с мгновенной скоростью в некоторой промежуточной точке $x = c$.

◊ Формула (16.6) имеет большое теоретическое значение, но малопригодна для практических расчётов, ибо она говорит о существовании числа c, но не указывает, как его найти. Лишь для линейной и квадратичной функций точка $x = c$ всегда является серединой интервала $]a, b[$, т.е. $c = (a+b)/2$. В других случаях положение точки $x = c$ определяется конкретным видом функции $f(x)$ и отрезком $[a, b]$.

Формулу (16.6) можно записать в другом виде. Так как $a < c < b$, то отношение

$$\frac{c-a}{b-a} = \theta$$

заключено между нулем и единицей, и поэтому можно записать

$$c = a + \theta(b-a), \quad 0 < \theta < 1,$$

и формулу Лагранжа можно написать в виде

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'[a + \theta(b-a)]. \tag{16.10}$$

Положим $a = x$, $b = x + \Delta x$. Тогда $b - a = \Delta x$, и формула Лагранжа примет вид

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta\Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1. \tag{16.11}$$

Теорема 16.3 (Коши). *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на $[a, b]$; дифференцируемы в $]a, b[$, т.е. имеют конечные производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$; производная $\varphi'(x) \neq 0$ в $]a, b[$, то найдётся хотя бы одна такая точка c внутри $[a, b]$, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad a < c < b. \tag{16.12}$$

Эта формула называется *формулой Коши.*

Доказательство. Так как $\varphi'(x) \neq 0$ в $]a, b[$, то из формулы Лагранжа для функции $\varphi(x)$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(c)$$

следует, что $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$ и на эту разность можно разделить.

Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}[\varphi(x) - \varphi(a)]. \tag{16.13}$$

Она удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$, так как на $[a, b]$ непрерывны, по условию, $f(x)$ и $\varphi(x)$. Функция $F(x)$ дифференцируема, т.е. имеет конечную производную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(x),$$

так как в этом интервале существуют, по условию, конечные производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$. Наконец, $F(a) = F(b) = 0$. Следовательно, согласно теореме Ролля, существует внутри $[a, b]$ такая точка $x = c$, что $F'(c) = 0$. Таким образом,

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}\varphi'(c) = 0,$$

откуда

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

что и требовалось доказать. Формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши при $\varphi(x) \equiv x$.

Теорема Коши даёт возможность сравнивать скорость изменения одной функции $f(x)$ со скоростью изменения другой функции $\varphi(x)$, в то время как в теореме Лагранжа речь идет об определении скорости изменения функции по отношению к аргументу.

$\Diamond$ Теорема Коши не является результатом применения теоремы Лагранжа к числителю и знаменателю дроби, стоящей в левой части равенства (16.12). Поэтому по теореме Лагранжа $f(b)-f(a) = f'(c_1)(b-a)$, а $\varphi(b)-\varphi(a) = \varphi(c_2)(b-a)$, где $c_1 \in]a,b[$ и $c_2 \in]a,b[$, но, вообще говоря, $c_1 \neq c_2$ и

$$\frac{f'(c_1)}{\varphi'(c_2)} \neq \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

17. Формула Тейлора

Теорема 17.1 (Тейлора). *Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном отрезке $[a,b]$, а в интервале $]a,b[$ обладает производными до $(n+1)$-го порядка включительно и её производные до n-го порядка имеют предельные значения*

$$\lim_{x\to a+0} f^{(k)}(x) = f^{(k)}(a), \quad k = \overline{0,n},$$

то существует такая точка $c \in]a,b[$, что

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}. \tag{17.1}$$

Формула (17.1) называется *формулой Тейлора*, а при $a = 0$ — *формулой Маклорена.*

Лемма 17.1. *Пусть функции $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и в интервале $]a,b[$ имеют производные до $(n+1)$-го порядка включительно, причём $G^{(k)}(x)$ не обращается в нуль, и существуют пределы*

$$\lim_{x\to a+0} G^{(k)}(x) = \lim_{x\to a+0} F^{(k)}(x) = 0, \qquad k = \overline{0,n}. \tag{17.2}$$

Тогда существует точка $c \in]a,b[$, в которой справедливо соотношение

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)}. \tag{17.3}$$

Доказательство. Доопределим функции $F^{(k)}(x)$ и $G^{(k)}(x)$ в точке $x = a$, положив $F^{(k)}(a) = G^{(k)}(a) = 0$, $k = \overline{0,\infty}$. Тогда, согласно теореме Коши о дифференцируемости функций, существует точка $c \in]a,b[$, в которой

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)}. \tag{17.4}$$

Применим теорему Коши ещё раз к промежутку $]a, c_1[$:

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F'(c_1)}{G'(c_1)} = \frac{F'(c_1) - F'(a)}{G'(c-1) - G'(a)} = \frac{F''(c_2)}{G''(c_2)}.$$

Продолжив аналогично, после n шагов найдём точку $c \in]a, c_n[$, для которой

$$\frac{F(b)}{G(b)} = \frac{F^{(n)}(c_n)}{G^{(n)}(c_n)} = \frac{F^{(n)}(c_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(c-n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(c)}{G^{(n+1)}(c)},$$

что и требовалось доказать.

Докажем теперь формулу Тейлора.
Доказательство. Положим в условии леммы

$$F(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!},$$
$$G(x) = (x-a)^{n+1}.$$

Функция $F(x)$ имеет производные $(n+1)$-го порядка, так как функция $f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка по условию теоремы. Поскольку

$$\left[\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right]^{(m)}\Bigg|_{x=a} = f^{(m)}(a),$$

то

$$F^{(m)}(a) = f^{(m)}(a) - f^{(m)}(a) = 0, \qquad m = \overline{0, n}.$$

Аналогично $G^{(m)}(a) = 0$, $m = \overline{0, n}$. Таким образом, все условия леммы выполнены, и её можно применить. При этом

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x), \qquad \Phi^{(n+1)}(x) = (n+1)!.$$

Из условий леммы следует, что существует такая точка $c \in]a, b[$, что

$$\frac{F(b)}{\Phi(b)} = \frac{f(b) - \sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)(b-a)^k/k!}{(b-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}.$$

Таким образом, теорема доказана.

♢ Мы рассмотрели случай, когда $a < b$. Но доказательство формулы Тейлора можно провести точно таким же образом для $b < a$. В обоих случаях точка c лежит между a и b.

Заметим, что мы рассмотрели интервал $]a, b[$, аналогично рассматривается интервал $]b, a[$. В общем случае, если зафиксировать одну из границ интервала в точке x_0, а другую считать переменной x, то формулу (17.1) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{17.5}$$

Легко увидеть, что при $n = 0$ из (17.5) следует формула Лагранжа (16.6).

♦ Соотношение (17.5) называется *формулой Тейлора для функции* $f(x)$, полином

$$P_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{17.6}$$

— *полиномом Тейлора*, а слагаемое

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{17.7}$$

— *остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа.*

Именно в такой форме в силу её простоты наиболее часто записывают остаточный член $r_n(x, x_0)$. Однако в отдельных случаях эта форма оказывается малопригодной для его оценки, и приходится прибегать к другим, менее простым формам записи, а именно интегральной форме (которую мы рассмотрим позже) и форме Коши.

Остаточный член $r_n(x, x_0)$ можно записать как

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n(x - x_0), \tag{17.8}$$

где ξ — некоторая точка, расположенная между x_0 и x.

♦ Остаточный член $r_n(x, x_0)$ (17.8) называется *остаточным членом формулы Тейлора в форме Коши.*

Если точку ξ, расположенную между x_0 и x, представить, как $\xi = x_0 + (x - x_0)\theta$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, то остаточный член формулы Тейлора $r_n(x, x_0)$ в формах Лагранжа и Коши можно записать как

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + [x - x_0]\theta)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{17.9}$$

$$r_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + [x - x_0]\theta)}{n!}(1 - \theta)^n(x - x_0)^{n+1}. \tag{17.10}$$

Во избежание недоразумения подчеркнём, что в этих формулах о множителе θ известно лишь только то, что он принимает значения между нулем и единицей и в этих пределах может меняться при изменении x, n и даже просто при переходе от одной формы остаточного члена (17.9) к другой (17.10).

Проще всего формула Тейлора, $P_n(x, x_0)$ и $r_n(x, x_0)$ выглядят, если $x_0 = 0$:

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x), \tag{17.11}$$

где $r_n(x)$ можно записать в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{17.12}$$

или в форме Коши

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^{n+1}x = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1 - \theta)^n x^{n+1}. \tag{17.13}$$

$\diamondsuit$ Как уже отмечалось, замена $X = x - x_0$ сводит формулу (17.5) к формуле (17.11), впервые полученной Маклореном и носящей его имя. Очевидно, что обратный переход от (17.11) к (17.5) осуществляется обратной заменой. Поэтому ниже, в зависимости от задачи, мы будем пользоваться как (17.5), так и (17.11). Все сказанное относительно одного разложения легко переносится на другое. Это замечание распространяется также на формулы (17.9), (17.10) и (17.12), (17.13).

$\diamondsuit$ Особую ценность формула Тейлора представляет для приближенных вычислений. Она позволяет любую функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 17.1, заменять полиномом Тейлора с ошибкой, определяемой остаточным членом формулы Тейлора.

Для широкого класса функций, например тех, у которых $(n+1)$-я производная (по крайней мере, при изменении аргумента между нулем и x) ограничена по абсолютной величине числом M, погрешность, определяемая остаточным членом, удовлетворяет оценке

$$|r_n(x)| < \frac{M|x|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{17.14}$$

Пример 17.1. Получить оценку остаточного члена формулы Тейлора (17.14) для элементарных функций $f(x) = e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^\mu$ и $\ln(1+x)$.

Решение. 1. $f(x) = e^x$.

Поскольку $(e^x)^{(k)}\big|_{x=0} = 1$, имеем

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x). \tag{17.15}$$

Так как остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

то, например, при $x > 0$ погрешность оценивается как

$$|r_n(x)| < \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}. \tag{17.16}$$

В частности, при $|x| \leqslant 1$

$$|r_n(x)| < \frac{3}{(n+1)!}.$$

2. $f(x) = \sin x$

Поскольку $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + k\pi/2)$, то

$$\begin{gathered} \sin 0 = 0, \qquad \sin^{(2m)} 0 = \sin m\pi = 0, \\ \sin^{(2m-1)} 0 = \sin(m\pi - \pi/2) = (-1)^{m-1}, \quad m = \overline{1, \infty}, \end{gathered} \tag{17.17}$$

и, следовательно,

$$\sin x = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + r_{2m}(x). \tag{17.18}$$

В этом случае остаточный член равен

$$r_{2m}(x) = \frac{\sin(\theta x + (2m+1)\pi/2)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = (-1)^m \cos\theta x \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

с оценкой

$$|r_{2m}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}. \tag{17.19}$$

3. $f(x) = \cos x$.

Аналогично предыдущему случаю

$$\cos x = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2m+1}(x); \tag{17.20}$$

$$r_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos\theta x \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!};$$

$$|r_{2m+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}. \tag{17.21}$$

4. $f(x) = (1+x)^\mu$ (степень $\mu \neq 0, 1, 2, \ldots$, поскольку в этом случае разложение имеет вид бинома Ньютона).

$$[(1+x)^\mu]^{(k)} = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)(1+x)^{\mu-k};$$

$$f(0) = 1, \qquad f^{(k)}(0) = \mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1);$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{k!} x^k + r_n(x), \tag{17.22}$$

где

$$r_n(x) = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\mu-(n+1)} x^{n+1},$$

$$r_n(x) = \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n)}{n!}(1+\theta x)^{\mu-n-1}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

в форме Лагранжа и Коши, соответственно. Как уже отмечалось, для $n = \mu$ остаточный член формулы Тейлора равен нулю, т.е. $r_\mu(x) = 0$.

5. $f(x) = \ln(1+x)$.

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k (k-1)!}{(1+x)^k},$$

$$f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!;$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-1} \frac{x^k}{k} + r_n(x). \tag{17.23}$$

Запишем сначала остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

тогда для $0 \leqslant x \leqslant 1$ справедлива оценка

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+n},$$

так как множитель $x/(1+\theta x)$ не превосходит единицы. При $x < 0$ оценить поведение этого множителя сложнее и можно воспользоваться формой Коши

$$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n.$$

Тогда

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\Big|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\Big|^n,$$

причём для $-1 < x < 0$

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{|x|^n}{1-|x|},$$

так как множитель $|1-\theta|/|1+\theta x|$ не будет превосходить единицы, поскольку в этом случае $1+\theta x > 1-\theta$.

Таким образом, для $|x| < 1$ справедлива оценка

$$|r_n(x)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & x > 0; \\ \dfrac{|x|^n}{1-|x|}, & x < 0. \end{cases}$$

$\Diamond$ Помимо рассмотренной выше можно рассмотреть задачу об определении области D, в которой полином Тейлора заменяет исходную функцию при заданном числе слагаемых n с погрешностью r_n.

Например, при $n = 1$ для того, чтобы $\sin x \approx x$ с погрешностью меньше 0,001, согласно (17.19), должно выполняться условие $|x^3/6| < 0,001$ или $|x| < 0,1817$. При использовании двучленной формулы ($n = 2$) для того, чтобы $\sin x \approx x - x^3/6$ с той же точностью, необходимо выполнение условия $|x^5|/(120) < 0{,}001$ или $|x| <$ 0,6544 (что соответствует примерно 37°) и т.д.

Итак, формула Тейлора допускает аппроксимацию функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 с погрешностью, определяемой остаточным членом $r_n(x, x_0)$, который можно представить в различных формах. В тех случаях, когда требуется аппроксимация функции $f(x)$ непосредственно в точке x_0 (так называемая «локальная аппроксимация», когда $x - x_0 \to 0$), то используется ещё одна форма остаточного члена — форма Пеано. Если $n+1$-я производная $f^{(n+1)}(x)$ ограничена при $x \to x_0$, то остаточный член $r_n(x, x_0)$ при $x \to x_0$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $(x - x_0)^n$ и его можно записать в виде

$$r_n(x, x_0) = o((x - x_0)^n). \tag{17.24}$$

Соответственно,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n). \tag{17.25}$$

Например, для $f(x) = (1+x)^{-1}$ при $n = 2$ и $x_0 = 0$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$$

где

$$r_2(x) = o(x^2) = \frac{x^3}{1+x},$$

так как

$$o(x^2) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = -\frac{x^3}{1+x}.$$

Для элементарных функций с учётом (17.15)–(17.23) формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеют вид

$$\begin{aligned}
&e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);\\
&\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});\\
&\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});\\
&(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),\\
&\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).
\end{aligned} \tag{17.26}$$

18. Правило Лопиталя

Напомним, что если функция $y = F(x)$, определённая в проколотой окрестности точки a, становится неопределённой в самой точке, то *раскрытием неопределённости* называется отыскание предела функции $F(x)$ при $x \to a$.

При нахождении предела $\lim\limits_{x\to a} F(x)$ в результате непосредственной подстановки вместо x его предельного значения могут получиться неопределённости семи видов:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty.$$

Выше были приведены некоторые приемы раскрытия таких неопределённостей. Однако существуют более общие способы раскрытия неопределённостей, основанные на методах дифференциального исчисления.

Раскрытие неопределённостей вида 0/0

Если $F(x) = f(x)/\varphi(x)$ и $f(x) \to 0$, $\varphi(x) \to 0$ при $x \to a$, то функция $F(x)$ в точке a имеет неопределённость вида $0/0$.

Сформулируем так называемое правило Лопиталя для раскрытия неопределённостей такого вида.

Теорема 18.1. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при x, близких к a, при таких x (но не равных a) имеют конечную первую производную, причём $\varphi'(x) \neq$*

0, $f(x) \to 0$ и $\varphi(x) \to 0$ при $x \to a$, то предел отношения этих функций при $x \to a$ равен пределу отношения производных этих функций, если последний предел (конечный или бесконечный) существует, т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{18.1}$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в точке a, положив $f(a) = 0$, $\varphi(a) = 0$. Тогда, выбрав некоторое значение переменной x ($x \neq a$), например $x > a$ (или $x < a$), из окрестности точки a, можем утверждать, что на $[a, x]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны, внутри отрезка $[a, x]$ они имеют конечные производные и $\varphi'(x) \neq 0$. Поэтому можно применить формулу Коши, согласно которой

$$\frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad a < c < x.$$

Так как $f(a) = 0$ и $\varphi(a) = 0$, то

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \tag{18.2}$$

Если $x \to a$, то так как $a < c < x$, то c тоже будет стремиться к a. Итак, переходя в (18.2) к пределу, получим

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{c\to a}\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

По условию, этот предел существует, следовательно, существует и предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

и они равны.

Эта теорема справедлива и для случая, когда $x \to a = \pm\infty$.

$\Diamond$ Если отношение $f'(x)/\varphi'(x)$ тоже приводит к неопределённости вида $0/0$, то можно снова применить правило Лопиталя, и, таким образом, в некоторых случаях для раскрытия неопределённости приходится применять это правило последовательно несколько раз.

Пример 18.1. Найти

$$A_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}, \quad A_2 = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида $0/0$. Согласно правилу Лопиталя,

$$A_1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin 4x)'}{(\sin 2x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{2\cos 2x} = \frac{4}{2} = 2;$$

$$A_2 = \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Пример 18.2. Найти

$$A_1 = \lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x}; \quad A_2 = \lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида (0/0). Согласно правилу Лопиталя,

$$A_1 = \lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x} = \lim_{x\to 1} \frac{[x^{x+1}(\ln x + 1) - x]'}{(1 - x)'} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1)(1 + 1/x + \ln x) + x^x - 1}{-1} = -2;$$

$$A_2 = \lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^x - 1)'}{(\ln x - x + 1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{1/x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^{x+1}(\ln x + 1) - x}{1 - x} = A_1 = -2.$$

Пример 18.3. Исследовать на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}, & \text{если } x \neq 0; \\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Функция дифференцируема в точке $x = 0$, если существует конечный предел

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{1/x - 1/(e^x - 1) - 1/2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - xe^x - x}{2x^2(e^x - 1)}.$$

Возникает неопределённость вида (0/0). Трехкратное применение правила Лопиталя даёт

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 2 - xe^x - x}{2x^2(e^x - 1)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{2e^x - 1 - e^x - xe^x}{2x(e^x - 1) + x^2 e^x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-xe^x}{2x(e^x - 1) + e^x(4x + x^2)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{-e^x(x + 1)}{(6 + 6x + x^2)e^x} = -\frac{1}{12}.$$

Следовательно, $f(x)$ дифференцируема в точке $x = 0$, причём $f'(0) = -1/12$.

Раскрытие неопределённостей вида ∞/∞

Для раскрытия неопределённостей такого вида правило Лопиталя применимо, если

1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в проколотой окрестности точки a;
2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$;
3) в проколотой окрестности точки a существуют конечные производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, причём $\varphi'(x) \neq 0$;
4) существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Тогда существует и предел отношения самих функций при $x \to a$, равный пределу отношения их производных

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

если последний предел существует.

Пример 18.4. Найти

$$A_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}; \quad A_2 = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида (∞/∞). Применив правило Лопиталя n раз, получим

$$A_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x^n)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n!} = \infty;$$
$$A_2 = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^n)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{nx^n} = 0.$$

Таким образом, показательная функция e^x возрастает быстрее x в любой положительной целой степени при $x \to \infty$, а логарифмическая функция $\ln x$ возрастает медленнее x в любой положительной степени. Этот же вывод следует из результатов примера 10.4, в котором пределы A_1 и A_2 найдены более громоздким способом, основанным на определении предела.

Пример 18.5. Найти

$$A_1 = \lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{ctg}(x-3)}{\ln(x-3)}.$$

Решение. Последовательно применение правила Лопиталя даёт

$$A_1 = \lim_{x\to 3}\frac{\operatorname{ctg}(x-3)}{\ln(x-3)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 3}\frac{[\operatorname{ctg}(x-3)]'}{[\ln(x-3)]'} = \lim_{x\to 3}\frac{-1/\sin^2(x-3)}{1/(x-3)} =$$
$$= -\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sin^2(x-3)} = \left(\frac{0}{0}\right) = -\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)'}{[\sin^2(x-3)]'} = -\lim_{x\to 3}\frac{1}{2\sin(x-3)\cos(x-3)} =$$
$$= -\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sin 2(x-3)} = \infty.$$

Приведём пример, когда правило Лопиталя не применимо для раскрытия неопределённостей вида $0/0$ или ∞/∞.

Пример 18.6. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}.$$

Решение. Имеем неопределённость вида ∞/∞. Согласно правилу Лопиталя, этот предел равен

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}, \tag{18.3}$$

если последний предел существует. Но он не существует, следовательно, и равенство (18.3) записать нельзя. Однако это не означает, что не существует и предел отношения самих функций. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\Bigl(1+\frac{\sin x}{x}\Bigr)=1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}.$$

Положим $\alpha=1/x$. Тогда $\alpha\to 0$ при $x\to\infty$, и

$$1+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1+\lim_{\alpha\to 0}\alpha\sin\frac{1}{\alpha}=1+0=1.$$

Таким образом, при раскрытии этой неопределённости правило Лопиталя оказалось неприменимым.

Раскрытие неопределённостей вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$

Неопределённости видов $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ можно привести к неопределённостям вида $0/0$ или ∞/∞, к которым применимо правило Лопиталя.

Пусть $f(x)\varphi(x)$ даёт неопределённость $0\cdot\infty$, когда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$. Представив функцию $f(x)\varphi(x)$ в виде

$$f(x)\varphi(x)=\frac{f(x)}{1/\varphi(x)},$$

мы получим в точке a неопределённость вида $0/0$:

$$\lim_{x\to a}f(x)\varphi(x)=0\cdot\infty=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}=\frac{0}{0},$$

для раскрытия которой можно применять правило Лопиталя.

Пусть имеем выражение $f(x)-\varphi(x)$, причём $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, и, следовательно, это выражение становится неопределённостью вида $\infty-\infty$ в точке a. Тогда, написав это выражение в виде

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{1}{1/f(x)}-\frac{1}{1/\varphi(x)}=\Bigl(\frac{1}{\varphi(x)}-\frac{1}{f(x)}\Bigr)\Big/\Bigl(\frac{1}{f(x)}\frac{1}{\varphi(x)}\Bigr),$$

получим неопределённость вида $0/0$, для раскрытия которой можно применять правило Лопиталя.

Пример 18.7. Найти

$$\lim_{x\to 0}\Bigl(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x+x^2}\Bigr).$$

Решение. Вычисление предела сводится к раскрытию неопределённости вида $\infty - \infty$. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x+x^2}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2-\sin x}{(x+x^2)\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x+x^2-\sin x)'}{[(x+x^2)\sin x]'} = \lim_{x\to 0}\frac{1+2x-\cos x}{(1+2x)\sin x + (x+x^2)\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{2+\sin x}{2\sin x + (1+2x)\cos x - (x+x^2)\sin x + (1+2x)\cos x} = \frac{2}{2} = 1.$$

Пример 18.8. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x$.

Решение. Вычисление предела сводится к раскрытию неопределённости вида $0\cdot\infty$. Действительно,

$$\lim_{x\to 0} x^n \ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^n} = -\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-n/x^{n+1}} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^n}{n} = 0.$$

Раскрытие неопределённостей вида 0^0, ∞^0 и 1^∞

Как и в предыдущем случае, неопределённости таких видов сводятся к неопределённостям вида $(0/0)$ или (∞/∞). Этот результат удаётся получить как следствие непрерывности функции e^x.

Пример 18.9. Вычислить

$$A_1 = \lim_{x\to +0} x^{x^x - 1}; \quad A_2 = \lim_{x\to +\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}; \quad A_3 = \lim_{x\to +\infty}(\operatorname{th} x)^x.$$

Решение. Для первого предела A_1 имеем неопределённость вида (0^0), поскольку

$$\lim_{x\to +0} x^x = (0^0) = \lim_{x\to +0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{-\lim\limits_{x\to +0} x} = e^{-0} = 1.$$

Тогда

$$A_1 = \lim_{x\to +0} e^{(x^x-1)\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +0}(x^x-1)\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to +0}\ln x(e^{x\ln x}-1)} = e^{\lim\limits_{x\to +0}\frac{x\ln^2 x(e^{x\ln x}-1)}{x\ln x}} = e^{BD},$$

где

$$B = \lim_{x\to +0} x\ln^2 x, \quad D = \lim_{x\to +0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}.$$

Применив правило Лопиталя, вычислим предел B:

$$B = \lim_{x\to +0}\frac{\ln^2 x}{1/x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to +0}\frac{2\ln x(1/x)}{-1/x^2} =$$
$$= 2\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{-1/x} = 2\lim_{x\to +0}\frac{1/x}{1/x^2} = 2\lim_{x\to +0} x = 0.$$

Для вычисления предела D напомним, что из примера 18.8 следует

$$\lim_{x\to+0} x\ln x = -0,$$

и проведём замену $t = x\ln x$, тогда $x \to +0 \Rightarrow t \to -0$ и

$$D = \lim_{x\to+0} \frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x} = \lim_{t\to-0} \frac{e^t-1}{t} = \lim_{t\to-0} \frac{e^t}{1} = 1.$$

Таким образом, $B = 0$, $D = 1$, а, значит,

$$A_1 = e^{BD} = e^0 = 1.$$

Для второго предела A_2 имеем неопределённость вида ∞^0:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}} = e^{B_2},$$

где

$$B_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)} \frac{1}{\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)} \frac{\pi}{(2x+1)^2} =$$

$$= \pi\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)\cos\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)(2x+1)^2} = 2\pi\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sin\left(\dfrac{2\pi x}{2x+1}\right)(2x+1)^2} =$$

$$= 2\pi\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sin\left(\dfrac{2\pi x+\pi-\pi}{2x+1}\right)(2x+1)^2} = 2\pi\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sin(\pi-\pi/(2x+1))(2x+1)^2} =$$

$$= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi/(2x+1)}{\sin(\pi/(2x+1))}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x+1} = 2\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

Следовательно, $B_2 = 0$ и $A_2 = e^0 = 1$.

Для предела A_3 имеем неопределённость вида 1^∞:

$$A_3 = \lim_{x\to+\infty}(\operatorname{th} x)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(\operatorname{th} x)} = e^{B_3},$$

где

$$B_3 = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\operatorname{th} x)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(1/\operatorname{th} x)(1/\operatorname{ch}^2 x)}{-1/x^2} = -2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\operatorname{sh} 2x} =$$

$$= -2\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2\operatorname{ch} 2x} = -2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2\operatorname{sh} 2x} = 0.$$

Следовательно, $B_3 = 0$ и $A_3 = e^0 = 1$.

19. Исследование функции

Если функция $f(x)$ постоянна на некотором интервале ($f(x) = C$), то её производная $f'(x)$ равна нулю во всех точках этого интервала. Справедливо и обратное утверждение, вытекающее из теорем о дифференцируемых функциях, а именно следствия 16.2.1 из теоремы Лагранжа 16.2.

Таким образом, для того чтобы в некотором промежутке функция сохраняла постоянное значение, необходимо и достаточно, чтобы производная от этой функции в промежутке равнялась нулю. Это и есть признак постоянства функции в промежутке. Рассмотрим теперь признаки возрастания и убывания функции.

19.1. Признаки возрастания и убывания функции

В разделе «Понятие функции одного вещественного переменного» были выделены классы возрастающих и убывающих на интервале функций, объединённых названием «монотонные» и содержащих подмножество строго монотонных, т.е. строго возрастающих и строго убывающих функций (рис. 63). Сформулируем критерии, позволяющие найти области возрастания и убывания дифференцируемых функций.

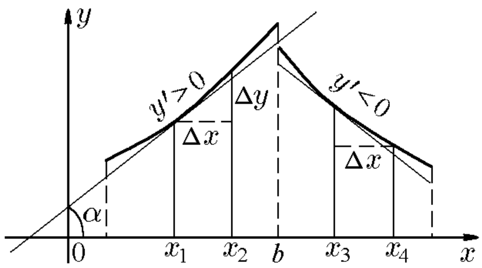


Рис. 63.

Теорема 19.1. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале* $]a, b[$ *функция* $f(x)$ *была неубывающей (невозрастающей) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы её производная была неотрицательна (неположительна) на этом интервале:*

$$f'(x) \geqslant 0 \quad (f'(x) \leqslant 0) \text{ для } \forall x \in]a, b[. \tag{19.1}$$

Доказательство проведём для возрастающей функции (доказательство для убывающей функции аналогично).

Необходимость. Действительно, выбрав точку x, принадлежащую интервалу $[a, b]$, и придав x положительное приращение Δx, столь малое, чтобы точка $x+\Delta x$ не выходила за границы $[a, b]$, можем написать, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) \geqslant 0,$$

так как по условию функция не убывает. Но тогда и

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0, \tag{19.2}$$

а также

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geqslant 0.$$

Если x совпадает с правым концом отрезка, то взяв $\Delta x < 0$, будем иметь

$$f(x + \Delta x) - f(x) \leqslant 0,$$

но

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

так как $\Delta x < 0$, а поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)\geqslant 0.$$

Утверждение доказано.

Здесь мы воспользовались свойством сохранения знака нестрогого равенства при предельном переходе.

Достаточность. Пусть для всех $x\in]a,b[$ выполняется условие $f'(x)\geqslant 0$ и пусть $x_1 < x_2$ — произвольные точки этого интервала. Применив к функции $f(x)$ на отрезке $[x_1,x_2]$ теорему Лагранжа, получим

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),$$

где $f'(c)\geqslant 0$, так как $c\in[x_1,x_2]\subset]a,b[$. Поскольку x_1 и x_2 — произвольные точки интервала $]a,b[$, удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$, то, согласно определению, $f(x)$ — возрастающая на $]a,b[$ функция, что и требовалось доказать.

Если в теореме 19.1 нестрогие неравенства (19.1) заменить строгими, то эти условия будут являться только достаточными, но не необходимыми. Действительно, функция $y=x^3$ является строго возрастающей на $\mathbb{R}$, но в точке $x=0$ её производная $y'=3x^2$ обращается в нуль ($y'=0$), и строгое неравенство $y'>0$ нарушается. Поэтому для строго монотонных функций следующая теорема формулирует только достаточное условие возрастания (убывания) функции.

Теорема 19.2. *Если для всех $x\in]a,b[$ выполняется условие*

$$f'(x)>0\quad (f'(x)<0), \tag{19.3}$$

то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) на интервале $]a,b[$.

Доказательство проведём для условия $f'(x)>0$. Пусть $x_1<x_2$ — произвольные точки интервала $]a,b[$. Согласно теореме Лагранжа

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),\quad c\in]a,b[.$$

Поскольку $f'(c)\geqslant 0$ и $x_2-x_1>0$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$. Это и означает, что функция $f(x)$ строго возрастает на интервале $]a,b[$.

Доказанная теорема позволяет легко установить, что функция $y=\operatorname{th}x$ строго возрастает на $\mathbb{R}$, поскольку $y'=1/\operatorname{ch}^2x>0$ для всех $x\in\mathbb{R}$.

Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (19.3) не на интервале $]a,b[$, а на отрезке $[a,b]$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 19.3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале $]a,b[$ и удовлетворяет условию $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), то эта функция строго возрастает (строго убывает) на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 19.2 с той лишь разницей, что формула Лагранжа применяется к функции $f(x)$ не на отрезке $[x_1,x_2]\subset]a,b[$, а на отрезке $[a,b]$.

$\Diamond$ Промежутки, в которых $f'(x)>0$, есть промежутки возрастания функции, а промежутки, в которых $f'(x)<0$, есть промежутки убывания функции. Геометрически это можно интерпретировать так: из рис. 63 ясно, что на промежутке возрастания функции касательная образует с осью Ox острый угол, тангенс которого положителен. Но $\operatorname{tg}\alpha$ есть первая производная y'_M, т.е. на участке возрастания $y'=\operatorname{tg}\alpha>0$, соответственно, на промежутке убывания $y'=\operatorname{tg}\alpha<0$.

Пример 19.1. Исследовать на возрастание и убывание (найти интервалы строгой монотонности) функцию $y = x^2 - 5x + 3$.

Решение. 1. Область существования – вся ось Ox.

2. Найдём производную от заданной функции:

$$y' = (x^2 - 5x + 3)' = 2x - 5$$

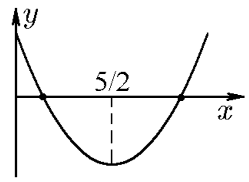


Рис. 64.

и вычислим корни производной: $y' = 2x - 5 = 0$, $2x = 5$, $x_1 = 5/2$. Корень производной $x_1 = 5/2$ разбивает область существования функции $f(x)$ на два интервала: $]-\infty, 5/2[$ и $]5/2, \infty[$. Там, где $y' = 2x - 5 > 0$, функция $f(x)$ возрастает. Решим неравенство $2x - 5 > 0$: $x > 5/2$. Следовательно, $]5/2, \infty[$ – участок возрастания, в этом интервале заданная функция строго возрастает. Там, где $y' = 2x - 5 < 0$, функция $f(x)$ убывает. Из неравенства $2x - 5 < 0$, $x < 5/2$ следует, что функция $f(x)$ убывает в $]-\infty, 5/2[$, т.е. функция в этом интервале строго убывает (рис. 64).

Пример 19.2. Исследовать на возрастание и убывание функцию $y = x^2 2^{-x}$.

Решение. Производная $y' = x2^{-x}(2 - x\ln 2)$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2/\ln 2$ обращается в нуль, и $y'(x) > 0$ для всех $x \in]0, 2/\ln 2[$. Следовательно, на этом интервале функция возрастает. Производная принимает отрицательные значения ($y'(x) < 0$) при $x < 0$ и $x > 2/\ln 2$. Следовательно, функция убывает для всех x, принадлежащих интервалам $]-\infty, 0[$ и $]2/\ln 2, +\infty[$.

Пример 19.3. Показать, что функция $y = (1 + 1/x)^x$ возрастает на интервалах $]-\infty, -1[$ и $]0, +\infty[$.

Решение. Найдём производную функции

$$y'(x) = y(x)\Big[\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}\Big]. \qquad (19.4)$$

Зафиксируем переменную $x = x_0 > 0$. На отрезке $[x_0, x_0 + 1]$ к заданной функции $y = f(x)$ применим формулу конечных приращений: $\Delta x = x_0 + 1 - x_0 = 1$, тогда

$$\ln(x_0 + 1) - \ln x_0 = \frac{1}{c}, \quad x_0 < c < x_0 + 1.$$

Учтем, что $y(x) > 0$ и $1/c > 1/(x_0 + 1)$, и из (19.4) найдём

$$y'(x_0) = y(x_0)\Big(\frac{1}{c} - \frac{1}{x_0+1}\Big) > 0 \quad \text{при } x_0 > 0.$$

Поскольку точка $x = x_0 > 0$ выбрана произвольно, то последнее условие означает, что исследуемая функция на промежутке $x > 0$ является возрастающей.

Для второго интервала $-\infty < x < -1$ производную (19.4) запишем в виде

$$y'(x) = y(x)\Big[\ln(t-1) - \ln t + \frac{1}{t-1}\Big]\Big|_{t=-x}, \quad 1 < t < +\infty. \qquad (19.5)$$

По формуле Лагранжа на отрезке $[t-1, t]$ для функции $\ln t$ имеем

$$-[\ln(t-1) - \ln t] = \frac{1}{c_1}, \quad t-1 < c_1 < t.$$

Учитывая, что $y(x) > 0$ и $1/c_1 < 1/(t-1)$, из (19.5) найдём

$$y'(x) = y(x)\Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{c_1}\Big) > 0 \quad \text{для } 1 < t < +\infty \ (-\infty < x < -1).$$

Это означает, что исследуемая функция на промежутке $x > -1$ также является возрастающей, что и требовалось доказать.

Пример 19.4. Обязательно ли производная монотонной функции является монотонной?

Решение. Не обязательно. Например, производная функции $y = 3x + \cos x$ положительна ($y'(x) = 3 - \sin x > 0$) и функция монотонно возрастает на $\mathbb{R}$. В то же время производная функции $y'(x) = 3 - \sin x$ на $\mathbb{R}$, очевидно, не является монотонной (впрочем, это же следует из того, что $[y'(x)]' = -\cos x$ является знакопеременной функцией).

19.2. Экстремумы функций

Пусть функция $f(x)$ задана в некотором интервале $]a, b[$ (рис. 65). Рассмотрим точки M и m, абсциссы которых соответственно равны c и c_1. Область определения $]a, b[$ функции (см. рис. 65) разбивается на промежутки, на которых функция возрастает или убывает. Так, $]a, c[$ – интервал возрастания функции, на котором $y' = f'(x) > 0$, а $]c, c_1[$ – интервал убывания функции, на котором $y' = f'(x) < 0$, и интервал $]c_1, b[$ – интервал возрастания функции $f(x)$, на котором снова $y' = f'(x) > 0$.

Те точки, которые отделяют промежутки возрастания функции от промежутков её убывания (или наоборот), являются вершинами кривой $y = f(x)$.

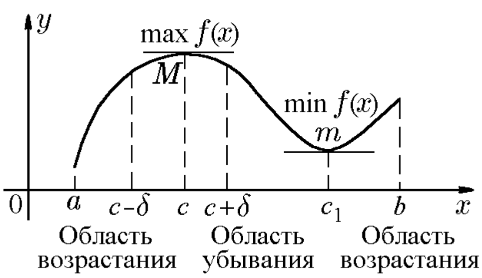


Рис. 65.

♦ Частное значение $f(c)$ функции $f(x)$ во внутренней точке c некоторого интервала называется *локальным максимумом* (max) функции $f(x)$, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, таких, что $0 < |x - c| < \delta$ справедливо $f(c) > f(x)$ (см. рис. 65). Сама точка $x = c$ называется *точкой локального максимума функции* $f(x)$.

Итак, точка максимума — это значение аргумента.

Таким образом, необходимо отличать максимум функции от точки максимума. Аналогично рассмотрим вершину m кривой. Ордината этой точки $f(c_1)$ меньше всех соседних с ней ординат, лежащих как слева, так и справа от точки c_1, как говорят, в окрестности точки c_1: $c_1 - \delta < c_1 < c_1 + \delta$. Тогда говорят, что этой вершине соответствует минимум функции.

♦ Частное значение $f(c_1)$ функции $f(x)$ во внутренней точке c_1 (см. рис. 65) некоторого интервала называется *локальным минимумом* (min) функции $f(x)$, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, таких, что $0 < |x - c_1| < \delta$ справедливо $f(c_1) < f(x)$.

♦ Вместо отдельных наименований «локальный максимум» и «локальный минимум» употребляют объединяющее их наименование «*локальный экстремум*», что в переводе с латинского означает «крайнее» (значение).

Теорема 19.4. *Если дифференцируемая функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в точке c, то её производная в этой точке равна нулю: $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть c — точка максимума. Рассмотрим δ-окрестность этой точки $c-\delta < c < c+\delta$ в которой справедливо $f(c) > f(x)$. Для точки максимума

$$f(x) - f(c) < 0, \qquad x < c,$$

и отношение

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$$

есть величина положительная. Переходя к пределу при $x \to c$, с учётом дифференцируемости получим

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \geqslant 0.$$

Если же $x > c$, то $x - c > 0$, $f(x) - f(c) < 0$, и, следовательно, отношение

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} < 0$$

есть величина отрицательная, а в пределе

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \leqslant 0.$$

Получаем, что $0 \leqslant f'(c) \leqslant 0$. Полученное противоречие может быть разрешено только при $f'(c) = 0$.

Итак, в точке локального максимума производная дифференцируемой функции обращается в нуль ($f'(c) = 0$). Геометрически это означает, что касательная в этой точке параллельна оси Ox:

$$y'\Big|_{x=c} = \operatorname{tg}\alpha = 0.$$

Аналогично доказывается, что в точке $x = c_1$, где функция $f(x)$ имеет локальный минимум, справедливо $f'(c) = 0$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

Доказанная теорема обосновывает алгоритм нахождения точек локальных экстремумов дифференцируемой функции, а именно: точки локальных экстремумов следует искать среди точек, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль. Если функция является кусочно-непрерывной и не дифференцируема в точках x_k, $k = \overline{1, N}$, то для определения локальных экстремумов помимо точек, в которых производная $f'(x)$ обращается в нуль, следует рассматривать также точки, в которых производная $f'(x)$ либо обращается в бесконечность, либо не существует.

Например, функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ производной не имеет, но имеет локальный минимум $y\Big|_{x=0} = 0$, так как для любой другой точки $y > 0$. Другой пример: функция $y = 1 - x^{2/3}$ в точке $x = 0$ имеет локальный максимум, хотя $y'(0) = \infty$.

Далее при формулировке утверждений, связанных с локальными экстремумами, слово «локальный» зачастую (для простоты) может опускаться.

♦ Точки, в которых производная функции равна нулю, называются *стационарными точками*, а точки, в которых функция непрерывна, а её производная равна нулю либо обращается в бесконечность, либо не существует, — её *критическими точками.*

Таким образом, все точки экстремумов непрерывной функции являются также её критическими точками. Однако не всякая критическая точка является точкой экстремума функции. Так, например, точка $x = 0$ является критической точкой для функций $y = x^2$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = |x|^{1/2}$, $y = x^{1/3}$. Но для функций $y = x^2$, $y = |x|$, $y = |x|^{1/2}$ точка $x = 0$ — точка экстремума, а для функций $y = x^3$, $y = x^{1/3}$ эта точка не является точкой экстремума.

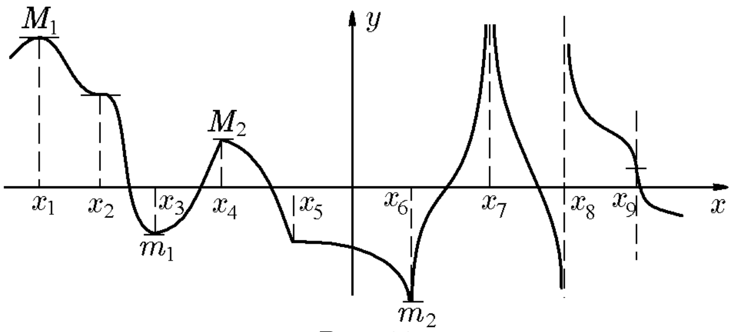


Рис. 66.

На рис. 66 показана функция с критическими точками различных типов. Первые три точки являются стационарными, в этих точках производная обращается в нуль: $f'(x) = 0$. Следующие две точки являются критическими: в этих точках производная $f'(x)$ не существует. Остальные точки — критические, в которых $f'(x) = \pm\infty$. Более подробно:

1) x_1 — точка максимума ($f'(x_1) = 0$);
2) x_2 не является точкой экстремума ($f'(x_2) = 0$);
3) x_3 — точка минимума ($f'(x_3) = 0$);
4) x_4 — точка максимума ($f'(x_4)$ не существует);
5) x_5 не является точкой экстремума ($f'(x_5)$ не существует);
6) x_6 — точка минимума ($f'(x_6) \to \pm\infty$);
7) x_7 не является точкой экстремума ($f'(x_7) \to \pm\infty$);
8) x_8 не является точкой экстремума ($f'(x_8) \to -\infty$);
9) x_9 не является точкой экстремума ($f'(x_9) \to +\infty$).

Перейдём к рассмотрению достаточных условий экстремумов.

Теорема 19.5 (1-ое достаточное условие экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $x = c$ и дифференцируема в некоторой её окрестности кроме, может быть, самой точки c. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку c, то эта точка является точкой максимума; если же $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то точка c — точка минимума (см. рис. 67).*

Доказательство. Пусть производная $f'(x)$ функции $f(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку c, тогда существует δ-окрестность точки c, в которой выполняется условие

$$\begin{aligned} f'(x) > 0, \quad x \in]c-\delta, c[; \\ f'(x) < 0, \quad x \in]c, c+\delta[. \end{aligned} \tag{19.6}$$

Если x — произвольная точка интервала $]c-\delta, c[$, то функция дифференцируема на интервале $]x, c[$ и непрерывна на отрезке $[x, c]$. Согласно теореме Лагранжа,

$$f(c) - f(x) = f'(\tilde{c})(c - x),$$

где $f'(\tilde{c}) > 0$, так как $c - \delta < x < \tilde{c} < c$ и $c - x > 0$. Отсюда следует, что

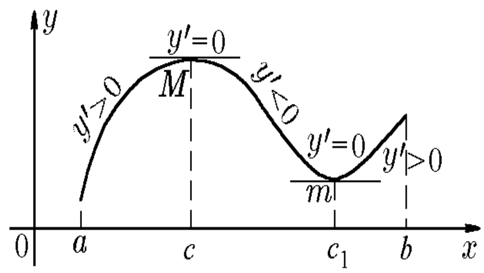


Рис. 67.

$$f(\tilde{c}) > f(x), \quad x \in]c-\delta, c[. \tag{19.7}$$

Аналогично, применив теорему Лагранжа к функции $f(x)$ на отрезке $[c, x]$, где $c < x < c + \delta$, получим, что

$$f(c) > f(x), \quad x \in]c, c+\delta[. \tag{19.8}$$

Совокупность условий (19.7) и (19.8) эквивалентна определению локального экстремума функции $f(x)$ в точке $x = c$, что и доказывает первую часть теоремы. Аналогично доказывается второе утверждение теоремы.

Доказанная теорема позволяет сформулировать первое практическое правило, позволяющее находить точки экстремума:

1) для исследуемой функции $y = f(x)$ вычисляем производную $y'(x)$ и находим её критические точки, в которых производная $y'(x)$ обращается в нуль, бесконечность или вовсе не существует;

2) исследование знаков производной $y'(x)$ до и после каждой критической точки позволяет либо установить характеристику экстремума по типу изменения знака, либо отнести её к интервалу монотонности в случае сохранения знака $y'(x)$.

Это правило полностью решает вопрос о нахождении точек экстремума, когда в рассматриваемом промежутке $]a, b[$ имеется лишь конечное число критических точек x_i, $i = \overline{1, N}$. Тогда в любом промежутке

$$]a, x_1[,\ ]x_1, x_2[,\ \ldots,\ ]x_n, b[$$

существует конечная производная $y'(x)$ и, кроме того, в каждом таком промежутке $y'(x)$ сохраняет постоянный знак, определяющий характер монотонности. Последнее замечание бывает полезным в некоторых случаях на практике: знак производной $y'(x)$ во всем промежутке $]x_i, x_{i+1}[$ можно определить, установив его в одной какой-либо точке этого промежутка.

Пример 19.5. Найти экстремумы функции

$$f(x) = (x+3)^2(x-1)^3.$$

Решение. Данная функция и её производная

$$f'(x) = 2(x+3)(x-1)^3 + 3(x+3)^2(x-1)^2 = 5(x+3)(x-1)^2\Big(x+\frac{7}{5}\Big) \qquad (19.9)$$

непрерывны на всем промежутке $]-\infty, +\infty[$. Для определения критических (стационарных) точек производную (19.9) приравняем к нулю:

$$f'(x) = 5(x+3)(x-1)^2\Big(x+\frac{7}{5}\Big) = 0.$$

Решениями этого уравнения являются три точки: $x_1 = -3$, $x_2 = -1{,}4$, $x_3 = 1$, которые весь промежуток $]-\infty, +\infty[$ разбивают на четыре интервала: $]-\infty, -3[$, $]-3; -1{,}4[$, $]-1{,}4; 1[$, $]1, +\infty[$. Методом интервалов определяем знак производной:

x	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3;-1{,}4[$	$-1{,}4$	$]-1{,}4;1[$	1	$]1,+\infty[$
$f'(x)$	>0	0	<0	0	>0	$0>0$	
$f(x)$	$\nearrow$	-9	$\searrow$	$-35{,}39$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
тип экстремума		max		min		нет	

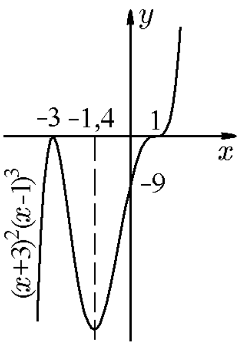


Рис. 68.

Из таблицы ясно, что на интервале $]-\infty, -3[$ функция возрастает, а на интервале $]-3; -1{,}4[$ убывает. Точка $x_1 = -3$, отделяя интервал возрастания от интервала убывания, является точкой максимума, в которой функция достигает локального максимума, равного $f_{\max}(-3) = -9$. Следующая критическая точка $x_2 = -1{,}4$ отделяет интервал убывания $]-3; -1{,}4[$ от интервала возрастания $]-1{,}4; 1[$ и, следовательно, является точкой минимума, в которой функция достигает локального минимума, равного $f_{\min}(-3) = -35{,}39$. При переходе через третью критическую точку $x_3 = 1$ знак производной $f'(x)$ не меняется, и, следовательно, эта точка не является точкой экстремума. На рис. 68 приведён схематический график, иллюстрирующий поведение исследуемой функции.

Пример 19.6. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = (x^2-4)^3.$$

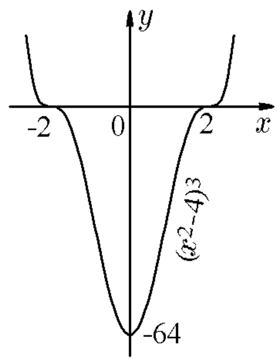


Рис. 69.

Решение. Данная функция и её производная

$$f'(x) = 6x(x^2-4)^2 \qquad (19.10)$$

непрерывны на всем промежутке $]-\infty, +\infty[$. Для определения критических (стационарных) точек производную (19.10) приравняем к нулю:

$$f'(x) = 6x(x^2-4)^2 = 0. \qquad (19.11)$$

Решениями этого уравнения являются три точки: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, которые промежуток $]-\infty, +\infty[$ разбивают на четыре интервала: $]-\infty, -2[$, $]-2, 0[$, $]0, 2[$, $]2, +\infty[$. Очевидно, что знак производной (19.11) изменится с отрицательного на положительный только при переходе через точку $x_2 = 0$, поскольку $6(x^2-4)^2 \geqslant 0$. Это означает, что точка $x_2 = 0$ отделяет интервал убывания $]-\infty; 0[$ от интервала возрастания $]0, +\infty[$ и, следовательно, является точкой минимума, в которой функция достигает локального минимума, равного $f_{\min}(0) = -64$. Критические точки $x_2 = -2$ и $x_3 = 2$, при переходе через которые производная знак не меняет, принадлежат интервалу монотонности и не являются точками экстремума. На рис. 69 приведён схематический график функции.

Пример 19.7. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = (x-5{,}5)^3\sqrt[3]{x^2}.$$

Решение. Функция непрерывна на всем промежутке $]-\infty, +\infty[$. Чтобы найти критические точки, вычислим производную:

$$f'(x) = 3(x-5{,}5)^2x^{2/3} + (x-5{,}5)^3\frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{11(x-5{,}5)^2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}. \tag{19.12}$$

Так как

$$\lim_{x\to\pm0} f'(x) = \lim_{x\to\pm0}\frac{11(x-5{,}5)^2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \pm\infty,$$

то $x_1 = 0$ является первой критической точкой. Остальные критические точки определяются уравнением

$$f'(x) = \frac{11(x-5{,}5)^2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = 0.$$

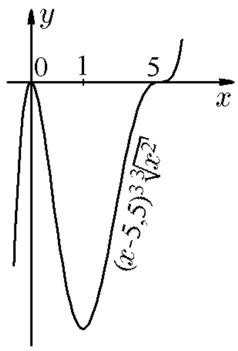


Рис. 70.

Отсюда найдём ещё две критические (стационарные) точки: $x_2 = 1$, $x_3 = 5{,}5$.

Из (19.12) видно, что знак производной $f'(x)$ может изменяться только при переходе через точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, поскольку множитель $(x-5{,}5)^2 \geqslant 0$ неотрицателен. Следовательно, критическая точка $x_3 = 5{,}5$ принадлежит интервалу монотонности и не является точкой экстремума. Чтобы определить характер критических точек x_1 и x_2, установим тип изменения знака производной при прохождении через эти точки и результат сведём в таблицу:

x	$]-\infty, 0[$	0	$]0,1[$	1	$]1; 5{,}5[$	5,5	$]5{,}5; +\infty[$
$f'(x)$	>0	∞	<0	0	>0	0	>0
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-91{,}125$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
тип экстремума		max		min		нет	

На рис. 70 приведён схематический график функции.

Пример 19.8. Исследовать на экстремум функции

$$1)\quad f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0; \end{cases} \qquad 2)\quad f(x) = \begin{cases} x^2\Bigl(2+\cos\dfrac{1}{x}\Bigr), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

в точке $x = 0$.

Решение. 1) Функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой оси $]-\infty,\infty[$, поскольку

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = f(0) = 0.$$

В точках, отличных от точки $x = 0$, производная функции $f(x)$ вычисляется обычным способом:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}. \tag{19.13}$$

Однако производная (19.13) не определена в точке $x = 0$. В этом случае следует воспользоваться определением производной. Получим

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}(\Delta x)\sin\frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Это означает, что точка $x = 0$ является критической. Однако в любой окрестности точки $x = 0$ производная (19.13) бесконечное число раз меняет знак как слева, так и справа от точки $x = 0$, что не позволяет применить теорему 19.5, чтобы определить характер критической точки. Исследуя непосредственно функцию $x^2\sin(1/x)$, видим, что и сама функция в любой окрестности (в том числе и бесконечно малой) точки $x = 0$ бесконечное число раз меняет знак как слева, так и справа от точки $x = 0$. Следовательно, точка $x = 0$ не является точкой экстремума.

2) Функция $f(x)$ непрерывна на всем интервале $]-\infty,\infty[$, поскольку

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2\Big(2 + \cos\frac{1}{x}\Big) = f(0) = 0.$$

В точках, отличных от точки $x = 0$ её производная вычисляется стандартным образом:

$$f'(x) = 2x\Big(2+\cos\frac{1}{x}\Big) + x^2\Big(-\sin\frac{1}{x}\Big)\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = 4x + 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}. \tag{19.14}$$

Однако производная (19.14) не определена в точке $x = 0$. В этом случае воспользуемся определением производной:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\Big[(\Delta x)^2\Big(2+\cos\frac{1}{\Delta x}\Big) - 0\Big] = \\ = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\Big(2+\cos\frac{1}{\Delta x}\Big) = 0.$$

Это означает, что точка $x = 0$ является критической. Однако в любой близости от точки $x = 0$ производная (19.14) слева и справа от точки $x = 0$ меняет знак бесконечное число раз, что не позволяет воспользоваться теоремой 19.5 для определения характера критической точки $x = 0$. Явный вид самой функции $f(x)$ показывает, что точка $x = 0$ является точкой минимума, поскольку $f(0) = 0$, а $f(x) > 0$ для всех $x \neq 0$.

Последний пример показывает, что смена знака производной $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не следует из того, что x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$. Таким образом, теорема, обратная теореме 19.5, неверна.

Сформулируем ещё одно достаточное условие существования экстремума.

Теорема 19.6 (2-ое достаточное условие существования экстремума). *Если x_0 — стационарная точка функции $f(x)$ и существует $f''(x_0)$, то x_0 — точка локального минимума при условии $f''(x_0) > 0$ и x_0 — точка локального максимума при условии $f''(x_0) < 0$.*

Доказательство. Если x_0 — стационарная точка, то $f'(x) = 0$. Пусть $f''(x_0) > 0$, тогда существует некоторая окрестность $S(x_0, \delta)$ точки x_0, в которой функция $f'(x)$ возрастает, т.е. выполняются условия

$$\begin{aligned} f'(x) &< f'(x_0) = 0, \quad x \in]x_0 - \delta, x_0[; \\ f'(x) &> f'(x_0) = 0, \quad x \in]x_0, x_0 + \delta[, \end{aligned}$$

из которых следует, что функция $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0. Согласно теореме 19.5, такое чередование знаков означает, что точка x_0 — точка минимума функции $f(x)$. Аналогично доказывается случай $f''(x) < 0$ (см. рис. 67).

Пример 19.9. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3 - x^2 - x$.

Решение. 1. Находим первую производную:

$$f'(x) = (x^3 - x^2 - x)' = 3x^2 - 2x - 1$$

и приравниваем её к нулю.

2. Решив уравнение

$$3x^2 - 2x - 1 = 0,$$

найдём корни: $x_1 = 1$, $x_2 = -1/3$.

3. Найдём вторую производную

$$f''(x) = (3x^2 - 2x - 1)' = 6x - 2$$

и вычислим её значения в критических точках: $f''(1) = 4 > 0$ и $f''(-1/3) = -4 < 0$. Следовательно, $x_1 = 1$ — точка минимума, а $x_2 = -1/3$ — точка максимума. И, наконец,

$$y_{\max} = y(-1/3) = 3 \cdot \frac{1}{9} - 2\Big(-\frac{1}{3}\Big) - 1 = 0, \quad y_{\min} = 1^3 - 1^2 - 1 = -1.$$

19.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то в силу непрерывности она принимает на этом отрезке как наибольшее M, так и наименьшее m значения.

Если функция принимает наибольшее значение в одной из внутренних точек, то оно будет одним из максимумов функции и при этом наибольшим, называемым *глобальным максимумом* на $[a, b]$. Но наибольшее значение функция может принимать и на одной из границ отрезка. Поэтому, чтобы найти наибольшее значение функции на отрезке $[a, b]$, нужно

1) найти все максимумы;
2) вычислить значения функции $f(a)$ и $f(b)$ на границах отрезка $[a, b]$;
3) из всех найденных значений функции выбрать наибольшее, оно и будет являться наибольшим значением функции на $[a, b]$.

Аналогично, чтобы найти наименьшее значение функции на $[a, b]$, нужно найти все её минимумы и выделить из них наименьший, называемый *глобальным минимумом.* Сравнив глобальный на $[a, b]$ минимум с граничными значениями $f(a)$ и $f(b)$, выбрать наименьшее значение.

Пример 19.10. Вычислить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^2 - 2x + 1$ на отрезке $[0, 3]$.

Решение. 1. Найдём все максимумы и минимумы:

$$y' = (x^2 - 2x + 1)' = 2x - 2 = 0,$$

т.е. $x_1 = 1$ – критическая точка. Вторая производная $y'' = (2x - 2)' = 2 > 0$ при всех x, в том числе и при $x = 1$. Следовательно, $x = 1$ – точка минимума и

$$y_{\min} = 1^2 - 2 + 1 = 0.$$

2. Вычислим значения функции на границах отрезка $[0, 3]$:

$$y(0) = 0 - 0 + 1 = 1, \quad y(3) = 3^3 - 2 \cdot 3 + 1 = 4.$$

3. Итак, наибольшее значение функции $y = x^2 - 2x = 1$ на отрезке $[0, 3]$ есть $y\big|_{x=3} = y(3) = 4$, а наименьшее $y\big|_{x=1} = 0$, которое совпадает с минимумом функции.

$\Diamond$ Не следует путать максимум функции с наибольшим её значением, а минимум — с наименьшим.

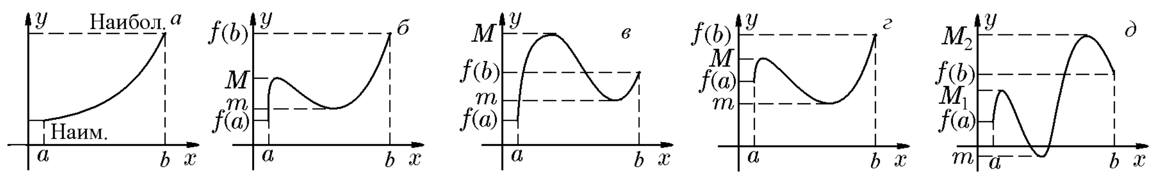


Рис. 71.

Наибольшее значение функции может совпадать с её максимумом, но может и не совпадать; наименьшее значение функции может совпадать с её минимумом, но может и не совпадать (рис. 71). На рис. 71,*а* функция $f(x)$ имеет наименьшее значение $f(a)$ на левой границе и наибольшее значение $f(b)$ на правой границе отрезка $[a, b]$, но минимумов и максимумов она внутри $]a, b[$ не имеет.

Пример 19.11. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объёмом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Решение. 1. Объём бассейна определяется как $V = x^2 h$, где x — сторона квадрата (нижнего основания бассейна), а h — высота.

2. Площадь поверхности бассейна $S = x^2 + 4xh$, но $h = V/x^2$, тогда искомая функция

$$S = x^2 + \frac{4V}{x}.$$

3. Найдём производную и приравняем её к нулю:

$$S'_x = 2x - \frac{4V}{x^2} = 0.$$

Решив полученное уравнение, найдём критическую точку $x = \sqrt[3]{2V}$. При $V = 32$ получим $x = \sqrt[3]{64} = 4$.

Так как

$$S''_{xx} = \left(2x - \frac{4V}{x^2}\right)' = 2 + \frac{8V}{x^3}$$

и $S''\big|_{x=4} = 6 > 0$, то найденная функция имеет в точке $x = 4$ минимум, что соответствует наименьшему значению поверхности, и на облицовку бассейна пойдёт наименьшее количество материала при $x = 4$ м, $h = V/x^2 = 2$ м, т.е. при размерах $4 \times 4 \times 2$ м.

Пример 19.12. При каком соотношении между радиусом R основания и высотой h цилиндр данного объёма V будет иметь наименьшую полную поверхность S?

Решение. Объём цилиндра определяется произведением $V = \pi R^2 h$. Площадь его полной поверхности является суммой площади боковой поверхности и площади двух оснований: $S = 2\pi Rh + 2\pi R^2$. Это выражение содержит две неизвестные величины: R и h. Исключим одну из них с помощью формулы для объёма цилиндра: $h = V/2\pi R$, следовательно, $S = 2\pi R^2 + 2V/R$. Таким образом, мы получили выражение площади поверхности цилиндра как функцию радиуса, которую можно исследовать на экстремум. Из равенства нулю производной этой функции мы определим, какой радиус соответствует экстремальному значению площади полной поверхности. Поскольку $V' = 4\pi R - 2V/R^2 = 0$, то $R = \sqrt[3]{V/2\pi}$ есть точка экстремума. Чтобы определить её характер, вычислим вторую производную $V'' = 4\pi + 4V/R^3$. Так как $V'' = 10\pi > 0$ при $R = \sqrt[3]{V/2\pi}$, то при $R = \sqrt[3]{V/2\pi}$ площадь полной поверхности минимальна. Следовательно, искомое отношение

$$\frac{h}{R} = \frac{V/\pi R^2}{R} = \frac{V}{\pi R^3} = \frac{V 2\pi}{\pi V} = 2,$$

или $h = 2R$, т.е. наименьшей поверхность цилиндра заданного объёма V будет при равенстве его высоты h и диаметра основания $D = 2R$ (когда осевым сечением будет квадрат).

19.4. Выпуклость и вогнутость функции. Точки перегиба

В курсе аналитической геометрии [11] было введено понятие плоской кривой.

♦ *Плоской кривой* называется кривая, все точки которой лежат в некоторой плоскости.

Пусть кривая задана уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ — однозначная и дифференцируемая функция.

♦ Кривая называется *выпуклой* (*вогнутой*) в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для любой точки x_1 из этой окрестности дуга графика, идущая из точки $M_0(x_0, f(x_0))$ в точку $M_1(x_1, f(x_1))$ лежит не ниже (не выше) хорды M_0M_1 (рис. 72).

◊ Иногда вместо терминов «выпуклая» кривая и «вогнутая» используют выражения «выпуклая вверх» («вогнутая вверх») и «вогнутая вниз» («выпуклая вниз»).

◊ Из определения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 как предельного положения секущей M_0M_1 при стремлении точки M_1 к M_0 вдоль кривой $y = f(x)$

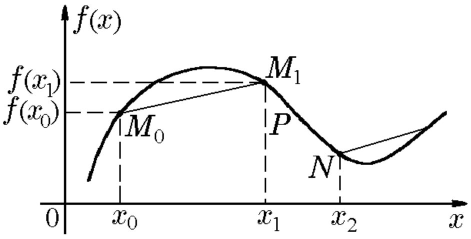


Рис. 72.

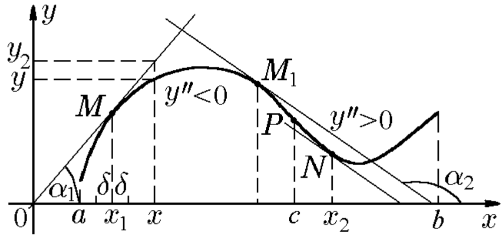


Рис. 73.

следует, что для выпуклой (вогнутой) в точке M_0 кривой $y = f(x)$ все точки кривой лежат не выше (не ниже) касательной в этой точке. Так, на рис. 73 кривая $y = f(x)$ является выпуклой в точках M, M_1 и вогнутой в точке N.

♦ Кривая называется *выпуклой* (*вогнутой*) на некотором интервале $]a, b[$, если она является *выпуклой* (*вогнутой*) в каждой точке этого интервала.

Понятие выпуклости и вогнутости кривой тесно связано с аналогичным понятием, характеризующим свойства функций.

♦ Функция $y = f(x)$, определенная на некотором интервале $]a, b[$, называется *выпуклой*, если для любых двух $x_0, x_1 \in]a, b[$ и любого числа $t \in]0, 1[$ выполняется условие

$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leqslant tf(x_0) + (1-t)f(x_1). \tag{19.15}$$

Соотношение (19.15) называется *неравенством Йенсена*. Если неравенство (19.15) имеет противоположный знак, то функция $y = f(x)$ называется *вогнутой*.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 19.7. *Для того чтобы кривая $y = f(x)$ была выпуклой (вогнутой) в точке $y_0 = (x_0, f(x_0))$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была выпуклой (вогнутой).*

Доказательство. Будем для определённости считать кривую $y = f(x)$ выпуклой в точке x_0 (доказательство для вогнутой кривой аналогично). Тогда существует окрестность $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ точки x_0, такая что для всех $x_1 \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ хорда лежит не ниже кривой M_0M_1. Здесь $M_0(x_0, f(x_0))$, $M_1(x_1, f(x_1))$. Хорда M_0M_1 описывается уравнением $x = x_0 + t(x_1 - x_0)$, $y = f(x_0) + t[f(x_1) - f(x_0)]$, $t \in [0, 1]$. Условие того, что хорда лежит не выше кривой, есть

$$f(x) \geqslant f(x_0) + t[f(x_1) - f(x_0)]$$

или

$$f\big(x_0(1-t) + tx_1\big) \geqslant (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

Обозначив $\tau = (1 - t)$, получим

$$f\big(\tau x_0 + (1-\tau)x_1\big) \geqslant \tau f(x_0) + (1-\tau)f(x_1), \quad \tau\,]0, 1[.$$

Следовательно, функция $f(x)$ выпуклая.

Доказательство обратного утверждения аналогично.

Выпуклость и вогнутость функции являются важной характеристикой кривой. Признаки выпуклости и вогнутости функции даются следующими теоремами.

Теорема 19.8 (достаточное условие выпуклости и вогнутости функции). *Если функция $f(x)$ во всех точках интервала $]a,b[$ имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции на этом интервале является выпуклым. Если же для всех $x \in]a,b[$ вторая производная $f''(x) > 0$, то график функции является вогнутым.*

Доказательство. Пусть для всех $x \in]a,b[$ вторая производная $f''(x) < 0$. Возьмем на графике функции произвольную точку M с абсциссой $x_1 \in]a,b[$ и проведём через точку M касательную (рис. 73). Покажем, что график функции расположен ниже этой касательной. Для этого сравним в точке x ординату y графика функции $y = f(x)$ с ординатой $y_к$ касательной, проведённой через точку M. Уравнение касательной, как известно, есть

$$y_к(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1),$$

тогда

$$y(x) - y_к(x) = f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1). \qquad (19.16)$$

Согласно теореме Лагранжа,

$$f(x) - f(x_1) = f'(c_1)(x - x_1),$$

где $x_1 < c_1 < x$. Тогда из (19.16) имеем

$$y(x) - y_к(x) = f'(c_1)(x - x_1) - f'(x_1)(x - x_1) = [f'(c_1) - f'(x_1)](x - x_1).$$

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа. Тогда для разности $f'(c_1) - f'(x_1)$ запишем

$$f'(c_1) - f'(x_1) = f''(c_2)(c_1 - x_1),$$

где c_2 — некоторое число, $x_1 < c_2 < c_1$. Таким образом, имеем

$$y(x) - y_к(x) = f''(c_2)(c_1 - x_1)(x - x_1).$$

Исследуем знак правой части этого равенства:

1) если $x > x_1$, то $x - x_1 > 0$, $c_1 - x_1 > 0$ и $f''(c_2) < 0$; следовательно, $y(x) - y_к(x) < 0$;
2) если $x < x_1$, то $x - x_1 < 0$, $c_1 - x_1 < 0$ и $f''(c_2) < 0$; следовательно, $y(x) - y_к(x) < 0$.

Таким образом, во всех точках интервала $]a,b[$ ордината касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M больше ординаты кривой, т.е. график функции на этом интервале выпуклый.

Аналогично доказывается, что при $f''(x) > 0$ график функции на этом интервале вогнутый.

♦ Точка P, отделяющая выпуклый участок кривой от его вогнутого участка (или вогнутый участок от выпуклого), называется *точкой перегиба.*

Таким образом, левее точки перегиба P находится выпуклый участок кривой, где $f''(x) < 0$, а правее точки P — вогнутый участок, где $f''(x) > 0$. Совершенно очевидно, что в точке перегиба $f''(x) = 0$ (либо вторая производная не существует). Такие точки кривой $y = f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или не существует, будем называть *критическими на перегиб.*

В результате можно сформулировать следующую теорему о достаточных условиях существования точек перегиба.

Теорема 19.9 (достаточное условие существования точек перегиба). *Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через критическую на перегиб точку x_0 меняет знак, то точка $P(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба.*

Теоремы 19.8, 19.9 позволяют сформулировать правило для исследования функции на выпуклость, вогнутость и точки перегиба:

1) найти вторую производную $y'' = f''(x)$ данной функции $y = f(x)$;
2) найти корни второй производной $f''(x) = 0$. Область существования функции $y = f(x)$ разбить корнями второй производной на интервалы, и для каждого интервала исследовать знак второй производной $f''(x)$. При этом на участках, где $f''(x) > 0$, кривая вогнутая, а на участках, где $f''(x) < 0$, кривая выпуклая;
3) среди корней второй производной выделить те критические значения, для которых $f''(x)$ меняет знак, чем определяются точки перегиба.

Пример 19.13. Найти выпуклые, вогнутые участки и точки перегиба кривой $y = x^3$.

Решение. 1. Найдём первую производную $y' = (x^3)' = 3x^2$ и вторую производную $y'' = 6x$.

2. Вторую производную приравняем к нулю: $y'' = 6x = 0$ и найдём её корень $x_1 = 0$. Область существования функции $y = x^3$ разбивается корнем $x_1 = 0$ второй производной на два интервала: $]-\infty, 0[$ и $]0, \infty[$.

3. Исследуем знак $y'' = 6x$ на каждом из полученных интервалов. В интервале $]-\infty, 0[$, где $x < 0$, вторая производная $y'' = 6x < 0$, следовательно, в этом интервале кривая выпукла. В интервале $]0, \infty[$, где $x > 0$, вторая производная $y'' > 0$, т.е. в этом интервале кривая вогнута.

4. В точке $x_1 = 0$ вторая производная меняет знак. Следовательно, $x_1 = 0$ — абсцисса точки перегиба. Ордината определяется соотношением $y = x^3$: $y(0) = x^3\Big|_{x=0} = 0$. Итак, $P(0, 0)$ — точка перегиба.

19.5. Асимптоты плоских кривых

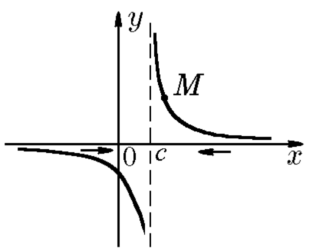


Рис. 74.

♦ Прямая $x = c$ называется (*вертикальной*) *асимптотой* кривой $y = f(x)$, если либо

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \infty,$$

либо

$$\lim_{x\to c-0} |f(x)| = \infty,$$

либо

$$\lim_{x\to c+0} |f(x)| = \infty.$$

Это означает, что с приближением x к c соответствующая точка M кривой $y = f(x)$ удаляется в бесконечность вверх (или вниз) и эта точка кривой неограниченно при этом приближается к вертикальной прямой $x = c$, которая и называется вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$ (рис. 74).

Так, если кривая определяется уравнением $y = 3/(x-2)$, то при $x \to 2$ имеем

$$y = \frac{3}{x-2} \to \infty.$$

Следовательно, прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой.

Таким образом, вопрос о нахождении вертикальных асимптот, параллельных оси Oy, сводится к вопросу о нахождении тех значений $x = c$, в при приближении к которым $y = f(x) \to \infty$.

Например, кривая $y = \operatorname{tg} x$ имеет бесконечно много вертикальных асимптот: $x = \pm\pi/2$, $x = \pm 3\pi/2$, $x = \pm 5\pi/2$ и т.д., так как $y \to \infty$ при $x \to \pi/2$ и $y \to -\infty$ при $x \to -\pi/2$.

Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту ℓ (рис. 75).

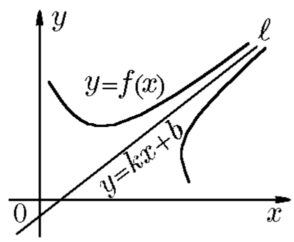


Рис. 75.

♦ Прямая $y = kx + b$ называется *правой наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если при $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx - b] = 0,$$

и *левой наклонной асимптотой*, если при $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx - b] = 0.$$

Иными словами, при стремлении x к бесконечности разность ординат точки на кривой $y = f(x)$ и точки на прямой $y = kx + b$ стремится к нулю и, следовательно, точки кривой неограниченно приближаются к этой прямой.

Из условия

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = \lim_{x\to\infty}\left\{x\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right]\right\} = 0$$

следует, что должно быть

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - k = 0,$$

т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k. \tag{19.17}$$

Если $k = 0$, то асимптота параллельна оси Ox. После того как величина k определена, из условия

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - kx - b] = 0$$

можно найти

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx]. \tag{19.18}$$

Таким образом, асимптота $y = kx + b$ будет найдена.

Итак, для существования наклонной асимптоты кривой $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы (19.17), определяющий k, и (19.18), определяющий b.

Пример 19.14. Найти асимптоты кривой

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

Решение. 1. Найдём вертикальные асимптоты: $y \to \infty$ при $x \to 1$; следовательно, прямая $x = 1$ есть вертикальная асимптота.

2. Найдём наклонные асимптоты $y = kx + b$. По формуле (19.17) запишем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)x}.$$

Получается неопределённость вида ∞/∞. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x-3)}{8x-4}.$$

Снова получилась неопределённость вида ∞/∞. Применим ещё раз правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2(x-3)}{8x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

т.е. $k = 1/4$. По формуле (19.18)

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{x}{4}\right] = -\frac{5}{4}.$$

Следовательно, уравнение наклонной асимптоты имеет вид

$$y = \frac{1}{4}(x-5).$$

19.6. Исследование функций и построение их графиков

Пусть функция задана уравнением $y = f(x)$. Наглядное представление об изучаемой функции даёт её график.

Чтобы построить график функции (кривую) $y = f(x)$, нужно провести исследование, выявляющее существенные качества этой кривой. Приведём примерную схему исследования функции $y = f(x)$ для построения её графика:

1. определить область существования функции $y = f(x)$;
2. определить симметрию функции относительно осей и начала координат (исследовать на чётность, нечётность и периодичность);
3. найти точки пересечения кривой $y = f(x)$ с осями координат;
4. исследовать поведение функции на границе области определения и найти асимптоты кривой;
5. исследовать функцию на экстремум и найти участки возрастания и убывания функции $y = f(x)$;
6. исследовать функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба;
7. по полученным данным построить график;
8. иногда для более точного построения кривой полезно найти её значения в дополнительных точках.

Пример 19.15. Исследовать функцию

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$$

и построить её график.

Решение. Функция определена на всей числовой оси за исключением точки $x = 1$ ($D((x-3)^2/4(x-1)) =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$); принимает отрицательные значения ($y < 0$) при $x < 1$, а положительные ($y > 0$) при $x \geqslant 1$; обращается при $x = 3$ в нуль ($y(3) = 0$). Это означает, что график функции $y = f(x)$ в полуплоскости $x < 1$ располагается ниже оси Ox, а в полуплоскости $x > 1$ выше и касается оси в точке $x = 3$. Поскольку функция не определена в точке $x = 1$, а односторонние пределы равны

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1+0}\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} = +\infty,$$

то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. Чтобы найти наклонную асимптоту $y = kx + b$, вычислим пределы

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-3)^2}{4(x-1)x} = \frac{1}{4}$$

и

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\Big[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{x}{4}\Big] = \frac{1}{4}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-3)^2 - x(x-1)}{x-1} = -\frac{5}{4}.$$

Следовательно, на $\pm\infty$ график функции имеет ещё одну асимптоту: наклонную $y = (x-5)/4$.

◊ Найденные вертикальная и наклонная асимптоты совпадают с результатами примера 19.14, где требовалось найти асимптоты рассматриваемой функции.

Теперь вычислим производные:

$$y' = \Big[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}\Big]' = \frac{1}{4}\frac{2(x-3)(x-1) - (x-3)^2}{(x-1)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}; \tag{19.19}$$

$$y'' = \Big[\frac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}\Big]' = \frac{2}{(x-1)^3}. \tag{19.20}$$

Из формулы (19.19) следует, что функция имеет две стационарные точки: $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$, а из формулы (19.20), — что $y''(-1) = -1/4 < 0$, $y''(3) = 1/4 > 0$. Это означает, что точка $x = -1$ является точкой максимума, а точка $x = 3$ точкой минимума, причём $y_{\max} = y(-1) = -2$, $y_{\min} = y(3) = 0$, соответственно. Вместе с этим из формулы (19.19) следует, что $y''(x) < 0$ при $x < 1$ и $y''(x) > 0$ при $x > 1$. Это означает, что кривая $y = f(x)$ в полуплоскости $x < 1$ является выпуклой, а в полуплоскости $x > 1$ вогнутой. Для наглядности полученные результаты представим в виде таблицы:

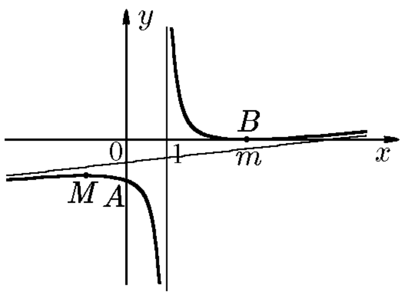


Рис. 76.

x	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,3[$	3	$3,+\infty[$
$y'(x)$	>0	0	<0	не опр.	>0	0	>0
$y''(x)$	<0	$-1/4$	<0	не опр.	<0	$1/4$	>0
$y(x)$	$\nearrow\frown$	-2 max	$\searrow\frown$	не опр.	$\nearrow\smile$	0 min	$\nearrow\smile$

в которой стрелками $\nearrow$ и $\searrow$ указано возрастание и убывание функции на соответствующем интервале; дугами $\frown$ и $\smile$ указаны выпуклость и вогнутость графика функции на соответствующем интервале. Из этой таблицы с учётом двух асимптот: $x = 1$ и $y = (x - 5)/4$ строим график функции (рис. 76).

Пример 19.16. Построить график функции

$$y = \frac{x^3}{(x+1)^2}. \tag{19.21}$$

Решение. 1. Функция (19.21) определена на всей числовой оси за исключением точки $x = -1$ ($D(x^3/(x+1)^2) =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$). 2. Функция принимает отрицательные значения ($y < 0$) при $x < 0$ и положительные ($y > 0$) при $x > 0$. 3. В точке $x = 0$ функция обращается в нуль ($y(0) = 0$).

Это означает, что график функции в левой полуплоскости ($x < 0$) располагается ниже оси Ox, а в правой полуплоскости ($x > 0$) выше и, проходя через начало координат ($y(0) = 0$), пересекает ось Ox снизу вверх в положительном её направлении.

4. Поскольку функция не определена в точке $x = -1$, а односторонние пределы равны

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty,$$

то прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой. Чтобы найти наклонную асимптоту $y = kx + b$, вычислим пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2 x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1$$

и

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \Big(\frac{x^3}{(x+1)^2} - x \Big) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{(x+1)^2} = -2.$$

Следовательно, кривая имеет одну наклонную асимптоту $y = x - 2$.

5. Теперь вычислим производные

$$y'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \tag{19.22}$$

$$y''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4}. \tag{19.23}$$

Из формулы (19.22) следует, что функция (19.21) имеет две стационарные точки: $x_1 = 0$ и $x_2 = -3$. Из формулы (19.23) следует, что $y''(-3) = -9/8 < 0$, а $y''(0) = 0$. Это означает, что точка x_1 является точкой максимума, а точка x_2 — точкой перегиба.

6. Определим знаки $y'(x)$, $y''(x)$ в промежутках $]-\infty, -3]$, $[-3, -1[$, $]-1, 0]$, $[0, +\infty[$ и получим таблицу:

x	$]-\infty, -3[$	-3	$]-3, -1-0[$	-1	$]-1+0, 0[$	0	$0, +\infty[$
$y'(x)$	> 0	0	< 0	не опр.	> 0	0	> 0
$y''(x)$	< 0	$-9/8$	< 0	не опр.	< 0	0	> 0
$y(x)$	$\nearrow \frown$	$-27/4$	$\searrow \frown$	не опр.	$\nearrow \frown$	0	$\nearrow \smile$
	$-\infty$	max	$-\infty$	не опр.	$-\infty$	перегиб	$+\infty$

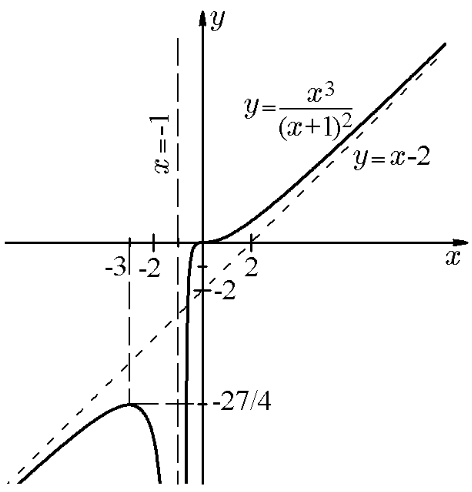


Рис. 77.

Согласно этой таблице, функция возрастает ($y' > 0$) на промежутке $x \in]-\infty, -3[$, достигая в точке $x = -3$ максимума $y(-3) = -27/4$ ($y''(-3) = -9/8 < 0$). Далее на промежутке $]-3, -1[$ она убывает ($y' < 0$). Изменение знака первой производной с положительного на отрицательный говорит о том, что в точке с $x = -3$ функция имеет максимум (рис. 77). Этот же результат следует из того, что вторая производная в этой точке отрицательна ($y''(-3) < 0$). Кривая $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$ и $x \to -1 - 0$ имеет наклонную $y = x - 2$ и вертикальную $x = -1$ асимптоты. Таким образом, график функции может быть только выпуклым, что подтверждается отрицательным значением второй производной на всем промежутке $]-\infty, -1[$.

На промежутке $]-1, +\infty[$ функция постоянно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ ($y' > 0$). Ее график пересекает ось Ox в точке $x = 0$, которая является точкой перегиба ($y''(0) = 0$). График функции является выпуклым на промежутке $]-1, 0[$ и вогнутым на промежутке $[0, +\infty[$. Кривая при $x \to -1 + 0$ и $x \to +\infty$ имеет наклонную $y = x - 2$ и вертикальную $x = -1$ асимптоты.

Таким образом, получаем график функции (19.21), изображенный на рис. 77.

Отметим, что с помощью производных можно исследовать не только однозначные функции, задаваемые явным образом, и строить их графики, но также можно исследовать поведение кривых, представленных неоднозначными функциями, задаваемыми другими аналитическими способами, например параметрически, как в следующем примере.

Пример 19.17. Построить кривую, заданную параметрически:

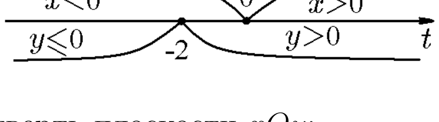
$$x = \frac{t^2 + 1}{t}, \quad y = \frac{(t+5)^2}{t+2}. \tag{19.24}$$

Решение. Из формул (19.24) следует, что функции $x(t)$ и $y(t)$ определены на всей числовой оси Ot за исключением точек $t = 0$ и $t = -2$, соответственно, причём

$$\begin{aligned} &t \to -2 - 0 \Rightarrow x \to -2{,}5, \quad y \to -\infty; \\ &t \to -2 + 0 \Rightarrow x \to -2{,}5, \quad y \to +\infty \end{aligned} \tag{19.25}$$

и

$$\begin{aligned} &t \to -0 \Rightarrow x \to -\infty, \quad y \to 12{,}5; \\ &t \to +0 \Rightarrow x \to +\infty, \quad y \to 12{,}5. \end{aligned} \tag{19.26}$$

Методом интервалов определим знаки величин $x(t)$, $y(t)$ на различных промежутках в зависимости от параметра t:  .

Таким образом, для
$t \in]-\infty, -2[\Rightarrow x < 0,\ y \leqslant 0$: III четверть плоскости xOy;
$t \in]-2, 0[\Rightarrow x < 0,\ y > 0$: II четверть плоскости xOy;
$t \in]0, +\infty[\Rightarrow x > 0,\ y > 0$: I четверть плоскости xOy.
Отсюда с учётом (19.25), (19.26) следует, что исходная кривая (19.24) распадается

на три ветви, не связанные между собой и располагающиеся в III, II и I четвертях декартовой системы координат xOy, соответственно.

В дополнение к этому из (19.25) следует, что кривая (19.24) имеет вертикальную асимптоту $x = -2{,}5$, а согласно (19.26) — и горизонтальную $y = 12{,}5$. Поскольку при

$$\begin{array}{l} t \to -\infty \Rightarrow x \to -\infty, \quad y \to -\infty; \\ t \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty, \quad y \to +\infty, \end{array} \tag{19.27}$$

то выясним, имеет ли кривая наклонную асимптоту $y = kx + b$. Для этого найдём пределы

$$k = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{(t+5)^2 t}{(t+2)(t^2+1)} = 1,$$

$$b = \lim_{t\to\pm\infty} [y(t) - x(t)] = \lim_{t\to\pm\infty} \Big[\frac{(t+5)^2}{t+2} - \frac{t^2+1}{t}\Big] = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{8t^2+24t+2}{t^2+2t} = 8.$$

Таким образом, кривая, в дополнение в вертикальной и горизонтальной асимптотам, имеет ещё и наклонную $y = x + 8$.

Теперь перейдём к вычислению производных y'_x и y''_x. Поскольку

$$x'_t = \frac{t^2-1}{t^2}, \quad y'_t = \frac{(t+5)(t-1)}{(t+2)^2}, \tag{19.28}$$

то по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_x = \Big(\frac{y'_t}{x'_t}\Big)' \frac{1}{x'_t}$$

найдём

$$y'_x = \frac{t^2(t+5)}{(t+1)(t+2)^2}, \tag{19.29}$$

$$y''_x = \frac{4t^3(4t+5)}{(t+1)^3(t+2)^3(t-1)}. \tag{19.30}$$

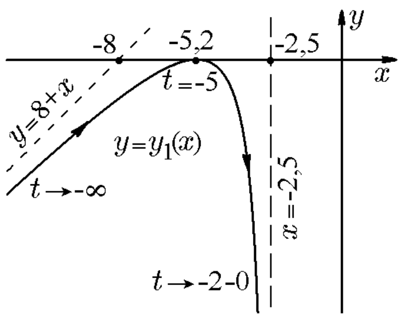


Рис. 78.

Разобьем область изменения параметра t точками $t_1 = -5$, $t_2 = -2$, $t_3 = -1{,}25$, $t_4 = -1$, $t_5 = 0$, $t_6 = 1$ на семь интервалов, на каждом из которых функции $x(t)$, $y(t)$ монотонны, а знак y'_x и y''_x сохраняется. Составим таблицу значений x, y и знаков y'_x, y''_x на соответствующих интервалах, используя формулы (19.24), (19.29) и (19.30). Для удобства рассмотрим каждую из трёх четвертей отдельно.

Начнем с III-й четверти, в которой $t \in]-\infty, -2[$ и содержится точка $t_1 = -5$:

t	$]-\infty, -5[$	-5	$]-5, -2[$
x	$]-\infty, -5{,}2[$	$-5{,}2$	$]-5{,}3, -2{,}5[$
y'_x	> 0	0	< 0
y''_x	< 0 ⌒	$-0{,}201$	< 0 ⌒
y	$]-\infty, 0[$ ↘	0 max	$]0, -\infty[$ ↘

Из этой таблицы следует, что интервалу $t \in]-\infty; -2[$ соответствует однозначная ветвь кривой (19.24), которая является графиком функции $y = y_1(x)$, возрастающей на $x \in]-\infty; -5{,}2[$, убывающей на $x \in]-5{,}2; -2{,}5[$ и достигающей в точке $x = -5{,}2$ максимума $y(t)\big|_{t=-5} = y(x)\big|_{x=-5{,}2} = 0$. Поведение графика при $x \to -\infty$

и $x \to -2{,}5-0$ ($t \to -2-0$) определяется наклонной $y = 8+x$ и вертикальной $x = -2{,}5$ асимптотами. График такой функции выпуклый, что и подтверждается значением $y''_x < 0$ на всем промежутке $x \in]-\infty, -2{,}5[$ (см. рис. 78).

Перейдём ко II-й четверти. В ней $t \in]-2, 0[$ и содержатся точки $t_3 = -1{,}25$ и $t_4 = -1$. Тогда

t	$]-2,-1{,}25[$	$-1{,}25$	$]-1{,}25,-1[$	-1	$]-1,0[$
x	$]-2{,}5,-2{,}05[$	$-2{,}05$	$]-2{,}05,-2[$	-2	$]-2,-\infty[$
y'_x	<0	$-41{,}67$	<0	не опр.	>0
y''_x	>0 $\smile$	0	<0 $\frown$	не опр.	>0 $\smile$
y	$+\infty, 18{,}75[$ $\searrow$	18,75 перегиб	$]18{,}75, 16[$ $\searrow$	16	$]16, 12{,}5[$ $\nearrow$
	$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{y=y_2(x)}$			$\underbrace{\qquad\qquad}_{y=y_3(x)}$	

Из этой таблицы видно, что с ростом параметра t значения x сначала увеличиваются от $-2{,}5$ до -2, а затем уменьшаются от -1 до $-\infty$, т.е. промежутку $x \in]-2{,}5, -2[$ соответствуют две ветви кривой (19.24) с разными значениями величины y в одних и тех же точках этого интервала. Чтобы построить эти ветви, представим их, согласно таблице, двумя однозначными функциями: $y = y_2(x)$ на промежутке $x \in]-2{,}5, -2[$ и $y = y_3(x)$ на промежутке $x \in]-2, -\infty[$. Функция $y = y_2(x)$ монотонно убывает на промежутке $x \in]-2{,}5, -2[$ от $+\infty$ до 16 и проходит точку перегиба $x_3 = -2{,}05$ ($t_3 = -1{,}25$), до которой график функции является вогнутым ($y''_x > 0$), а после которой — выпуклым ($y''_x < 0$). На промежутке $t \in]-1, 0[$ с ростом t значения x уменьшаются от -2 до $-\infty$, однако на промежутке $x \in]-\infty, -2[$ значения $y = y_3(x)$ возрастают от 12,5 до 16. Таким образом, график функции $y = y_3(x)$ в точке $M(2, 16)$ соединяется с графиком функции $y = y_2(x)$, образуя двузначную ветвь (рис. 79).

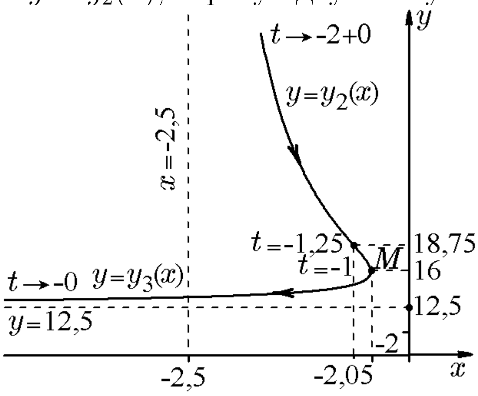


Рис. 79.

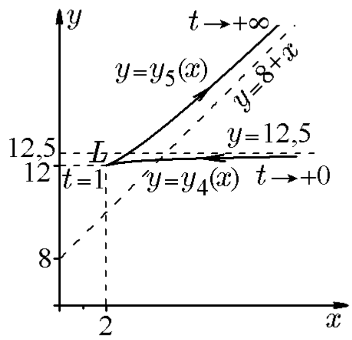


Рис. 80.

Согласно таблице, график функции $y = y_3(x)$ является вогнутым. Наконец, поведение кривой при $x \to -2{,}5+0$ ($t \to -2+0$) и при $y \to 12{,}5+0$ ($t \to -0$) определяется вертикальной $x = -2{,}5$ и горизонтальной $y = 12{,}5$ асимптотами (рис. 79).

Перейдём к I-й четверти, в которой $t \in]0, +\infty[$ и содержится точка $t_6 = 1$. Составим таблицу

t	$]0,1[$	1	$]1,+\infty[$
x	от $+\infty$ до 2	2	$]2,+\infty[$
y'_x	>0	$1/3$	>0
y''_x	<0 $\frown$	не сущ.	>0 $\smile$
y	от 12,5 до 12 $\nearrow$		$]2,+\infty[$ $\nearrow$
	$\underbrace{\qquad\qquad}_{y=y_4(x)}$		$\underbrace{\qquad\qquad}_{y=y_5(x)}$

Из этой таблицы видно, что с ростом параметра t значения x дважды проходят промежуток $[1, +\infty[$: в прямом и обратном направлениях, с различными значениями величины y в одних и тех же точках этого промежутка. Следовательно, интервалу $t \in]0, +\infty[$ также соответствует двузначная ветвь кривой (19.24). Чтобы построить эту ветвь, представим её, согласно последней таблице, двумя однозначными функциями: $y = y_4(x)$ и $y = y_5(x)$, определёнными на одном и том же промежутке $x \in]2, +\infty[$ и имеющими общую точку $L(2, 12)$. На промежутке $t \in]0, 1[$ с ростом параметра t значения переменной x уменьшаются от $+\infty$ до 2, однако на этом промежутке значения $y = y_4(x)$ возрастают ($y'_x > 0$) от 12 в точке $L(2, 12)$ до 12,5, причём $y = 12{,}5$ является асимптотой. График функции выпуклый, поскольку вторая производная y''_x в этом промежутке отрицательна.

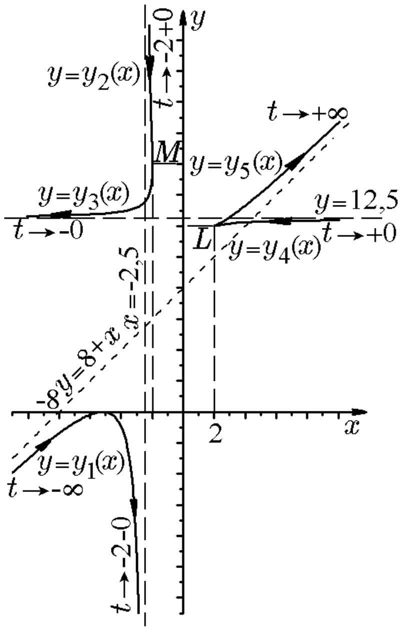


Рис. 81.

На промежутке $t \in]1, +\infty[$ с ростом параметра t значения x растут от 2 до $+\infty$, значения y также возрастают ($y'_x > 0$) от 12 (в точке $L(2, 12)$) до $+\infty$. График функции $y = y_5(x)$ является вогнутым ($y''_x > 0$), а его поведение при $x \to +\infty$ определяется наклонной асимптотой $y = 8 + x$. Вид кривой в I четверти показан на рис. 80.

Изобразив все ветви в одной системе координат xOy, получим общий вид кривой (19.24), заданной параметрически (рис. 81).

Аналогично можно исследовать и функции, заданные неявно.

Пример 19.18. Построить кривую

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0. \tag{19.31}$$

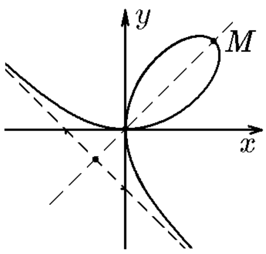


Рис. 82.

Решение. Во-первых, кривая симметрична относительно прямой $y = x$, поскольку замена $x \leftrightarrow y$ не меняет вида уравнения. Во-вторых, положив $y = xt$, получим параметрическое представление кривой (19.31)

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}. \tag{19.32}$$

Далее, проведя исследование кривой по схеме, изложенной в предыдущем примере, получим кривую (рис. 82), известную, впрочем, в аналитической геометрии как декартов лист [11].

Задания для самоконтроля

Теоретические вопросы

I. Введение в дифференциальное исчисление

1. Высказывания. Логические операции. Сформулировать понятие прямой и обратной теоремы. Предикаты и кванторы
2. Элементы теории множеств. Операции над множествами. Сформулировать понятие бесконечного множества. Счетные множества. Несчётные множества. Доказать несчётность единичного сегмента. Мощность множества
3. Функция на множестве. Сформулировать понятие сюръекции, биекции и инъекции. Свойства образов и прообразов множеств. Отношение эквивалентности. Классы эквивалентности
4. Сформулировать понятие действительного числа. Аксиомы поля. Аксиомы порядка. Верхняя и нижняя грань множества. Сечения множества. Аксиома непрерывности. Принципы Архимеда и принцип вложенных отрезков Кантора. Принцип супремума. Принцип Дедекинда. Различные подходы к понятию непрерывности вещественных чисел
5. Понятие о функции одной вещественной переменной. Постоянные и переменные величины. Способы задания функции. Классификация функций. Сложная и обратная функции. Функции, заданные неявно и параметрически

II. Предел и непрерывность функции одной вещественной переменной

6. Понятие числовой последовательности. Среднее гармоническое, среднее геометрическое и среднее арифметическое. Предел последовательности. Сходящиеся и расходящиеся последовательности. Последовательности, сходящиеся к бесконечности. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности
7. Признак Вейерштрасса сходимости числовой последовательности. Теорема о «сжатой» последовательности
8. Фундаментальные последовательности. Полнота множества действительных чисел. Теорема о вложенных отрезках. Признак Коши сходимости числовой последовательности
9. Свойства пределов последовательностей. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух последовательностей
10. Предел функции. Определение предела функции по Гейне и по Коши и их эквивалентность. Правосторонние и левосторонние пределы. Критерий Коши существования предела функции
11. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Свойства бесконечно малых функций. Теоремы об арифметических операциях с бесконечно малыми функциями. Теорема о связи между функцией, её пределом и бесконечно малой функцией
12. Локальные свойства функций, имеющих предел. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел
13. Теоремы о пределах. Теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций. Теоремы о переходе к пределу в неравенствах. Теоремы о пределах монотонных и сложных функций
14. Понятия о неопределённостях и их раскрытие. Виды неопределённостей. Замечательные пределы. Число Непера
15. Понятие об асимптотических оценках. Классификация асимптотических оценок. Теорема о свойствах асимптотических оценок
16. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций. Теоремы о связи бесконечно больших функций с бесконечно малыми. Асимптотические равенства. Критерий эквивалентности функций. Порядок малости. Таблица эквивалентности
17. Понятие непрерывности функции одной переменной. Доказать непрерывность функции $\sin x$

18. Точки разрыва и их классификация. Непрерывность суммы, произведения и частного
19. Свойства непрерывных функций. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях
20. Теорема Коши о нулях непрерывной функции. Теорема Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. Теоремы о непрерывности обратной сложной функции. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции

III. Производная и дифференциал функции одной переменной

21. Понятие производной функции одной переменной. Приращения функции и аргумента. Геометрический смысл производной. Свойства дифференцируемых функций
22. Связь непрерывности и дифференцируемости функции
23. Уравнения касательной и нормали к графику функций
24. Понятие дифференцируемости и дифференциала функции одного переменного. Связь дифференциала с производной. Геометрический смысл дифференциала и приращения функции. Теорема о дифференцируемости функции
25. Производная и дифференциал функции одного переменного. Свойство инвариантности первого дифференциала
26. Производные элементарных функций. Правила дифференцирования. Производная постоянной, суммы, произведения и частного
27. Производные элементарных функций. Производные степенных и показательных функций
28. Производные элементарных функций. Производные тригонометрических функций
29. Производные элементарных функций. Гиперболические функции и их производные
30. Производные элементарных функций. Производные логарифмических функций
31. Дифференцирование сложных и обратных функций. Производные обратных тригонометрических функций
32. Производные и дифференциалы функций заданных неявно и параметрически
33. Производные высших порядков, формула Лейбница. Механический и геометрический смысл второй производной
34. Дифференциалы высших порядков. Неинвариантность дифференциалов порядка выше первого
35. Производные и дифференциалы высших порядков функций заданных неявно и параметрически
36. Теоремы о дифференцируемых функциях. Теорема Ролля о корнях производной. Теоремы Лагранжа и Коши
37. Формула Тейлора. Остаточный член в формуле Тейлора
38. Представление формулой Тейлора тригонометрических функции
39. Представление формулой Тейлора гиперболических функций
40. Представление формулой Тейлора логарифмических и показательных функций
41. Представление формулой Тейлора обратных тригонометрических функций
42. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей

IV. Исследование функции методами дифференциального исчисления

43. Достаточные признаки возрастания и убывания функции на отрезке. Исследование функции на возрастание и убывание
44. Точки экстремума. Необходимое условие экстремума
45. Достаточные признаки максимума и минимума функции. Исследование функций на экстремум с помощью первой производной
46. Достаточные признаки максимума и минимума функции. Исследование функций на экстремум с помощью высших производных
47. Задача на наибольшее и наименьшее значение функции непрерывной на отрезке
48. Выпуклость и вогнутость плоской кривой. Достаточные условия выпуклости и вогнутости. Точки перегиба плоской кривой. Необходимые и достаточные условия перегиба
49. Асимптоты плоских кривых. Вертикальные и наклонные асимптоты

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2-3n^2}{4+5n^2}=-\frac{3}{5};\quad 2)\ \lim_{x\to 1/3}\frac{3x^2+17x-6}{x-1/3}=19.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

1.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n+3)}{(n+2)!-n!}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4})$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}-\sqrt[4]{n^5+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+1}{\sqrt[3]{x\sin(\pi x/4)}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-8x+15}{x^3-27}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+3x^2-1}{2x^4+25}$;

7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-12}-2}{\sqrt{x^2-7}-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+3}-2x)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{\sin^2 x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\operatorname{arctg} x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{\frac{1}{2}-\cos x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+2}\right)^{x+2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{2x}}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}(2-3^{\sin^2 x})^{1/\ln\cos x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!2^n}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$.

1.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=(x-1)\operatorname{th}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

в точке $x_0=-2$ или показать, что он не существует.

1.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=e^{\sqrt{x^3}}-1;\qquad 2)\ f(x)=1-\cos 2x$$

при $x\to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

1.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)=-2x^2+9$ непрерывна в точке $x_0=4$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

1.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y=\begin{cases}x^2, & \text{если } x<0;\\ 1-x, & \text{если } 0\leqslant x<1;\\ \ln x, & \text{если } x\geqslant 1;\end{cases}\quad 2)\ f(x)=\frac{1}{1+3^{1/(2x-1)}};\quad 3)\ y=\frac{1}{3x+4}.$$

1.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{3x^6+4x^4-2}{15\sqrt{1+x^2}}$; 2) $y=\ln\ln\operatorname{ctg} x$; 3) $y=\dfrac{\sin(1-x)}{3\cos 6x}$;

4) $y=x\arcsin\sqrt{1+x^2}$; 5) $y=(\operatorname{ctg} x)^{x+3}$; 6) $y=7^{\cos(1-4x)}$;

7) $y=\dfrac{3}{2}\ln\operatorname{th}\dfrac{x}{2}+\operatorname{ch} x-3$; 8) $y-(\operatorname{tg}^2 x)^{\ln 5x}$; 9) $y=x\ln(1+\sec x)$;

10) $\sin e^x+\sin e^y=e^{xy}$; 11) $3\ln\dfrac{x}{y}+y^3=7$; 12) $3^x+y^2=\dfrac{y}{x}$;

13) $\begin{cases}x=\ln t,\\ y=\operatorname{arctg} t;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\operatorname{tg} t+5,\\ y=\sqrt{\dfrac{1+t^2}{1-t^2}};\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=t-\dfrac{1}{t},\\ y=\ln^2 t.\end{cases}$

1.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = \ln\frac{\sqrt{e-x}-1}{\sqrt{e-x}+1},\ x_0 = 0; \qquad 2)\ y = \arcsin e^{-2x} + \cos x,\ x_0 = 0.$$

1.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой

$$1)\ y = x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}},\ x_0 = 1; \qquad 2)\ y = \operatorname{arctg}(\cos x) + \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

в данной точке x_0.

1.10. Выяснить, в каких точках кривой $y = \sin 2x$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/4$.

1.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = x\operatorname{arctg}x - \ln\sqrt{1+x}; \quad 2)\ y = \sin\sqrt{2x-6}; \quad 3)\ y = e^{\cos^3(1-2x)}.$$

1.12. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 7{,}76$.

1.13. Показать, что функция $y = \sin(\ln x)+\cos(\ln x)$ удовлетворяет уравнению $x^2y'' + xy' + y = 0$.

1.14. Найти производные указанных порядков:

$$1)\ y = \frac{1}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{x},\ y'' =?; \quad 2)\ y = x - \arcsin\sqrt{x},\ y''' =?; \quad 3)\ y = \log_3(x+5),\ y^{(n)} =?;$$

$$4)\ \begin{cases} x = t^2\ln t, \\ y = t^2 - 1, \end{cases} \ \frac{d^2x}{dy^2} =?; \quad 5)\ \begin{cases} x = \sin^3 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \ \frac{d^2y}{dx^2} =?$$

1.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}; \quad 2)\ y = \frac{x^2-2x+2}{x-1}; \quad 3)\ y = \ln x + \frac{1}{x}.$$

1.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = x^4 - 2x^2 + 3,\ [-3;2]; \quad 2)\ y = \frac{x-5}{x^2+11},\ [-3;7]; \quad 3)\ y = \sqrt{4-x^2},\ [-2;2].$$

1.17. Исследовать функции и построить их графики:

$$1)\ y = x + \ln(x^2-4); \quad 2)\ y = \frac{x-1}{x^2-4}; \quad 3)\ y = x^2e^{1/x}; \quad 4)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\ x > 0.$$

1.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = (x+1)\ln\Big(\frac{2^x - 1/2}{3^x - 9}\Big).$$

1.19. Найти радиус основания и высоту цилиндра с наибольшей боковой поверхностью, который можно вписать в шар радиуса R.

1.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\Big(x^n\sin\frac{a}{x}\Big); \quad 2)\ \lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}; \quad 3)\ \lim_{x\to\infty}[\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)} - x].$$

1.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-2, \infty[$;
2) вертикальные асимптоты $x = -2$;
3) горизонтальные асимптоты $y = 2$ $(x \to +\infty)$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки $x = -1, x = 1$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = 0$; $x = 2$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-1; 0[$, $]1; 2[$, $(2, \infty)$; б) убывания: $]-2; -1[$, $]0; 1[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]2, \infty[$; б) вогнутости: $]-2; 0]$, $]0; 2[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-1) = -2$; $y(0) = 0$; $y(1) = -2$; $y(2) = 0$.

1.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = 4/(x+3)$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 2

2.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n+5} = 2; \quad 2)\ \lim_{x\to 1/2} \frac{2x^2-5x+2}{x-1/2} = -3.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

2.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2-3n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} [n\sqrt{n} - \sqrt{n(n^2+2)}]$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{6} + ... + \dfrac{3^n+2^n}{6^n}\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{4x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^3+x-4}{x^2-4x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1-\sqrt{x^2-3}}{x^2-4}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-4})$; 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2 \sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+4}{3x-1}\right)^{2x-1}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{e^{2x}-1}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0} \left(6 - \dfrac{5}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{3n+3}}{n^{3n}} \, \dfrac{\sqrt[n]{(2n+1)!!}}{3^n}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^2[\pi\sqrt{n^2+n}]$.

2.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = (x+1)\cos\left(\frac{4}{x-2}\right)$$

в точке $x_0 = 2$ или показать, что он не существует.

2.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ \cos 3x - \cos x; \qquad 2)\ \sin(\sqrt{9+x} - 3)$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

2.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = 2x^2 + 8$ непрерывна в точке $x_0 = 5$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

2.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x \leqslant 1; \\ 2x, & \text{если } 1 < x \leqslant 3; \\ x+2, & \text{если } x > 3; \end{cases} \quad 2)\ y = 9^{1/(x+7)}; \quad 3)\ f(x) = \frac{1}{\ln(1+|x|)}.$$

2.7. Найти производные следующих функций:

$$1)\ y = \frac{3x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+2}}; \qquad 2)\ y = \ln\ln\sin\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big); \qquad 3)\ y = \frac{\sin^2 19x}{19\cos(1-x)};$$

$$4)\ y = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}(x/2)+1}{2}; \qquad 5)\ y = (\ln 2x)^{3x+8}; \qquad 6)\ y = 4^{x-\sin 3x};$$

$$7)\ y = \frac{8}{3}\operatorname{ch}2x - \frac{\operatorname{ch}^3 x}{1-\operatorname{sh}x}; \qquad 8)\ y = (x^2+2)^{1/x}; \qquad 9)\ y = x\arccos\frac{x}{1-x};$$

$$10)\ 3^x + 3^y = 3^{xy}; \qquad 11)\ \ln(x+y) - y\ln x = 8; \qquad 12)\ \sin^3 x + y^3 = \operatorname{tg}x;$$

$$13)\ \begin{cases} x = \ln\sqrt{1-t^4}, \\ y = \arcsin(1+t^2); \end{cases} \qquad 14)\ \begin{cases} x = \cos^2 3t, \\ y = \sin 3t; \end{cases} \qquad 15)\ \begin{cases} x = t+1, \\ y = t^4 - 3t^2. \end{cases}$$

2.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = 2(x-1)\ln(1+e^x),\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = \operatorname{arctg}7x\sqrt{49x^2+1},\ x_0 = 0.$$

2.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = \frac{x}{4}(10-x^2)\sqrt{4-x^2},\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} - \frac{1}{\cos x},\ x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

2.10. Выяснить, в какой точке кривой $y = 2x^3 - 1$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/3$.

2.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = \Big(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2}\Big)e^{x-1}; \quad 2)\ y = x\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^2 8x - 2}; \quad y = (\ln 2)^{\arcsin x}.$$

2.12. Вычислить приближенно $y = x^{11}$, $x = 1{,}021$.

2.13. Показать, что функция $y = \sqrt[3]{2+3x-3x^2}$ удовлетворяет уравнению

$$yy' = \frac{1-2x}{x}.$$

2.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = x + \ln x,\ y''' =?; \quad 2)\ y = 5^{\cos(1-x)},\ y'' =?; \quad 3)\ y = \lg(1+x),\ y^{(n)} =?;$$

$$4)\ \begin{cases} x = t(1+t), \\ y = \dfrac{1}{t^2+1}, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} =?; \quad 5)\ \begin{cases} x = e^{-t}\sin t, \\ y = e^t\cos t, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} =?.$$

2.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = x\sqrt{2-x^2}; \quad 2)\ y = \frac{1+\ln x}{x}; \quad 3)\ y = (x-1)^4.$$

2.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2,\ \Big[-\frac{1}{2};3\Big];\quad 2)\ y = \frac{x-4}{x^2+9},\ [-4;6];\quad 3)\ y = \frac{1}{2}x - \sin x,\ \Big[-2\pi;-\frac{3}{2}\pi\Big].$$

2.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x;\quad 2)\ y = \Big(\frac{x-1}{x}\Big)^2;\quad 3)\ y = x^3e^x;\quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+(x^2/2)^2},\ x \geqslant 0.$$

2.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \ln\Big(\frac{4-2^x}{4-4^x}\Big).$$

2.19. Найти радиус основания и высоту конуса с образующей l, чтобы объём конуса был наибольшим.

2.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to\infty} x^n e^{-x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0} x^{3/(4+\ln x)};\quad 3)\ \lim_{x\to\infty}\Big(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\Big).$$

2.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty;2[\cup]2;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты $x = 2$;
3) горизонтальные асимптоты $y = 2$ $(x \to +\infty)$, $y = 0$ $(x \to -\infty)$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки $x = -2, x = 1, x = 3$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = 0$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-2;0[$, $]3,\infty[$; б) убывания: $]-\infty;-2[$, $]0;1[$, $]1;2[$, $]2;3[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty;-3[$, $]1;2[$, $]4;\infty[$; б) вогнутости: $]-3;0[$, $]0;1[$, $]2;1[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-3) = -1$; $y(-2) = -2$; $y(1) = 1$; $y(3) = 2$; $y(4) = 2{,}5$; $y(0) = 3$.

2.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = \sqrt{x+7}$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 0$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 0$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 3

3.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{23-4n}{2-n} = 4;\quad 2)\ \lim_{x\to 8}\frac{3x^2-40x+128}{x-8} = 8.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для функции.

3.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{n^6+2}+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}[n-\sqrt{n(n-1)}]$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+...+\frac{1}{5^n}}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1+\cos(\pi/x)}{\operatorname{tg}(\pi/3x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+4x^2-5}{2x^4+x^3-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4x-1}{8x^2+2x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{x}$; 8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{x}$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{1-\cos8x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{arctg}x}{\sin^2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\sin(\pi x/2)}{1-x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^{(x^2-1)/3x}$;

13) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{\sin(x-e)}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/x^2}$; 15) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos2x}{1+\sin x\cos3x}\right)^{\frac{1}{\sin x^3}}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n-1)!!}{(n!)^2}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2[\pi(n^2+1)^{1/2}]$.

3.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=x\cos\frac{x}{x-5}$$

в точке $x_0=5$ или показать, что он не существует.

3.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3};\qquad 2)\ f(x)=\sqrt{x^2+1}-1$$

при $x\to0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

3.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)=-4x^2-8$ непрерывна в точке $x_0=2$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

3.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ f(x)=\begin{cases}x-1, & \text{если } x\leqslant0;\\ x^2, & \text{если } 0<x<2;\\ 2x, & \text{если } x\geqslant2;\end{cases}\quad 2)\ y=\frac{2^{1/(x-3)}}{1+2^{1/(x-3)}};\quad 3)\ f(x)=\frac{4}{x^2-x}.$$

3.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{x+x^2-2}{2\sqrt{1-x^4}}$; 2) $y=\ln\arccos\sqrt{1-4x}$; 3) $y=\dfrac{\cos6x}{\sin^2(1-x)}$;

4) $y=\arcsin\dfrac{x-2}{(x-1)\sqrt{2}}$; 5) $y=(\operatorname{tg}6x)^{1-x}$; 6) $y=(\sin2)^{\ln(1-5x)}$;

7) $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)-\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}$; 8) $y=(x\sin x)^{\ln x}$; 9) $y=x\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$;

10) $x\operatorname{arctg}y=2y\operatorname{tg}2x$; 11) $e^{-xy}+\ln y-x^2=0$; 12) $\dfrac{\sin x}{y}-7=x^3y$;

13) $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=4(2+\cos t);\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=(1+\sin^2t)^2,\\ y=\operatorname{ctg}t-8;\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=\ln(1+t^3),\\ y=e^t-1.\end{cases}$

3.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=2x\sin\frac{x}{2}-4,\ x_0=0;\quad 2)\ y=\arcsin\sqrt{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x},\ x_0=0.$$

3.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = \frac{1}{x}\sqrt{1-4x^3} + \ln(1+\sqrt{1-4x^2}),\ x_0 = \frac{1}{4};\quad 2)\ y = \beta\sin\beta x + \alpha\cos\alpha x,\ x_0 = 0.$$

3.10. Выяснить, в какой точке кривой $y = x^3/3 - x^2/2 - 7x + 9$ касательная составляет с осью Ox угол $-\pi/4$.

3.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$y = \cos x \ln \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{1}{x};\quad y = 1 - x\sin^2 x + \frac{1}{3x};\quad y = e^{\sin x - 8}.$$

3.12. Вычислить приближенно $\sqrt{x^2+x+3}$, $x = 1{,}97$.

3.13. Показать, что функция $y = 2/\cos x$ удовлетворяет уравнению $y' - \operatorname{tg} xy = 0$.

3.14. Найти производные указанных порядков:

$$1)\ y = \sin(\ln\sqrt{x}) + \cos\ln x,\ y'' =?;\quad 2)\ y = 3^{\cos x - 1},\ y''' =?;$$
$$3)\ y = \sin(3x+1) + \cos 5x,\ y^{(n)} =?;$$
$$4)\ \begin{cases} x = \cos t + \sin t, \\ y = \sin 2t, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} =?;\quad 5)\ \begin{cases} x = t^2 e^{-2t}, \\ y = te^{-t}, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} =?.$$

3.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = (1+x)e^x;\quad 2)\ y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2};\quad 3)\ y = 2x^3 - 3x^2.$$

3.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = 3x^4 - 16x^3 + 2,\ [-3;1];\quad 2)\ y = \frac{x-2}{x^2+5},\ [-2;3];\quad 3)\ y = \frac{1}{2}x - \sin x,\ \left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right].$$

3.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = \ln(x^2 - 2x + 2);\quad 2)\ y = x + \frac{2x}{x^2-1};\quad 3)\ y = x + \frac{1}{x^2};$$
$$4)\ y = \lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n}),\ |x| < 1.$$

3.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = (x-1)\ln\left(\frac{2^x - 2}{2^x - 1}\right).$$

3.19. В окружность радиуса r вписан прямоугольник. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы площадь его была наибольшей?

3.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 1}[\ln x \ln(x-1)];\quad 2)\ \lim_{x\to a}\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n};\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}.$$

3.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-3, 0[\cup]0; 2[$;
2) вертикальные асимптоты: $x = -3$, $x = 2$;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: нет;

5) стационарные точки: $x = -2$, $x = -1, x = 1$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = 0$ $(x \to \pm\infty)$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-3;-2[$, $]-1;0[$, $]0;2[$, $]1;2[$; б) убывания: $(-2;-1)$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-3,-1{,}5[$, $]0;1[$; б) вогнутости: $]-1{,}5;0[$, $]1;2[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-2) = 2$; $y(-1) = 1$; $y(-0) = 2$; $y(+0) = 0$; $y(1) = 1$.

3.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = x/(x+5)$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 3$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 3$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 4

4.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{10n-3} = \frac{1}{2};\quad 2)\ \lim_{x\to -1/3}\frac{6x^2-x-1}{3x+1} = -\frac{5}{3}.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

4.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{3^n-2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!(n-1)}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-2x-8}{x^2-4}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-\sin(\pi x/2)}{\cos(\pi x/3)}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-8}-1}{\sqrt{x^2-5}-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\pi/6)}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{x}$; 12) $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln n-\ln(n+2)]\}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)^{2x-1}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\ln\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}^6\sqrt{x}\right)^{1/x^3}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{(n+1)^2}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos[\pi\sqrt{n^2+n}]$.

4.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = \operatorname{ch}\frac{\pi}{x+2}$$

в точке $x_0 = -2$ или показать, что он не существует.

4.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = 1-\cos(\sin x);\qquad 2)\ f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-1$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

4.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = -3x^2 - 9$ непрерывна в точке $x_0 = 3$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

4.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y = \begin{cases} x-1, & \text{если } x < 0;\\ x^2, & \text{если } 0 < x < 1;\\ 2, & \text{если } x \geqslant 1;\end{cases}\quad 2)\ y = \frac{1+4^{1/(2x-1)}}{1-4^{1/(2x-1)}};\quad 3)\ y = \frac{1}{x(x^2-1)}.$$

4.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}}$; 2) $y=\ln^3(1+\cos 5x)$; 3) $y=\dfrac{\operatorname{ctg} 2\cos^3 18x}{\sin 36x}$;
4) $y=\operatorname{arctg} x+\dfrac{5}{6}\ln\dfrac{x^2}{3-x}$; 5) $y=(x^2+1)^{\cos\sqrt{x}}$; 6) $y=\pi^{\operatorname{arctg}(x+5)}$;
7) $y=\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{th}\dfrac{x}{2}-\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}$; 8) $y=(\sin 3x)^{\operatorname{tg} 2x}$; 9) $y=x\arcsin\sqrt{x}$;
10) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$; 11) $\ln 2x+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=0$; 12) $e^{xy}+3^{xy}=5$;
13) $\begin{cases}x=\sqrt{1+t^2},\\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t^2};\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=2-\cos t\end{cases}$; 15) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{4t^2+1},\\ y=\operatorname{arctg} 3t.\end{cases}$

4.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$y=\ln\cos x,\ x_0=0;\quad y=x+\sqrt{x^2+1},\ x_0=0.$$

4.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y=\frac{x^4}{8}\arcsin\frac{3}{x},\ x_0=3;\quad 2)\ y=\frac{2}{3}\operatorname{arctg} e^x,\ x_0=0.$$

4.10. Выяснить, в каких точках кривой $y=x^3/3-5x^2/2+7x+4$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/4$.

4.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y=\ln(x^2-4x)+\cos x;\quad 2)\ y=x-\ln\sqrt{x^2+5};\quad 3)\ y=5^{\ln\sin(x+3)}.$$

4.12. Вычислить приближенно $y=\sqrt{x^2+5}$, $x=1{,}97$.

4.13. Показать, что функция $y=\ln(e+e^x)$ удовлетворяет уравнению $y'=e^{x-y}$.

4.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y=\ln(1-x),\ y''=?;\quad 2)\ y=e^{1/x},\ y'''=?;\quad 3)\ y=2^{3x+5},\ y^{(n)}=?;$$

$$4)\ \begin{cases}x=\ln(1+t),\\ y=1+t,\end{cases}\ \frac{d^2x}{dy^2}=?;\quad 5)\ \begin{cases}x=\arcsin 2t,\\ y=t,\end{cases}\ \frac{d^2y}{dx^2}=?.$$

4.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y=x^3-6x^2+9x-4;\quad 2)\ y=(x+1)e^{-x};\quad 3)\ y=\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x^2}.$$

4.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y=x^3-3x+1,\ \left[\frac{1}{2};2\right];\quad 2)\ y=\frac{4-x^2}{4+x^2},\ [-1;3];\quad 3)\ y=\sqrt{5-4x},\ [-1;1].$$

4.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y=2x-\arcsin x;\quad 2)\ y\ln\frac{x-1}{x+2};\quad 3)\ y=\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3};\quad 4)\ y=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.$$

4.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x+1}e^{1/(x-1)}.$$

4.19. Найти высоту конуса наименьшего объёма, описанного около шара радиуса r.

4.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{1}{\cos(\pi x/2)\ln(1-x)};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x};\quad 3)\ \lim_{x\to\pi/2}\Big(\frac{x}{\operatorname{ctg} x}-\frac{\pi}{2\cos x}\Big).$$

4.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty,\infty[$;
2) вертикальные асимптоты: нет;
3) горизонтальные асимптоты: $y=0$ $(x\to-\infty)$;
4) наклонные асимптоты: $y = x-2$ $(x\to\infty)$;
5) стационарные точки $x=-1, x=1, x=3$;
6) точки, где $y'=\infty$: $x=0, x=2$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-\infty;-1[$,]0;1[; $]3,\infty[$; б) убывания: $]-1;0[$,]1;2[,]2;3[;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-2,0[$,]0;2[; б) вогнутости: $]-\infty;-2[$, $]2;\infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-2)=1$; $y(-1)=2$; $y(0)=0$; $y(1)=4$; $y(2)=3$; $y(3)=2$.

4.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=\cos 3x$ и вычислить её значение в точке $x_0=\pi/4$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0=\pi/4$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n=2,3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 5

5.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+1}=2;\quad 2)\ \lim_{x\to-7}\frac{2x^2+15x+7}{x+7}=-13.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

5.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3})$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{x+\sin x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^4-x^3-40}{x^2-4}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{2x^3+x^2-2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{1-\sqrt{x-1}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\Big)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin 4x}{\operatorname{tg} x-\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 3x}{x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{2x+3}{2x+1}\Big)^{3x+1}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\operatorname{tg} x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1+x3^x}{1+x7^x}\Big)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\Big)^x$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{7\cdot 13\cdots(6n+1)}{1\cdot 8\cdot 27\cdots n^3}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\sin[\pi\sqrt{n^2+1}]}$.

5.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=x\sin\frac{6}{x^2}$$

в точке $x_0=0$ или показать, что он не существует.

5.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}-1; \qquad 2)\ f(x)=\sqrt{\cos x}-\cos x$$

при $x\to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

5.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)=-4x^2-6$ непрерывна в точке $x_0=1$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

5.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y=\begin{cases}-x, & \text{если } x<0;\\ x^2, & \text{если } 0\leqslant x<1;\\ 1, & \text{если } x\geqslant 1;\end{cases} \quad 2)\ f(x)=1+\frac{1}{2^{1/(x-3)}}; \quad 3)\ y=1+\frac{x}{|x|}.$$

5.7. Найти производные следующих функций:

$$1)\ y=3\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^2}}; \qquad 2)\ y=\ln\Bigl(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\Bigr); \qquad 3)\ y=\frac{\sin^3 x}{5\cos 5x};$$

$$4)\ y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}; \qquad 5)\ y=(\sin x)^{5-x}; \qquad 6)\ y=e^{\ln\cos 3x};$$

$$7)\ y=\frac{1-8\operatorname{ch}^2 x}{4\operatorname{ch}^4 x}; \qquad 8)\ y=(\operatorname{arctg} x)^{\ln\sqrt{x}}; \qquad 9)\ y=x\operatorname{arctg}^3 5x-\frac{1}{x};$$

$$10)\ e^{-x}\operatorname{tg} x-e^y=\cos x; \qquad 11)\ y\ln(y-x)=e^{xy}; \qquad 12)\ \sin y+\cos x=y^2-3;$$

$$13)\ \begin{cases}x=\sqrt{2t-t^2},\\ y=\arcsin(t-1);\end{cases} \qquad 14)\ \begin{cases}x=\cos(1-t),\\ y=\sin 2(1-t);\end{cases} \qquad 15)\ \begin{cases}x=t^3-\dfrac{1}{t},\\ y=t^2-5t.\end{cases}$$

5.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=\ln(1+3^x),\ x_0=0; \quad 2)\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{2}},\ x_0=0.$$

5.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y=x^3\arccos x-\frac{x^2+2}{3},\ x_0=0; \quad 2)\ y=3(2+\sin x)\cos x,\ x_0=0.$$

5.10. Найти точки на кривой $y=x^3/3-9x^2/2+20x-7$, в которых касательные параллельны оси Ox.

5.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y=e^x(\cos 2x-\sin x); \quad 2)\ y=2^{5x\operatorname{ctg} 2x}; \quad 3)\ y=x\ln(1-x)-\frac{1}{x}.$$

5.12. Вычислить приближенно $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$, $x=1{,}012$.

5.13. Показать, что функция $y=(x^2+1)e^{x^2}$ удовлетворяет уравнению $y'-2xy=2xe^{x^2}$.

5.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y=x+\sin 2x,\ y'''=?; \quad 2)\ y=\sin^3(1-2x^2),\ y''=?; \quad 3)\ y=\frac{4+15x}{5x+1},\ y^{(n)}=?;$$

$$4)\ \begin{cases}y=4(2+\cos t),\\ x=2(t-\sin t),\end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2}=?; \quad 5)\ \begin{cases}x=\operatorname{tg} t,\\ y=\ln\cos t,\end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=?.$$

5.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = x^3 - 6x^2 + 12x;\quad 2)\ y = \frac{x^3}{x^2+3};\quad 3)\ y = x^3(x+2)^2.$$

5.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = x^3 - 12x + 7,\ [0;3];\quad 2)\ y = \frac{\ln x}{x},\ ]0;\infty[;\quad 3)\ y = x + \frac{1}{x},\ [0{,}01;100].$$

5.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = \sqrt[3]{(x^2-8)^2};\quad 2)\ y = \frac{1-x^3}{x^2};\quad 3)\ y = \frac{e^x}{x};\quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^{2n}}}.$$

5.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{x(x-1)^2}{x+2}}.$$

5.19. Найти наибольшей объём цилиндра, полная поверхность которого равна S.
5.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x^3}{\sin^6 2x};\quad 2)\ \lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi};\quad 3)\ \lim_{x\to 0}(\arcsin x \operatorname{ctg} x).$$

5.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:
1) область определения $X =]-\infty;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты: нет;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y = x$ $(x \to \pm\infty)$;
5) стационарные точки $x = -1, x = 1$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = -2, x = 2, x = 3$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-2;0[$,]2;3[; б) убывания: $]-\infty;-2[$,]0;2[, $]3;\infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости:]2,5; 3,5[; б) вогнутости: $]-\infty;0[$,]0;2,5[, $]3{,}5;\infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-2) = 3$; $y(0) = 5$; $y(2) = -3$; $y(3) = -1$; $y(5) = -4{,}5$.

5.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = 10^{2x-1}$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 3$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 3$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2,3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 6

6.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3};\quad 2)\ \lim_{x\to 11}\frac{2x^2-21x-11}{x-11} = 23.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

6.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+1)!}{2n!-3(n+1)!}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n^2-3)}}{\sqrt{n}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+...+n}{\sqrt{9n^4+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sin(\pi x)}{3\operatorname{tg}(\pi x/3)}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+2x-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{2x^2-3}-5x)$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-x\sin x-\cos 2x}{\sin^4 x}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin 2x^2}{4x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x^2}{2-x^2}\right)^{5x^2+1}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(2x+1)}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}(1-\ln\cos x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$; 15) $\lim\limits_{x\to0}(e^x+x)^{1/x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot4\cdots(3n-2)}{7\cdot9\cdots(2n+5)}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\cos(\pi\sqrt{n^2+n})}$.

6.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=x\sin\left(\frac{\pi x}{x+1}\right)$$

в точке $x_0=-1$ или показать, что он не существует.

6.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}-1;\qquad 2)\ f(x)=1-\cos 2x+\operatorname{tg}^3 x$$

при $x\to0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

6.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)=-5x^2-7$ непрерывна в точке $x_0=1$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

6.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ \sin x, & \text{если } 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2};\\ 1, & \text{если } x\geqslant\dfrac{\pi}{2};\end{cases}\quad 2)\ y=3^{-1/(1-2x)};\quad 3)\ y=\frac{1+x}{|x|}.$$

6.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{(x-3)\sqrt{2x-1}}{2x+7}$; 2) $y=\ln\ln^2\ln 5x-4$; 3) $y=\dfrac{3\operatorname{ctg}5x}{\sin^3 5x}$;

4) $y=\arcsin\dfrac{x\sqrt2}{1+x}$; 5) $y=x^{\operatorname{tg}x+3}$; 6) $y=4^{x\operatorname{ctg}x}$;

7) $y=\dfrac{1}{\operatorname{sh}x}-\dfrac{1}{3\operatorname{ch}x}+\dfrac{5}{2}\operatorname{tg}x$; 8) $y=(\ln x)^{3x}$; 9) $y=(x+1)\operatorname{tg}e^x$;

10) $x^2+y^3=\cos\dfrac{1}{y}$; 11) $y\ln x-x\ln y=x+y$; 12) $e^{-xy}+\dfrac{x}{y}=y^2-4y$;

13) $\begin{cases}x=t^2+5,\\ y=t-t^2;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\arcsin\sqrt{1-t^2},\\ y=\arccos t;\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=\ln^2 t,\\ y=e^t.\end{cases}$

6.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=\frac{3\sin 2x-2\cos 2x}{\ln^3 3+4},\ x_0=\frac{\pi}{2};\quad 2)\ y=\frac{x}{2}\ln(1-x^2)+\sin 2,\ x_0=0.$$

6.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = x \arcsin e^{-3x},\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = e^{2x}(2 - \sin 2x - \cos 2x),\ x_0 = 0.$$

6.10. Найти точку на кривой $y = x^2/4 - 7$, касательная в которой параллельна прямой $y = 8x - 4$.

6.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = x(\sin \ln x - \cos \ln x); \quad 2)\ y = \operatorname{tg} x - \sqrt{1 - \cos 6x}; \quad 3)\ y = e^{x \cos 6x}.$$

6.12. Вычислить приближенно $y = x^7$, $x = 2{,}002$.

6.13. Показать, что функция $y = (2 \sin x)/x + \cos x$ удовлетворяет уравнению $x \sin x y' + (\sin x - x \cos x) y = \sin x \cos x - x$.

6.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = \ln(x + \sqrt{1 - x^2}),\ y'' =?; \quad 2)\ y = x - \sin^2 x,\ y''' =?; \quad 3)\ y = 7^{5x},\ y^{(n)} =?;$$

$$4)\ \begin{cases} x = 2t \sin t, \\ y = 3 \cos t, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} =?; \quad 5)\ \begin{cases} x = \ln \sqrt{t}, \\ y = \operatorname{arctg} \sqrt{t^2 - 1}, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} =?.$$

6.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}; \quad 2)\ y = \frac{\ln^2 x}{x}; \quad 3)\ y = 2x^2 - x^4.$$

6.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = x^3 - 18x^2 + 96x,\ [0; 9]; \quad 2)\ y = \left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)^2,\ [-4; 0]; \quad 3)\ y = \cos 2x + 2x,\ \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

6.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = \ln(x^2 - 4); \quad 2)\ y = \frac{2}{x^2 - 4}; \quad 3)\ y = xe^{-x}; \quad 4)\ y = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

6.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{x(x - 1)(x - 2)}{x + 3}}$$

6.19. Через данную точку (1;4) провести прямую так, чтобы сумма длин положительных отрезков, отсекаемых ей на координатных осях, была наименьшей.

6.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 6x + 6 \sin x}{x^5}; \quad 2)\ \lim_{x \to +0} x^{6/(1 + 2 \ln x)}; \quad 3)\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right).$$

6.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty; -1[\cup]-1; \infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x = -1$;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y = (x/2) - 1$;
5) стационарные точки $x = 0$, $x = -3$;
6) точки, где $y' = \infty$: нет;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-\infty; -3[$, $]-1, \infty[$; б) убывания: $]-3; -1[$;

8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$; б) вогнутости: $]0; \infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-3) = -3\frac{3}{8}$; $y(-2) = -4$; $y(0) = 0$; $y(2) = \frac{4}{3}$.

6.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = \ln(4 + x)$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 7

7.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{5n+15}{6-n} = -5; \quad 2)\ \lim_{x\to 1/3} \frac{6x^2+x-1}{x-1/3} = 5.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

7.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^4+1}+n}{\sqrt[4]{n^5+1}-n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} [\sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2}]$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$;
4) $\lim\limits_{x\to\pi/2} \dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2+2x-6}{5x^2+2x-7}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} \Big(\dfrac{x^3}{5x^2+1} - \dfrac{3x^2}{15x+1}\Big)$;
7) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$; 8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{9x^2+1} - 3x)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin 4x}{2x-\sin 2x}$;
10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2x + 1}{\operatorname{ctg}(\pi/6 + x) + 1}$; 12) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \Big(\dfrac{1+x}{1+2x}\Big)^{x+3}$;
13) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{2x/(1-x)}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0} \Big(1 - \sin^2 \dfrac{x}{2}\Big)^{1/\ln(1+\operatorname{tg}^2 3x)}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0} \Big(\dfrac{5}{2+\sqrt{9+x}}\Big)^{1/\sin x}$;
16) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln^n(n+1)}{\ln^{n+1}(n+2)}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\sin(\pi\sqrt{n^2+1})}$.

7.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = x^2 \exp \frac{4}{(x-1)^3}$$

в точке $x_0 = 1$ или показать, что он не существует.

7.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = e^x - e^{-x}; \qquad 2)\ f(x) = 1 + x\sin x - \cos 2x$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

7.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = -2x^2 - 4$ непрерывна в точке $x_0 = 3$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

7.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 0; \\ \cos x, & \text{если } 0 \leqslant x < \pi/2; \\ 1+x, & \text{если } x \geqslant \pi/2; \end{cases} \quad 2)\ y = 1 + 2^{1/(3x-2)}; \quad 3)\ y = \frac{1-x}{1-|x|}.$$

7.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=3\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+5}-\sin^2 x$; 2) $y=\ln\ln\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)$; 3) $y=\dfrac{\cos^2 4x}{8\sin 8x}$;
4) $y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x-1}{6\sqrt{x}}$; 5) $y=(\ln^2 x)^{x+6}$; 6) $y=2^x x^x$;
7) $y=-\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{5+3\operatorname{ch}x}{3+5\operatorname{ch}x}$; 8) $y=(\sin x)^{5e^x}$; 9) $y=x2^{(1-x)/(1+x)}$;
10) $\operatorname{tg}(x+y)=\sin(x-y)$; 11) $e^{x+y^2}=\sin\dfrac{x}{y}-8$; 12) $\ln(xy)=5-x^3$;
13) $\begin{cases}x=e^t,\\ y=\arcsin t;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2},\\ y=t\sqrt{1+t};\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=e^{2t}-e^{-2t},\\ y=1+e^{-2t}.\end{cases}$

7.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=\cos x-2\sin^4 x,\ x_0=\frac{\pi}{2};\quad 2)\ y=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ x_0=\frac{1}{2}.$$

7.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y=\ln\frac{1+\sqrt{-3-12x-9x^2}}{3x-2},\ x_0=\frac{1}{2};\quad 2)\ y=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2,\ x_0=1.$$

7.10. Найти точку на кривой $y=-3x^2+4x+7$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x-20y+5=0$.

7.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y=\ln(2x+\sqrt{x^2+x+1});\quad 2)\ y=\sin^2\frac{1}{x}-\frac{x}{x+1};\quad 3)\ y=e^{\ln\operatorname{tg}(1-x)}.$$

7.12. Вычислить приближенно $y=\arcsin x$, $x=0{,}08$.

7.13. Показать, что функция $y=-\sqrt{x^4-x^2}$ удовлетворяет уравнению $xyy'-y^2=x^4$.

7.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y=\frac{1}{4}x^2-2\ln x+3,\ y''=?;\quad 2)\ y=\arcsin\sqrt{1-x^2},\ y'''=?;$$

$$3)\ y=\sin(x+1)+\cos 2x,\ y^{(n)}=?;$$

$$4)\ \begin{cases}x=\operatorname{tg}53t,\\ y=\sin 53t,\end{cases}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?;\quad 5)\ \begin{cases}x=1-t^3,\\ y=6+5t^2,\end{cases}\quad \frac{d^2x}{dy^2}=?.$$

7.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3;\quad 2)\ y=\sqrt{2x-x^2};\quad 3)\ y=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}.$$

7.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y=x^3-12x+7,\ [-3;0];\quad 2)\ \operatorname{tg}x-x,\ \Big[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\Big];\quad 3)\ y=\frac{x^3+16}{x},\ [1;4].$$

7.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y=(x+4)e^{2x};\quad 2)\ y=\frac{x^3-1}{x^3};\quad 3)\ x-\ln(x+1);\quad 4)\ y=\lim_{n\to\infty}(1+x^n)^{1/n},\ x>0.$$

7.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x+3}2^{-1/(x+3)}.$$

7.19. Найти отношение радиуса цилиндра к его высоте, при котором цилиндр имеет при данном объёме V наименьшую полную поверхность.

7.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to\pi/2}[(\pi-2x)\operatorname{tg}x];\quad 2)\ \lim_{x\to0}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\Big);\quad 3)\ \lim_{x\to\infty}(1+e^x)^{1/x}.$$

7.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X=]-\infty;1[\cup]1;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x=1$;
3) горизонтальные асимптоты $y=0)$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки: $x=0, x=3$;
6) точки, где $y'=\infty$: нет;
7) интервалы монотонности: а) возрастания:]0;1[,]1;3[; б) убывания: $]-\infty;0[$, $]3;\infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty;-1/2[$,]1;4[; б) вогнутости: $]-1/2;1[$, $]4;\infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-1/1)=-1/2$; $y(0)=-1$; $y(1/2)=0$; $y(3/2)=0$; $y(3)=2$; $y(4)=1$.

7.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=5^x$ и вычислить её значение в точке $x_0=2$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0=2$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n=2,3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 8

8.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3}{n^3-1}=3;\quad 2)\ \lim_{x\to-7/2}\frac{2x^2+13x+21}{2x+7}=-\frac{1}{2}.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

8.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-(n-1)^2}{3n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-5+...+2n-(2n+3)}{n+3}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{\operatorname{tg}(\pi x/4)}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^4-2x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-2x^3+x-2}{x^3-x}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos2x-1)x}{\sin^3x}$; 8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin2x-\sin x}{2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\Big(\dfrac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\Big)$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(1+\dfrac{x}{2}\Big)^{1/(2x+1)}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to a}\Big(2-\dfrac{x}{a}\Big)^{\operatorname{tg}(\pi x/2a)}$; 15) $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}^2x)^{1/\ln(1+3x^2)}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{2^{n^3}}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\cos^2[\pi\sqrt{n^2+n}]}$.

8.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=x\operatorname{sh}\frac{1}{x+2}$$

в точке $x_0 = -2$ или показать, что он не существует.

8.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = \sqrt[4]{1+\sqrt{x^3}} - 1; \qquad 2)\ f(x) = \ln(1+\sqrt[3]{x^2})$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

8.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) - 3x^2 - 5$ непрерывна в точке $x_0 = 2$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

8.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y = \begin{cases} 1/(x^2+1), & \text{если } x \leqslant 0; \\ 1 - x^2, & \text{если } 0 < x \leqslant 1; \\ 1, & \text{если } x > 1; \end{cases} \quad 2)\ y = \frac{1}{2 + 3^{1/(2x+1)}}; \quad 3)\ f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}.$$

8.7. Найти производные следующих функций:

1) $y = (x-2)\sqrt{x^2+4x+5}$; 2) $y = \ln\ln^3\ln^2 x$; 3) $y = \dfrac{5\sin^2 17x}{17\operatorname{tg} 3x}$;

4) $y = \arccos\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+16}}$; 5) $y = (2x+3)^{\operatorname{ctg}^2 6x}$; 6) $y = (x+9)^{x-3}$;

7) $y = \dfrac{1}{4}\ln\operatorname{th}\dfrac{x}{2} - \ln\dfrac{3+\operatorname{ch} x}{2}$; 8) $y = (\sin x)^{x^2-1}$; 9) $y = x\ln\sqrt[5]{1+\operatorname{tg} x}$;

10) $x^2\sin y + \cos x = \cos 2x$; 11) $\arcsin x - 5 = \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$; 12) $\ln xy - 2 = y^3$;

13) $\begin{cases} x = t(1+t^2), \\ y = \operatorname{arctg} x; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x = \ln(t+\sqrt{t+1}), \\ y = t\sqrt{t+1}; \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

8.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = \operatorname{arctg}(e^x - e^{-x}),\ x_0 = 1; \quad 2)\ y = \ln(5x + \sqrt{25x^2+1}),\ x_0 = 0.$$

8.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x,\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = \frac{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} - \ln 5,\ x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

8.10. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 4x + 6$, касательная в которой параллельна прямой $8x - y - 5 = 0$.

8.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = \operatorname{arctg}\Big(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\Big); \quad 2)\ y = \ln(e^{-x} + e^x); \quad 3)\ y = 2^{\operatorname{tg} 4x}.$$

8.12. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}$, $x = 0{,}97$.

8.13. Показать, что функция $y = (x+1)^n(e^x-1)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{y' - ny}{x+1}e^x(x+1)^n$.

8.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = e^x + 2e^{2x},\ y''' = ?; \quad 2)\ y = x^2 + \cos^3 x,\ y'' = ?; \quad 3)\ y = \frac{2x+5}{13(3x+1)},\ y^{(n)} = ?;$$

$$4)\ \begin{cases} x = 5t^3 - 6t + 8, \\ y = 1 - t^3, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = ?; \quad 5)\ \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 5\cos t, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?.$$

8.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = 3 - 2x^2 - x^4; \quad 2)\ y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}; \quad 3)\ y = e^x + e^{-x}.$$

8.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,\ [-1;5]; \quad 2)\ y = \frac{2x-1}{(x-1)^2},\ [-2;0{,}5]; \quad 3)\ y = \sqrt[3]{2x^2+1},\ [-2;1].$$

8.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}; \quad 2)\ y = e^{1/(3-x)}; \quad 3)\ y = x^2e^x; \quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\left(1 + x^n + \frac{x^{2n}}{2^n}\right)^{1/n}.$$

8.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-2}3^{1/(x-1)}.$$

8.19. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объёме наименьшую полную поверхность.

8.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to\pi/2}(\sin x - \operatorname{tg} x); \quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\ln x}; \quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x}.$$

8.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty;-1[\cup]-1;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x = -1$;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты $y = x - 1$;
5) стационарные точки $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = 1$;
7) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty;-1[$, $]0;1[$, $]1;2[$; б) вогнутости: $]-1;0[$, $]2;\infty[$;
8) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-\infty;-2[$, $]1;\infty[$; б) убывания: $]-2;-1[$, $]-1;0[$, $]0;1[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-2) = -3{,}5$; $y(0) = 0$; $y(1) = -2$; $y(2) = 2$.

8.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = e^{4x}$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 2$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 2$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 9

9.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2-n^2} = -3; \quad 2)\ \lim_{x\to 1/3}\frac{6x^2-5x+1}{x-1/3} = -1.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

9.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^n-1}{2^{2n}+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}-\sqrt{n-3}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big[\dfrac{n+2}{1+2+...+n}-\dfrac{2}{3}\Big]$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos(\pi x/4)}{\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{2x^3-3x+10}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt[3]{x^3+2}+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{x^2+8}-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 5x}{x+\operatorname{tg}4x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-1}{\operatorname{tg}^2 2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{\frac{1}{2}-\cos x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{2+x^2}{4+x^2}\Big)^{(x^3+1)/x^2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{e^{2x}-1}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1+\operatorname{tg}x\cos 2x}{1+\operatorname{tg}x\cos 5x}\Big)^{1/x^3}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{1/x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\sin^{n+1}[\pi/(n+1)^2]}{n\sin^n(\pi/n^2)}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\sin^2[\pi\sqrt{n^2+1}]}$.

9.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=x\sin\frac{\pi(x+2)}{x+1}$$

в точке $x_0=-1$ или показать, что он не существует.

9.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=e^x-\cos 2x;\quad 2)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}-1$$

при $x\to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

9.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)=3x^2-2$ непрерывна в точке $x_0=5$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

9.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ 2\sin x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\pi/2;\\ \dfrac{\pi+4}{2}-x, & \text{если } x>\pi/2;\end{cases}\quad 2)\ y=1-4^{1/(x-3)};\quad 3)\ y=\frac{x}{x^2-4}.$$

9.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$; 2) $y=\ln\dfrac{\ln x}{\sin 2x}$; 3) $y=\dfrac{\sin 3\cos^2 3x}{4\sin 4x}$;

4) $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5x}}$; 5) $y=(x+8)^{\operatorname{tg}ex}$; 6) $y=3^{x\ln 5x}$;

7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\ln\dfrac{4+\sqrt{8}\operatorname{th}(x/2)}{4-\sqrt{8}\operatorname{th}(x/2)}$; 8) $y=x^{19}19^x$; 9) $y=x(e^{\sin x}-1)$;

10) $\cos x+\cos y=\sin(xy)$; 11) $(x+y)^2-(x-y)^3=0$; 12) $e^{x/y}-y^3=\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$;

13) $\begin{cases}x=\operatorname{arctg}t,\\ y=2t^2;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2},\\ y=\ln(1+t);\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=2\cos^3 2t,\\ y=\sin^3 2t.\end{cases}$

9.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=\ln(e^{4x}+\sqrt{e^{2x}-1}),\ x_0=0;\quad 2)\ y=\frac{1}{m}\operatorname{arctg}e^{mx},\ x_0=0.$$

9.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = \frac{\sin x + \ln 2(\cos x)}{1+\ln 2},\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = 5 \arcsin \sqrt{\frac{x+2}{5}},\ x_0 = 2.$$

9.10. Найти точку на кривой $y = 5x^2 - 4x + 1$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x + 6y + 15 = 0$.

9.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = \ln(x^2-1) - \frac{1}{x}; \quad 2)\ y = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}, \quad 3)\ y = e^{\sqrt{1+\cos 6x}}.$$

9.12. Вычислить приближенно $y = x^{21}$, $x = 0{,}998$.

9.13. Показать, что функция $y = x/\cos x$ удовлетворяет уравнению $y' - y\operatorname{tg} x = \sec x$.

9.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = (2x+3)^2 + \sqrt{1+x},\ y''' = ?; \quad 2)\ y = 4^{\arcsin\sqrt{x}},\ y'' = ?; \quad 3)\ y = \lg(x+4),\ y^{(n)} = ?;$$

$$4) \begin{cases} x = \arcsin\dfrac{1}{t}, \\ y = t+1, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = ?; \quad 5) \begin{cases} x = e^t, \\ y = 5t^2 - 6, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?.$$

9.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = \frac{1}{3}x^3 - x^4; \quad 2)\ y = \sqrt[3]{x-1}; \quad 3)\ y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}.$$

9.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,\ [-3;0]; \quad 2)\ y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2,\ [-3;0]; \quad 3)\ y = \arcsin x^2,\ \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

9.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = \ln(x^2 - 4x + 8); \quad 2)\ y = \frac{x-1}{x^2-2x}; \quad 3)\ y = (x-1)e^{3x}; \quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n.$$

9.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{x(x+1)(x-2)}{x+2}}$$

9.19. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R.

9.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right); \quad 2)\ \lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}; \quad 3)\ \lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

9.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; \infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x = -2$, $x = 2$;
3) горизонтальные асимптоты: $y = 0$ $(x \to +\infty)$, $y = -1$ $(x \to -\infty)$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки: $x = -4, x = 0, x = 4$;

6) точки, где $y' = \infty$: нет;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-\infty; -4[$, $]-2; 0[$; $]4; \infty[$; б) убывания: $]-4; -2[$, $]2;4[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-5; -2[$, $]-2; 0[$, $]5; \infty[$; б) вогнутости: $]-\infty; -5[$, $]0;2[$, $]2;5[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-5) = 0$; $y(-4) = 1$; $y(-3) = 0$; $y(0) = 0$; $y(3) = -1$; $y(4) = -2$, $y(5) = -1$.

9.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = 1/(x-3)$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 10

10.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-5} = \frac{2}{3};\quad 2)\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = 2.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для функции.

10.2. Найти пределы

$1)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!+(n+3)!}{n(n!-(n+2)!};$ $\quad 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+...+(2n-1)};$ $\quad 3)\ \lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n(n+5)}-n];$

$4)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\operatorname{tg}(\pi x/3)}{\cos(\pi x/4)};$ $\quad 5)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x^3-3x^2-28}{x^2-5x+6};$ $\quad 6)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3+2x^2+2}{5x^4+x^3-1};$

$7)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{2-\sqrt{x^2+4}};$ $\quad 8)\ \lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x});$ $\quad 9)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 2x};$

$10)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^2\sin 2x};$ $\quad 11)\ \lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{1-\sin 2x}{\frac{\pi}{4}-x};$ $\quad 12)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos^2 x}{2x^2};$

$13)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{(x^2+1)/x};$ $\quad 14)\ \lim\limits_{x\to 0}(2-e^{x^2})^{1/(1-\cos\pi x)};$ $\quad 15)\ \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x;$

$16)\ \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{4\cdot 10\cdots(6n-2)}{1\cdot 16\cdots(3n-2)^2}};$ $\quad 17)\ \lim\limits_{n\to\infty} e^{\cos[\pi\sqrt{n^2+n}]}.$

10.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = \frac{1}{x^2}(e^{1/x^2}-1)$$

в точке $x_0 = 0$ или показать, что он не существует.

10.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = \ln(1+\sqrt{x}\sin 2x);\quad 2)\ f(x) = \sqrt[4]{\sqrt{x}+1}-1$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

10.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = 2x^2-3$ непрерывна в точке $x_0 = 4$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

10.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x<0;\\ 1-x^2, & \text{если } 0\leqslant x<1;\\ 0, & \text{если } x>1;\end{cases}\quad 2)\ y = \frac{1+2^{1/(2x-1)}}{1-2^{1/(2x-1)}};\quad 3)\ y = \frac{x+1}{x^2-9}.$$

10.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{(2x-3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$; 2) $y=\ln\dfrac{\sqrt{2}x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{2}}$; 3) $y=\sin 3+\dfrac{\sin^2 6x}{\operatorname{tg} 2x}$;

4) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$; 5) $y=x^{\operatorname{tg} 5x}$; 6) $y=21^{\cos\ln x}$;

7) $y=\dfrac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\dfrac{3+\operatorname{ch} x}{1+3\operatorname{ch} x}$; 8) $y=(\cos 2x)^{\ln\sin 2x}$; 9) $y=e^{-x}(2\sin 5x-3)$;

10) $2+y^2-xy=\ln x$; 11) $\sin(xy)=\cos(x+y)$; 12) $e^y-e^{\sin x}=\dfrac{y}{x}$;

13) $\begin{cases}x=t\sqrt{1-t^2},\\ y=\arccos t;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\operatorname{arctg} e^t,\\ y=\ln\operatorname{tg} e^t;\end{cases}$ 13) $\begin{cases}x=\cos t+\sin t,\\ y=\sin 2t.\end{cases}$

10.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=\frac{1}{\sqrt{4}}\ln\frac{1-x^2}{1+x},\ x_0=1;\quad 2)\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{2}},\ x_0=0.$$

10.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y=\sqrt{x^2+4x-5}-4,\ x_0=3;\quad 2)\ y=\cos e^x-x-5,\ x_0=0.$$

10.10. Найти точку на кривой $y=3x^2-5x-11$, касательная в которой параллельна прямой $x-y+10=0$.

10.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y=\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x};\quad 2)\ y=\ln\sqrt{\frac{e^x}{3x-1}};\quad 3)\ y=(\ln 2)^{x-8}.$$

10.12. Вычислить приближенно $y=x^6$, $x=2{,}01$.

10.13. Показать, что функция $y=\dfrac{x}{x-1}+x^3$ удовлетворяет уравнению $x(x-1)y'+y=x^2(2x-1)$.

10.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y=\frac{1}{2}\ln^2(1-x),\ y'''=?;\quad 1)\ y=\frac{1}{3}\sin x-\frac{1}{x},\ y''=?;\quad 3)\ y=a^{3x},\ y^{(n)}=?;$$

$$4)\begin{cases}x=t^2-\dfrac{1}{t},\\ y=5-4t,\end{cases}\quad \frac{d^2x}{dy^2}=?;\quad 5)\begin{cases}x=\ln 2t,\\ y=\dfrac{6}{t^2},\end{cases}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?.$$

10.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y=x-\ln(1+x^2);\quad 2)\ y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}};\quad 3)\ y=x\sin x+\cos x-\frac{1}{4}x^2.$$

10.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y=\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{1-x},\ \begin{matrix}(0<x<1)\\(a>0,b>0)\end{matrix};\quad 2)\ y=\frac{x-3}{x^2+7},\ [2;8];\quad 3)\ y=\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x},\ [0;1].$$

10.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y=x^3\ln x;\quad 2)\ y=x-\sqrt[3]{x^2};\quad 3)\ y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2;\quad 4)\ y=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\ x>0.$$

10.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x-2}2^{-5/(x-2)}.$$

10.19. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 см. Определить её большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

10.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right);\quad 2)\ \lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}(\pi/2)};\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\frac{2-(e^x+e^{-x})\cos x}{x^4}.$$

10.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty, \infty[$;
2) вертикальные асимптоты: нет;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y = -x/2$;
5) стационарные точки: $x = 0, x = 4$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = -3$, $x = 3$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-3;0[$, $]3;4[$; б) убывания: $]-\infty;-3[$, $]0;3[$, $[4;\infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty;-3[$, $]-3;3[$, $]3;5[$; б) вогнутости: $]5;\infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-4) = 0$; $y(-3) = -4$; $y(-2) = 0$; $y(0) = 4$; $y(4) = 0$; $y(5) = -2$.

10.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = \sqrt{x}$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 2$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 2$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 11

11.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty} -\frac{5n}{n+1} = -5;\quad 2)\ \lim_{x\to -1/3}\frac{3x^2-2x-1}{x+1/3} = -4.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

11.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-2n+1}{n\sqrt{n^2-2}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{9n^4+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-1}{2\sin(\pi/x)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+2}}{(x+1)^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-3}-1}{x^3-4x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x^2-1}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin[(x-\pi/3)/2]}{x-\pi/3}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 3x}{x\sin x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\operatorname{arctg} x}{\sin x+\operatorname{tg} x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2/(x+1)}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(3-\dfrac{2}{\cos x}\right)^{\operatorname{cosec}^2 x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2\sqrt{x})^{1/3x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(2n+1)!!}}{3^n}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\sin[\pi(n^2+1)^{1/2}]}$.

11.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = \exp\Big(\frac{\pi}{x+3}\Big)^3$$

в точке $x_0 = -3$ или показать, что он не существует.

11.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{3x+1};\quad 2)\ f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

11.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 + 1$ непрерывна в точке $x_0 = 7$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

11.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0; \\ x^2, & \text{если } 0 \leqslant x < 1; \\ 2-x, & \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}\quad 2)\ y = 1 - 4^{2/(x-3)};\quad 3)\ y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

11.7. Найти производные следующих функций:

$$\begin{array}{lll}
1)\ y = (1-x^2)\sqrt[5]{x^3 + \dfrac{1}{x}}; & 2)\ y = \ln \arcsin \sqrt{1 + e^{2x}}; & 3)\ y = \ln 2 + \dfrac{\operatorname{tg} 6x}{\sin 3x}; \\
4)\ y = \operatorname{arctg} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}}; & 5)\ y = x^{\sin 3x}; & 6)\ y = 4^{\ln \cos 5x}; \\
7)\ y = -\dfrac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch} x} + \dfrac{3}{2} \operatorname{th} 5x; & 8)\ y = (x^8 + 1)^{\operatorname{tg} x}; & 9)\ y = (\operatorname{ctg} \sqrt{x}) \sin e^x; \\
10)\ \arccos(xy) = \ln(x+y); & 11)\ e^y \sin y - e^x \cos x = 0; & 12)\ 5^x + 5^y = 5^{x+y}; \\
13)\ \begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = 1/\sqrt{t}; \end{cases} & 14)\ \begin{cases} x = \ln \dfrac{1-t}{1+t}, \\ y = \sqrt{1-t^2}; \end{cases} & 13)\ \begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}
\end{array}$$

11.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = 2\cos x - 3 \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2},\ x_0 = \frac{\pi}{2};\quad 2)\ y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} + \ln x,\ x_0 = \sqrt{2}.$$

11.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = \ln \frac{1 - \sqrt{3 - 4x}}{-x - 2},\ x_0 = 0;\quad 2)\ y = -\frac{1}{2} e^x (x^4 + 2x^2 + 2),\ x_0 = 0.$$

11.10. Найти точку на кривой $y = -x^2 + 7x + 16$, касательная в которой параллельна прямой $y = 3x + 4$.

11.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = \ln \frac{x + \sqrt{x+1}}{2x};\quad 2)\ y = \sin^2 \ln \frac{1}{x};\quad 3)\ y = e^{\arcsin \sqrt{1-x^2}}.$$

11.12. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x^2}$, $x = 1{,}03$.

11.13. Показать, что функция $y = -x \cos x + 3x$ удовлетворяет уравнению $xy' = y + x^2 \sin x$.

11.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = x^2 - \sin 5x,\ y''' = ?; \quad 2)\ y = e^{\operatorname{tg} \ln \sin x},\ y'' = ?; \quad 3)\ y = \frac{4x+7}{2x+3},\ y^{(n)} = ?;$$

$$4) \begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = \ln 3t, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?; \quad 5) \begin{cases} x = 2 - t^3, \\ y = t^2 - t, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = ?.$$

11.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x; \quad 2)\ y = \frac{x}{1+x^2}; \quad 3)\ y = xe^{-x}.$$

11.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = x^4 + 4x,\ [-2; 2]; \quad 2)\ y = x - \sin x,\ [0; 2\pi]; \quad 3)\ y = \sqrt{100 - x^2},\ [-6; 8].$$

11.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = \frac{1}{e^{2x} - 1}; \quad 2)\ y = \frac{x^3 + 16}{x}; \quad 3)\ y = x^2 - 2\ln x; \quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n},\ x \geqslant 0.$$

11.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = x \ln\left(\frac{3^x - 1}{3^x - 9}\right).$$

11.19. Окно имеет форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр фигуры равен 15 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света.

11.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to\infty} (e^x - x^2); \quad 2)\ \lim_{x\to 1} (x-1)^{a/[\ln 2(x-1)]}; \quad 3)\ \lim_{x\to\infty} -\frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}.$$

11.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty; 3[\cup]3; \infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x = 3$;
3) горизонтальные асимптоты: $y = 0$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки $x = -2$, $x = 2$, $x = 5$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = 0$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-\infty; -2[$, $]0; 2[$, $]2; 3[$, $]3; 5[$; б) убывания: $]-2; 0[$, $]5; \infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-3; 0[$, $]0; 2[$, $]3; 6[$; б) вогнутости: $]-\infty; -3[$, $]2; 3[$, $]6; \infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-3) = 1$; $y(-2) = 2$; $y(0) = -4$; $y(2) = 1$; $y(5) = 2$; $y(6) = 1$.

11.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = 7^{-2x}$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 12

12.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{2n+1}=2;\quad 2)\ \lim_{x\to-1/3}\frac{9x^2-1}{x+1/3}=-6.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

12.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n}{n!+(n+1)!}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}(4k-3)-\sum\limits_{k=1}^{n}(4k-1)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+n+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1+2\sin x}{1-\operatorname{tg}2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+4x^2-3x-3}{x^2-4x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x+4}-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{x^2}{x+1}-x\Big)$; 9) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-3\sin^2x}{\cos3x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{\sin2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{x+5}{x-2}\Big)^{(x+1)/2}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}x(2^{1/x}-1)$; 14) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x^2]{2-\cos x}$; 15) $\lim\limits_{x\to0}x^{3/(4+\ln x)}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{3\cdot6\cdot9\cdots3n}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\cos^2(\pi\sqrt{n^2+n})}$.

12.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=2x\sin\Big(\frac{\pi x}{6x-1}\Big)$$

в точке $x_0=1/6$ или показать, что он не существует.

12.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}-1;\quad 2)\ f(x)=\cos x-\cos^3x$$

при $x\to0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

12.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)=4x^2-1$ непрерывна в точке $x_0=6$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

12.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y=\begin{cases}\cos x, & \text{если } x\leqslant0;\\ 1-x, & \text{если } 0<x\leqslant2;\\ x^2, & \text{если } x>2;\end{cases}\quad 2)\ y=\frac{1}{1+2^{1/(1-x^2)}};\quad 3)\ y=\frac{1}{|1-x|}.$$

12.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{x^5+8x^3+128}{\sqrt{8-x^3}}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sqrt2}\ln(\sqrt2\operatorname{tg}^2x)$; 3) $y=\ln\dfrac13+\dfrac{\cos46x}{\sin23x}$;

4) $y=\dfrac{(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt x}{2x}$; 5) $y=3^x+5$; 6) $y=(x^2+x)^{\sin5x}$;

7) $y=-\dfrac{12\operatorname{sh}^2x+1}{3\operatorname{sh}3x}$; 8) $y=(\operatorname{tg}x)^{\ln\operatorname{tg}x}$; 9) $y=(x^3-3)\ln\operatorname{tg}\sqrt x$;

10) $e^{x+y}=\sin\dfrac yx-3$; 11) $xy=-\dfrac{\sin x}{\sin y}$; 12) $\ln(x-y^3)=\arcsin x$;

13) $\begin{cases}x=1-e^{-t},\\ y=1/(1+e^t);\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\ln\operatorname{ctg}t,\\ y=1/\cos^2t;\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=\sqrt t,\\ y=\sqrt[3]{t-1}.\end{cases}$

12.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = e^{\sin x}(x - \cos x),\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = \ln(2x-3) + \sqrt{4x^2 - 12x},\ x_0 = \frac{3}{2}.$$

12.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = \frac{x}{2}(\arcsin x - x),\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = \frac{\sin 3x \ln 5 - 3\cos 3x}{9 + \ln 5},\ x_0 = 1.$$

12.10. Выяснить, в какой точке кривой $y = 4x^2 - 10x + 13$ касательная параллельна прямой $y = 3x + 4$.

12.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}; \quad 2)\ y = \sqrt{x}\sin(\sin x); \quad 3)\ y = e^{x \operatorname{ctg} 3x}.$$

12.12. Вычислить приближенно $y = \sqrt{x+1}$, $x = 2{,}56$.

12.13. Показать, что функция $y = \dfrac{2x}{x^3+1} + \dfrac{1}{x}$ удовлетворяет уравнению $x(x^3+1)y' + (2x^3-1)y = \dfrac{x^3-2}{x}$.

12.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = \ln\arcsin\sqrt{x},\ y'' =?; \quad 2)\ y = \ln x - x^3,\ y''' =?; \quad 3)\ y = \sin 2x + \cos(x+1),\ y^{(n)} =?;$$

$$4)\ \begin{cases} x = \ln\dfrac{1}{t}, \\ y = t^6 - 3, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} =?; \quad 5)\ \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 5\sin t, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} =?.$$

12.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}; \quad 2)\ y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}; \quad 3)\ y = x\ln x.$$

12.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = 81x - x^4,\ [-1;4]; \quad 2)\ y = \frac{4-x^2}{4+x^2},\ [-1;3]; \quad 3)\ y = 2\sin x - \sin 2x,\ \left[0; \frac{3}{2}\pi\right].$$

12.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = x^{2/3}e^{-x}; \quad 2)\ y = \frac{1}{e^x - 1}; \quad 3)\ y = \frac{2x-1}{(x-1)^2};$$

$$4)\ y = \lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n}),\ |x| < 1.$$

12.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \ln\left(\frac{2^x - 8}{8^x - 2}\right).$$

12.19. Периметр кругового сектора равен 20 см. Определить радиус, при котором площадь сектора будет наибольшей.

12.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to\alpha}\frac{\operatorname{ctg}(x-\alpha)}{\ln(x-\alpha)}; \quad 2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right); \quad 3)\ \lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

12.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty; -1[\cup]-1;1[\cup]1;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x=-1$, $x=1$;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y=x$ $(x\to\pm\infty)$;
5) стационарные точки $x=-2$, $x=0$, $x=2$;
6) точки, где $y'=\infty$: $x=-3$, $x=3$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-\infty;-3[$, $]-2;-1[$, $]1;2[$, $]3;\infty[$; б) убывания: $]-3;2[$, $]-1;1[$, $]2;3[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]0;1[$, $]1;3;$, $]3;\infty[$; б) вогнутости: $]-\infty;-3[$, $]-3;-1[$, $]-1;0[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-3)=-1$; $y(-2)=-3$; $y(0)=0$; $y(2)=3$; $y(3)=1$.

12.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=\sin(3x-\pi/6)$ и вычислить её значение в точке $x_0=\pi/4$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0=\pi/4$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n=2,3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 13

13.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+1}{3n^2+2}=\frac{4}{3};\quad 2)\ \lim_{x\to-1/2}\frac{6x^2+x-1}{x+1/2}=-5.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

13.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^7+1}-n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(2n+1)!!}}{n}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2-x^2}}{2\operatorname{ctg}(\pi x/4)}$; 5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^3-3x^2+x+6}{x^2-2x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x^2-x+1}{2x^3+3x^2-1}$;

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x+8}-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3})$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sin6x}$;

10) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1+\cos\pi x}{\operatorname{tg}^2\pi x}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(3+x)-\cos(3-x)}{\sin x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{(x^2+1)/3x}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2\sin x}-1}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}(3-2\cos x)^{-\operatorname{cosec}^2x}$; 15) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/\sin^2x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\sin(\pi\sqrt{n^2+1})}$.

13.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=\frac{2x+1}{x^2+1}\operatorname{sh}\left(\frac{2}{x-3}\right)$$

в точке $x_0=3$ или показать, что он не существует.

13.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=\arcsin\sqrt[3]{x^2};\quad 2)\ f(x)=\ln(1+\sqrt{x}\operatorname{tg}x)$$

при $x\to0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

13.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)=4x^2+4$ непрерывна в точке $x_0=9$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

13.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ f(x)=\begin{cases} x-3, & \text{если } x<0;\\ x+1, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 4;\\ 2+\sqrt{x}, & \text{если } x>4;\end{cases}\quad 2)\ y=1-3^{1/(x+2)};\quad 3)\ y=\frac{1}{x^2-4}.$$

13.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}(1+x)}{3x^3}$; 2) $y=\log_a\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$; 3) $y=\operatorname{tg}^3 6x-\dfrac{\cos^2 5x}{\operatorname{tg} 3}$;

4) $y=\dfrac{x^3}{3}\arccos x-\dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{x}$; 5) $y=x^{\operatorname{arctg} x}$; 6) $y=2^x5^x$;

7) $y=\dfrac{1+8\operatorname{ch}^2 x\ln^2 4x}{2\operatorname{ch}^2 x}$; 8) $y=x^{2x}4^x$; 9) $y=x\ln\cos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

10) $e^x+e^y=2^{xy}+1$; 11) $x^2\sin y+\cos x=\cos 2y$; 12) $y^5+x^2=\ln\dfrac{x}{y}$;

13) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t},\\ y=1+t^4;\end{cases}$ 14) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} e^{t/2},\\ y=\sqrt{e^t+1};\end{cases}$ 15) $\begin{cases} x=\operatorname{tg}^2(t-1),\\ y=\cos(t-1).\end{cases}$

13.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=4\sin 4x+\ln 3\cos 4x,\ x_0=0;\quad 2)\ y=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x},\ x_0=0.$$

13.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y=\arcsin(e^{-5x}),\ x_0=0;\quad 2)\ y=\frac{1}{2}e^x\cos x,\ x_0=0.$$

13.10. Выяснить, в какой точке кривой $y=7x^2-5x+4$ касательная перпендикулярна к прямой $23y+x-1=0$.

13.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}-\frac{1}{3}\operatorname{tg} x;\quad 2)\ y=\frac{\cos^3(1-x)}{1-x^2};\quad 3)\ y=e^{\operatorname{tg}[x/(1-x)]}.$$

13.12. Вычислить приближенно $y=1/\sqrt{x}$, $x=4{,}16$.

13.13. Показать, что функция $y=\sqrt[3]{x-\ln x-1}$ удовлетворяет уравнению $\ln x+y^3-3xy^2y'=0$.

13.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y=(3-x^2)+\ln^2 x,\ y''=?;\quad 2)\ y=x-\sin^3(1-5x),\ y'''=?;\quad 3)\ y=3^{2x+3},\ y^{(n)}=?;$$

$$4)\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}, \\ y=\operatorname{arctg} t,\end{cases}\ \frac{d^2y}{dx^2}=?;\quad 5)\begin{cases} x=t^3+6, \\ y=1-t^2,\end{cases}\ \frac{d^2x}{dy^2}=?.$$

13.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y=x^2(x-12)^2;\quad 2)\ y=\frac{16}{x(4-x^2)};\quad 3)\ y=\sqrt{x}\ln x.$$

13.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y=x^3-3x+1,\ [0;2];\quad 2)\ y=\frac{1}{2}x+\cos x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right];\quad 3)\ y=\frac{x^2}{x^2-4},\ [-2;3].$$

13.17. Исследовать функции и построить их графики

1) $y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$; 2) $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; 3) $y = \ln(2x^2+3)$; 4) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

13.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x+3}4^{-1/(x+2)}.$$

13.19. Решеткой длиной 100 м нужно огородить прилегающую к дому прямоугольную площадку наибольшей площади. Определить размеры этой площади.

13.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to0}\left[\sqrt{\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right];\quad 2)\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x};\quad 3)\ \lim_{x\to0}(e^{2x}+x).$$

13.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty;-1[\cup]-1;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x=-1$;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y=-1/x+1$;
5) стационарные точки $x=-2$, $x=2$, $x=0$;
6) точки, где $y'=\infty$: $x=1$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-2;2[$, $]1;2[$; б) убывания: $]-\infty;-2[$, $]-1;1[$, $]2,\infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty;-3[$, $]0;1[$, $]1;3[$; б) вогнутости: $]-3;-1[$, $]-1;0[$, $]3,\infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-3)=1$; $y(-2)=0$; $y(-3/2)=1$; $y(0)=0$; $y(1)=-2$; $y(2)=1$; $y(3)=0$.

13.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=\ln(5x-2)$ и вычислить её значение в точке $x_0=1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0=1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n=2,3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 14

14.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n-5}{3n+1}=\frac{2}{3};\quad 2)\ \lim_{x\to-2}\frac{3x^2+5x-2}{x+2}=-7.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

14.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2-(n-3)^2}{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^6+n^4}-\sqrt{n^6-1}}{n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n\right]$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{\sin 3x+1}{\operatorname{tg}^2 x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^4+2x^3-x-4}{x^2-5x+4}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x+\sqrt{x^2+2}}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}-1}{x^3}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-\dfrac{x^2}{x+1}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos(x/2)-\sin(x/2)}{\cos x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$; 11) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}(x/2)}{\arcsin(x/2)}$; 12) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)^{(x+1)/2}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{e^x-1}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/\ln(1+\sin^2 x)}$; 15) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(2n+1)!!}}{2^n}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}2^{\cos[\pi\sqrt{n^2+1}]}$.

14.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = x^2 \exp\Big(\frac{x}{x-3}\Big)$$

в точке $x_0 = 3$ или показать, что он не существует.

14.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = \ln\cos x; \quad 2)\ f(x) = \sin(\sqrt{1+x^2} - 1)$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

14.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = 5x^2 + 3$ непрерывна в точке $x_0 = 8$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

14.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leqslant 0; \\ x^2, & \text{если } 0 < x \leqslant 2; \\ x+1, & \text{если } x > 2; \end{cases} \quad 2)\ y = \frac{1}{2 - 3^{1/(x-1)}}; \quad 3)\ y = \frac{x}{x^2-1}.$$

14.7. Найти производные следующих функций:

$1)\ y = \dfrac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$; $\quad 2)\ y = \log_4 \log_2 \operatorname{tg} x$; $\quad 3)\ y = \dfrac{\cos^3 2x}{3\sin x} - \sin 3$;

$4)\ y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1+x}{2x}\sin\sqrt{x}$; $\quad 5)\ y = x^{29x+6}$; $\quad 6)\ y = 2^{\arcsin\sqrt{1-x}}$;

$7)\ y = \dfrac{\operatorname{sh} 3x}{\sqrt{\operatorname{ch} 6x}}$; $\quad 8)\ y = x^{\operatorname{ctg} 5x - 6}$; $\quad 9)\ y = x\ln^2(1 - e^{-x/2})$;

$10)\ x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$; $\quad 11)\ 2xy^2 + \sin\dfrac{x}{y} = 5$; $\quad 12)\ \cos(xy) - 2 = \dfrac{x}{y^3}$;

$13)\ \begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t; \end{cases}$ $\quad 14)\ \begin{cases} x = \operatorname{ctg}(2e^t), \\ y = \ln\operatorname{tg} e^t; \end{cases}$ $\quad 15)\ \begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

14.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = x + 8(1 + e^x),\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = \ln\frac{\sqrt{2} + \sin x}{\sqrt{2} - \sin x},\ x_0 = 0.$$

14.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0

$$1)\ y = (3x-2)^4 \arcsin\frac{1}{3x-2},\ x_0 = 1; \quad 2)\ y = \operatorname{tg}(\sqrt{1+x} + 1),\ x_0 = 0.$$

14.10. Выяснить, в какой точке кривой $y = x^2/4 - 7x + 5$ касательная параллельна прямой $y = 2x + 5$.

14.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = 2x + \ln\sin x - 2\cos x; \quad 2)\ y = \arccos\sqrt{1-3x} + \frac{1}{x}; \quad 3)\ y = e^{x\operatorname{ctg}\sqrt{x}}.$$

14.12. Вычислить приближенно $y = \sqrt{4x-3}$, $x = 1{,}78$.

14.13. Показать, что функция $y = \sqrt{\dfrac{2}{x^3} - 1}$ удовлетворяет уравнению $xyy' = -2/x^2$.

14.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = x + \cos x^2,\ y''' =?;\quad 2)\ y = \cos 5x - \sin 5x,\ y'' =?;\quad 3)\ y = \frac{1+x}{1-x},\ y^{(n)} =?;$$

$$4) \begin{cases} x = 2/t, \\ y = 3/t^2, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} =?;\quad 5) \begin{cases} x = 5\sin^2 t, \\ y = 4\cos^2 t, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} =?.$$

14.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = x^3 + x^2 + 3;\quad 2)\ y = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 6};\quad 3)\ y = x^2 e^{-x}.$$

14.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = x^3(8 - x),\ [0; 7];\quad 2)\ y = \frac{x-3}{x^2+7},\ [-3; 2];\quad 3)\ y = \sin 3x - 3\sin x,\ \left[0; \frac{3}{2}\pi\right].$$

14.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = \ln\frac{x+1}{x-1};\quad 2)\ y = \frac{x^3-1}{4x^2};\quad 3)\ y = e^{3x-x^2};\quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1 + \frac{1}{x^{2n}}}.$$

14.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x - 2} 2^{3/(x-2)}.$$

14.19. В треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник наибольшей площади. Определить площадь прямоугольника.

14.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right);\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x\sqrt{\cos x}}{x^2};\quad 3)\ \lim_{x\to\infty}(1 + e^x)^{\operatorname{tg}(2/x)}.$$

14.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty, \infty[$;
2) вертикальные асимптоты: нет;
3) горизонтальные асимптоты: $y = -1$ $(x \to \infty)$, $y = 0$ $(x \to -\infty)$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки $x = -4$, $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = -1$, $x = 1$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-\infty; -4[$, $]-2; -1[$, $]0; 1[$, $]2; 3[$; б) убывания: $]-2; -4[$, $]-1; 0[$, $]1; 2[$, $]4; \infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-5; -3[$, $]3; 5[$; б) вогнутости: $]-\infty; -5[$, $]-3; -1[$, $]-1; 1[$, $]1; 3[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-5) = 1/2$; $y(-4) = 1$; $y(-3) = 0$; $y(-2) = -1$; $y(-1) = 2$; $y(0) = 1$; $y(1) = 2$; $y(2) = -2$; $y(3) = -1$; $y(4) = 0$; $y(5) = -1/2$.

14.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = (1 + x)/\sqrt{x}$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 15

15.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n+1}=2;\quad 2)\ \lim_{x\to-3}\frac{2x^2+5x-3}{x+3}=-7.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

15.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n-1)!}{(n-1)!}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^3[\sqrt[3]{n^2(n^6+4)}-\sqrt[3]{(n^8-1)}]$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+...+(2n-1)}{1+2+3+..+n}$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$; 5) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin x+\cos 2x}{\sqrt{1+x^2}}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-x}{x-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x}{x^2-4}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{(x+1)/2}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}(2-\cos 3x)^{1/\ln(1+x^2)}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{2}{x}\right)^x$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{(2n+1)!!}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\sin^2\pi\sqrt{n^2+n}}$.

15.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=(2x+4)\exp\left(\frac{x}{x-4}\right)$$

в точке $x_0=4$ или показать, что он не существует.

15.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=\ln(1+\sqrt{x});\quad 2)\ f(x)=\sqrt[3]{x^2+1}-1$$

при $x\to0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

15.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)=2x^2+6$ непрерывна в точке $x_0=7$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

15.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y=\begin{cases}x-1, & \text{если } x\leqslant 0;\\ x^2, & \text{если } 0<x<2;\\ 2x, & \text{если } x\geqslant 2;\end{cases}\quad 2)\ y=\frac{1}{1+e^{1/x}};\quad 3)\ y=\frac{x^2}{x-2}.$$

15.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; 2) $y=\ln\cos\dfrac{2x+3}{2x+1}$; 3) $y=\sin 2-\dfrac{\cos^2 3x}{6\sin 6x}$;

4) $y=3\arccos\sqrt{\dfrac{2}{x}}+\dfrac{3+x}{2}\sqrt{x}$; 5) $y=(x^5+1)^{\operatorname{tg}3x}$; 6) $y=e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}}$;

7) $y=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\sqrt{\operatorname{sh}5x}}+\ln 5$; 8) $y=x^{3x}2^x$; 9) $y=8\arcsin\dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

10) $y\operatorname{arctg}y+\dfrac{x}{y}=6$; 11) $\cos(xy)=\dfrac{x}{y^2}-\ln 4x$; 12) $\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}\ln y=4-3^x$;

13) $\begin{cases}x=t\sin t+1,\\ y=1-t\cos t;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\arcsin(\sin t),\\ y=\arccos(\cos t);\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=\ln(1+\cos t),\\ y=\sin t/(1+\cos t).\end{cases}$

15.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = 4 + \ln^2 5(2\sin 2x + \cos 2x),\ x_0 = 0;\quad 2)\ y = \frac{1}{12}\ln\frac{x-1}{x+3} - \sqrt{3},\ x_0 = 0.$$

15.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{2}},\ x_0 = 1{,}5;\quad 2)\ y = x - e^{-x} + \arcsin e^x,\ x_0 = 0.$$

15.10. В какой точке кривой $y^2 = 4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $x + 3y - 1 = 0$?

15.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = \ln\operatorname{tg}\frac{2}{x} - \frac{x}{\sin x};\quad 2)\ y = \sqrt{\ln^2 x - 1};\quad 3)\ y = 5^{x\cos\sqrt{x}}.$$

15.12. Вычислить приближенно $y = x^5$, $x = 2{,}997$.

15.13. Показать, что функция $y = x + \sin 2x$ удовлетворяет уравнению $y'' + 4y = 4x$.

15.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = \frac{x}{\ln^2 x},\ y''' = ?;\quad 2)\ y = (1 - 2x^3)^4 - \cos^2 x,\ y'' = ?;\quad 3)\ y = \lg(2x+7),\ y^{(n)} = ?;$$

$$4)\begin{cases} x = 1 + \cos t, \\ y = t - \sin t, \end{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = ?;\quad 5)\begin{cases} x = e^t - 1, \\ y = e^t, \end{cases} \frac{d^2x}{dy^2} = ?.$$

15.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = x^3 + x^2 - x + 2;\quad 2)\ y = \sqrt{x^2 - 4x + 5};\quad 3)\ y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

15.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = x^3\sqrt[3]{(x-1)^2},\ [-2;2];\quad 2)\ y = \cos x + \frac{1}{2}x,\ \Big[\frac{\pi}{2};\pi\Big];\quad 3)\ y = \frac{x-2}{x^2+5},\ [2;8].$$

15.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = e^{2x - x^2};\quad 2)\ y = \ln\frac{x+1}{x+2};\quad 3)\ y = \frac{x}{(x-1)^2};\quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n.$$

15.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 4x}}.$$

15.19. Во сколько раз объём шара больше объёма наибольшего цилиндра, вписанного в этот шар.

15.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} 2x - 2x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^{2\operatorname{tg} 2x};\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\Big[\frac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2} - \frac{1}{x}\Big].$$

15.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty; -1[\cup]-1;1[\cup]1;\infty[$;

2) вертикальные асимптоты: $x=-1$, $x=1$;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y=x/2$;
5) стационарные точки $x=-2{,}5$, $x=0$, $x=2{,}5$;
6) точки, где $y'=\infty$: $x=-4$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-\infty;-4[$, $]-2{,}5;-1[$, $]-1;1[$, $]2{,}5,\infty[$; б) убывания: $]-4;-2,[$, $]1;2{,}5[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-1;0[$, $]4,\infty[$; б) вогнутости: $]-\infty;-4[$, $]-4;-1[$, $]0;1[$, $]1;4[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-4)=0$; $y(-2{,}5)=-2$; $y(0)=0$; $y(2{,}5)=0$; $y(4)=1$.

15.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=xe^{6x}$ и вычислить её значение в точке $x_0=2$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0=2$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n=2,3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 16

16.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\frac{3}{2};\quad 2)\ \lim_{x\to-1/5}\frac{15x^2-2x-1}{x+1/5}=-8.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

16.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^2}[\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}]$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1+...+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right]$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sin(\pi x/6)+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+3x^2-4}{x^3+2x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+3x^2-1}{2x^4+25}$;

7) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-16}$; 8) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{2x}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}2x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x-1}{x\operatorname{tg}3x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}(1-x\sin^2 x)^{1/\ln(1+\pi x^3)}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+2}\right)^{(3x+1)/2}$; 15) $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\ln n)^n}{[\ln(n-1)]^{n+1}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}5^{\cos[\pi\sqrt{n^2+1}]}$.

16.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=x\sin\left(\frac{x}{x-3}\right)$$

в точке $x_0=3$ или показать, что он не существует.

16.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=1-\cos\sqrt{x};\quad 2)\ f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

при $x\to0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

16.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)=3x^2+5$ непрерывна в точке $x_0=8$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

16.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{если } x\leqslant \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & \text{если } \dfrac{\pi}{2}<x<\pi;\\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x\geqslant \pi;\end{cases}\quad 2)\ y=\frac{1}{1+2^{1/(x-1)}};\quad 3)\ y=\frac{x}{1-x^2}.$$

16.7. Найти производные следующих функций:

$$1)\ y=\frac{(x-6)\cos 5x}{24x^3};\qquad 2)\ y=\frac{x}{2}(\cos\ln x-\sin x);\qquad 3)\ y=\operatorname{tg}\sqrt{3}-\frac{\sin 31x}{\cos^2 62x};$$

$$4)\ y=\frac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\frac{4}{x}-3;\qquad 5)\ y=(\operatorname{tg}x)^{4e^x};\qquad 6)\ y=(\sin 2)^{\operatorname{tg}5x};$$

$$7)\ y=\frac{\operatorname{sh}x}{1+\operatorname{ch}x}-\ln^2 5x;\qquad 8)\ y=(x^2+1)^{\cos 3x};\qquad 9)\ y=\frac{5}{x}\sin^2\frac{1}{x};$$

$$10)\ y^2-x\sin^2 x=x^3-7;\qquad 11)\ x^2-4xy+\ln(x+y)=0;\qquad 12)\ \cos^2\frac{x}{y}+y^3=1-x^2;$$

$$13)\ \begin{cases}x=t+\ln\cos t,\\ y=t-\ln\sin t;\end{cases}\qquad 14)\ \begin{cases}x=\sqrt{2t-t^2},\\ y=(t-1)^3;\end{cases}\qquad 15)\ \begin{cases}x=\sin^2 t,\\ y=t^2-t.\end{cases}$$

16.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=3\sin^3 xe^x,\ x_0=0;\quad 2)\ y=\ln(2-x)-\sqrt{3-4x},\ x_0=0.$$

16.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y=4\arcsin\frac{4}{2x+3},\ x_0=1;\quad 2)\ y=\operatorname{arctg}(9x^2-4),\ x_0=0.$$

16.10. Выяснить, в каких точках кривой $y=\sin 2x$ нормаль составляет с осью Ox угол $\pi/4$.

16.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y=x\sqrt{4-x^2}-5\sin x;\quad 2)\ y=\log_5(1-x)-x^5+8;\quad 3)\ y=4^{x\sin\ln x}.$$

16.12. Вычислить приближенно $y=\sqrt{x^3}$, $x=0{,}98$.

16.13. Показать, что функция $y=\sqrt{\ln\Bigl(\dfrac{1+e^x}{2}\Bigr)^2+1}$ удовлетворяет уравнению $(1+e^x)yy'=2e^x$.

16.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y=\ln(1-x),\ y'''=?;\quad 2)\ y=5^{\operatorname{tg}(2+x)},\ y''=?;\quad 3)\ y=\frac{x}{x+1},\ y^{(n)}=?;$$

$$4)\begin{cases}x=\cos^2 t,\\ y=5\sin t,\end{cases}\ \frac{d^2x}{dy^2}=?;\quad 5)\begin{cases}x=\ln(2t+5),\\ y=t^2-8,\end{cases}\ \frac{d^2y}{dx^2}=?.$$

16.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y=14x-x^4;\quad 2)\ y=x-\operatorname{arctg}x;\quad 3)\ y=xe^{-x^2/2}.$$

16.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y=x^3-3x+1,\ \Bigl[-1;\frac{1}{2}\Bigr];\quad 2)\ y=\frac{x}{2}+\cos x,\ \Bigl[-\frac{3}{2}\pi;-\pi\Bigr];\quad 3)\ y=\frac{x+6}{x^2+13},\ [-5;5].$$

16.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y=\sqrt[3]{x^3-3x};\quad 2)\ y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}};\quad 3)\ y=\frac{x^3}{x^2-4};\quad 4)\ y=\lim_{n\to\infty}(1+x^n)^{1/n},\ x>0.$$

16.18. Найти асимптоты и построить график функции

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-3x}}.$$

16.19. Из всех прямоугольников, имеющих периметр, равный $2a$, найти тот, площадь которого наибольшая.

16.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^{2x}-1}\Big);\quad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{\mathrm{tg}^6(x/2)};\quad 3)\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}.$$

16.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X=]-\infty;-2[\cup]-2;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x=2$;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y=\frac{1}{2}x-1$;
5) стационарные точки: $x=-4$, $x=0$, $x=4$;
6) точки, где $y'=\infty$: $x=-2$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-4;-2[$, $]2;4[$; б) убывания: $]-\infty;-4[$, $]-2;2[$, $]4,\infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty;-5[,]0;\ 2[,]2;\ 5[$; б) вогнутости: $]-5;-2[$, $]-2;0[$, $]5;\infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-5)=0$; $y(-4)=-2$; $y(-2)=4$; $y(0)=0$; $y(4)=-1$; $y(5)=-2$.

16.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=\ln[1/(4-x)]$ и вычислить её значение в точке $x_0=2$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0=2$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n=2,3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 17

17.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{7n+4}{2n+1}=\frac{7}{2};\quad 2)\ \lim_{x\to -6}\frac{3x^2+17x-6}{x+6}=-19.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

17.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+2n^2-n+1}{3n^3-2n+4}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{2+...+2n}{n+3}-n\Big)$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{4\sin^2 x+1}{\cos x-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-2x^2+x-1}{x^3-x^2+3x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+1}+x}{(1+x)^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{3x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{2x+3}{2x+1}\Big)^{x+1}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{1/\ln\cos x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{e^{1/(x-1)}}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^{(n-1)!}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin[\pi\sqrt{n^2+1}]$.

17.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = 2x^2 \cos \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$$

в точке $x_0 = 2$ или показать, что он не существует.

17.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = e^x - \cos x; \quad 2)\ f(x) = \ln(1 + \sqrt[3]{x})$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

17.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = -3x^2 + 8$ непрерывна в точке $x_0 = 5$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

17.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0, & \text{если } x > 2; \end{cases} \quad 2)\ y = \frac{3}{1 - 2^{1/(x-2)}}; \quad 3)\ f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}.$$

17.7. Найти производные следующих функций:

$1)\ y = \dfrac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1 - x^3}};$ $\quad 2)\ y = \log_{16} \log_5 \operatorname{tg} x;$ $\quad 3)\ y = \sin \operatorname{tg} 2 - \dfrac{\cos^2 8x}{8 \sin 16x};$

$4)\ y = \arcsin \sqrt{\dfrac{x}{x+1}} + \operatorname{ctg} x;$ $\quad 5)\ y = (\sin x)^{x \cos x};$ $\quad 6)\ y = (\pi)^{\cos(6x-5)};$

$7)\ y = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \operatorname{ch} x}{1 - \operatorname{ch} x}};$ $\quad 8)\ y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} \sqrt{x}};$ $\quad 9)\ y = e^x \operatorname{tg} \ln 3x;$

$10)\ x = y + x \operatorname{arctg} y;$ $\quad 11)\ y = \cos(x + y) + \ln x;$ $\quad 12)\ x^2 + y^2 = \sin \dfrac{x}{y};$

$13)\ \begin{cases} x = \sin t, \\ y = \operatorname{tg}^2 t; \end{cases}$ $\quad 14)\ \begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \sin(t^3 - 1); \end{cases}$ $\quad 15)\ \begin{cases} x = \ln \cos t, \\ y = \cos 2t. \end{cases}$

17.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = \frac{\sin 4x \ln 6 - 4 \cos 4x}{16 + \ln^2 6},\ x_0 = \pi; \quad 2)\ y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1},\ x_0 = 0.$$

17.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = \sqrt{x^2 - 4x} \arcsin(x - 4),\ x_0 = 4; \quad 2)\ y = \ln(e^x + \sqrt{e^2x - 1}),\ x_0 = 0.$$

17.10. Выяснить, в какой точке кривой $y = 2x^3 - 1$ нормаль составляет с осью Ox угол $5\pi/6$.

17.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = \arcsin e^x - \ln x; \quad 2)\ y = \operatorname{ctg}^2 x - \sqrt{\sin x}; \quad 3)\ y = 3^{\cos(1-2x)}.$$

17.12. Вычислить приближенно $y = \sqrt[5]{x^2}$, $x = 1{,}03$.

17.13. Показать, что функция $y = \operatorname{tg} \ln 3x$ удовлетворяет уравнению $(1+y^2)dx = x\,dy$.

17.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = \sin^3 \frac{1}{x},\ y'' =?; \quad 2)\ y = 1 - x^2 + \ln \frac{1}{x},\ y''' =?; \quad 3)\ y = \sqrt{e^{3x+1}},\ y^{(n)} =?;$$

$$4)\ \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = \arcsin t, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = ?; \quad 5)\ \begin{cases} x = t^3 - 6t + 5, \\ y = t^2 + 1, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?.$$

17.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = x^3 - 6x^2 + 9x; \quad 2)\ y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}; \quad 3)\ y = x\sqrt{1-x}.$$

17.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2,\ [0; 2];\ 2)\ y = \frac{1}{2}x - \sin x,\ \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right];\ 3)\ y = \frac{x-3}{x^2+16},\ [-5; 5].$$

17.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = x + \frac{1}{x}; \quad 2)\ y = \ln\frac{x}{x-1}; \quad 3)\ y = x^3 e^{-x}; \quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\left(1 + x^n + \frac{x^{2n}}{2^n}\right)^{1/n}.$$

17.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 3x}}.$$

17.19. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 м. Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольшим?

17.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 1} x^{m/(x^2-1)}; \quad 2)\ \lim_{x\to a}\frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}; \quad 3)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right).$$

17.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty; 2[\cup]2; \infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x = -2$;
3) горизонтальные асимптоты: $y = 1$ $(x \to +\infty)$, $y = 0$ $(x \to -\infty)$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки $x = -1$, $x = 1$, $x = 4$;
6) точки, где $y' = \infty$: 0;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-1; 0[$, $]1; 2[$, $]2; 4[$; б) убывания: $]-\infty; -1[$, $]0; 1[$, $]4; \infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty; -2[$, $]2; 5[$; б) вогнутости: $]-2; 0[$, $]0; 2[$, $]5; \infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-2) = -1/2$; $y(-1) = -1$; $y(0) = 3$; $y(1) = 0$; $y(3) = 1{,}5$; $y(4) = 2$; $y(5) = 1{,}5$.

17.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = \ln(3x - 5)$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 18

18.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{7n-1}{n+1}=7;\quad 2)\ \lim_{x\to 10}\frac{5x^2-51x+10}{x-10}=49.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

18.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!n}{(n+1)!-n!}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+3n^2}[\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}]$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{2+...+2n}{n+3}-n\Big)$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\sin(\pi x/2)}{1+\operatorname{tg}(\pi x/4)}$; 5) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+8x^2+21x+18}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3-x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\sin x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; 9) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3\cos x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}(2-e^{\arcsin^2\sqrt{x}})^{3/x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\Big)^x$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n^{n^2}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2[\pi\sqrt{n^2+n}]$.

18.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=(x+1)\exp\Big(\frac{2}{x}\Big)$$

в точке $x_0=0$ или показать, что он не существует.

18.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=\sqrt[5]{x^3+1}-1;\quad 2)\ f(x)=\ln(1+\sin\sqrt{x^3})$$

при $x\to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

18.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)f(x)=-2x^2+7$ непрерывна в точке $x_0=6$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

18.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y=\begin{cases}x-3, & \text{если } x<0;\\ x+1, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 4;\\ 3+\sqrt{x}, & \text{если } x>4;\end{cases}\quad 2)\ y=3^{1/(x-2)};\quad 3)\ f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-9}.$$

18.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{4+3x^2}{x^3\sqrt{1+x^4}}$; 2) $y=\ln\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$; 3) $y=\cos\dfrac{1}{x}-\dfrac{\operatorname{tg}10x}{\sin^3 10x}$;

4) $y=6\arcsin\dfrac{\sqrt{x}}{2}-x\sqrt{x^2+8}$; 5) $y=(x^3+4)^{\sin^2 x}$; 6) $y=2^{x\cos 5x}$;

7) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{\operatorname{sh}2x}}{\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}$; 8) $y=(\cos 5x)^{x\operatorname{tg}x}$; 9) $y=x4^{1/cos2x}$;

10) $1+y=\cos(x+y)+\sin\alpha$; 11) $xe^y+ye^x=xy$; 12) $y^2-5x^3=\ln\dfrac{y}{x}-7$;

13) $\begin{cases}x=t^2-\sin t,\\ y=2+\cos t;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\sec^2 t,\\ y=\operatorname{tg}t-\ln\cos t;\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=t-4,\\ y=5+t^2-t^3.\end{cases}$

18.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = x + \frac{1}{1+e^x} - \ln(1+e^x),\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{2}},\ x_0 = 0.$$

18.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = 3\ln(\sqrt{4+x} - \sqrt{1-x}),\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = 1 - x\operatorname{ctg} x + \sqrt{x},\ x_0 = \pi.$$

18.10. Выяснить, в какой точке кривой $y = x^3/3 - x^2/2 - 7x + 9$ нормаль составляет с осью Ox угол $\pi/4$.

18.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}); \quad 2)\ y = \pi^{\arcsin\sqrt{1-x}}; \quad 3)\ y = \operatorname{tg}^2(a+bx) - \frac{1}{x}.$$

18.12. Вычислить приближенно $y = \sqrt{1+x+\sin x}$, $x = 0{,}01$.

18.13. Показать, что функция $y = e^{\operatorname{tg}(x/2)}$ удовлетворяет уравнению $y'\sin x = y\ln y$.

18.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = \sin(2+x3) - e^3,\ y''' = ?; \quad 2)\ y = 5^{\operatorname{arctg} x},\ y'' = ?; \quad 3)\ y = \frac{4}{x-3},\ y^{(n)} = ?;$$

$$4) \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \ln 2t, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = ?; \quad 5) \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = t+3, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?.$$

18.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x; \quad 2)\ y = (x-5)e^x; \quad 3)\ y = \frac{x^3}{(x-2)(x+3)}.$$

18.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2,\ [-2;0]; \quad 2)\ y = \frac{x}{2} - \sin x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]; \quad 3)\ y = \frac{1+x^2}{1+x^4},\ [-0{,}1;4].$$

18.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = e^{-x^2}; \quad 2)\ y = \frac{4x}{1+x^2}; \quad 3)\ y = x\ln|x|; \quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n.$$

18.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-4}2^{1/(4-x)}.$$

18.19. Найти наибольшую боковую поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса R.

18.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]; \quad 2)\ \lim_{x\to 2a}\left(3-\frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/4a)}; \quad 3)\ \lim_{x\to\infty}[(\pi - \operatorname{arctg} x)\ln x].$$

18.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty;-1[\cup]-1;\infty[$;

2) вертикальные асимптоты: $x = -1$;

3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y = x$;
5) стационарные точки $x = -2$, $x = 0$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = -3$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-\infty; -3[$, $]-2; -1[$; $]1; \infty[$; б) убывания: $]-3; -2[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-1; 0[$; б) вогнутости: $]-\infty; -3[$, $]-3; -1[$; $]0; \infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-3) = -1$; $y(-2) = -3{,}5$; $y(0) = 1$.

18.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = 7^{3x-5}$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 3$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 3$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 19

19.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \frac{9-n^3}{1+2n^3} = -\frac{1}{2}; \quad 2)\ \lim_{x\to-5} \frac{x^2+2x-15}{x+5} = -8.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

19.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-(n+1)^3}{2n^2-n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^6-n^4}-\sqrt{n^6-1}}{n}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3+\ldots+(2n+1)}{\sqrt{16n^4+n^2+1}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^3+2x^2-3x+10}{x^2-5x+6}$; 6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sin 2x}{\cos 3x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x+\sqrt[3]{4-x^3})$; 9) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$; 11) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty} \Big(\dfrac{x}{x+3}\Big)^{(x+3)/2}$;

13) $\lim\limits_{x\to0} \Big(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\Big)^{1/x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to0} \Big(5-\dfrac{4}{\cos x}\Big)^{1/\sin^2 3x}$; 15) $\lim\limits_{x\to0} (1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n+1)!!}{(2n)!}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2[\pi\sqrt{n^2+1}]$.

19.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = (x+1)\sin\Big(\frac{\pi(x+1)}{x}\Big)$$

в точке $x_0 = 0$ или показать, что он не существует.

19.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = \sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}} - 1; \quad 2)\ f(x) = e^{\sqrt{x}} - 1$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

19.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = -5x^2 - 9$ непрерывна в точке $x_0 = 3$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

19.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 0, & \text{если } x > 2; \end{cases} \quad 2)\ f(x) = 1 - 9^{1/(x-7)}; \quad 3)\ y = \frac{x^2}{x-9}.$$

19.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(1+x^2)^5}{x^{5/2}}}$; 2) $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$; 3) $y=\ln\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sin 25x}{25\cos x}$;
4) $y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{x}-1-\dfrac{\cos x}{2x^3}}$; 5) $y=(x+5)^{\cos 2x}$; 6) $y=5^{\ln\operatorname{tg}2x}$;
7) $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{1-\operatorname{sh}2x}{2+\operatorname{sh}2x}$; 8) $y=x^{\sin x^3}$; 9) $y=xe^{\arcsin\sqrt{x}}$;
10) $y=3a^{\frac{x}{y}}-x^3y^2$; 11) $xy-\ln y-2\ln x=0$; 12) $\arcsin\dfrac{x}{y}+y^2=x^3$;
13) $\begin{cases}x=t+3\sin 2t,\\ y=\cos^3 2t;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\arcsin^2 t,\\ y=t\sqrt{1-t^2};\end{cases}$ 13) $\begin{cases}x=\operatorname{tg}t,\\ y=\sin 2t.\end{cases}$

19.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=\operatorname{arctg}\sqrt{2x},\ x_0=\frac{\pi}{4};\quad 2)\ y=\ln\sqrt{x^2-x+1},\ x_0=1.$$

19.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y=5x-\arcsin e^{5x},\ x_0=0;\quad 2)\ y=e^x(1+x^3\sin x),\ x_0=0.$$

19.10. Выяснить, в каких точках кривой $y=x^3/3-5x^2/2+7x+4$ нормаль составляет с осью Ox угол $-\pi/4$.

19.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-x^5;\quad 2)\ y=2^{-\cos^2 x};\quad 3)\ y=\sin^2\frac{1}{x}-\operatorname{tg}x.$$

19.12. Вычислить приближенно $y=x^4$, $x=3{,}998$.

19.13. Показать, что функция $y=(1+x)/(1-x)$ удовлетворяет уравнению $y'(1+x^2)=1+y^2$.

19.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y=(1+x^2)+\operatorname{arctg}x,\ y''=?;\quad 2)\ y=\sin x+xe^{-x},\ y'''=?;\quad 3)\ y=a^{2x+3},\ y^{(n)}=?;$$

$$4)\begin{cases}x=\ln(1-t),\\ y=t-3,\end{cases}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=?;\quad 5)\begin{cases}x=\arccos t,\\ y=\sqrt{1-t^2},\end{cases}\quad \frac{d^2x}{dy^2}=?.$$

19.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y=2x^3-3x^2+1;\quad 2)\ y=\frac{4x}{x^2+4};\quad 3)\ y=x\sqrt{1-x^2}.$$

19.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ 3x^4-16x^3+2,\ [0;4];\quad 2)\ y=\frac{1}{2}x+\cos x,\ \Big[-2\pi;-\frac{3}{2}\pi\Big];\quad 3)\ y=\frac{x-3}{x^2+16},\ [3;10].$$

19.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y=e^{1/(x+2)};\quad 2)\ y=\frac{x-3}{x^2+16};\quad 3)\ y=\frac{2^x}{x};\quad 4)\ y=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\ x>0.$$

19.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x)=x\ln\Big(\frac{3^x-3}{3^x-1}\Big).$$

19.19. Одна сторона прямоугольного участка земли примыкает к берегу канала, а три других огораживаются забором. Каковы должны быть размеры этого участка, чтобы его площадь равнялась 800 м^2, а длина забора была наименьшая?

19.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln e^x}{1-xe^x};\quad 2)\ \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{1/\ln x};\quad 3)\ \lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x-\sec x).$$

19.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty; 0[\cup]0;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты $x=0$;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y=-x/2$;
5) стационарные точки $x=-2$, $x=-1$, $x=1$;
6) точки, где $y'=\infty$: $x=-3$, $x=2$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-3;-2[$, $]-1;0[$, $]1;2[$; б) убывания: $]-\infty;-3[$, $]-2;-1[$, $]0;1[$, $]2;\infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty;-3[$, $]-3;-3/2[$; б) вогнутости: $]-3/2;0[$, $]0;2[$, $]2;\infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-3)=0$; $y(-2)=3$; $y(-3/2)=2$; $y(1)=1{,}5$; $y(1)=-2$; $y(2)=0$.

19.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=1/(x-6)$ и вычислить её значение в точке $x_0=3$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0=3$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n=2,3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 20

20.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{2+4n^2}=-\frac{1}{2};\quad 2)\ \lim_{x\to -4}\frac{2x^2+6x-8}{x+4}=-10.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

20.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+1}+\sqrt[3]{n^2+1}}{(n+4)^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3})$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+...+3n}{n^2+4}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos^2(\pi x/4)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\pi x/3)}}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+1}{(x+1)^2-(x-2)^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3+2x^2-5}{x^2-3x+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x^2-4}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x^2-1}-\dfrac{x}{x^3-1}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\arcsin 2x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$; 11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos(\pi x/2)}{1-\sqrt{x}}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{3+x}\right)^{(x-1)/2}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}})^{2/\sin x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{4\cdot 7\cdot 10\cdots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-2)}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos[\pi\sqrt{n^2+n}]$.

20.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=x\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

в точке $x_0 = 1$ или показать, что он не существует.

20.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = 1 - \cos\sqrt[3]{x^2};\quad 2)\ f(x) = \sqrt[3]{x} - x$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

20.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = -4x^2 + 9$ непрерывна в точке $x_0 = 4$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

20.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0;\\ x^2, & \text{если } 0 \leqslant x < 1;\\ 2 - x, & \text{если } x \geqslant 1;\end{cases}\quad 2)\ f(x) = \frac{1}{1 - 3^{-1/(4x+2)}};\quad 3)\ y = \frac{x}{1 - x^2}.$$

20.7. Найти производные следующих функций:

$$1)\ y = \frac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^3};\qquad 2)\ y = \ln\operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\Big);\qquad 3)\ y = \frac{\sin^3 7x}{14\sin 14x};$$

$$4)\ y = \frac{x-3}{2}\arcsin\sqrt{\frac{x}{2} - 1};\qquad 5)\ y = (\sqrt{x})^{\cos 3x};\qquad 6)\ y = (\sqrt{2})^{\ln\cos x};$$

$$7)\ y = \frac{1}{9\sqrt{2}}\ln\frac{1 + \sqrt{2}\operatorname{ctg} x}{1 - \sqrt{2}\operatorname{ctg} x};\qquad 8)\ y = (x-5)^{\operatorname{ch} x};\qquad 9)\ y = x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}};$$

$$10)\ x + \sqrt{xy} + y = a;\qquad 11)\ xy = e^{2x} - e^{3x} + e^{-y};\qquad 12)\ \operatorname{tg}\frac{x}{y} - y = \sin^2 x;$$

$$13)\ \begin{cases} x = t(t+1),\\ y = t^2(t-1);\end{cases}\qquad 14)\ \begin{cases} x = \arcsin\sqrt{t},\\ y = \sqrt{1+t};\end{cases}\qquad 15)\ \begin{cases} x = t - \sin t,\\ y = \cos^2 t.\end{cases}$$

20.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x,\ x_0 = 0;\quad 2)\ y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),\ x_0 = 1.$$

20.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = 3x - e^{3x}\arcsin e^{3x},\ x_0 = 0;\quad 2)\ y = (1 + x^2)e^{x-8},\ x_0 = 0.$$

20.10. Найти точки на кривой $y = x^3/3 - 9x^2/2 + 20x - 7$, в которых нормали параллельны оси Oy.

20.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = \arccos\frac{x-1}{\sqrt{2}x^2};\quad 2)\ y = \ln\cos x + x\sin^2 x;\quad 3)\ y = e^{\operatorname{tg}^2 x - 5}.$$

20.12. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$, $x = 0{,}01$.

20.13. Показать, что функция $y = (c - \ln x)x$ удовлетворяет уравнению $(x - y)dx + x\,dy = 0$.

20.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = \ln(x+3),\ y''' = ?;\quad 2)\ y = x + e^{\sin x},\ y'' = ?;\quad 3)\ y = \lg(3x+1),\ y^{(n)} = ?;$$

$$4)\ \begin{cases} x = \sin(1-t),\\ y = \operatorname{tg}(1-t),\end{cases}\quad \frac{d^2x}{dy^2} = ?;\quad 5)\ \begin{cases} x = t^3 + 5t,\\ y = t - 6,\end{cases}\quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?.$$

20.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y=(x^2+x+2)(x^2+x-2);\quad 2)\ y=\frac{e^x}{(x+3)^2};\quad 3)\ y=x+\sqrt{3-x}.$$

20.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y=x^4-8x^2+3,\ [-2;1];\quad 2)\ y=\frac{x^3-1}{4x^2},\ [-8;-1];\quad 3)\ y=\ln(2x^2+3),\ [-1;3].$$

20.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y=x^3+\frac{x^4}{4};\quad 2)\ y=\frac{1}{(x-2)(x^2-1)};\quad 3)\ y=x\sqrt{1-x^2};\quad 4)\ y=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\ x>0.$$

20.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x)=\ln\Bigl(\frac{9^x-3}{3^x-9}\Bigr).$$

20.19. Определить наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R.

20.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x};\quad 2)\ \lim_{x\to0}\Bigl(\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x\operatorname{tg}x}\Bigr);\quad 3)\ \lim_{x\to\infty}(\ln x)^{2/(x-1)}.$$

20.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X=]-\infty;1[\cup]1;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x=1$;
3) горизонтальные асимптоты: $y=1$ $(x\to-\infty)$, $y=-2$ $(x\to+\infty)$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки $x=-2$, $x=0$, $x=2$, $x=4$;
6) точки, где $y'=\infty$: -1;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-2;-1[$, $]1;2[$, $]4,\infty[$; б) убывания: $]-\infty;-2[$, $]-1;1[$, $]2;4[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty;-5/2[$, $]0;1[$, $]1;3[$, $]5;\infty[$; б) вогнутости: $]-5/2;-1[$, $]-1;0[$, $]3;5[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-5/2)=3/4$; $y(-2)=1/2$; $y(-1)=4$; $y(0)=1$; $y(2)=-1$; $y(3)=-2$; $y(4)=-3{,}5$; $y(5)=-2{,}5$.

20.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=e^{-5x}$ и вычислить её значение в точке $x_0=1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0=1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n=2,3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 21

21.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{1-2n}=-\frac{1}{2};\quad 2)\ \lim_{x\to5}\frac{5x^2-24x-5}{x-5}=26.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

21.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-(n+1)^2}{2n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}]$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\ldots+2n}{1+\ldots+(2n-1)}$;
4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{tg}^2(\pi x/4)-3}{\sqrt{x^2+3}+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3+2x^2-x-14}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^4+2x}$;
7) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}$;
10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\sin 2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x^2}$;
13) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/\sin x}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{1/x^2}$; 15) $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{3/x^2}$;
16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!!}{(2n+1)!}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\sin[\pi\sqrt{n^2+1}]}$.

21.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=x\sin\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

в точке $x_0=$ или показать, что он не существует.

21.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=x+\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x};\quad 2)\ f(x)=\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}-1$$

при $x\to0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

21.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)-4x^2-7$ непрерывна в точке $x_0=1$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

21.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y=\begin{cases}3x+1, & \text{если } x<0;\\ x^2+1, & \text{если } 0\leqslant x<1;\\ 2-x, & \text{если } x\geqslant1;\end{cases}\quad 2)\ y=1-3^{-1/(x-2)};\quad 3)\ f(x)=\frac{x+1}{x}.$$

21.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{(x^2-6)\sqrt{4+x^3}}{x^5-1}$; 2) $y=\ln\dfrac{x^3}{1-x^2}$; 3) $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3 6x}{1-\sin 5x}$;
4) $\dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}-(x+2)}{x-8}$; 5) $y=(x^4+5)^{\operatorname{tg}x}$; 6) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos\ln 5x}$;
7) $y=\dfrac{1}{2a}\ln\dfrac{a+\operatorname{tg}x}{a-\operatorname{tg}x}$; 8) $y=x^{\operatorname{tg}3x}$; 9) $y=(x+5)\sin^3 x-8$;
10) $y=1+e^{xy}$; 11) $\ln x+e^{-y}=e^3$; 12) $x\operatorname{tg}y+3\sin x=x^3$;
13) $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2},\\ y=t+3;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\arccos\dfrac{1}{t},\\ y=\sqrt{t^2-1}+\arcsin\dfrac{1}{t};\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=\ln(2-t),\\ y=t(t+1).\end{cases}$

21.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=(e^x+3)^4-\cos x,\ x_0=0;\quad 2)\ y=\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{2},\ x_0=0.$$

21.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = \sqrt{1-3x-x^2} + \arcsin\sqrt{x},\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = \sin^2 x - \ln(1+\cos x),\ x_0 = \frac{\pi}{6}.$$

21.10. Найти точку на кривой $y = x^2/4 - 7$, нормаль в которой параллельна прямой $y = -x/8 + 1$.

21.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = \log_3(x^2 - \sin x) + \frac{1}{x}; \quad 2)\ y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + \ln\frac{1}{x}; \quad 3)\ y = 3^{\sin\ln\sqrt{x}}.$$

21.12. Вычислить приближенно $y = \sqrt[4]{2x - \sin\dfrac{\pi x}{2}}$, $x = 1{,}02$.

21.13. Показать, что функция $y = -\dfrac{1}{3x+c}$ удовлетворяет уравнению $y' = y^2$.

21.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = (1-x-x^2) - e^{x-1},\ y''' = ?; \quad 2)\ y = 4^{5x-1},\ y'' = ?; \quad 3)\ y = \ln(5x+2),\ y^{(n)} = ?;$$

$$4) \begin{cases} x = 5 - \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = ?; \quad 5) \begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = \dfrac{1}{t}, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} = ?.$$

21.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = x(x-1)^2(x-2)^3; \quad 2)\ y = 2x + 3\sqrt[3]{(2-x)^2}; \quad 3)\ y = \frac{x}{\ln x}.$$

21.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = x^4 - 8x^2 + 3,\ [-1; 2]; \quad 2)\ y = \frac{x+3}{x^2+7},\ [-10; -3]; \quad 3)\ y = x^2\ln x,\ \left[\frac{1}{e}; 1\right].$$

21.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = e^{1/(2-x)}; \quad 2)\ y = \frac{x^3+1}{x^2}; \quad 3)\ y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x; \quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n},\ x \geqslant 0.$$

21.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2(x+1)}{x+2}}.$$

21.19. В данный шар радиуса R вписать конус с наибольшим объёмом.

21.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{3} - \operatorname{cosec}\frac{x}{3}\right); \quad 2)\ \lim_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\ln(x + e^x); \quad 3)\ \lim_{x\to\infty}(1 + e^x)^{1/x}.$$

21.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty; -2[\cup]-2; \infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x = -2$;
3) горизонтальные асимптоты: $y = 0$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки: $x = -3$, $x = -1$, $x = 2$;

6) точки, где $y' = \infty$: $x = -4$, $x = 0$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-4;-3[$, $]0;2[$; б) убывания: $]-\infty;-4[$, $]-3;-2[$, $]-2;0[$, $]2;\infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty;-4[$, $]-4;-2[$, $]-1;0[$, $]0;3{,}5[$; б) вогнутости: $]-2;-1[$, $]3{,}5;\infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-4) = -2$; $y(-3) = 1$; $y(-1) = 1$; $y(0) = -2$; $y(3) = 2$; $y(3{,}5) = 0{,}5$.

21.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = 4/(x-7)$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 3$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 3$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 22

22.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1-2n^2}{n^2+3} = -2; \quad 2)\ \lim_{x\to-1/2}\frac{6x^2-75x-39}{x+1/2} = -81.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

22.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+2}-n)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\Bigl(\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{16}+\ldots+\dfrac{1+2^n}{4^n}\Bigr)$;

4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{5x^2+\sin\pi x}{\operatorname{tg}(\pi x/3)}$; 5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{3x+7}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x(x+1)}-x)$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$; 11) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\Bigl(\dfrac{x-3}{x}\Bigr)^{x/2}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\sin\sqrt[3]{x}}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}\Bigl(2-\dfrac{1}{\cos x}\Bigr)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2^x)^{1/x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3\cdot5\cdots(2n+1)}{2\cdot5\cdots(3n-1)}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{\cos[\pi\sqrt{n^2+n}]}$.

22.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = (x-1)^2\exp\Bigl(\frac{1}{x+1}\Bigr)$$

в точке $x_0 = -1$ или показать, что он не существует.

22.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = \arcsin(\sqrt{9+x^2}-3); \quad 2)\ f(x) = \ln(1+x^2)$$

при $x\to0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

22.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = -5x^2-8$ непрерывна в точке $x_0 = 2$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

22.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y = \begin{cases} 1+x, & \text{если } x\leqslant 0;\\ 1-x^2, & \text{если } 0<x\leqslant1;\\ 0, & \text{если } x>1;\end{cases} \quad 2)\ y = \frac{1}{3+2^{-1/(x+3)}}; \quad 3)\ f(x) = \frac{x+3}{|x|}.$$

22.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}$; 2) $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-ax^4}}$; 3) $y=\cos\ln 2-\dfrac{\cos^2 3x}{3\sin 6x}$;

4) $y=(x+2\sqrt{x}+2)\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$; 5) $y=(\sin\sqrt{x})^{\ln\sin\sqrt{x}}$; 6) $y=2^{\cos^3(1-x)}$;

7) $y=\dfrac{\operatorname{sh}x}{4\operatorname{ch}^4 x}+\dfrac{3}{8}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; 8) $y=x^{\sin^2 x}$; 9) $y=x\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

10) $e^{xy}-x^2+y^2=0$; 11) $x^2+y^2\ln x-4=0$; 12) $\cos\dfrac{x}{y}+\operatorname{tg}^2 x=2-y^3$;

13) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t;\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\operatorname{sh}^2 t,\\ y=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t};\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=\dfrac{1}{\ln t},\\ y=\ln\dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}.\end{cases}$

22.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=\sin\alpha\ln\sin(x-\alpha),\ x_0=2\alpha;\quad 2)\ y=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x,\ x_0=0.$$

22.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{4x+1}{\sqrt{2}},\ x_0=0; 2)\ y=2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+e^x},\ x_0=0.$$

22.10. Найти точку на кривой $y=-3x^2+4x+7$, нормаль в которой параллельна прямой $x-20y+5=0$.

22.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y=\operatorname{arctg}\frac{x}{3};\quad 2)\ y=(\ln 2)^{x^2-\sqrt{x}};\quad 3)\ y=\operatorname{tg}(2\cos\sqrt{1-x^2}).$$

22.12. Вычислить приближенно $y=1/\sqrt{2x^2+x+1}$, $x=1{,}016$.

22.13. Показать, что функция $y=5e^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$ удовлетворяет уравнению $y'+2y=e^x$.

22.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y=\frac{1}{x}\sin 2x,\ y''=?;\quad 2)\ y=e^{x+x^2}+2^x,\ y'''=?;\quad 3)\ y=\sqrt[5]{e^{7x-1}},\ y^{(n)}=?;$$

$$4)\begin{cases}x=\operatorname{arctg}t,\\ y=1+t^2,\end{cases}\ \frac{d^2x}{dy^2}=?;\quad 5)\begin{cases}x=e^t,\\ y=\ln t^2,\end{cases}\ \frac{d^2y}{dx^2}=?.$$

22.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y=x^3e^{-x};\quad 2)\ y=\frac{3x^4+1}{x^3};\quad 3)\ y=x^2\sqrt{1-x\sqrt{x}}.$$

22.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y=3x-x^3,\ [-2;3];\quad 2)\ y=x^2e^{1/x},\ \left[\frac{1}{4};1\right];\quad 3)\ y=x+\frac{1}{x},\ [-10;-0{,}1].$$

22.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y=(1-x^2)^3;\quad 2)\ y=\frac{x^2-1}{x^2+2};\quad 3)\ y=x^{2/3}e^{-x^2/3};$$

$$4)\ y=\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2n}),\ |x|<1.$$

22.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \ln\Big(\frac{2^x - 1}{4^x - 8}\Big).$$

22.19. Найти такой цилиндр, который имел бы наибольший объём при данной полной поверхности S.

22.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\Big[\frac{x-1}{2x^2} + \frac{1}{x(e^{2x}-1)}\Big];\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}};\quad 3)\ \lim_{x\to 0} x^x.$$

22.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty; 2[\cup]2; \infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x = 2$;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y = -x/3$;
5) стационарные точки $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = 4$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-1; 1[$, $]1; 2[$, $]3; 4[$; б) убывания: $]-\infty; -1[$, $]2; 3[$, $]4; \infty[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty; -2[$, $]0; 1[$; б) вогнутости: $]-2; 0[$, $]1; 2[$, $]2; 4[$, $]4; \infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-2) = 0$; $y(-1) = -2$; $y(0) = 0$; $y(1) = 2$; $y(3) = -2$, $y(4) = 0$.

22.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = \ln(5 + x^2)$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 23

23.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}\frac{1}{3};\quad 2)\ \lim_{x\to 5/2}\frac{2x^2-9x+10}{2x-5} = \frac{1}{2}.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

23.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3} - 2n)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{4^n}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-\ldots-2n}{\sqrt[3]{n^3+2n+2}}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x^2+3}}{\cos(\pi x/3)}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^3-3x-2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{6x^2-3}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-x+1})$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2(x/2)}{x^2}$;

10) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{1+x^2}{2+x^2}\Big)^{(x^2+1)/x}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{x}\sin\sqrt{x})}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\Big)^{\operatorname{ctg}^3 x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{4\cdot 9\cdots(5n-1)}}{2^n}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\sin[\pi\sqrt{n^2+1}]}$.

23.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = \sin\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)$$

в точке $x_0 = -1/3$ или показать, что он не существует.

23.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = \ln(1+\sqrt{x^3});\quad 2)\ f(x) = \sqrt[5]{1+x} - 1$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

23.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = -2x^2 - 5$ непрерывна в точке $x_0 = 2$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

23.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y = \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x \leqslant 1; \\ 2x, & \text{если } 1 < x \leqslant 3; \\ x+2, & \text{если } x > 3; \end{cases}\quad 2)\ f(x) = 9^{-1/(7-x)};\quad 3)\ y = \frac{|x|}{x}.$$

23.7. Найти производные следующих функций:

1) $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$; 2) $y = \ln\dfrac{a^2+x^2}{a^2-x^2}$; 3) $y = -\dfrac{\cos^2 24x}{48\sin 48x}$;

4) $y = \dfrac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}}$; 5) $y = (\sin\sqrt{x})^{1/x}$; 6) $y = (\ln 2)^{\sqrt{1-3x}}$;

7) $y = \dfrac{3}{8\sqrt{2}}\ln\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2} - \operatorname{tg} x}$; 8) $y = x^{\arcsin x}$; 9) $y = x\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

10) $y = \dfrac{3x}{\cos y} - y^5 + x^4$; 11) $\ln(x-y^2) + \sin xy = 0$; 12) $2^{y/x} - 2^x = 3$;

13) $\begin{cases} x = \cos^2 t, \\ y = 1 + \sin 2t; \end{cases}$ 14) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(t + \sqrt{1+t^2}); \end{cases}$ 15) $\begin{cases} x = t^2 - 8t, \\ y = t + 7. \end{cases}$

23.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = \frac{3\sin x}{\cos^2 x},\ x_0 = 0;\quad 2)\ y = x^3\arcsin x,\ x_0 = 0.$$

23.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0

$$1)\ y = \operatorname{arctg}(3x-2),\ x_0 = 1;\quad 2)\ y = \frac{1}{2}(e^x - 3),\ x_0 = 0,$$

23.10. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 4x + 6$, нормаль в которой перпендикулярна прямой $8x - y - 5 = 0$.

23.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = x\cos^3 5x - \frac{1}{x};\quad 2)\ y = x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1};\quad 3)\ y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}}.$$

23.12. Вычислить приближенно $y = x^7$, $x = 2{,}001$.

23.13. Показать, что функция $y = 2 + c\sqrt{1-x^2}$ удовлетворяет уравнению $yy' = x - 2x^3$.

23.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y=\cos 2x-3\sin 2x,\ y'''=?;\quad 2)\ y=4^{\ln^2(1-x)},\ y''=?;\quad 3)\ y=\frac{x}{2(3x+2)},\ y^{(n)}=?;$$

$$4)\begin{cases}x=\ln 2t,\\ y=1/5t,\end{cases}\ \frac{d^2x}{dy^2}=?;\quad 5)\begin{cases}x=\sin 5t,\\ y=\operatorname{ctg} 5t,\end{cases}\ \frac{d^2y}{dx^2}=?.$$

23.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y=x^3-12x;\quad 2)\ y=\sqrt[3]{1-x^2};\quad 3)\ y=\frac{16}{x^2(x-4)}.$$

23.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y=2\sin x+\cos 2x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right];\quad 2)\ y=\frac{x-2}{x^2+5},\ [-3;3];\quad 3)\ y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-7x^2+24+1,\ [-5;2].$$

23.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y=xe^{2x-1};\quad 2)\ y=\frac{3x^2-7x-16}{x^2-x-6};\quad 3)\ y=\frac{\ln x}{x};\quad 4)\ y=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}.$$

23.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x)=x\ln\left(\frac{4^x-1}{4^x-8}\right).$$

23.19. Найти наибольший объём конуса, имеющего данную образующую l.

23.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 1/2}\sin(2x-1)\operatorname{tg}\pi x;\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right);\quad 3)\ \lim_{x\to 0}x^{1/(x-1)}.$$

23.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X=]-\infty;0[\cup]0;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x=0$;
3) горизонтальные асимптоты: $y=0$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки: $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, $x=3$;
6) точки, где $y'=\infty$: $x=-2$, $x=2$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-3;-2[$, $]-1;0[$, $]1;2[$, $]3;\infty[$; б) убывания: $]-\infty;-3[$, $]-2;-1[$, $]0;1[$, $]2;3[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]-\infty;-4[$, $]4;\infty[$; б) вогнутости $]-4;-2[$, $]-2;0[$, $]2;4[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-4)=-1/2$; $y(-3)=-1$; $y(-2)=3$; $y(-1)=0$; $y(1)=0$; $y(2)=3$; $y(3)=-1$; $y(4)=-1/2$.

23.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y=xe^{3x}$ и вычислить её значение в точке $x_0=1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0=1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n=2,3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 24

24.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4+2n}{1-3n}=-\frac{2}{3};\quad 2)\ \lim_{x\to-7/5}\frac{10x^2+9x-7}{x+7/5}=-19.$$

При $\varepsilon=0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

24.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-n}{n+2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8}]$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!+(n+2)!}{(n-1)!+(n+2)!}$;

4) $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{\cos x+\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^3+3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x}{(x-1)^2}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{1/x}\Big)$; 9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sin x}$;

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x\sin^2x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\dfrac{1+x}{x}\Big)^{(x+1)/2}$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^{2x}-1}{x}$; 14) $\lim\limits_{x\to0}[1-\ln(1+\sqrt[3]{x})]^{x/\sin^4\sqrt[3]{x}}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\Big(\cos\dfrac{m}{\sqrt{x}}\Big)^{x}$;

16) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{5\cdot9\cdots(4n+1)}}{3^n}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\cos^2[\pi\sqrt{n^2+n}]}$.

24.3. Вычислить предел функции

$$f(x)=x^2\exp\Big(\frac{1}{x-1}\Big)$$

в точке $x_0=1$ или показать, что он не существует.

24.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x)=\arcsin(\sqrt[3]{x});\quad 2)\ f(x)=\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}-1$$

при $x\to0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

24.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x)=-3x^2-6$ непрерывна в точке $x_0=1$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon=0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

24.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y=\begin{cases}\sin x, & \text{если } x<0;\\ x^2, & \text{если } 0\leqslant x<1;\\ 2-x, & \text{если } x\geqslant1;\end{cases}\quad 2)\ y=\frac{1}{1-3^{-1/(x-1)}};\quad 3)\ y=\frac{|x|}{x-1}.$$

24.7. Найти производные следующих функций:

1) $y=\dfrac{x^4-8x^2}{2(x^2-4)}$; 2) $y=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})$; 3) $y=\dfrac{\cos5\sin^2 2x}{2\cos4x}$;

4) $y=\sqrt{1-x^2}-x\arcsin\sqrt{x}$; 5) $y=(\cos2x)^{(\ln\cos2x)/4}$; 6) $y=6^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;

7) $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{\operatorname{tg}x}}{1-\sqrt{\operatorname{tg}x}}$; 8) $y=(\arcsin x)^{2x-3}$; 9) $y=\ln x\sin^3(1-2x)$;

10) $x^2\sin y+y^3\cos x-2x=0$; 11) $\cos(x-y)-2x+4y=0$; 12) $e^{xy}+\dfrac{x}{y}=x^5$;

13) $\begin{cases}x=\ln(1-t^2),\\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2};\end{cases}$ 14) $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\sec t;\end{cases}$ 15) $\begin{cases}x=t^2,\\ y=t^3-\dfrac{t}{3}.\end{cases}$

24.8. Найти значения производной в точке $x = x_0$:

$$1)\ y = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1),\ x_0 = 0; \quad 2)\ y = 1 + \sqrt{1 - e^{4x}},\ x_0 = -\frac{1}{4}.$$

24.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y = 3\arcsin\frac{3}{x+1},\ x_0 = 1; \quad 2)\ y = \operatorname{arctg}\cos x,\ x_0 = 0.$$

24.10. Найти точку на кривой $y = 5x^2 - 4x + 1$, нормаль в которой параллельна к прямой $x + 6y + 15 = 0$.

24.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y = 5^{\ln \operatorname{tg}^2 x}; \quad 2)\ y = x\operatorname{arctg}\frac{1}{x} - 8; \quad 3)\ y = \sqrt{1+2x} - \ln(x+3).$$

24.12. Вычислить приближенно $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 8{,}36$.

24.13. Показать, что функция $y = (\sin x)/x$ удовлетворяет уравнению $xy' + y = \cos x$.

24.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y = e^{x/2} - \sin 2x,\ y'' =?; \quad 2)\ y = (7x-8) + \ln\frac{1}{x},\ y''' =?; \quad 3)\ y = \sqrt[3]{e^{2x+1}},\ y^{(n)} =?;$$

$$4)\ \begin{cases} x = \sin^2 3t, \\ y = \cos^2 3t, \end{cases} \quad \frac{d^2x}{dy^2} =?; \quad 5)\ \begin{cases} x = 2t^2 - t + 3, \\ y = t - 1, \end{cases} \quad \frac{d^2y}{dx^2} =?.$$

24.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y = (x-2)^{2/3}(2x+1); \quad 2)\ y = \frac{\ln^2 x}{x}; \quad 3)\ y = xe^{-x^2/2}.$$

24.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y = 2x - \sqrt{x},\ [0;4]; \quad 2)\ y = \frac{3-x^2}{x+2},\ [-5;-3{,}5]; \quad 3)\ y = \frac{x^4}{4}\frac{x^3}{3} - 7x^2 + 24x + 1,\ [1;4].$$

24.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = \sqrt[3]{1-x^3}; \quad 2)\ y = \ln\frac{x-1}{x+1}; \quad 3)\ y = \frac{1-x^3}{x^3}; \quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\sqrt{1 + \frac{1}{x^{2n}}}.$$

24.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \ln\left(\frac{5^x - 5}{25^x - 1}\right).$$

24.19. Из трёх досок одинаковой ширины сколачивается жёлоб. При каком угле наклона боковых стенок площадь поперечного сечения жёлоба будет наибольшей?

24.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\ln(x+e^x); \quad 2)\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right); \quad 3)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}.$$

24.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-1;\infty[$;

2) вертикальные асимптоты: $x = -1$;
3) горизонтальные асимптоты: $y = 0$;
4) наклонные асимптоты: нет;
5) стационарные точки $x = 0$, $x = 2$, $x = 4$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x = 1$, $x = 3$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]0;1[$, $]2;3[$, $]4,\infty[$; б) убывания: $]-1;0[$, $]1;2[$, $]3;4[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) выпуклости: $]5;\infty[$; б) вогнутости: $]-1;1[$, $]1;3[$, $]3;5[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(0) = 0$; $y(1) = 3$; $y(2) = -2$; $y(3) = 2$; $y(4) = -1$; $y(5) = -1/2$.

24.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = \ln(3 + x)$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 1$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 1$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Вариант № 25

25.1. Исходя из определения предела, доказать, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3-n^2}{1+2n^2} = -\frac{1}{2};\quad 2)\ \lim_{x\to 1/2}\frac{2x^2+3x-2}{x-1/2} = 5.$$

При $\varepsilon = 0{,}01$ найти $N(\varepsilon)$ для предела последовательности и $\delta(\varepsilon)$ для предела функции.

25.2. Найти пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+1}+n^2}{(n+1)^2}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-\sqrt{n^3(n^2+5)}}{\sqrt{n}}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{10}+\ldots+\dfrac{2^n+5^n}{10^n}\right)$;
4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\operatorname{tg}(\pi x/4)}{1+\cos(\pi x/3)}$; 5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-4x^2+2x+7}{x^2-2x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+1}$;
7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^3+1}-3}{x^2-2x-3}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^4-x^2}{x^2-1}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{1-\cos x}$;
10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}2x}{x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{(2x^2-1)/x}$;
13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x^2}-\cos x}{x^2}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\pi x)^{1/(x\sin\pi x)}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}+\lambda\sin\dfrac{m}{x}\right)^x$;
16) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!-(n+1)}}$; 17) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{\sin^2[\pi\sqrt{n^2+1}]}$.

25.3. Вычислить предел функции

$$f(x) = \frac{x}{\sin[1/(x-2)]}$$

в точке $x_0 = 2$ или показать, что он не существует.

25.4. Записать асимптотическую оценку функций

$$1)\ f(x) = 2^{\sqrt{x}} - 1;\quad 2)\ f(x) = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} - 1$$

при $x \to 0$ и определить порядок первой бесконечно малой относительно второй.

25.5. Исходя из определения, доказать, что функция $f(x) = 3x^2 - 3$ непрерывна в точке $x_0 = 4$; найти $\delta(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0{,}1$. Показать, что функция непрерывна в произвольной точке.

25.6. Исследовать на непрерывность функции

$$1)\ y=\begin{cases}2x+2, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 3;\\ 8, & \text{если } 3<x<6;\\ x+2, & \text{если } x\geqslant 6;\end{cases}\quad 2)\ f(x)=1-2^{-1/(2x-1)};\quad 3)\ y=\frac{1}{1-|x|}.$$

25.7. Найти производные следующих функций:

$1)\ y=\dfrac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}};$ $\quad 2)\ y=\ln^2(x+\cos x);$ $\quad 3)\ y=\dfrac{\sin^2 27x}{27\cos 54x};$

$4)\ y=(2x^2+5)\operatorname{tg}\dfrac{x-1}{x+2};$ $\quad 5)\ y=(\sin x)^{\cos(x/2)};$ $\quad 6)\ y=5^{x\operatorname{tg}^2 3x};$

$7)\ y=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{2+\sqrt{2}\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}\operatorname{tg}x};$ $\quad 8)\ y=x^{\operatorname{tg}5x};$ $\quad 9)\ e^x\ln\dfrac{e^x}{x^2+1};$

$10)\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2};$ $\quad 11)\ x+y=e^{x-y};$ $\quad 12)\ \cos\dfrac{x}{y}-\sin xy=x;$

$13)\ \begin{cases}x=\ln(t+\sqrt{1+t^2}),\\ y=\sqrt{1+t^2}-t;\end{cases}$ $\quad 14)\ \begin{cases}x=\cos^2 t,\\ y=\operatorname{tg}^2 t;\end{cases}$ $\quad 15)\ \begin{cases}x=e^t+e^{-t},\\ y=e^t-e^{-t}.\end{cases}$

25.8. Найти значения производной в точке $x=x_0$:

$$1)\ y=\frac{1}{\ln 2}\operatorname{arctg}(2^x-1),\ x_0=0;\quad 2)\ y=\frac{2}{x-1}\sqrt{2x-x^2},\ x_0=\frac{1}{2}.$$

25.9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке x_0:

$$1)\ y=4\ln x+\sqrt{1-4x^2},\ x_0=\frac{1}{4};\quad 2)\ y=7^x\ln 7,\ x_0=0.$$

25.10. Найти точку на кривой $y=3x^2-5x-11$, нормаль в которой параллельна прямой $y=-x+1$.

25.11. Найти первый dy и второй d^2y дифференциалы функций

$$1)\ y=\arccos\sqrt{1+2x^2};\quad 2)\ y=\sqrt{\ln x}+\sin^2 x;\quad 3)\ y=2^{\arcsin\sqrt{x}}.$$

25.12. Вычислить приближенно $y=1/\sqrt{2x-1}$, $x=1{,}58$.

25.13. Показать, что функция $y=e/\cos x$ удовлетворяет уравнению $y'-(\operatorname{tg}x)y=0$.

25.14. Найти производные указанных порядков

$$1)\ y=(1-5x)+\ln x,\ y''=?;\quad 2)\ y=3^{\arcsin\sqrt{x}},\ y'''=?;\quad 3)\ y=\sqrt{x},\ y^{(n)}=?;$$

$$4)\ \begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t,\end{cases}\ \frac{d^2x}{dy^2}=?;\quad 5)\ \begin{cases}x=2t^3-6t+3,\\ y=t^2-1,\end{cases}\ \frac{d^2y}{dx^2}=?.$$

25.15. Найти экстремумы функций

$$1)\ y=1-(x-2)^{4/5};\quad 2)\ y=x^2\sqrt{x^2+2};\quad 3)\ y=\frac{e^x}{x}.$$

25.16. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных интервалах:

$$1)\ y=x^3-3x^2-9x+35,\ [-4;4];\quad 2)\ y=\frac{x}{2}+\sin x,\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right];\quad 3)\ y=\frac{4x}{1+x^2},\ [-2;0].$$

25.17. Исследовать функции и построить их графики

$$1)\ y = xe^{-x^2};\quad 2)\ y = \frac{x^2+1}{x};\quad 3)\ y = \frac{x}{(x-1)^2};\quad 4)\ y = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n.$$

25.18. Найти асимптоты и построить эскиз графика функции

$$f(x) = \ln\Big(\frac{8^x-4}{2^x-1}\Big).$$

25.19. Около данного цилиндра радиуса R описать конус наименьшего объёма. Плоскости основания цилиндра и конуса должны совпадать.

25.20. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x-\sin x};\quad 2)\ \lim_{x\to\pi/2}(\sin 2x)^{\cos x};\quad 3)\ \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{4}{\sin^2 2x}\Big).$$

25.21. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) область определения $X =]-\infty;-2[\cup]-2;0[\cup]0;\infty[$;
2) вертикальные асимптоты: $x=-2$, $x=0$;
3) горизонтальные асимптоты: нет;
4) наклонные асимптоты: $y = x/3$;
5) стационарные точки: $x=-3$, $x=-1$, $x=1$;
6) точки, где $y' = \infty$: $x=-4$;
7) интервалы монотонности: а) возрастания: $]-\infty;-4[$, $]-3;-2[$, $]1;\infty[$; б) убывания: $]-3;-4[$, $]-2;0[$, $]0;1[$;
8) интервалы выпуклости и вогнутости: а) вогнутости: $]-\infty;-4[$, $]-4;-2[$, $]-2;-1[$, $]0;2[$; б) выпуклости: $]-1;0[$, $]2;\infty[$;
9) значения функции в некоторых точках: $y(-4)=0$; $y(-3)=-2$; $y(-1)=1$; $y(1)=-1$; $y(2)=0$.

25.22. Записать формулу для производной n-го порядка функции $y = 1/(x+5)$ и вычислить её значение в точке $x_0 = 3$. Представить функцию формулой Тейлора до n-го порядка в точке $x_0 = 3$. Выписать остаточный член формулы Тейлора при $n = 2, 3$ в форме Лагранжа и в форме Коши.

Список литературы

1. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. I: *Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщенных функций.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 672 с.
2. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.* — М.: Наука, 1980.
3. Берман Г.Н. *Сборник задач по курсу математического анализа.* – М.: Наука, 1985.
4. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. *Краткий курс математического анализа.* – М.: Наука, 1971.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного.* – М.: Наука, 1985.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Задачник.* – М.: Наука, 1987.
7. Дедекинд Р. *Непрерывность и иррациональные числа.* 4 изд. — Одесса: Mathesis, 1923. — 44 с.
8. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967.
9. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах.* – М.: Высшая школа, 1980.
10. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Ч. I: *Линейная алгебра.* 2 изд. — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2009. — 310 с.
11. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов.* Ч. II: *Аналитическая геометрия.* 2 изд. — Томск: Изд-во Томского политехн. ун-та, 2010. — 398 с.
12. Зорич В.А. *Математический анализ.* Ч. I. — М.: «МЦНМО», 2002. — 657 с.
13. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Основы математического анализа (в 2-х томах).* – М. Наука, 1971 (т.1), 1973 (т.2).
14. Кальницкий Л.А., Добротин Д.А., Жевержев В.Ф. *Специальный курс высшей математики.* – М.: Высшая школа, 1976. – 400 с.
15. Каплан И.А. *Практические занятия по высшей математике.*(в 3-х томах). – Харьков: Изд-во ХГУ. – Т. 1. – 1965; Т. 2 – 1971; Т. 3 – 1972.
16. Кудрявцев Л.Д. *Математический анализ* (в 2-х т.). – М.: Высшая школа, 1973.
17. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1981 (т. 1), 1982 (т. 2).
18. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Курс высшей математики.* – М.: Наука, 1971.
19. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. *Краткий курс высшей математики.* – М.: Наука, 1986.
20. Кузнецов Л.А. *Сборник индивидуальных заданий по курсу высшей математики.* – М. Наука, 1964.
21. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. *Математический анализ в примерах и задачах* (в 2-х т.). – Киев: Вища школа, т. 1 – 1975, т. 2 – 1977.
22. Мышкис А.Д. *Математика для ВТУЗОВ* (в 2-х т.). – М.: Наука, 1971 (т. 1),

1973 (т. 2).

23. Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление.* – М.: Наука, 1985.
24. Терехина Л.И., Фикс И.И. *Высшая математика.* Ч. 2. *Предел, непрерывность, производная, приложения производной, функции нескольких переменных*: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – 180 с.
25. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (в 3-х т.). – М.: Наука, 1966.
26. Шилов Г.Е. *Математический анализ* (*функции одного переменного*). – М.: Наука, 1969. – 534 с.

Учебное издание

ЗАДОРОЖНЫЙ Валерий Николаевич
ЗАЛЬМЕЖ Владимир Феликсович
ТРИФОНОВ Андрей Юрьевич
ШАПОВАЛОВ Александр Васильевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
для технических университетов
Часть III. Дифференциальное и интегральное исчисление
1. Дифференциальное исчисление функций
одной переменной

Учебное пособие

Технический редактор *В.Н. Романенко*
Компьютерная верстка *В.Н. Романенко*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе T_EX – L^AT_EX
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Подписано к печати . .2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать . Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. .
Заказ . Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru