

В.Г. Багров, В.В. Белов, А.Ю. Трифонов

# МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Асимптотические методы  
в релятивистской квантовой механике

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального  
образования  
**“ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”**  
**ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И ЭКОЛОГИИ**  
**(КУРЧАТОВСКИЙ РНЦ)**  
**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ**  
**И МАТЕМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)**

---

*В. Г. Багров, В. В. Белов, А. Ю. Трифонов*

## **МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Асимптотические методы в релятивистской квантовой механике**

Допущено Учебно-методическим объединением по образованию в области  
прикладной математики и управления качеством в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности  
073000 – Прикладная математика

Издательство ТПУ

Томск 2006

УДК 581

Б14

**Б14 Багров В. Г.**

Методы математической физики. Асимптотические методы в релятивистской квантовой механике: учебное пособие / В. Г. Багров, В. В. Белов, А. Ю. Трифонов. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2006. — 218 с.

Настоящее пособие представляет собой дополнительные главы курса «Методы математической физики» и содержит материал по специальным разделам этого курса: методу канонического оператора Маслова, комплексному методу ВКБ-Маслова и его приложениям к релятивистской квантовой механике. Предлагаемое пособие может быть полезно студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

УДК 581

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом  
Томского политехнического университета

Работа частично поддержана грантом Президента Российской Федерации  
№ НШ-5103.2006.2

*Рецензенты*

Доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного педагогического университета, г. Томск  
*Бухбиндер И.Л.*

Доктор физико-математических наук, профессор Томского государственного университета, г. Томск  
*Шапвалов А.В.*

© В.Г. Багров, В.В. Белов, А.Ю. Трифонов, 2006

© Томский политехнический университет, 2006

© Оформление. Издательство ТПУ, 2006

## Введение

Проблема построения квазиклассического приближения для релятивистских уравнений Клейна–Гордона, Дирака и Прока имеет две существенные особенности. Первая из них связана с математической структурой этих уравнений, и об этом будет сказано позднее. Вторая особенность связана с физическим статусом этих уравнений, что мы сейчас кратко обсудим. Хорошо известно, что в точном смысле последовательной релятивистской квантовой механики не существует [1, 2]. Только квантовая теория поля адекватно описывает физическую реальность в релятивистской области. В частности, это связано с тем, что при наличии внешних электромагнитных полей вакуум становится неустойчивым и возможно спонтанное рождение частиц из вакуума. Поэтому в точном смысле не существует релятивистских систем с фиксированным числом частиц, и интерпретировать решения уравнений Дирака, Клейна–Гордона и Прока как квантовомеханические волновые функции затруднительно. Этот факт был ясен еще на заре развития релятивистской квантовой теории. В частности, еще в [3, 4] было предсказано рождение пар из вакуума при наличии электромагнитного поля, а в [5] обнаружено существование явления, получившего впоследствии название «дрожания Шрёдингера» (*Zitterbewegung* – по терминологии самого Шрёдингера [5]), также свидетельствующего о невозможности в точном смысле квантовомеханических подходов для описания поведения частиц в релятивистской области.

На первый взгляд, чисто математическая задача корректного построения квазиклассических асимптотик решений уравнений Клейна–Гордона, Дирака и Прока не имеет (и не должна иметь) отношения к задаче корректного квантовомеханического описания частиц в релятивистской области. Но это не так, и совершенно замечательным, на наш взгляд, является тот факт, что построение квазиклассических асимптотик решений релятивистских волновых уравнений одновременно приводит к построению последовательной (в квазиклассическом приближении, но с точностью до любого конечного порядка по  $\sqrt{\hbar}$  при  $\hbar \rightarrow 0$ ) релятивистской квантовой механики скалярных, спинорных и изоспинорных частиц. Физическая причина этого, на наш взгляд, совершенно прозрачна и состоит в следующем. Еще Швингером [6] была вычислена вероятность рождения пар заряженных частиц внешним полем из вакуума  $w = \exp(-\pi Q_0/Q)$ ,  $Q_0 = m^2 c^3 / (e\hbar)$ , где  $m$  – масса частицы,  $e$  – ее заряд,  $c$  – скорость света,  $Q$  – эффективная напряженность поля,  $\hbar$  – постоянная Планка. Таким образом вероятность рождения пар экспоненциально мала при  $\hbar \rightarrow 0$  и, следовательно, в квазиклассическом приближении со степенной по  $\sqrt{\hbar}$  точностью процессы такого типа могут не учитываться в силу характера приближения. Поскольку, как известно (см., например, [7]), вероятность нестабильности вакуума всегда имеет характер  $w \sim \exp(-1/\hbar)$ , то в квазиклассическом приближении (в любом порядке по  $\sqrt{\hbar}$ ) вакуум всегда можно считать стабильным. Это же имеет место и по отношению к явлению «*Zitterbewegung*». Таким образом, в квазиклассическом приближении, которое мы здесь рассматриваем, воссоздается последовательная (но приближенная) релятивистская квантовая механика (одной частицы), что ясно вытекает из содержания данной работы.

Любой подход к решению основных уравнений квантовой теории имеет статус квазиклассического, если он в той или иной степени реализует эвристический принцип соответствия этой теории и ее классического аналога.

При установлении соответствия квантовых и классических результатов в эволюционных квантовых задачах принципиальную роль играет проблема получения решений классических уравнений движения как предела при  $\hbar \rightarrow 0$  решений уравнений движения для квантовых средних.

Как известно, в нерелятивистской теории решение именно этой проблемы, начиная с первых работ по квантовой механике, связано с представлением о волновых пакетах – таких динамических состояниях  $\Psi(t, \hbar) \in L_2(\mathbb{R}_x^3)$  уравнения Шрёдингера, которые «эффективно» сосредоточены в момент времени  $t$  в окрестности положения классической частицы на траектории, определяемой произвольным решением соответствующего уравнения Ньютона.

Можно придать точный (строгий математический) смысл этому свойству, если в качестве параметра, контролирующего «эффективную» сосредоточенность квантовых состояний, выбрать основной «параметр» квантовой теории – постоянную Планка  $\hbar$  (в конкретных задачах – безразмерный малый параметр, пропорциональный  $\sqrt{\hbar}$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ ). В этом случае мы будем говорить о свойстве квазиклассической сосредоточенности квантовомеханических состояний.

Вопросы существования и построения максимально широкого класса состояний, обладающих этим свойством, – класса квазиклассически сосредоточенных состояний в общей ситуации – для уравнения Шрёдингера и его многомерного аналога были в деталях исследованы в части I настоящей работы [8] (см. так же [9, 10] и цитируемую там литературу).

Опуская технические детали, приведем здесь кратко основные моменты концепции квазиклассически сосредоточенных состояний, развитой в [8] для нерелятивистской квантовой механики с  $n$  степенями свободы, имеющей классический аналог. Пусть  $\hat{\mathcal{H}}(t)$  – гамильтониан квантовой системы с вейлевским символом  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar)$  ( $\hat{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{H}(\hat{p}, \hat{x}, t, \hbar)$ ).

В квантовой механике эволюция квантовой системы представляется лучами  $\Psi(t, \hbar)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ , где  $\Psi(t, \hbar)$  – вектор некоторого гильбертова пространства  $\mathcal{L}$  в каждый момент времени  $t$ , а наблюдаемые описываются самосопряженными операторами в  $\mathcal{L}$ . Эволюция соответствующей классической системы – это лучи  $z = Z(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ , где  $Z(t)$  – точка  $2n$ -мерного векторного пространства  $\mathcal{E}$ , называемого фазовым, и наблюдаемые – действительные измеримые функции, определенные на нем.

Для наших целей будем использовать координатное представление, когда образующие алгебры Гейзенберга  $\hat{q}_j, \hat{p}_l$ ,  $[\hat{q}_j, \hat{p}_l] = -i\hbar\delta_{ij}$ , реализованы в виде самосопряженных в  $\mathcal{L} = L_2(\mathbb{R}_x^n)$  операторов  $\hat{q}_j = x_j$ ,  $\hat{p}_l = -i\hbar\partial/\partial x_l$  и фазовое пространство  $\mathcal{E}$  – симплектическое линейное пространство  $\mathbb{R}_{px}^{2n} = \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_x^n$  со стандартной скобкой Пуассона  $\{z, w\} = \langle Jz, w \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$ , где  $J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}_{2n \times 2n}$ ,  $z = (\vec{p}, \vec{x})$ ,  $w = (\vec{p}_y, \vec{y})$ .

Пусть  $z = Z(t) = (\vec{P}(t), \vec{X}(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , – произвольная кривая фазового пространства  $\mathbb{R}_{p,x}^{2n}$  и  $\Psi(t, \hbar)$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ , – произвольный луч в пространстве квантовомеханических состояний. Семейство состояний  $\Psi(t, \hbar)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , квантовой системы с гамильтонианом  $\hat{\mathcal{H}}(t)$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}(t)\Psi. \quad (0.1)$$

мы называем квазиклассически сосредоточенным классом

$$\mathbb{CS}_S(Z(t), N) = \mathbb{CS}_S(Z(t), N, \hbar) \quad \Psi \in \mathbb{CS}_S(Z(t), N),$$

семейством состояний (порядка  $N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ), квазиклассически сосредоточенных на фазовой кривой  $z = Z(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , если при каждом  $t \in \mathbb{R}$

1) существуют обобщенные пределы<sup>1</sup>

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\Psi(\vec{x}, t, \hbar)|^2 = \delta(\vec{x} - \vec{X}(t)), \quad (0.2)$$

<sup>1</sup>Под обобщенным пределом мы понимаем стандартно определяемый в теории обобщенных функций предельный переход.

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\tilde{\Psi}(\vec{p}, t, \hbar)|^2 = \delta(\vec{p} - \vec{P}(t)); \quad (0.3)$$

2) существуют квантовые моменты

$$\Delta_\alpha(t, \hbar) \quad 0 \leq k \leq N. \quad (0.4)$$

центрированные относительно квантовых средних

$$\begin{aligned} \vec{X}(t, \hbar) &= \langle \Psi | \vec{x} | \Psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}_x^n)} = \langle \vec{x} \rangle, \\ \vec{P}(t, \hbar) &= \langle \Psi | -i\hbar \nabla | \Psi \rangle_{L_2(\mathbb{R}_x^n)} = \langle \tilde{\Psi} | \vec{p} | \tilde{\Psi} \rangle_{L_2(\mathbb{R}_p^n)} = \langle \vec{p} \rangle. \end{aligned}$$

Здесь  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{2n}$  – мультииндекс,  $0 \leq |\alpha| \leq N$ ;  $\delta(x)$  – «дельта-функция»;  $\Delta_\alpha(t, \hbar)$  средние значения операторов с вейлевским символом  $(\Delta z)^\alpha$ ,  $\langle | \rangle$  – скалярное произведение в  $\mathcal{L} = L_2(\mathbb{R}_x^n)$ .

Физически значимым оправданием данного определения является тот факт, что оно выделяет в пространстве всех квантовомеханических состояний максимально широкий сектор тех состояний (а именно, квазиклассически сосредоточенных), в терминах которых можно говорить о переходе из квантовой механики в классическую в духе (смысле) подхода П. Эренфеста [11].

А именно, имеет место следующая теорема, доказанная в одномерном случае в [12], и в многомерной ситуации в [13] (см. также [8]). Пусть  $\Psi(t, \hbar)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , – семейство состояний, квазиклассически сосредоточенных на фазовой траектории  $Z(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда фазовая траектория  $z = Z(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , есть траектория классической гамильтоновой системы с функцией Гамильтона  $\mathcal{H}(z, t) = \mathcal{H}(z, t, 0)$ ,

$$\dot{z} = J\mathcal{H}_z(z, t), \quad z = (\vec{p}, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad (0.5)$$

если семейство  $\Psi(t, \hbar)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  описывает эволюцию квантовой системы (0.1).

Отсюда следует, что если в начальный момент времени  $t = 0$  состояние  $\Psi(0, \hbar)$  квазиклассически сосредоточено в произвольной точке  $z_0$  фазового пространства (в смысле выполнения условий 1) и 2) и, следовательно, зависит от  $z_0 \in \mathbb{R}_{p,x}^{2n} : \Psi(0, \hbar) = \Phi(z_0, 0, \hbar) \in L_2(\mathbb{R}_x^n)$ , то решение задачи Коши для уравнения (0.1) с таким начальным условием  $\Psi(t, \hbar) = \hat{U}_\hbar(t)\Psi(0, \hbar)$  ( $\hat{U}_\hbar(t)$  – унитарный оператор эволюции) является семейством состояний квантовой системы, квазиклассически сосредоточенных на фазовой траектории  $Z(t, z_0) = \hat{g}_\mathcal{H}^t z_0$  соответствующей классической системы ( $\hat{g}_\mathcal{H}^t : \mathbb{R}_{p,x}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}_{p,x}^{2n}$  – каноническое преобразование фазового пространства, порожденное сдвигами вдоль траекторий гамильтоновой системы (0.5)).

Хорошо известно, что существует широкий класс квантово-механических задач, которые удается решить лишь с помощью привлечения аппарата квазиклассических асимптотик. Строгая теория квазиклассических асимптотик с вещественными фазами, обобщающая одномерный метод ВКБ (а в многомерном случае – метод Эйнштейна–Бриллюэна–Келлера) и охватывающая как спектральную задачу, так и задачу Коши для  $\hbar^{-1}$ - (псевдо) дифференциальных операторов, была развита в работах [14–17].

Метод Маслова – метод канонического оператора (с вещественной фазой) [14–17] – накладывает весьма жесткие требования на классическую систему: должно существовать  $n$ -параметрическое семейство лагранжевых торов, инвариантных относительно сдвигов вдоль траекторий соответствующей гамильтоновой системы, что, по существу, эквивалентно ее полной интегрируемости (по Лиувиллю).

В неинтегрируемом случае семейство  $n$ -мерных лагранжевых торов не существует. Тем не менее, часто неинтегрируемая гамильтонова система обладает

торами размерности меньшей, чем размерность конфигурационного пространства. Такая ситуация типична для классических систем, обладающих некоторым (неполным) набором симметрий, например, для заряда во внешнем электромагнитном поле с аксиальной симметрией. Метод квазиклассического квантования замкнутых геодезических ( $\Lambda^1$ ), устойчивых в линейном приближении, был впервые предложен В.М. Бабичем и В.Ф. Лазуткиным [18–20]. В этом случае квазиклассическая асимптотика локально представляет собой волновой пакет гауссова типа по трансверсальным к  $\Lambda^1$  переменным и осцилляторного типа вдоль  $\Lambda^1$ . Позднее этот случай исследовался в работах [21–23] (см. также обобщение в [24–29]).

Строгая теория квазиклассического квантования неинтегрируемых гамильтоновых систем была разработана для скалярных  $\hbar^{-1}$ - (псевдо) дифференциальных операторов в работах [30–33], для систем с матричными гамильтонианами и для уравнений с операторно-значным символом в [30, 33]. В основе этой теории лежит конструкция комплексного роста Маслова [30–33] (см. также [34, 35]).

Основным моментом этой теории является тот факт, что задача построения квазиклассических асимптотик  $\Psi_E$  в спектральных задачах как для скалярных, так и для матричных  $\hbar^{-1}$ - (псевдо) дифференциальных операторов ( $E$  – спектральный параметр) сводится к построению геометрических объектов в  $2n$ -мерном фазовом пространстве – семействе лагранжевых многообразий  $\Lambda^k(E)$  с комплексным ростком  $r^n(E)$ .  $\Lambda^k(E)$  порождаются решениями классической системы Гамильтона и имеют размерность  $0 \leq k < n$ . В случае финитных движений  $\Lambda^k(E)$  известны как изотропные неполномерные лагранжевы торы. Комплексный росток  $r^n(E)$  порождается специальным набором  $n$  линейно независимых комплексных решений системы в вариациях – линеаризации исходной гамильтоновой системы в окрестности  $\Lambda^k(E)$ .

Заметим, что задача отыскания семейства изотропных многообразий с комплексным ростком – отдельная, сама по себе достаточно сложная задача. В частности, было выяснено [32, 33], что вопрос существования комплексного ростка эквивалентен орбитальной устойчивости многообразий  $\Lambda^k(E)$  (см. также [36, 37]) и для случая  $k = 1$  он решается в рамках теории Флоке для гамильтоновых систем. При  $k \geq 2$  вопрос построения  $r^n(E)$ , естественно связанный с многомерным аналогом теории Флоке, исследован еще слабо (подробнее об этом см. в [33, 38]).

Из семейства изотропных торов с комплексным ростком  $[\Lambda^k(E), r^n(E)]$  условиями квантования типа Бора–Зоммерфельда [31, 33] отбирается дискретный набор  $[\Lambda^k(E_N), r^n(E_N)]$ , который порождает спектральную серию  $(\Psi_{E_N}, E_N(\hbar), \hbar \rightarrow 0)$ . Здесь  $N$  – набор квантовых чисел, а  $E_N(\hbar)$  – собственные значения, отвечающие квазиклассическим собственным функциям  $\Psi_{E_N}$ . При этом важно иметь в виду, что в квазиклассическом подходе к спектральным квантовым задачам речь идет о построении лишь отдельных серий в той или иной области энергетического спектра  $E' \leq E_N(\hbar) \leq E''$ . Классификация спектральных серий порождается классификацией движений соответствующей неинтегрируемой классической системы по неполномерным лагранжевым торам  $\Lambda^k(E_N)$ , а нумерация уровней энергии  $E_N$  – условиями квантования этих движений.

Получаемые при этом квазиклассические асимптотики  $\Psi_{E_N}$  почти везде хорошо аппроксимируются функциями вида  $\Psi_{E_N} \sim \exp(iS/\hbar)\varphi$ , где, в отличие от обычного вещественного метода ВКБ, и мы подчеркиваем это особо, фаза  $S$  комплексна, причем,  $\text{Im } S \geq 0$ . В силу этого функции  $\Psi_{E_N}$  обладает следующим важным свойством: в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  они локальны в малой (порядка  $\hbar^{1/2}$ ) окрестности области «света», где  $\text{Im } S = 0$ . Эта область представляет собой проекцию семейства фазовых траекторий, образующих торы  $\Lambda^k(E_N)$ , на конфигурационное пространство классической системы. В дальнейшем волно-

вые функции  $\Psi_{E_N}$  будем называть стационарными траекторно-когерентными состояниями (ТКС), а соответствующее приближение в спектральных задачах квантовой механики – стационарным траекторно-когерентным приближением (ТК-приближением).

Настоящее пособие является второй частью книги [8] и непосредственно использует ее результаты. Поэтому система ссылок на разделы части I упрощена. Ссылки, например, (I.5.6) или I.5.6 означают формулу (5.6) или теорему (лемму) 5.6 части I. В тексте этого пособия используется сплошная нумерация разделов. При нумерации формул, теорем и лемм из данной части первое число указывает номер параграфа, а второе – порядковый номер формулы, теоремы, леммы. При нумерации следствий из теорем и лемм первое число указывает номер параграфа, второе – номер теоремы или леммы в этом параграфе и третье – номер собственно следствия. Для обозначения определений и замечаний нами используются символы  $\blacklozenge$  и  $\blacklozenge$ , соответственно.

Авторы признательны всем сотрудникам кафедры высшей математики и математической физики Томского политехнического университета и кафедры прикладной математики Московского института электроники и математики, кафедр теоретической физики и квантовой теории поля Томского государственного университета и особенно своим коллегам и соавторам: Кондратьевой М.Ф., Роговой А.М., Болтовскому Д.В., Евсеевичу А.А., Караваеву А.Г., Хозину С.Н., за плодотворное сотрудничество.



## ГЛАВА 1

# Квазиклассически сосредоточенные состояния релятивистских волновых уравнений

Настоящая глава посвящена квазиклассически сосредоточенным состояниям уравнения Дирака и Клейна–Гордона.

Напомним, что для релятивистской квантовой частицы в произвольном внешнем электромагнитном поле, описываемой уравнением Дирака с аномальным взаимодействием Паули [39], квазиклассические траекторно-когерентные состояния (ТКС) были построены в [40–42], а для частицы во внешних гравитационных и торсионных полях в [44]. Их характерное свойство заключается в том, что помимо условия когерентности по орбитальным переменным они удовлетворяют также следующему условию спиновой когерентности: *средние квантовомеханические спиновые операторы – псевдовектора поляризации Баргманна  $\hat{S}^\mu$  [45] – в пределе при  $\hbar \rightarrow 0$  являются решениями классического релятивистского уравнения движения спина – уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди [46].*

Отметим, что построение квазиклассических ТК-состояний квантовых систем основывается на новом квазиклассическом траекторно-когерентном представлении соответствующих гамильтонианов. Для скалярных квантовомеханических уравнений это представление неявным образом использовалось, по существу, в [47]. Для оператора Дирака оно впервые введено в [40, 41]. С точки зрения квазиклассических асимптотик, построенные в данной главе ТК-состояния удовлетворяют соответствующим эволюционным квантовомеханическим уравнениям с точностью до функций,  $L_2$ -норма которых имеет порядок  $O(\hbar^{3/2})$  при  $\hbar \rightarrow 0$  (mod  $O(\hbar^{3/2})$ ). Здесь также построены высшие приближения для траекторно-когерентных состояний оператора Дирака и Клейна–Гордона в произвольном внешнем поле – асимптотические решения этого уравнения с точностью до  $O(\hbar^{(N+1)/2})$ , где  $N$  – любое не зависящее от  $\hbar$  натуральное число;  $N = 3, 4, \dots$

В общей ситуации схема построения поправок к главному члену квазиклассической асимптотики хорошо известна [30]. Тем не менее, ее реализация для конкретных квантовых уравнений с произвольными электромагнитными потенциалами требует большого объема нетривиальных выкладок. В частности, удалось построить в виде асимптотического ряда по степеням  $\sqrt{\hbar}$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , унитарный (в любом порядке по  $\sqrt{\hbar}$ ) оператор, задающий переход в квазиклассическое траекторно-когерентное представление.

Для квазиклассического описания поведения квантовой частицы с учетом её спиновых свойств это позволило последовательно построить двухкомпонентную теорию, т.е. в явном виде выделить (в любом порядке по  $\hbar \rightarrow 0$ ) на подпространстве положительно-частотных решений уравнения Дирака гамильтониан, представляющий собой релятивистское обобщение оператора Паули [48]. Скалярная часть этого гамильтониана описывает квантовые флуктуации волнового пакета около положения частицы на классической траектории, а «векторная» – взаимодействие спина частицы с внешним полем и с квантовыми флуктуациями по орбитальным переменным.

Эта глава организована следующим образом. В разд. 1 дано определение и исследованы простейшие свойства квазиклассически сосредоточенных состояний уравнения Дирака с аномальным взаимодействием Паули. В разд. 2 и 3 построены с любой степенью точности по  $\sqrt{\hbar}$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , квазиклассические траекторно-когерентные состояния  $\Psi_\nu^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar)$  и асимптотика функции Грина  $G_D^{(N)}(\vec{x}, \vec{y}, t, s)$  в пространстве положительно-частотных квазиклассически сосредоточенных состояний и оператор  $\hat{\mathcal{K}}_D^{(N)}(t, \hbar)$ , задающий переход к квазиклас-

сическому траекторно-когерентному представлению. В разд. 4 показано, что использование квазиклассически сосредоточенных состояний позволило последовательно построить двухкомпонентную теорию, т.е. в явном виде выделить (в любом порядке по  $\hbar \rightarrow 0$ ) на подпространстве положительно-частотных решений уравнения Дирака гамильтониан  $\hat{\mathcal{H}}_D^{(N)}(t)$ , представляющий собой релятивистское обобщение гамильтониана Паули. Используя гамильтониан  $\hat{\mathcal{H}}_D^{(N)}(t)$ , удается выписать систему уравнений Гамильтона–Эренфеста, отвечающую уравнению Дирака и учитывающую моменты второго порядка. Кратко обсуждается связь полученных классических уравнений движения релятивистского заряда со спином  $1/2$  и известных уравнений, в частности уравнений Френкеля [49].

Разделы 5–8 посвящены квазиклассически сосредоточенным состояниям уравнения Клейна–Гордона. В разд 5 дано определение и исследованы основные свойства квазиклассически-сосредоточенных состояний уравнения Клейна–Гордона. Показано, что квазиклассическая сосредоточенность возможна только на классической траектории, отвечающей гамильтониану  $\lambda^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$ .

В разд. 6 и 7 в форме, удобной для расчета матричных элементов тока перехода, приведены конструкции квазиклассических ТКС  $\Psi_\nu^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar)$  уравнения Клейна–Гордона и оператора  $\hat{\mathcal{K}}_{\text{KG}}^{(N)}(t, \hbar)$ , задающего переход к квазиклассическому траекторно-когерентному представлению на подпространстве положительно-частотных (отрицательно-частотных) состояний (в любом порядке по  $\sqrt{\hbar}$ ). Заметим, что квазиклассические ТКС для уравнения Клейна–Гордона с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$  были построены ранее [47, 50]. В разд. 6 на пространстве положительно-частотных решений выделен гамильтониан одночастичной теории  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{KG}}^{(N)}(t, \hbar)$  и выписана соответствующая система Гамильтона–Эренфеста. Исследована связь оператора  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{KG}}^{(N)}(t, \hbar)$  с оператором  $\hat{\lambda}(t)$  [51], имеющим вейлевский символ  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t) = e\Phi(\vec{x}, t) + \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_0^2c^4}$ . В разд. 8 построены нерасплывающиеся волновые пакеты операторов Шрёдингера и Клейна–Гордона в полях с аксиальной симметрией.

Часть технических результатов вынесена в приложения.

## 1. Теорема о квазиклассически сосредоточенных состояниях уравнения Дирака

Рассмотрим релятивистскую частицу, описываемую уравнением Дирака с аномальным взаимодействием Паули

$$\hat{L}_D \Psi = 0, \quad \hat{L}_D = -i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}_D, \quad (1.1)$$

где гамильтониан  $\hat{\mathcal{H}}_D$  имеет вид [52]

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_D &= \hat{\mathcal{H}}_0 + (-i\hbar)\hat{\mathcal{H}}_1, \quad \hat{\mathcal{H}}_0 = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\mathcal{P}} \rangle + \rho_3 m_0 c^2 + e\Phi(\vec{x}, t), \\ \hat{\mathcal{H}}_1 &= \frac{ie_0(g-2)}{4m_0c} [\rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H}(\vec{x}, t) \rangle + \rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E}(\vec{x}, t) \rangle], \\ \vec{\alpha} &= \rho_1 \vec{\Sigma}, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad e_0 = -e, \\ \rho_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i\mathbb{I} \\ i\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  — матрицы Паули; 0 и  $\mathbb{I}$  — нулевая и единичная матрицы размера  $2 \times 2$ ;  $\vec{H}(\vec{x}, t) = \text{rot } \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)$  — напряженность магнитного поля;

$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\nabla\Phi(\vec{x}, t) - c^{-1}\partial_t\vec{A}(\vec{x}, t)$  — напряженность электрического поля;  $g$  — гироманнитное отношение.

Как и в нерелятивистском случае, будем предполагать, что электромагнитные потенциалы  $\Phi(\vec{x}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  — гладкие функции  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$  — растут вместе со своими производными при  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  не быстрее некоторой степени  $|\vec{x}|$  равномерно по  $t \in \mathbb{R}^1$ .

По аналогии с уравнением Шрёдингера дадим следующее определение квазиклассической сосредоточенности для уравнения Дирака:

◆ *Состояние  $\Psi$  назовем квазиклассически сосредоточенным на фазовой траектории  $z = Z(t) = (\vec{P}(t), \vec{X}(t))$  класса  $\mathbb{CS}_D(Z(t), N, \hbar)$ , т.е.  $\Psi \in \mathbb{CS}_D(Z(t), N)$ , если выполняются следующие условия:*

1)  $\hat{L}_D\Psi = 0$ ;

2) для волновой функции  $\Psi(\vec{x}, t, \hbar)$  в  $x$ -представлении и для волновой функции  $\tilde{\Psi}(\vec{p}, t, \hbar)$  в  $p$ -представлении существуют обобщенные пределы

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\Psi(\vec{x}, t, \hbar)|^2 = \delta(\vec{x} - \vec{X}(t)), \quad (1.3)$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\Psi(\vec{p}, t, \hbar)|^2 = \delta(\vec{p} - \vec{P}(t)); \quad (1.4)$$

3) существуют при  $\hbar \in [0, 1[$  квантовые моменты  $\Delta_\alpha^{\text{cl}}$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq N$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^6$ ,  $|\alpha| = \sum_{k=1}^6 \alpha_k$ ,  $j = \overline{1, 16}$ .

Здесь

$$\Delta_{\alpha, j}^{\text{cl}} = \langle \Psi | \Gamma_j \{ \Delta \hat{z} \}^\alpha | \Psi \rangle_D, \quad (1.5)$$

где  $\{ \Delta \hat{z} \}^\alpha$  — оператор с вейлевским символом  $(\Delta z)^\alpha$ ,  $\Delta z = z - Z(t)$ ,  $\langle | \rangle_D$  — скалярное произведение:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle_D = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \Psi_1^+(\vec{x}, t, \hbar) \Psi_2(\vec{x}, t, \hbar), \quad (1.6)$$

$\Gamma_j$  — какой-либо базис в пространстве матриц Дирака.

Справедлива следующая теорема (сравни с теоремой I.19.1).

**Теорема 1.1.** *Если  $\Psi(t)$  — квазиклассически сосредоточенное состояние класса  $\mathbb{CS}_D(Z(t), N)$ , то  $\vec{X}(t)$  и  $\vec{P}(t)$  являются решениями классической системы Гамильтона*

$$\begin{cases} \dot{\vec{p}} = -\lambda_{\vec{x}}^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t), \\ \dot{\vec{x}} = \lambda_{\vec{p}}^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t). \end{cases} \quad (1.7)$$

с функцией Гамильтона  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$  или  $\lambda^{(-)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$ , где

$$\begin{aligned} \lambda^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t) &= e\Phi(\vec{x}, t) \pm \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t), & \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t) &= \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m_0^2c^4}, \\ \lambda_{\vec{x}}^{(\pm)} &= e\Phi_{\vec{x}}(\vec{x}, t) - \langle \vec{\beta}^\pm, \vec{\mathcal{A}}_{\vec{x}}(\vec{x}, t) \rangle, & \lambda_{\vec{p}}^{(\pm)} &= \pm \frac{c^2\vec{p}}{\varepsilon} = c\vec{\beta}^\pm. \end{aligned} \quad (1.8)$$

**Доказательство.** 1. Рассмотрим спектральные свойства главного символа гамильтониана  $\hat{\mathcal{H}}_D$  — матрицы  $\mathcal{H}_0(\vec{p}, \vec{x}, t)$  (1.2),  $\vec{p} \in \mathbb{R}_p^3$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}_x^3$ . Уравнение

$$\det \|\mathcal{H}_0(\vec{p}, \vec{x}, t) - \lambda \mathbb{I}_{4 \times 4}\| = 0$$

имеет (см. свойство 2 Приложения Б) два собственных значения  $\lambda$  кратности, равной двум, при всех  $\vec{p} \in \mathbb{R}_p^3$ ,  $\vec{x} \in \mathbb{R}_x^3$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ ,

$$\begin{aligned} \lambda^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t) &= e\Phi(\vec{x}, t) \pm \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t), \\ \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t) &= \sqrt{c^2\vec{P}^2 + m_0^2c^4}, \quad \vec{P} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Отвечающие  $\lambda^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$  собственные векторы  $f_j^\pm(\vec{p}, \vec{x}, t)$ ,  $j = 1, 2$ , объединим в  $4 \times 2$ -матрицы  $\Pi_\pm(\vec{p}, \vec{x}, t)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\vec{p}, \vec{x}, t)\Pi_\pm(\vec{p}, \vec{x}, t) &= \lambda^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t)\Pi_\pm(\vec{p}, \vec{x}, t), \\ \Pi_+(\vec{p}, \vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m_0c^2)}} \begin{pmatrix} \varepsilon + m_0c^2 \\ c\langle\vec{\sigma}, \vec{P}\rangle \end{pmatrix}, \\ \Pi_-(\vec{p}, \vec{x}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + m_0c^2)}} \begin{pmatrix} c\langle\vec{\sigma}, \vec{P}\rangle \\ -m_0c^2 - \varepsilon \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

2. Функцию  $\Psi$  разложим по собственным векторам главного символа гамильтониана, взятым на траектории  $z = Z(t) = (\vec{P}(t), \vec{X}(t))$ :

$$\Psi(\vec{x}, t, \hbar) = N_\hbar \left[ \Pi_+(t)J^{(+)}(\vec{x}, t, \hbar) + \Pi_-(t)J^{(-)}(\vec{x}, t, \hbar) \right], \quad (1.11)$$

где  $\Pi_\pm(t) = \Pi_\pm(\vec{P}(t), \vec{X}(t), t)$ ,  $N_\hbar = \text{const}$ . Спиноры  $J^{(\pm)}$  представим в виде

$$J^{(\pm)}(\vec{x}, t, \hbar) = \begin{pmatrix} Q_1^{(\pm)}(\vec{x}, t, \hbar) \exp[i\Xi_1^{(\pm)}(\vec{x}, t, \hbar)] \\ Q_2^{(\pm)}(\vec{x}, t, \hbar) \exp[i\Xi_2^{(\pm)}(\vec{x}, t, \hbar)] \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

где  $\Xi_k^{(\pm)}$ ,  $Q_k^{(\pm)}$ ,  $k = 1, 2$ , – вещественные функции. Из условия (1.3), (1.4) следует, что, не уменьшая общности, можно положить

$$Q_k^{(\pm)}(\vec{x}, t, \hbar) = \left( \prod_{l=1}^3 a_l(\hbar) \right)^{-1/2} \rho_k^{(\pm)}(\vec{\xi}, t, \hbar), \quad \xi_j = \frac{\Delta x_j}{a_j(\hbar)}, \quad (1.13)$$

где  $a_j(\hbar)$  – некоторые неотрицательные функции  $\hbar$ , обладающие свойством

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} a_j(\hbar) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar}{a_j(\hbar)} = 0. \quad (1.14)$$

Из условия существования моментов  $\Delta_{0j}^{\text{cl}}$  следует, что

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} (\Xi_k^{(\pm)}(\vec{\xi}, t, \hbar) - \Xi_l^{(\pm)}(\vec{\xi}, t, \hbar)) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} (\Xi_k^{(\mp)}(\vec{\xi}, t, \hbar) - \Xi_l^{(\mp)}(\vec{\xi}, t, \hbar)) = 0,$$

$k, l = 1, 2$ . Поэтому

$$\Xi_k^{(\pm)}(\vec{\xi}, t, \hbar) = \Phi_0(\vec{\xi}, t, \hbar) + \Phi_k^{(\pm)}(\vec{\xi}, t, \hbar), \quad k = 1, 2, \quad (1.15)$$

где  $\Phi_k^{(\pm)}(\vec{\xi}, t, \hbar)$  зависят от  $\hbar$  регулярно.

Аналогичные рассуждения для волновой функции в  $p$ -представлении приводят к

$$\tilde{J}^{(\pm)}(\vec{p}, t, \hbar) = \left( \prod_{l=1}^3 b_l(\hbar) \right)^{-1/2} \begin{pmatrix} \tilde{\rho}_1^{(\pm)}(\vec{\eta}, t, \hbar) \exp[-i\tilde{\Xi}_1^{(\pm)}(\vec{\eta}, t, \hbar)] \\ \tilde{\rho}_2^{(\pm)}(\vec{\eta}, t, \hbar) \exp[-i\tilde{\Xi}_2^{(\pm)}(\vec{\eta}, t, \hbar)] \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

$$\eta_j = \frac{\Delta p_j}{b_j(\hbar)}, \quad \lim_{\hbar \rightarrow 0} b_j(\hbar) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar}{b_j(\hbar)} = 0, \quad j = \overline{1, 3},$$

и

$$\tilde{\Xi}_k^{(\pm)}(\vec{\eta}, t, \hbar) = \tilde{\Phi}_0(\vec{\eta}, t, \hbar) + \tilde{\Phi}_k^{(\pm)}(\vec{\eta}, t, \hbar), \quad k = 1, 2, \quad (1.17)$$

где  $\Phi_k^{(\pm)}(\vec{\eta}, t, \hbar)$  зависят от  $\hbar$  регулярно.

Как и в нерелятивистском случае, из условия

$$\begin{aligned} \|\Delta x_j \Psi\| &= \|\Delta \hat{x}_j \tilde{\Psi}\| \sim a_j(\hbar), \\ \|\Delta \hat{p}_j \Psi\| &= \|\Delta p_j \tilde{\Psi}\| \sim b_j(\hbar), \end{aligned} \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.18)$$

следует

$$0 \leq \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar}{a_j(\hbar)b_j(\hbar)} < \infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.19)$$

а также

$$\begin{aligned} \Phi_0(\vec{\xi}, t, \hbar) &= \Phi_0(t, \hbar) + \frac{\langle \vec{P}(t), \Delta \vec{x} \rangle + S(\vec{\xi}, t, \hbar)}{\hbar}, \\ \tilde{\Phi}_0(\vec{\eta}, t, \hbar) &= \tilde{\Phi}_0(t, \hbar) + \frac{\langle \vec{X}(t), \Delta \vec{p} \rangle + \tilde{S}(\vec{\eta}, t, \hbar)}{\hbar}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

и

$$\begin{aligned} S(\vec{\xi}, t, \hbar) &\sim \tilde{S}(\vec{\eta}, t, \hbar) \sim C(\hbar), \\ C(\hbar) &= \min \{a_1(\hbar)b_1(\hbar), a_2(\hbar)b_2(\hbar), a_3(\hbar)b_3(\hbar)\}. \end{aligned}$$

3. Найдем в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  среднее значение оператора  $\hat{L}_D$  по состоянию (1.1). С учетом (1.8) и (1.10) получим

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \left( \lim_{\hbar \rightarrow 0} \hbar \frac{d\Phi_0(t, \hbar)}{dt} - \langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle + \lambda^{(+)}(t) \right) \lim_{\hbar \rightarrow 0} \|J^{(+)}(\vec{x}, t, \hbar)\|^2 + \\ &+ \left( \lim_{\hbar \rightarrow 0} \hbar \frac{d\Phi_0(t, \hbar)}{dt} - \langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle + \lambda^{(-)}(t) \right) \lim_{\hbar \rightarrow 0} \|J^{(-)}(\vec{x}, t, \hbar)\|^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Выражения в круглых скобках в (1.21) не могут быть равными нулю одновременно, следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi_0(t, \hbar) &= \frac{1}{\hbar} S_0(t, \hbar), \\ S_0(t, 0) &= \int_0^t [\langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle - \lambda^{(\pm)}(t)] dt, \\ \lim_{\hbar \rightarrow 0} \|J^{(\mp)}(\vec{x}, t, \hbar)\| &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

4. Положим для определенности

$$S_0(t, 0) = \int_0^t (\langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle - \lambda^{(+)}(t)) dt, \quad \lim_{\hbar \rightarrow 0} \|J^{(-)}(\vec{x}, t, \hbar)\| = 0. \quad (1.23)$$

Из (1.3) следует, что  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \|J^{(+)}(\vec{x}, t, \hbar)\| = 1$ . Тогда, усредняя оператор  $\hat{L}_D$  по состоянию (1.9) с учетом (1.23) в старших порядках по  $\hbar$ , получим

$$0 \equiv \left( \frac{dS(t, \hbar)}{dt} + \lambda^{(+)}(t) - \langle \dot{\vec{X}}(t), \vec{P}(t) \rangle \right)_{(+)}^{(+)} \sigma^{\text{cl}}(t, \hbar) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=1}^3 \left\{ \begin{aligned} & \left( \begin{smallmatrix} (+) \\ (+) \end{smallmatrix} \right) \sigma_{\xi_k}^{\text{cl}}(t, \hbar) a_k(\hbar) \left[ \dot{P}_k - e\Phi_{x_k} - \frac{c^2}{\varepsilon(t)} \left\langle \vec{\mathcal{P}}, \left( -\frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}}_{,x_k} \right) \right\rangle \right] + \\ & \left( \begin{smallmatrix} (+) \\ (+) \end{smallmatrix} \right) \sigma_{\eta_k}^{\text{cl}}(t, \hbar) b_k(\hbar) \left[ \dot{X}_k - \frac{c^2}{\varepsilon(t)} \mathcal{P}_k \right] \end{aligned} \right\} + \dots \quad (1.24)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
& \left( \begin{smallmatrix} (+) \\ (+) \end{smallmatrix} \right) \sigma^{\text{cl}}(t, \hbar) = \|J^{(+)}(\vec{x}, t, \hbar)\|^2; \\
& \left( \begin{smallmatrix} (+) \\ (+) \end{smallmatrix} \right) \sigma_{\xi_k}^{\text{cl}}(t, \hbar) = \frac{1}{a_k(\hbar)} \int (J^{(+)}(\vec{x}, t, \hbar))^+ \Delta x_k J^{(+)}(\vec{x}, t, \hbar) d^3x; \\
& \left( \begin{smallmatrix} (+) \\ (+) \end{smallmatrix} \right) \sigma_{\eta_k}^{\text{cl}}(t, \hbar) = \frac{1}{b_k(\hbar)} \int (J^{(+)}(\vec{x}, t, \hbar))^+ \Delta \hat{p}_k J^{(+)}(\vec{x}, t, \hbar) d^3x.
\end{aligned} \quad (1.25)$$

Мы учли, что при выполнении условия (1.23) функции  $\left( \begin{smallmatrix} (-) \\ (+) \end{smallmatrix} \right) \sigma^{\text{cl}}$ ,  $\left( \begin{smallmatrix} (+) \\ (-) \end{smallmatrix} \right) \sigma^{\text{cl}}$  и  $\left( \begin{smallmatrix} (-) \\ (-) \end{smallmatrix} \right) \sigma^{\text{cl}}$  имеют более низкий порядок малости по  $\hbar$ , чем функции (1.25). В силу независимости функций  $\left( \begin{smallmatrix} (+) \\ (+) \end{smallmatrix} \right) \sigma_{\xi_k}^{\text{cl}}(t, \hbar)$  и  $\left( \begin{smallmatrix} (+) \\ (+) \end{smallmatrix} \right) \sigma_{\eta_k}^{\text{cl}}(t, \hbar)$  из (1.24) следует, что

$$\begin{aligned}
& \dot{P}_k - e\Phi_{x_k} - \frac{c^2}{\varepsilon(t)} \left\langle \vec{\mathcal{P}}, \left( -\frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}}_{,x_k} \right) \right\rangle = 0; \\
& \dot{X}_k - \frac{c^2}{\varepsilon(t)} \mathcal{P}_k = 0
\end{aligned}$$

для всех  $k = 1, 2, 3$ . Последние уравнения эквивалентны системе Гамильтона (1.7) для  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$ . Если в (1.23) заменить  $(+) \rightarrow (-)$  и  $(-) \rightarrow (+)$ , то в выражении (1.7)  $\lambda^{(+)} \rightarrow \lambda^{(-)}$ . Таким образом, теорема доказана.

**Теорема 1.2.** Если  $\Psi(t)$  – квазиклассически сосредоточенное состояние класса  $\mathbb{CS}_D(Z(t), N)$ , то средние квантово-механические спиновые операторы – псевдовектора поляризации Баргманна  $\hat{S}^\mu$  [45] – в пределе при  $\hbar \rightarrow 0$  являются решениями классического релятивистского уравнения движения спина – уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди [46].

**Доказательство.** Для определенности будем предполагать, что  $\vec{X}(t)$  и  $\vec{P}(t)$  удовлетворяют системе Гамильтона (1.7) и справедливо предположение (1.23). Обозначим

$$\vec{\zeta}(t) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \int (J^{(+)}(\vec{x}, t, \hbar))^+ \vec{\sigma} J^{(+)}(\vec{x}, t, \hbar) d\vec{x}, \quad (1.26)$$

$$a^\mu(t) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \Psi(\vec{x}, t, \hbar) | \hat{S}^\mu | \Psi(\vec{x}, t, \hbar) \rangle_D, \quad (1.27)$$

где

$$\hat{S}^\mu = (\hat{S}_0, \hat{\vec{S}}), \quad \hat{S}_0 = \frac{1}{m_0 c} \langle \vec{\Sigma}, \hat{\vec{P}} \rangle, \quad \hat{\vec{S}} = \rho_3 \vec{\Sigma} + \frac{1}{m_0 c} \rho_1 \hat{\vec{P}}. \quad (1.28)$$

Тогда с учетом (1.23)

$$a_0(t) = \gamma \langle \vec{\zeta}(t), \vec{\beta} \rangle, \quad \vec{a}(t) = \vec{\zeta}(t) + \frac{\gamma \vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\zeta}(t), \vec{\beta} \rangle, \quad a_0(t) = \langle \vec{\beta}, \vec{a}(t) \rangle. \quad (1.29)$$

Поведение средних  $a^\mu(t)$  во времени определяется уравнениями Гейзенберга

$$\frac{da^\mu}{dt} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \Psi | \left\{ \frac{\partial \hat{S}^\mu}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_D, \hat{S}^\mu] \right\} | \Psi \rangle. \quad (1.30)$$

Прокоммутировав оператор  $\hat{S}^\mu$  с  $\hat{\mathcal{H}}_D$ , получим (см., например, [52] и приложение Б)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{S}_0}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_D, \hat{S}_0] &= \frac{e}{m_0 c} \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle - \\ &- \frac{e_0(g-2)}{2(m_0 c^2)^2} (\rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \times \hat{\vec{P}} \rangle + \rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \times \hat{\vec{P}} \rangle) + O(\hbar), \\ \frac{\partial \hat{\vec{S}}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_D, \hat{\vec{S}}] &= \frac{e}{m_0 c} (\rho_1 \vec{E} + \vec{H} \times \vec{\Sigma}) - \\ &- \frac{e_0(g-2)}{2m_0 c^2} (\rho_1 \vec{E} + \vec{H} \times \vec{\Sigma} - \rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle \frac{\hat{\vec{P}}}{m_0 c} + \frac{\hat{\vec{P}}}{m_0 c} \rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle) + O(\hbar). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Подставив (1.31) в (1.30), с учетом соотношений (Б.6)–(Б.14) получим (см. приложение Б)

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{a}}{dt} &= \frac{ge}{2m_0 c \gamma} (\vec{E} \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle + \vec{a} \times \vec{H}) + \\ &+ \frac{(g-2)e\gamma}{2m_0 c} \vec{\beta} (\langle \vec{\beta}, \vec{a} \times \vec{H} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{E} \rangle). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Переходя от (1.32) с учетом (1.29) к уравнению на  $a^\mu$ , получим

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = \frac{eg}{2m_0 c} F^{\mu\nu} a_\nu + \frac{(g-2)e}{2m_0 c^3} \dot{x}^\mu \dot{x}_\nu F^{\nu\alpha} a_\alpha, \quad (1.33)$$

где  $F^{\mu\nu}$  – тензор напряженности электромагнитного поля,  $\tau$  – собственное время. Уравнение (1.33) – уравнение Баргманна–Мишеля–Телегди. Таким образом, теорема доказана.

## 2. Переход к двухкомпонентной теории

Каждому собственному значению  $\lambda^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$  отвечает своя система Гамильтона (1.7). Поставим для нее задачу Коши

$$\vec{x}_\pm(0, z_0) = \vec{x}_0, \quad \vec{p}_\pm(0, z_0) = \vec{p}_0, \quad z_0 = (\vec{p}_0, \vec{x}_0) \in \mathbb{R}_{px}^6. \quad (2.1)$$

Всюду в дальнейшем ограничимся «положительно-частотными» (отвечающими собственному значению  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$ ) решениями, и там, где это не приводит к недоразумению, индекс  $+$  у функций  $\vec{x}_+, \dots$ , отвечающих  $\lambda^{(+)}$ , игнорируется, например  $\vec{X}_+(t, z_0) = \vec{X}(t, z_0)$ ,  $\lambda^{(+)}(t) = \lambda(t)$ .

В нерелятивистской теории (см. гл. «КСС уравнения Шрёдингера» части I) каждой траектории системы Гамильтона (1.7) отвечал класс траекторно сосредоточенных функций  $\mathcal{P}_\hbar^t$

$$\mathcal{P}_\hbar^t = \mathcal{P}_\hbar^t(Z(t), S(t)) = \left\{ \Phi | \Phi(\vec{x}, t, \hbar) = \varphi \left( \frac{\Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}}, t, \hbar \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (S(t) + \langle \vec{P}(t), \Delta \vec{x} \rangle) \right] \right\}, \quad (2.2)$$

где функция  $\varphi(\vec{\xi}, t, \hbar)$  принадлежит пространству Шварца  $\mathbb{S}$  по переменной  $\vec{\xi}$ , а  $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{X}(t)$ . Квазиклассические асимптотики уравнения Шрёдингера принадлежали классу  $\mathcal{P}_\hbar^t$ . Для их построения наряду с классом  $\mathcal{P}_\hbar^t$  использовался класс  $\mathcal{C}_\hbar^t \subset \mathcal{P}_\hbar^t$ :

$$\mathcal{C}_\hbar^t = \mathcal{C}_\hbar^t(Z(t), S(t)) = \left\{ \Phi | \Phi(\vec{x}, t, \hbar) = \varphi\left(\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{\hbar}}, t\right) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S(t) + \langle \vec{P}(t), \Delta\vec{x} \rangle)\right] \right\}, \quad (2.3)$$

в котором, в отличие от (2.2) функция  $\varphi(\vec{\xi}, t)$ , не зависит от  $\hbar$ .

Как и для уравнения Шрёдингера, дадим следующее определение.

◆ *Спинор  $\mathcal{U}(\vec{x}, t, \hbar)$  называется траекторно сосредоточенным класса  $\mathcal{JP}_\hbar^t$  ( $\mathcal{JC}_\hbar^t$ ), если его можно представить в виде*

$$\mathcal{U}(\vec{x}, t, \hbar) = \mathcal{U}(t)\Phi(\vec{x}, t, \hbar), \quad (2.4)$$

где  $\mathcal{U}(t)$  – спинор,  $\mathcal{U}^+(t)\mathcal{U}(t) = 1$ , а  $\Phi(\vec{x}, t, \hbar) \in \mathcal{P}_\hbar^t$  ( $\Phi(\vec{x}, t, \hbar) \in \mathcal{C}_\hbar^t$ ).

Каждой траектории системы Гамильтона (1.7) сопоставим систему в вариациях

$$\begin{cases} \dot{\vec{W}}_\pm = -\lambda_{xp}^{(\pm)}(t)\vec{W}_\pm - \lambda_{xx}^{(\pm)}(t)\vec{Z}_\pm, \\ \dot{\vec{Z}}_\pm = \lambda_{pp}^{(\pm)}(t)\vec{W}_\pm + \lambda_{px}^{(\pm)}(t)\vec{Z}_\pm. \end{cases} \quad (2.5)$$

Начальные условия для системы (2.5) выбираются так же, как и в скалярном случае (см. (I.10.9)). Укажем явный вид матричных блоков  $3 \times 3$  в (2.5)

$$\begin{aligned} \lambda_{xx}^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t) &= \left\| \left( e(\Phi_{x_k x_j} - \langle \vec{\beta}^\pm, \vec{\mathcal{A}}_{x_k x_j} \rangle) - \frac{e^2}{c^2} \langle \vec{\mathcal{A}}_{x_k}, \lambda_{pp}^{(\pm)} \vec{\mathcal{A}}_{x_j} \rangle \right) \right\|, \\ \lambda_{px}^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t) &= (\lambda_{xp}^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t))^\top = -\frac{e}{c} \lambda_{pp}^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t) \| \mathcal{A}_{x_j}^k(\vec{x}, t) \|, \\ \lambda_{pp}^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, t) &= \pm \frac{c^2}{\varepsilon} \| (\delta_{jk} - \beta_k^\pm \beta_j^\pm) \|, \end{aligned}$$

которые вычислены в точках  $z = Z^\pm(t, z_0)$  фазовой траектории.

Проквантуем классическую систему (1.3) методом комплексного роста так же, как и для нерелятивистской классической системы (см. часть I), т.е. сопоставим произвольной (но фиксированной) траектории классической частицы  $z = Z(t, z_0)$  полный набор функций вида

$$|\nu, t\rangle = \prod_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{\nu_k!}} (\hat{a}_k^+(t))^{\nu_k} |0, t\rangle, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} |0, t\rangle &= \frac{N_\hbar}{\sqrt{J(t, z_0)}} \exp\left[\frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, t)\right], \\ S(\vec{x}, t) &= \int_0^t [\langle \dot{\vec{X}}(t), \vec{P}(t) \rangle - \lambda^{(+)}(t)] dt + \langle \vec{P}(t), \Delta\vec{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta\vec{x}, Q(t) \Delta\vec{x} \rangle, \end{aligned}$$

$N_\hbar$ ,  $J(t)$ ,  $\hat{a}^+(t)$  определены в (I.11.4), (I.11.5), соответственно. Нетрудно установить, что функции (2.6) удовлетворяют уравнению типа Шрёдингера

$$\{-i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}(t)\}\Psi = 0, \quad (2.7)$$



где

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(t) = \lambda(t) - \langle \dot{\vec{P}}(t), \Delta \vec{x} \rangle + \langle \dot{\vec{X}}(t), \Delta \vec{p} \rangle + \frac{1}{2} [ \langle \Delta \vec{x}, \lambda_{xx}^{(+)}(t) \Delta \vec{x} \rangle + \langle \Delta \vec{x}, \lambda_{xp}^{(+)}(t) \Delta \vec{p} \rangle + \\ + \langle \Delta \vec{p}, \lambda_{px}^{(+)}(t) \Delta \vec{x} \rangle + \langle \Delta \vec{p}, \lambda_{pp}^{(+)}(t) \Delta \vec{p} \rangle ] = \lambda^{(+)}(t) + \hat{\delta}^1 \lambda^{(+)}(t) + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \lambda^{(+)}(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Система скалярных функций (2.6) полна в  $L_2(\mathbb{R}_x^3)$ :

$$\langle t, \nu' | \nu, t \rangle = \delta_{\nu' \nu}; \quad \sum_{|\nu|=0}^{\infty} |\nu, t \rangle \langle t, \nu | = 1.$$

Следовательно, функции  $|\nu, t \rangle$  (2.6) образуют базис в пространстве траекторно сосредоточенных функций, причем коэффициенты разложения любой функции  $\Phi \in \mathcal{C}_h^t$

$$\Phi(\vec{x}, t, \hbar) = \sum_{|\nu|=0}^{\infty} C_\nu(t) |\nu, t \rangle$$

не зависят от  $\hbar$ .

Так как собственные векторы (1.10) матрицы  $\mathcal{H}_0(\vec{p}, \vec{x}, t)$  образуют ортонормированный базис в  $\mathbb{C}^4$  (см. Приложение Б):

$$\begin{aligned} \Pi_{\pm}^+(\vec{p}, \vec{x}, t) \Pi_{\pm}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \mathbb{I}_{2 \times 2}, \quad \Pi_{\pm}^+(\vec{p}, \vec{x}, t) \Pi_{\mp}(\vec{p}, \vec{x}, t) = 0, \\ \sum_{k=\pm} \Pi_k(\vec{p}, \vec{x}, t) \Pi_k^+(\vec{p}, \vec{x}, t) = \mathbb{I}_{4 \times 4}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

то решение уравнения (1.1) будем искать в виде

$$\Psi_{\nu+}^{(0)}(\vec{x}, t, \hbar) = (\Pi_+(t), \Pi_-(t)) \begin{pmatrix} \mathcal{U}(\vec{x}, t, \hbar) \\ \mathcal{V}(\vec{x}, t, \hbar) \end{pmatrix} = \Pi_+ \mathcal{U} + \Pi_- \mathcal{V}, \quad \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{JP}_h^t, \quad (2.10)$$

где матрицы (1.4) вычислены в точке  $z(t, z_0)$ , а неизвестные двухкомпонентные спиноры  $\mathcal{U}(\vec{x}, t, \hbar)$  и  $\mathcal{V}(\vec{x}, t, \hbar)$  подлежат определению.

◇ В силу определения траекторно сосредоточенных спиноров (2.4) на классе функций (2.10) относительно нормы, задаваемой скалярным произведением (1.6), справедливы все оценки, полученные в разд. «Траекторно сосредоточенные функции» части I.

Подставим функцию (2.10) в (1.1) и разложим полученные выражения по собственным векторам (1.4) с учетом равенств (см. Приложение Б)

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{\pm}(t) &= \frac{i}{2} \Pi_{\pm}(t) \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \mp \frac{\gamma}{2} \Pi_{\mp}(t) \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{\beta}} \rangle \right), \\ \rho_1 \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \Pi_{\pm}(t) &= \pm \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \Pi_{\pm}(t) + \Pi_{\mp}(t) \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \right), \\ \rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle \Pi_{\pm}(t) &= -\Pi_{\pm}(t) \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E} \rangle \mp i \Pi_{\mp}(t) \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle \right), \\ \rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle \Pi_{\pm}(t) &= \mp \Pi_{\pm}(t) \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle \right) + \langle \vec{\beta}, \vec{H} \rangle \Pi_{\mp}(t). \end{aligned}$$

Здесь  $c\vec{\beta} = \dot{\vec{X}}(t, z_0)$ ,  $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \beta^2}$ . В результате получим

$$\begin{aligned}
(-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}_D)\Psi_\nu = & \Pi_+ \left\{ \left[ -i\hbar\partial_t + \lambda^{(+)}(t) + e\Delta\Phi + c\langle\vec{\beta}, \Delta\hat{\vec{P}}\rangle + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \left( \langle\vec{\sigma}, \vec{H}\rangle - \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E}\rangle - \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, \vec{H}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right) \right] \mathcal{U}(\vec{x}, t) + \right. \\
& + \left[ -\frac{i\hbar\gamma}{2} \left( \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1}\langle\vec{\sigma}, \dot{\vec{\beta}}\rangle \right) + c \left( \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, \Delta\hat{\vec{P}}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle\vec{\sigma}, \Delta\hat{\vec{P}}\rangle \right) - \right. \\
& \left. - \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \left( i\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, \vec{E}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} + i\gamma^{-1}\langle\vec{\sigma}, \vec{E}\rangle + \langle\vec{\beta}, \vec{H}\rangle \right) \right] \mathcal{V}(\vec{x}, t) \left. \right\} + \\
& + \Pi_- \left\{ \left[ -i\hbar\partial_t + \lambda^{(-)}(t) + e\Delta\Phi - c\langle\vec{\beta}, \Delta\hat{\vec{P}}\rangle + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \left( -\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E}\rangle - \langle\vec{\sigma}, \vec{H}\rangle + \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, \vec{H}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right) \right] \mathcal{V}(\vec{x}, t) + \right. \\
& + \left[ \frac{i\hbar\gamma}{2} \left( \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1}\langle\vec{\sigma}, \dot{\vec{\beta}}\rangle \right) + c \left( \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, \Delta\hat{\vec{P}}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle\vec{\sigma}, \Delta\hat{\vec{P}}\rangle \right) - \right. \\
& \left. - \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \left( -i\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, \vec{E}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} - i\gamma^{-1}\langle\vec{\sigma}, \vec{E}\rangle + \langle\vec{\beta}, \vec{H}\rangle \right) \right] \mathcal{U}(\vec{x}, t) \left. \right\}, \quad (2.11)
\end{aligned}$$

где  $\Delta\Phi = \Phi(\vec{x}, t) - \Phi(\vec{X}(t, z_0), t)$ ;  $\Delta\hat{\vec{P}} = \hat{\vec{P}} - \vec{P}(t)$ .

Преобразуем полученное уравнение, раскладывая стоящие в нем выражения в ряд Тейлора по операторам  $\Delta\vec{x}$  и  $\Delta\hat{\vec{p}}$  с учетом того, что при  $\hbar \rightarrow 0$

$$\Delta\vec{x} = \hat{O}(\sqrt{\hbar}), \quad \Delta\hat{\vec{p}} = \hat{O}(\sqrt{\hbar}), \quad (-i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}) = \hat{O}(\hbar),$$

на классе функций  $\mathcal{JP}_\hbar^t$ . Обозначим  $\hat{\vec{P}}_1 = \hat{\delta}\vec{P}(t) = \Delta\hat{\vec{p}} - (e/c)d^1\vec{A}(t)$ ,

$$\begin{aligned}
\hat{R}^{(N)} = & \frac{i\hbar\gamma}{2} \left( \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \frac{\langle\vec{\sigma}, \dot{\vec{\beta}}\rangle}{\gamma} \right) + c \left( \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1\rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle\vec{\sigma}, \hat{\vec{P}}_1\rangle \right) - \\
& - \sum_{k=2}^{N+2} \frac{e}{k!} \left( \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, d^k\vec{A}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle\vec{\sigma}, d^k\vec{A}\rangle \right) - \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left( -i\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, d^k\vec{E}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \right. \\
& \left. - i\gamma^{-1}\langle\vec{\sigma}, d^k\vec{E}\rangle + \langle\vec{\beta}, d^k\vec{H}\rangle \right) + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}), \quad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{M}}^{(N)} = & 2\varepsilon(t) - 2c\langle\vec{\beta}, \vec{P}_1\rangle + (-i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}) - \frac{1}{2}\langle\hat{\vec{P}}_1, \lambda_{pp}^{(+)}\hat{\vec{P}}_1\rangle + \\
& + \sum_{k=3}^{N+2} \frac{e}{k!} (d^k\Phi + \langle\vec{\beta}, d^k\vec{A}\rangle) + e\langle\vec{\beta}, d^2\vec{A}\rangle + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \\
& - \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left( -\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta} \times d^k\vec{E}\rangle - \langle\vec{\sigma}, d^k\vec{H}\rangle + \right. \\
& \left. + \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle \frac{\langle\vec{\beta}, d^k\vec{H}\rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right) + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}). \quad (2.13)
\end{aligned}$$

Тогда уравнение (2.12) преобразуется к виду

$$(-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}_D)\Psi_\nu = \Pi_+ \left\{ \left[ -i\hbar\partial_t + \hat{\lambda} - \frac{1}{2}\langle\hat{\vec{P}}_1, \lambda_{pp}^{(+)}\hat{\vec{P}}_1\rangle + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \sum_{k=3}^{N+2} \frac{e}{k!} (d^k \Phi - \langle \vec{\beta}, d^k \vec{\mathcal{A}} \rangle) - \\
& - \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \sum_{k=0}^N \left( \langle \vec{\sigma}, d^k \vec{H} \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times d^k \vec{E} \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, d^k \vec{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right) \mathcal{U}(\vec{x}, t) + \\
& + (\hat{R}^{(N)})^+ \mathcal{V}(\vec{x}, t) \} + \Pi_- [\hat{\mathcal{M}}^{(N)} \mathcal{V}(\vec{x}, t) + \hat{R}^{(N)} \mathcal{U}(\vec{x}, t)] + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}).
\end{aligned}$$

Так как собственные векторы главного символа гамильтониана  $\hat{\mathcal{H}}_D$ , определяющие матрицы  $\Pi_+(t)$  и  $\Pi_-(t)$ , линейно независимы в  $\mathbb{C}^4$ , то из (2.10) найдем

$$\mathcal{V}(\vec{x}, t) = -\{\hat{\mathcal{M}}^{(N)}\}^{-1} \hat{R}^{(N)} \mathcal{U}^{(N)}(\vec{x}, t), \quad (2.14)$$

$$(-i\hbar\partial_t + \hat{F}^{(N)}) \mathcal{U}^{(N)}(\vec{x}, t) = 0, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
\hat{F}^{(N)} &= \hat{\lambda} - \frac{1}{2} \langle \hat{\vec{\mathcal{P}}}_1, \lambda_{pp}^{(+)} \hat{\vec{\mathcal{P}}}_1 \rangle + \sum_{k=3}^{N+2} \frac{e}{k!} (d^k \Phi - \langle \vec{\beta}, d^k \vec{\mathcal{A}} \rangle) + \\
& + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left( \langle \vec{\sigma}, d^k \vec{H} \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times d^k \vec{E} \rangle - \right. \\
& \left. - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, d^k \vec{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right) - \{\hat{R}^{(N)}\}^+ \{\hat{\mathcal{M}}^{(N)}\}^{-1} \hat{R}^{(N)} + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}). \quad (2.16)
\end{aligned}$$

Оператор  $(\hat{\mathcal{M}}^{(N)})^{-1}$ , обратный оператору (2.13), найдем из тождества (I.16.7), положив в нем  $\hat{B} = \hat{\mathcal{M}} - 2\varepsilon$ ,  $\hat{A} = 2\varepsilon$ . Тогда

$$\frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}^{(N)} = -\{\hat{\mathcal{M}}^{(N)}\}^{-1} \hat{R}^{(N)} = \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^{N+2} \hbar^{k/2} \hat{Q}_k + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}), \quad (2.17)$$

где

$$\sqrt{\hbar} \hat{Q}_1 = c \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \hat{\vec{\mathcal{P}}}_1 \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \hat{\vec{\mathcal{P}}}_1 \rangle \right), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
\hbar \hat{Q}_2 &= -\frac{e}{2} \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, d^2 \vec{\mathcal{A}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, d^2 \vec{\mathcal{A}} \rangle \right) + \frac{i\gamma\hbar}{2} \left( \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{\beta}} \rangle + \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right) - \\
& - \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \left[ i \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + i\gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{E}(t) \rangle - \langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle \right] - \frac{c\sqrt{\hbar}}{\varepsilon} \langle \vec{\beta}, \hat{\vec{\mathcal{P}}}_1 \rangle \hat{Q}_1
\end{aligned}$$

и при  $k > 2$

$$\begin{aligned}
\hbar^{k/2} \hat{Q}_k &= -\frac{e}{k!} \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, d^k \vec{\mathcal{A}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, d^k \vec{\mathcal{A}} \rangle \right) + \\
& + \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \frac{1}{(k-2)!} \left( \langle \vec{\beta}, d^k \vec{H} \rangle - i \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, d^{k-2} \vec{E} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - i\gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, d^{k-2} \vec{E} \rangle \right) - \\
& - \frac{c}{\varepsilon} \langle \vec{\beta}, \hat{\vec{\mathcal{P}}}_1 \rangle \hat{Q}_{k-1} + \left[ e \langle \vec{\beta}, d^2 \vec{\mathcal{A}} \rangle + (-i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}) - \right. \\
& - \frac{1}{2} \langle \hat{\vec{\mathcal{P}}}_1, \lambda_{pp}^{(+)} \hat{\vec{\mathcal{P}}}_1 \rangle + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{H}(t) \rangle - \right. \\
& \left. \left. - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E}(t) \rangle \right) \right] \frac{\hbar^{(k-2)/2}}{2\varepsilon} \hat{Q}_{k-2} +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{n=3}^{k-1} \left[ \frac{e}{n!} (d^n \Phi + \langle \vec{\beta}, d^n \vec{A} \rangle) + \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \frac{1}{(n-2)!} \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times d^{n-2} \vec{E} \rangle + \langle \vec{\sigma}, d^{n-2} \vec{H} \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, d^{n-2} \vec{H} \rangle}{1+\gamma^{-1}} \right) \right] \frac{\hbar^{(k-n)/2}}{2\varepsilon} \hat{Q}_{k-n}.$$

С учетом (2.13)–(2.16) оператор  $\hat{F}^{(N)}$  представим в виде

$$\hat{F}^{(N)} = \hat{F}_0 + \sqrt{\hbar} \hat{F}_1^{(N)}, \quad \hat{F}_1^{(0)} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \hat{F}_0 = & \hat{\lambda}(t) + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1+\gamma^{-1}} - \frac{\hbar e c}{2\varepsilon} \left( \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{H}(t)) \rangle}{1+\gamma^{-1}} + \langle \vec{\sigma}, \vec{H}(t) \rangle \right) + \\ & + \frac{e(g-2)\hbar}{4m_0c} \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{H}(t) \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E}(t) \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle}{1+\gamma^{-1}} \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

а старшая часть оператора  $\hat{F}_1^{(N)} = \hat{O}(\hbar)$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ .

Таким образом, оператор

$$\hat{T}^{(N)}(t) = \left( \Pi_+(t) + \frac{1}{2\varepsilon} \Pi_-(t) \hat{Q}^{(N)}(t) \right), \quad (2.20)$$

определенный на классе  $\mathcal{JP}_\hbar^t$ , сводит задачу построения асимптотических с точностью до  $O(\hbar^{(N+1)/2})$  положительно-частотных решений  $\Psi_{\nu+}(\vec{x}, t, \hbar)$  уравнения Дирака (1.1) к решению уравнения (2.15) относительно двухкомпонентного спинора  $\mathcal{U}^{(N)}(\vec{x}, t)$ . В результате

$$\Psi_{\nu+}(\vec{x}, t, \hbar) = \hat{T}^{(N)}(t) \mathcal{U}^{(N)}(\vec{x}, t).$$

### 3. Квазиклассическое траекторно-когерентное представление уравнения Дирака с аномальным взаимодействием Паули

Рассмотрим теперь задачу о построении асимптотических при  $\hbar \rightarrow 0$  решений уравнения двухкомпонентной теории (2.15)

$$(-i\hbar\partial_t + \hat{F}_0 + \sqrt{\hbar} \hat{F}_1^{(N)}) \mathcal{U}^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar) = 0. \quad (3.1)$$

В первом приближении по  $\hbar \rightarrow 0$  (пренебрегая в (3.1) оператором  $\sqrt{\hbar} \hat{F}_1^{(N)} = \hat{O}(\hbar^{3/2})$ ) для спинора  $\mathcal{U}^{(0)}(\vec{x}, t, \hbar)$  получим уравнение

$$\{-i\hbar\partial_t + \hat{F}_0\} \mathcal{U}^{(0)} = 0. \quad (3.2)$$

С учетом явного вида оператора  $\hat{F}_0$  (2.19) решение уравнения (3.2) будем искать в виде

$$\mathcal{U}^{(0)}(\vec{x}, t, \hbar) = \mathcal{U}(t) \psi(\vec{x}, t, \hbar), \quad \psi \in \mathcal{P}_\hbar^t.$$

Тогда функция  $\psi(\vec{x}, t)$  удовлетворяет уравнению (2.7):

$$[-i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}(t)] \varphi = 0,$$

где оператор  $\hat{\lambda}$  определен в (2.8), а для спинора  $\mathcal{U}(t)$  получим уравнение

$$\left\{ i \frac{d}{dt} + \frac{ec}{2\varepsilon} \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{D}}_0(t, z_0) \rangle \right\} \mathcal{U} = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}}_0(t, z_0) = \frac{\mu_0}{\gamma} \left[ (1 + \tilde{g}\gamma) \vec{H}(t) - \left( \frac{1}{1 + \gamma^{-1}} + \tilde{g}\gamma \right) \vec{\beta} \times \vec{E}(t) - \right. \\ \left. - \frac{\tilde{g}\gamma}{1 + \gamma^{-1}} \vec{\beta} \langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle \right], \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\mu_0 = \hbar e_0 / (2m_0 c)$  — магнетон Бора и  $\tilde{g} = (g - 2)/2$ . При выводе (3.3) использовано равенство [53]

$$\dot{\vec{\beta}} = \frac{ec}{\varepsilon} (\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{H} - \vec{\beta} \langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle). \quad (3.5)$$

Таким образом, спиновые свойства электрона в квазиклассическом пределе при  $\hbar \rightarrow 0$  определяются комплексными решениями линейной системы (3.3). Подчиним спинор  $\mathcal{U}(t)$  в начальный момент времени условию [54]

$$\langle \vec{\sigma}, \vec{\ell} \rangle \mathcal{U}(0, \zeta) = \zeta \mathcal{U}(0, \zeta), \quad \zeta = \pm 1, \quad (3.6)$$

фиксирующему проекцию спина частицы при  $t = 0$  на произвольный единичный вектор  $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^3$ . Тогда в любой момент времени решения  $\mathcal{U}(t, \zeta)$  задачи Коши (3.3), (3.6) образуют ортонормированный базис в  $\mathbb{C}^2$ :  $\mathcal{U}^+(t, \zeta') \mathcal{U}(t, \zeta) = \delta_{\zeta\zeta'}$  и, следовательно,

$$\mathcal{U}(t, \zeta) |\nu, t\rangle = |\nu, \zeta, t\rangle$$

есть полный ортонормированный набор решений уравнения (3.2)

$$\langle t, \zeta', \nu' | \nu, \zeta, t \rangle = \delta_{\nu, \nu'} \delta_{\zeta\zeta'}.$$

Построим следующие по  $\hbar \rightarrow 0$  приближения для уравнения (3.1). В отличие от нерелятивистского случая оператор «возмущения»  $\sqrt{\hbar} \hat{F}_1^{(N)}$  не является самосопряженным<sup>2</sup> в  $L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  и, следовательно, следующее приближение к функции  $\mathcal{U}^{(0)}(\vec{x}, t, \hbar)$  — функция  $\mathcal{U}_\zeta^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar)$  не может быть интерпретирована как волновая функция электрона. Однако для решения уравнения (3.1) в соответствии с теорией возмущений достаточно самосопряженности лишь оператора  $\hat{F}_0$ . Воспользовавшись формулой (I.16.7), положив в ней

$$\hat{A} = \partial_t + \frac{i}{\hbar} \hat{F}_0, \quad \epsilon \hat{B} = \frac{i}{\sqrt{\hbar}} \hat{F}_1^{(N)}$$

и учтя, что

$$\hat{A}^{-1} \varphi(t) = \sum_{|\nu|=0}^{\infty} \sum_{\zeta=\pm 1} |\nu, \zeta, t\rangle \int_0^t d\tau \langle \tau, \zeta, \nu | \varphi(\tau) \rangle,$$

найдем решение уравнения (3.1) с точностью до  $O(\hbar^{(N+1)/2})$ :

$$\mathcal{U}_\zeta^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar) |\nu, \zeta, t\rangle = \hat{\mathcal{F}}^{(N)} |\nu, \zeta, t\rangle + O(\hbar^{(N+1)/2}),$$

<sup>2</sup>Аналогичная ситуация имеет место для высших порядков нерелятивистского приближения [55].

$$\hat{\mathcal{F}}^{(N)} = \sum_{n=0}^N \left( -\frac{i}{\sqrt{\hbar}} \right)^n (\hat{\mathcal{F}}_1^{(N)})^n, \quad (3.7)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_1^{(N)} \varphi(t) = \sum_{|\nu'|=0, \zeta'=\pm 1} |\nu', \zeta', t\rangle \int_0^t d\tau \langle \tau, \zeta', \nu' | \hat{F}_1^{(N)} | \varphi(\tau) \rangle.$$

Построим теперь квазиклассическое ТК-представление для уравнения Дирака (1.1), опираясь на схему построения ТК-представления для оператора Шрёдингера (см. Приложение А). Введем гильбертово пространство вектор-функций  $L_{\hbar}^t(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  со скалярным произведением

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle_{L_{\hbar}^t} = \int d^3x \rho_{\hbar}^{z_0}(\vec{x}, t) \varphi_1^+(\vec{x}, t, \hbar) \varphi_2(\vec{x}, t, \hbar),$$

где плотность меры  $\rho_{\hbar}^{z_0}(\vec{x}, t)$  определена в (А.3).

Определим оператор  $\hat{\mathcal{K}}_D^{(N)}(t, \hbar): L_{\hbar}^t \rightarrow L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ ,

$$\hat{\mathcal{K}}_D^{(N)}(t, \hbar) \varphi = \hat{T}^{(N)} \hat{\mathcal{F}}^{(N)} \hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(t, \hbar) \varphi, \quad \varphi \in L_{\hbar}^t(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2), \quad (3.8)$$

где оператор  $\hat{T}^{(N)}$  определен в (2.20), а  $\hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(t, \hbar) = \hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)$ ,  $\hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)$  определен в (А.5), в котором  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$ .

Оператор  $\hat{\mathcal{K}}_D^{(N)}(t, \hbar)$  унитарно (с точностью до  $O(\hbar^{(N+1)/2})$ ) отображает пространство  $L_{\hbar}^t(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  в пространство  $L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$  в следующем смысле:

$$\langle \hat{\mathcal{K}}_D^{(N)}(t, \hbar) \varphi_1 | \hat{\mathcal{K}}_D^{(N)}(t, \hbar) \varphi_2 \rangle_{L_2} = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle_{L_{\hbar}^t} + O(\hbar^{(N+1)/2}).$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что уравнение Дирака (1.1) в квазиклассическом ТК-представлении примет вид

$$(\hat{\mathcal{K}}_D^{(N)}(t, \hbar))^+ (-i\hbar \partial_t + \hat{\mathcal{H}}_D) \hat{\mathcal{K}}_D^{(N)}(t, \hbar) \varphi = [\hat{\pi}_0 + \langle \vec{\sigma}, \vec{D}_0(t, z_0) \rangle] \varphi + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}), \quad (3.9)$$

где оператор  $\hat{\pi}_0$  определяется формулой (А.8), в которой нерелятивистский символ  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)$  следует заменить релятивистской функцией Гамильтона  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$  (1.9), а вектор  $\vec{D}_0(t, z_0)$  определен в (3.4).

Таким образом, с точностью до  $\hat{O}(\hbar^{(N+3)/2})$  уравнение Дирака в квазиклассическом ТК-представлении принимает вид

$$(\hat{\pi}_0 + \langle \vec{\sigma}, \vec{D}_0(t, z_0) \rangle) \varphi = 0. \quad (3.10)$$

Аналогично (А.9), уравнение (3.10) допускает полный ортонормированный набор решений вида

$$|H_{\nu}, \zeta\rangle = \mathcal{U}(t, \zeta) \prod_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{\nu_k!}} (\hat{\Lambda}^+)^{\nu_k} \cdot 1, \quad (3.11)$$

где операторы рождения  $\hat{\Lambda}_k^+$  задаются формулами (А.10), в которых комплексные векторы  $\vec{W}_j(t)$  и  $\vec{Z}_j(t)$  являются решениями системы в вариациях (2.5).

Возвращаясь в исходное (шрёдингеровское) представление уравнения Дирака (1.1), (1.2) найдем с учетом (3.8) и (3.10) полный ортонормированный набор квазиклассических (по mod  $\hat{O}(\hbar^{(N+1)/2})$ ) траекторно-когерентных состояний электрона

$$\Psi_{\nu^+}^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar) = \hat{\mathcal{K}}_D^{(N)}(t, \hbar) |H_{\nu}, \zeta\rangle. \quad (3.12)$$

◇ Отрицательно-частотные квазиклассические ТК-состояния  $\Psi_{\nu^-}^{(N)}$  определяются той же формулой при соответствующей замене

$$\begin{aligned} \lambda^{(+)} &\rightarrow \lambda^{(-)}, \quad \Pi_{\pm}(t) \rightarrow \Pi_{\mp}(t), \quad Z^{+}(t, z_0) \rightarrow Z^{-}(t, z_0), \\ (\vec{W}_{+}(t), \vec{Z}_{+}(t)) &\rightarrow (\vec{W}_{-}(t), \vec{Z}_{-}(t)). \end{aligned}$$

◇ Соотношения (3.8)–(3.12) позволяют получить функцию Грина уравнения Дирака в квазиклассическом траекторно-когерентном приближении. Аналогично (I.17.4) для положительно-частотной части ядра оператора эволюции уравнения (1.1) получим

$$G_D^{(N)}(\vec{x}, \vec{y}, t, s) = \hat{T}^{(N)}(t) \hat{\mathcal{F}}^{(N)}(t) G_D^{(0)}(\vec{x}, \vec{y}, t, s) (\hat{\mathcal{F}}^{(N)}(s))^+ (\hat{T}^{(N)}(s))^+, \quad (3.13)$$

где

$$G_D^{(0)}(\vec{x}, \vec{y}, t, s) = G^{(0)}(\vec{x}, \vec{y}, t, s) \sum_{\zeta=\pm 1} \mathcal{U}(t, \zeta) \mathcal{U}^+(s, \zeta); \quad (3.14)$$

$\mathcal{U}(t, \zeta)$  – решение уравнения (3.3) с начальным условием (3.6);  $G^{(0)}(\vec{x}, \vec{y}, t, s)$  определено в (I.14.20), где надо положить  $\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{\lambda}$ . Операторы  $\hat{T}^{(N)}$  и  $\hat{\mathcal{F}}^{(N)}$  определены в (2.20) и (3.7), соответственно. Как и в скалярном случае, функция Грина (3.13) позволяет найти решение задачи Коши для уравнения Дирака (1.1) в классе положительно-частотных квазиклассически сосредоточенных состояний.

#### 4. Релятивистский аналог уравнения Паули

Квазиклассическое описание квантовой частицы с учетом спиновых свойств позволяет исключить с любой степенью точности по  $\hbar \rightarrow 0$  интерференцию между положительно- и отрицательно-частотными состояниями («дрожание» Шрёдингера [52]), т.е. перейти на подпространстве положительно-частотных (отрицательно-частотных) состояний к одночастичной двухкомпонентной теории, гамильтониан которой является самосопряженным оператором в любом порядке по  $\hbar \rightarrow 0$ .

Унитарный оператор  $\hat{T}^{(N)} \pmod{\hat{O}(\hbar^{(N+3)/2})}$  перехода к двухкомпонентной теории будем искать в виде

$$\hat{T}^{(N)} = \hat{T}^{(N)} \hat{B}^{(N)} + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}), \quad (4.1)$$

где оператор  $\hat{T}^{(N)}$  определен формулой (2.20), а оператор  $\hat{B}^{(N)}$  определяется из требования самосопряженности оператора  $(+)\hat{\mathcal{H}}^{(N)}$

$$(+)\hat{\mathcal{H}}^{(N)} = (\hat{B}^{(N)})^+ (-i\hbar\partial_t + \hat{F}^{(N)}) \hat{B}^{(N)} + i\hbar\partial_t + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}). \quad (4.2)$$

В этом случае спинор

$$\tilde{\mathcal{U}}^{(N)} = (\hat{B}^{(N)})^{-1} \mathcal{U}^{(N)}(\vec{x}, t)$$

можно рассматривать как волновую функцию одночастичной задачи

$$(\hat{T}^{(N)})^{-1} (-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}_D) \hat{T}^{(N)} \tilde{\mathcal{U}}^{(N)} = (-i\hbar\partial_t + (+)\hat{\mathcal{H}}^{(N)}) \tilde{\mathcal{U}}^{(N)} + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}). \quad (4.3)$$

Рассмотрим подробнее конструкцию оператора  $\hat{B}^{(N)}$  для  $N = 2$ . Для этого представим несамосопряженную часть оператора  $\hat{F}_1^{(2)}$  в виде

$$\frac{\sqrt{\hbar}}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 (-i\hbar\partial_t + \hat{F}_0) \frac{\sqrt{\hbar}}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 = \frac{\hbar}{2} \left\{ (-i\hbar\partial_t + \hat{F}_0) \left( \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \right)^2 + \left( \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \right)^2 (-i\hbar\partial_t + \hat{F}_0) \right\} +$$

$$+ \frac{\hbar}{2} \left\{ \left[ \left( \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \right), (-i\hbar\partial_t + \hat{F}_0) \right]_{-} \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 + \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \left[ (-i\hbar\partial_t + \hat{F}_0), \left( \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \right) \right]_{-} \right\},$$

$$[\hat{A}, \hat{B}]_{-} = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}.$$

Если в (4.1) оператор  $\hat{B}^{(2)}$  выбрать следующим образом:

$$\hat{B}^{(2)} = 1 - \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \right)^2, \quad (4.4)$$

то нетрудно проверить, что требования к оператору  $\hat{T}^{(N)}$  выполнены. Соответственно, в этом случае спинор  $\tilde{\mathcal{U}}^{(2)}$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}^{(2)}(\vec{x}, t, \hbar) &= (\hat{B}^{(2)})^{-1} \mathcal{U}^{(2)}(\vec{x}, t) = \\ &= [1 - i\sqrt{\hbar}\hat{\mathcal{F}}_1 - i\hbar\hat{\mathcal{F}}_2 - \hbar\hat{\mathcal{F}}_1^2] \mathcal{U}^{(0)}(\vec{x}, t, \hbar) = \hat{\mathcal{F}}^{(2)} \mathcal{U}^{(0)}(\vec{x}, t, \hbar), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\mathcal{U}^{(0)}(\vec{x}, t, \hbar)$  – решение уравнения (3.2), а

$$\begin{aligned} \sqrt{\hbar}\hat{\mathcal{F}}_1\varphi(t) &= \frac{1}{\hbar} \sum_{|\nu'|=0, \zeta'=\pm 1}^{\infty} |\nu', \zeta', t\rangle \int_0^t d\tau \langle \tau, \zeta', \nu' | \hat{F}_1^{(1)} | \varphi(\tau) \rangle, \\ \hbar\hat{\mathcal{F}}_2\varphi(t) &= \frac{1}{\hbar} \sum_{|\nu'|=0, \zeta'=\pm 1}^{\infty} |\nu', \zeta', t\rangle \int_0^t d\tau \langle \tau, \zeta', \nu' | \left[ \hat{F}_1^{(2)} - \hat{F}_1^{(1)} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\hbar}{2} (-i\hbar\partial_\tau + \hat{F}_0) \left( \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \right)^2 - \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \right)^2 (-i\hbar\partial_\tau + \hat{F}_0) \right] | \varphi(\tau) \rangle. \end{aligned}$$

В частности, если  $\mathcal{U}^{(0)}(\vec{x}, t, \hbar) = |\nu, t, \zeta\rangle$ , то функции (4.5) образуют полный ортонормированный набор решений уравнения (4.3):

$$\langle \tilde{\mathcal{U}}_{\nu'\zeta'}^{(2)}(\vec{x}, t, \hbar) | \tilde{\mathcal{U}}_{\nu\zeta}^{(2)}(\vec{x}, t, \hbar) \rangle = \delta_{\nu\nu'} \delta_{\zeta\zeta'} + O(\hbar^{3/2}),$$

которое можно рассматривать как релятивистское (по mod  $O(\hbar^{5/2})$ ) обобщение уравнения Паули. В случае  $N > 2$  оператор  $\hat{B}^{(N)}$  (соответственно,  $\hat{\mathcal{H}}^{(N)}$ ,  $\hat{T}^{(N)}$ ) находится аналогично оператору (4.4).

Вычислим в явном виде оператор  $\hat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar)$ , задающий переход к квазиклассическому траекторно-когерентному представлению. С учетом (3.8), (4.4) найдем

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar) &= \left\{ \Pi_+(t) + \frac{1}{2\varepsilon} \Pi_-(t) [\sqrt{\hbar}\hat{Q}_1 + \hbar\hat{Q}_2 + \hbar^{3/2}\hat{Q}_3 + \hbar^2\hat{Q}_4] \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \left[ 1 - \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \right)^2 \right] [1 - i\sqrt{\hbar}\hat{\mathcal{F}}_1 - i\hbar\hat{\mathcal{F}}_2 - \hbar\hat{\mathcal{F}}_1^2] \right\} \hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(t, \hbar), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $\hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(t, \hbar)$  определен в (3.8). Из унитарности оператора  $\hat{T}^{(N)}$  следует унитарность оператора (4.6), т.е.

$$\begin{aligned} &\langle (\hat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar) | H_{\nu'} \zeta') | (\hat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar) | H_\nu \zeta) \rangle_{L_2} = \\ &= \langle \zeta' H_{\nu'} | H_\nu \zeta \rangle_{L_\hbar} + O(\hbar^{3/2}) = \delta_{\nu\nu'} \delta_{\zeta\zeta'} + O(\hbar^{3/2}). \end{aligned}$$



Пусть  $\hat{A}(t): L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$  – самосопряженный оператор. Тогда отвечающий ему оператор двухкомпонентной теории всегда можно представить в виде

$$\hat{A}_+ = \{\hat{T}^{(2)}\}^+ \hat{A}(t) \hat{T}^{(2)} + \hat{O}(\hbar^{3/2}) = \hat{a} + \langle \vec{\sigma}, \hat{A} \rangle + \hat{O}(\hbar^{3/2}),$$

где  $\hat{a}$  и  $\hat{A}$  – самосопряженные в  $L_2$  операторы с символами  $a(\vec{x}, \vec{p}, t)$  и  $\vec{A}(\vec{x}, \vec{p}, t)$ , соответственно. Найдем явный вид оператора  $\vec{A}(t, \hbar)$  в квазиклассическом ТК-представлении

$$\begin{aligned} \hat{A}' &= (\hat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar))^+ \hat{A}(t) \hat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar) = (\hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(t, \hbar))^{(+)} (\hat{\mathcal{F}}^{(2)})^{(+)} \hat{A}_+ \hat{\mathcal{F}}^{(2)} \hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(t, \hbar) = \\ &= \left(1 + \hat{D}^1 + \frac{1}{2} \hat{D}^2\right) (a(t) + \langle \vec{\sigma}, \vec{A}(t) \rangle) - \\ &- i\sqrt{\hbar} \left[ \hat{D}^1 (a(t) + \langle \vec{\sigma}, \vec{A}(t) \rangle) \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+ \hat{D}^1 (a(t) + \langle \vec{\sigma}, \vec{A}(t) \rangle) \right] + \\ &+ \hbar \langle \vec{A}(t), [\hat{\pi}_1^+ \vec{\sigma} \hat{\pi}_1 - i(\vec{\sigma} \hat{\pi}_2 - \hat{\pi}_2^+ \vec{\sigma}) - \vec{\sigma} \hat{\pi}_1^2 - (\hat{\pi}_1^+)^2 \vec{\sigma}] \rangle - \\ &- i\sqrt{\hbar} \langle \vec{A}(t), (\vec{\sigma} \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+ \vec{\sigma}) \rangle + \hat{O}(\hbar^{3/2}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$\hat{\pi}_j = (\hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(t, \hbar))^{-1} \hat{\mathcal{F}}_j \hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(t, \hbar), \quad j = 1, 2,$$

а  $\hat{D}^j A(t)$  определены в (A.15).

В частности, операторы импульса  $\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla$ , координат  $\vec{x}$  и спина<sup>3</sup>  $\hat{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$  в квазиклассическом ТК-представлении имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{X}(t, \hbar) &= \{\hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(t, \hbar)\}^{-1} \{\hat{\mathcal{F}}^{(2)}\}^{-1} \vec{x} \hat{\mathcal{F}}^{(2)} \hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(t, \hbar) = \\ &= \vec{X}(t, z_0) + \Delta\vec{x} - i\sqrt{\hbar}(\Delta\vec{x} \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+ \Delta\vec{x}) + \hat{O}(\hbar^{3/2}); \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}(t, \hbar) &= \{\hat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar)\}^{-1} \{\hat{\mathcal{F}}^{(2)}\}^{-1} \hat{\vec{p}} \hat{\mathcal{F}}^{(2)} \hat{\mathcal{K}}_D^{(0)} = \\ &= \vec{P}(t, z_0) + \Delta\vec{p} - i\sqrt{\hbar}(\Delta\vec{p} \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+ \Delta\vec{p}) + \hat{O}(\hbar^{3/2}); \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\hat{S}(t, \hbar) = \{\hat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar)\}^{-1} \{\hat{\mathcal{F}}^{(2)}\}^{-1} \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \hat{\mathcal{F}}^{(2)} \hat{\mathcal{K}}_D^{(0)}(\hbar) = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} + \hat{O}(\hbar^{3/2}). \quad (4.10)$$

Приведем явные выражения для гамильтониана двухкомпонентной теории  $\hat{\mathcal{H}}^{(N)}$  (4.2) с учетом операторов порядка  $\hat{O}(\hbar^{3/2})$  включительно и для квантовых средних основных наблюдаемых теории – операторов координат, импульсов и спина, рассчитанных по одночастичным квазиклассическим ТК-состояниям электрона  $|H_\nu, \zeta\rangle$  (3.11):

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}^{(1)} &= \left(1 + \hat{\delta}^1 + \frac{1}{2!} \hat{\delta}^2 + \frac{1}{3!} \hat{\delta}^3\right) \lambda^{(+)}(t) + \\ &+ \frac{e\hbar}{2\varepsilon} \left\{ \left[ (1 + \tilde{g}\gamma) \langle \vec{\sigma}, \vec{H}(t) \rangle + \left( \frac{1}{1 + \gamma^{-1}} + \tilde{g}\gamma \right) \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E}(t) \rangle + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\tilde{g}\gamma}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle \right] - \right. \\ &\left. - \frac{c}{\varepsilon} \left\langle \vec{\sigma}, \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \vec{E}(t) \right] \times \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{P}_1 \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \vec{P}_1 \right] \right\rangle - \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, d\vec{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, d\vec{H} \rangle \right] - \right. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>В исходном (шрёдингеровском) представлении оператору спина  $\hat{S} = (\hbar/2)\vec{\sigma}$  с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$  отвечает трехмерный единичный вектор спина  $(\hbar/2)\vec{\sigma}^0 = (\hbar/2)\{\rho_3\vec{\Sigma} + \rho_1(c/\varepsilon)\hat{\vec{P}} - c\rho_3\hat{\vec{P}}\langle\vec{\Sigma}, \hat{\vec{P}}\rangle/[\varepsilon(\varepsilon + m_0c^2)]\}$  (см. [56, 57]).

$$\begin{aligned}
& -\frac{c}{\varepsilon} \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{H}(t) \rangle \right] \langle \vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1 \rangle + \\
& + \tilde{g}\gamma \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times d\vec{E} \rangle - \langle \vec{\sigma}, d\vec{H} \rangle + \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, d\vec{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right] - \\
& - \frac{c}{\varepsilon} \tilde{g}\gamma \langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \hat{\vec{P}}_1, \vec{\beta} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \hat{\vec{P}}_1 \rangle \right] - \\
& - \tilde{g}\gamma \frac{c}{\varepsilon} \left\langle \vec{\sigma}, \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \vec{E}(t) \right] \times \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1 \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \hat{\vec{P}}_1 \right] \right\rangle = \\
= & \left( 1 + \hat{\delta}^1 + \frac{1}{2!} \hat{\delta}^2 + \frac{1}{3!} \hat{\delta}^3 \right) \lambda^{(+)}(t) + \langle \vec{\sigma}, \vec{D}_0(t) \rangle + \langle \vec{\sigma}, [D_x(t)\Delta\vec{x} + D_p(t)\Delta\hat{\vec{p}}] \rangle; \quad (4.11) \\
D_p(t)\Delta\hat{\vec{p}} = & -\frac{c}{\varepsilon} \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \vec{E}(t) \right] \times \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \Delta\hat{\vec{p}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \Delta\hat{\vec{p}} \right] - \\
-\frac{c}{\varepsilon} & \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \vec{H}(t) \right] \langle \vec{\beta}, \Delta\hat{\vec{p}} \rangle - \frac{c}{\varepsilon} \tilde{g}\gamma \langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \Delta\hat{\vec{p}}, \vec{\beta} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \Delta\hat{\vec{p}} \right] - \\
-\tilde{g}\gamma & \frac{c}{\varepsilon} \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \vec{E}(t) \right] \times \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \Delta\hat{\vec{p}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \Delta\hat{\vec{p}} \right]; \\
D_x(t)\Delta\hat{\vec{x}} = & -\frac{c}{\varepsilon} \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \vec{E}(t) \right] \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \left( -\frac{e}{c} d^1 \vec{A}(t) \right) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \left( -\frac{e}{c} d^1 \vec{A}(t) \right) \right] - \\
-\frac{c}{\varepsilon} & \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \vec{H}(t) \right] \langle \vec{\beta}, \left( -\frac{e}{c} d^1 \vec{A}(t) \right) \rangle - \\
-\frac{c}{\varepsilon} & \tilde{g}\gamma \langle \vec{\beta}, \vec{H}(t) \rangle \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \left( -\frac{e}{c} d^1 \vec{A}(t) \right), \vec{\beta} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \left( -\frac{e}{c} d^1 \vec{A}(t) \right) \right] - \\
-\tilde{g}\gamma & \frac{c}{\varepsilon} \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \vec{E}(t) \right] \left[ \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \left( -\frac{e}{c} d^1 \vec{A}(t) \right) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \left( -\frac{e}{c} d^1 \vec{A}(t) \right) \right] - \\
- & \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, d\vec{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, d\vec{H} \rangle \right] + \tilde{g}\gamma \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times d\vec{E} \rangle - \langle \vec{\sigma}, d\vec{H} \rangle + \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, d\vec{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{X}(t, \zeta, \zeta') &= \langle \zeta', H_\nu | \hat{X}(t, \hbar) | H_\nu, \zeta \rangle = \\
&= \vec{x}(t, z_0) \delta_{\zeta\zeta'} - i\sqrt{\hbar} \langle \zeta', H_\nu | (\Delta\vec{x} \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+ \Delta\vec{x}) | H_\nu, \zeta \rangle + \hat{O}(\hbar^2); \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{P}(t, \zeta, \zeta') &= \langle \zeta', H_\nu | \hat{P}(t, \hbar) | H_\nu, \zeta \rangle = \\
&= \vec{p}(t, z_0) \delta_{\zeta\zeta'} - i\sqrt{\hbar} \langle \zeta', H_\nu | (\Delta\vec{p} \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+ \Delta\vec{p}) | H_\nu, \zeta \rangle + \hat{O}(\hbar^2); \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\vec{S}(t, \zeta, \zeta') = \langle \zeta', H_\nu | \hat{S}(t, \hbar) | H_\nu, \zeta \rangle = \frac{\hbar}{2} \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta'). \quad (4.14)$$

Здесь  $\Delta\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla + Q(t)\Delta\vec{x}$ ;  $\tilde{g} = \frac{1}{2}(g - 2)$ , а  $\vec{\eta}(t, \zeta, \zeta') = \mathcal{U}^+(t, \zeta') \vec{\sigma} \mathcal{U}(t, \zeta)$  — решение уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди [46] в системе покоя

$$\dot{\vec{\eta}} = \frac{2}{\hbar} \vec{\eta} \times \vec{D}_0(t, z_0), \quad (4.15)$$

где вектор  $\vec{D}_0(t, z_0)$  определен в (3.4).

Используя функции  $|H_\nu, \zeta\rangle$  (3.11), нетрудно вычислить (с той же точностью  $O(\hbar^2)$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ ) корреляционную матрицу [58], характеризующую квантовые флуктуации динамических переменных  $\hat{x}_j(t, \hbar)$ ,  $\hat{p}_j(t, \hbar)$  относительно их средних значений (4.12), (4.14)  $\sigma_{x_i, x_j}$ ,  $\sigma_{p_i, p_j}$  и их корреляцию  $\sigma_{p_i, x_j}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Здесь

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \langle (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\hbar}{4} [C(t)D_\nu^{-1}C^+(t) + C^*(t)D_\nu^{-1}C^\Gamma(t)], \\ \sigma_{pp} &= \frac{\hbar}{4} [B(t)D_\nu^{-1}B^+(t) + B^*(t)D_\nu^{-1}B^\Gamma(t)], \\ \sigma_{px} &= \frac{\hbar}{4} [B(t)D_\nu^{-1}C^+(t) + B^*(t)D_\nu^{-1}C^\Gamma(t)], \end{aligned} \quad (4.16)$$

где  $C(t)$  и  $B(t)$  определены в (A.9) и (A.10), соответственно, а через  $D_\nu^{-1}$  обозначена матрица

$$D_\nu^{-1} = \left\| \frac{2\nu_k + 1}{\text{Im } b_k} \delta_{jk} \right\|.$$

Продифференцировав соотношения (4.12)–(4.16) по  $t$  и выразив правую часть полученных уравнений через  $\vec{X}$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{\eta}$  и  $\Delta_2$ , с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$  получим

$$\begin{cases} \dot{z} = J\lambda_z^{(+)}(z, t) + \frac{1}{2} \langle \partial_z, \Delta_2 \partial_z \rangle J\lambda_z^{(+)}(z, t) + JD_z(z, t)\vec{\eta}, \\ \dot{\Delta}_2 = J\lambda_{zz}^{(+)}(z, t)\Delta_2 - \Delta_2\lambda_{zz}^{(+)}(z, t)J, \\ \dot{\vec{\eta}} = \frac{2}{\hbar} \vec{\eta} \times \vec{D}_0(t, z_0), \quad \Delta_2^\Gamma = \Delta_2, \end{cases} \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} z &= (\vec{P}(t, \hbar), \vec{X}(t, \hbar)), \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{pp} & \sigma_{px} \\ \sigma_{xp} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}; \\ D_z \vec{\eta} &= (D_p \vec{\eta}, D_x \vec{\eta}), \quad \vec{\beta} = \frac{1}{c} \lambda_{\vec{p}}(z, t); \end{aligned}$$

вектор  $\vec{D}_0$  определен в (3.4),  $3 \times 3$ -матрицы  $D_p$ ,  $D_x$  – в (4.11). Система (4.16) – замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений для квантовых средних  $\vec{P}(t, \hbar)$ ,  $\vec{X}(t, \hbar)$ ,  $\vec{\eta}$  и  $\Delta_2$  в теории Дирака на подпространстве положительно-частотных решений. Проблема соответствия полученной системы уравнений с хорошо известными системами уравнений для классической частицы со спином (например, уравнениями Френкеля) [59, 60] (см. также [61]) требует дальнейшего изучения. Начальные условия к системе (4.17) выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} z|_{t=0} &= z_0, \quad \Delta_2|_{t=0} = \Delta_2^0, \\ \vec{\eta}|_{t=0} &= \frac{1 + \zeta\zeta'}{2} \zeta \vec{\ell} + \frac{1 - \zeta\zeta'}{2} \frac{\vec{\ell} \times (\vec{k} \times \vec{\ell}) + i\zeta \vec{\ell} \times \vec{k}}{\sqrt{1 - (\vec{\ell}, \vec{k})^2}}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где  $\vec{k} = (0, 0, 1)$ ;  $\vec{\ell}$  определен в (3.6), а  $\Delta_2^0$  – постоянная  $2n \times 2n$  матрица. Представим систему (4.17) в виде (I.20.18):

$$\begin{cases} \dot{z} = J\partial_z \lambda^{(+)}(z, t) + \frac{1}{2} \langle \partial_z, A\Delta_2^0 A^+ \partial_z \rangle J\partial_z \lambda^{(+)}(z, t) + JD_z(z, t)\mathcal{U}^+ \vec{\sigma} \mathcal{U}, \\ \dot{A} = J(\lambda^{(+)})''_{zz}(z, t)A, \\ \left[ i \frac{d}{dt} + \frac{1}{\hbar} \langle \vec{\sigma}, \vec{D}_0 \rangle \right] \mathcal{U} = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Матрица  $A$  удовлетворяет условию  $A|_{t=0} = \mathbb{I}$ , а начальные условия для спинора  $\mathcal{U}$  заданы в (3.6).

В заключение отметим, что, на наш взгляд, с физической точки зрения «переход к классике» в квантовой механике неизбежно должен быть связан с введением понятия классической траектории, которое изначально (на уровне постулатов) квантовой механике чуждо и должно быть привнесено извне. Весьма существенно, что удается построить полный набор приближенных решений, обладающих свойством: средние квантово-механические координат и импульсов при  $\hbar \rightarrow 0$  являются общими решениями классических уравнений Гамильтона. Неочевидность такой возможности и трудности решения этой задачи неоднократно отмечались в литературе [62]. Обычно (см., например, [56], стр. 69–70) ограничиваются словесной формулировкой требований, предъявляемых к волновой функции квазиклассического типа, неявно подразумевая, что выполнение этих требований всегда возможно без особых трудностей. Однако такие состояния, как правило, явно не предъявлялись. Как следует из сказанного выше, явное построение такого типа состояний требует использования метода комплексного роста [31, 32].

Таким образом, не только показана принципиальная возможность получения приближенных по  $\hbar \rightarrow 0$  решений уравнения Дирака с точностью  $O(\hbar^{N/2})$  при любом фиксированном  $N$ , но и дан конструктивный способ построения соответствующих высших приближений. Существенно, что разложение в асимптотический ряд по  $\hbar$  содержит полуцелые степени  $\hbar$ , т.е. проводится по  $\sqrt{\hbar}$  (в отличие от приводимого во всех учебниках квантовой механики квазиклассического разложения по  $\hbar$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ ).

Возможность явного построения таких (названных траекторно-когерентными) состояний приводит к нетривиальным следствиям. Например, наиболее прозрачным и естественным образом удается получить «классические уравнения движения» для средних значений тех величин, которые в точном смысле не имеют корректного классического определения (спин, например). Представляется естественным, что для классического вектора спина получаются уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди. Однако нетривиальным представляется тот факт, что в случае произвольных (а не только однородных) электромагнитных полей удается явно показать, что поля в этих уравнениях следует брать на классической траектории. Раньше (см., например, [56]) это обосновывалось лишь словесными аргументами.

## 5. Квазиклассически сосредоточенные состояния уравнения Клейна–Гордона

Рассмотрим скалярную частицу, волновая функция которой удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона

$$\hat{L}_{\text{KG}}\Psi = 0, \quad \hat{L}_{\text{KG}} = \hat{\mathcal{P}}_0^2 - c^2\hat{\mathcal{P}}^2 - m_0^2c^4, \quad (5.1)$$

где  $\hat{\mathcal{P}}_0 = -i\hbar\partial_t + e\Phi(\vec{x}, t)$ ,  $\hat{\mathcal{P}} = -i\hbar\nabla - (e/c)\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)$ , а электромагнитные потенциалы  $\Phi(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)$  – произвольные гладкие функции,  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ , и растут вместе со своими производными при  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  не быстрее некоторой степени  $|\vec{x}|$  равномерно по  $t \in \mathbb{R}^1$ .

По аналогии с квазиклассически сосредоточенными состояниями уравнения Шрёдингера дадим следующее определение:

♦ *Состояние  $\Psi$  назовем квазиклассически сосредоточенным на фазовой траектории  $Z(t) = (\vec{P}(t), \vec{X}(t))$  класса  $\mathbb{CS}_{\text{KG}}(Z(t), N, \hbar)$ , т.е.  $\Psi \in \mathbb{CS}_{\text{KG}}(Z(t), N, \hbar)$ ,*

если

1)  $\hat{L}_{\text{KG}}\Psi = 0$ ;

2) для волновой функции в  $x$ -представлении  $\Psi(\vec{x}, t, \hbar)$  и для волновой функции в  $p$ -представлении  $\tilde{\Psi}(\vec{p}, t, \hbar)$  существуют обобщенные пределы

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{\|\Psi\|_{L_2}^2} |\Psi(\vec{x}, t, \hbar)|^2 = \delta(\vec{x} - \vec{X}(t)), \quad (5.2)$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{\|\tilde{\Psi}\|_{L_2}^2} |\tilde{\Psi}(\vec{p}, t, \hbar)|^2 = \delta(\vec{p} - \vec{P}(t)); \quad (5.3)$$

3) существуют для любых  $\hbar \in [0, 1[$  квантовые моменты  $\Delta_\alpha^{\text{cl}}(t, \hbar)$  и  ${}_{(\text{KG})}\Delta_\alpha^{\text{cl}}(t, \hbar)$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq N$ .

Здесь  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^6$  – мультииндекс;

$$\Delta_\alpha^{\text{cl}}(t, \hbar) = \langle \Psi | \{\Delta \hat{z}\}^\alpha | \Psi \rangle_{L_2}; \quad (5.4)$$

$${}_{(\text{KG})}\Delta_\alpha^{\text{cl}}(t, \hbar) = \langle \Psi | \{\Delta \hat{z}\}^\alpha | \Psi \rangle_{\text{KG}}; \quad (5.5)$$

$\{\Delta \hat{z}\}^\alpha$  – оператор с вейлевским символом  $(\Delta z)^\alpha$ . В (5.4) и (5.5) обозначено

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle_{L_2} = \int d^3x \Psi_1^*(\vec{x}, t, \hbar) \Psi_2(\vec{x}, t, \hbar), \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle_{\text{KG}} &= \frac{1}{2m_0c} \int d^3x [(\hat{\mathcal{P}}_0 \Psi_1(\vec{x}, t, \hbar))^* \Psi_2(\vec{x}, t, \hbar) + \\ &+ \Psi_1^*(\vec{x}, t, \hbar) \hat{\mathcal{P}}_0 \Psi_2(\vec{x}, t, \hbar)]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

**Теорема 5.1.** Если состояние  $\Psi$  – квазиклассически сосредоточенное класса  $\text{CS}_{\text{KG}}(z(t), N, \hbar)$  ( $\Psi \in \text{CS}_{\text{KG}}(z(t), N, \hbar)$ ), то  $\vec{X}(t)$ ,  $\vec{P}(t)$  являются решением классической системы Гамильтона (1.7) с гамильтонианом  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t) = e\Phi(\vec{x}, t) + \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t)$  или  $\lambda^{(-)}(\vec{p}, \vec{x}, t) = e\Phi(\vec{x}, t) - \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t)$ , где  $\varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t) = \sqrt{c^2 \vec{P}^2 + m_0^2 c^4}$ ,  $\vec{P} = \vec{p} - (e/c)\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)$ .

**Доказательство.** 1. Дословно повторяя доказательство теоремы из разд. «Квазиклассически сосредоточенные состояния» части I, приходим к следующим асимптотическим оценкам:

$$\Delta_\alpha^{\text{cl}}(t, \hbar) = (\vec{a}(\hbar))^{\alpha_p} (\vec{b}(\hbar))^{\alpha_x} \Delta_{\vec{\eta}^{\alpha_p}, \vec{\zeta}^{\alpha_x}}^{\text{cl}}(t, \hbar), \quad k = \overline{0, N}; \quad (5.8)$$

$$\left\| \left( -i\hbar \partial_t - \hbar \frac{\partial \Phi_0(t, \hbar)}{\partial t} - \langle \dot{\vec{P}}(t), \Delta \vec{x} \rangle + \langle \dot{\vec{X}}(t), \Delta \vec{p} \rangle \right) \Psi \right\| \sim C(\hbar), \quad (5.9)$$

где

$$C(\hbar) = \max\{a_1(\hbar)b_1(\hbar), a_2(\hbar)b_2(\hbar), a_3(\hbar)b_3(\hbar)\};$$

$a_l(\hbar)$   $b_l(\hbar)$  – положительные последовательности  $\hbar$ , такие, что (см. (0.2), (I.19.26))

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} a_l(\hbar) = \lim_{\hbar \rightarrow 0} b_l(\hbar) = 0, \quad \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar}{a_l(\hbar)b_l(\hbar)} < \infty, \quad l = 1, 2, 3,$$

а функции  $\Delta_{\vec{\eta}^{\alpha_p}, \vec{\zeta}^{\alpha_x}}^{\text{cl}(k)}(t, \hbar)$  зависят от  $\hbar$  регулярно,  $\Phi(t, \hbar)$  – фаза волновой функции при  $\Delta \vec{x} = 0$ .

Из (5.8), в частности, следует

$$\|\Delta x_l \Psi\| = a_l(\hbar) [\sigma_{\zeta_l \zeta_l}^{(2)}(t, \hbar)]^{1/2}, \quad \|\Delta p_l \Psi\| = b_l(\hbar) [\sigma_{\eta_l \eta_l}^{(2)}(t, \hbar)]^{1/2}, \quad l = 1, 2, 3. \quad (5.10)$$

Функции  $\sigma_{\zeta_k \zeta_k}^{(2)}(t, \hbar)$  и  $\sigma_{\eta_k \eta_k}^{(2)}(t, \hbar)$  регулярно зависят от  $\hbar$  и определены в (I.19.19), (I.19.20).

2. Найдем среднее значение оператора  $\hat{L}_{\text{KG}}$  по состоянию (I.19.13), считая, что оно удовлетворяет уравнению (5.1). Это среднее значение очевидно равно нулю. С другой стороны, в низших порядках по  $\hbar$  получим

$$\begin{aligned} 0 \equiv & \left[ \hbar \frac{d\Phi_0(t, \hbar)}{dt} - \sum_{k=1}^3 P_k(t) \dot{X}_k(t) + e\Phi(t) \right]^2 - c^2 \left( \vec{P}(t) - \frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}}(t) \right)^2 - \\ & - m_0^2 c^4 + 2 \sum_{k=1}^3 \left[ -\dot{X}_k b_k(\hbar) \sigma_{\eta_k}^{\text{cl}(1)}(t, \hbar) + (\dot{P}_k(t) - \right. \\ & \left. - e\Phi_{x_k}(t)) a_k(\hbar) \sigma_{\eta_k}^{\text{cl}(1)}(t, \hbar) \right] \left[ \hbar \frac{d\Phi_0(t, \hbar)}{dt} - \langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle + e\Phi(t) \right] - \\ & - 2c^2 \sum_{k=1}^3 \left[ b_k(t) \sigma_{\eta_k}^{\text{cl}(1)}(t, \hbar) - \frac{e}{c} \sum_{l=1}^3 \mathcal{A}_{k,l}(t) \sigma_{\zeta_k}^{\text{cl}(1)}(t, \hbar) a_k(\hbar) \right] \left( P_k(t) - \frac{e}{c} \mathcal{A}_k(t) \right) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда немедленно следует необходимость выполнения следующих равенств:

$$\frac{dS(t)}{dt} + e\Phi(t) - \langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle \pm \varepsilon(t) = 0, \quad (5.11)$$

$$\dot{X}_k = \pm \frac{c^2}{\varepsilon(t)} \mathcal{P}_k(t); \quad \dot{P}_k = e\Phi_{x_k} \pm \frac{c^2}{\varepsilon(t)} \left\langle \vec{P}(t), \left( -\frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}}_{x_k}(t) \right) \right\rangle, \quad (5.12)$$

$$\varepsilon(t) = \sqrt{c^2 \vec{\mathcal{P}}^2(t) + m_0^2 c^4}, \quad \vec{\mathcal{P}}(t) = \vec{P}(t) - \frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}}(t),$$

где  $k = 1, 2, 3$ . Уравнение (5.11) связывает классическое действие с гамильтонианом  $\lambda^{(+)}$  и  $\lambda^{(-)}$ , а уравнение (5.12) является классической системой Гамильтона (1.7). Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 5.1 останется справедливым, если вместо точных решений уравнения (5.1) использовать его приближенные решения. Дадим следующее определение:

♦ *Состояние  $\Psi$  назовем квазиклассически сосредоточенным на фазовой траектории  $Z(t) = (\vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t))$  класса  $\mathcal{CS}_{\text{KG}}^{(2M)}(Z(t), N, \hbar)$  ( $\Psi \in \mathcal{CS}_{\text{KG}}^{(2M)}(Z(t), N, \hbar)$ ), если в определении 1 условие 1 заменить следующим условием:*

$$(1') \quad \hat{L}_{\text{KG}} \Psi = O(\hbar^M), \quad \hbar \rightarrow 0.$$

Существование решений класса  $\mathcal{CS}_{\text{KG}}^{(2M)}(Z(t), N, \hbar)$  доказывает существование решений класса  $\mathcal{CS}_{\text{KG}}(z(t), N, \hbar)$ .

## 6. Квазиклассические ТКС уравнения Клейна–Гордона и релятивистский аналог уравнения Шрёдингера в классе положительно-частотных квазиклассически сосредоточенных состояний

Вопрос построения решений уравнения Клейна–Гордона класса  $\mathcal{CS}_{\text{KG}}^{(N+3)}(z(t), \infty)$  решается сравнительно просто (см. [63, 64]). По аналогии с решением уравнения

Шрёдингера решение уравнения (5.1) будем искать в виде

$$\Psi^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar) = \sum_{k=0}^N \hbar^{k/2} \Psi^{(k)}(\vec{x}, t, \hbar), \quad (6.1)$$

где функции  $\Psi^{(k)}(\vec{x}, t, \hbar)$ ,  $k = \overline{1, N}$ , принадлежат пространству траекторно сосредоточенных функций  $\mathcal{P}_{\hbar}^t$

$$\mathcal{P}_{\hbar}^t = \left\{ f, f = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (S(t) + \langle \vec{P}(t), \Delta \vec{x} \rangle) \right] \Phi \left( \frac{\Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}}, t \right) \right\}, \quad (6.2)$$

$$\Phi(\vec{\xi}, t) \in \mathbb{S}, \quad S(t) = \int_0^t (\langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle - \lambda^{(+)}(t)) dt.$$

С учетом асимптотических оценок

$$\frac{1}{\|\Psi\|} \|\{\Delta \hat{z}\}^{\alpha}(t, \hbar) \Psi\| = O(\hbar^{|\alpha|/2}) \quad (6.3)$$

и

$$\frac{1}{\|\Psi\|} \|\{-i\hbar \partial_t + \lambda^{(+)}(t) + \hat{\delta} \lambda^{(+)}(t)\} \Psi\| = O(\hbar), \quad (6.4)$$

доказанных в разд. «Класс траекторно сосредоточенных функций» части I, операторы  $\hat{\mathcal{P}}$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{P}} &= \vec{\mathcal{P}}(t) + \hat{\mathcal{P}}_1 - \frac{e}{c} \sum_{k=2}^{N+2} \frac{1}{k!} d^k \vec{\mathcal{A}} + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}), \\ \hat{\mathcal{P}}_1 &= \hat{\delta}^1 \mathcal{P}(t) = \Delta \hat{p} - \frac{e}{c} d^1 \vec{\mathcal{A}}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Здесь  $d^n \varphi(t)$  и  $\hat{\delta}^n \Phi(t)$  –  $n$ -ые члены разложения функций  $\varphi(\vec{x}, t)$  и  $\Phi(\hat{p}, \vec{x}, t)$  в ряд по  $\Delta \vec{x}$  и  $\Delta \hat{p}$ , соответственно (см. (I.16.5)). Тогда

$$c^2 \hat{\mathcal{P}}^2 = c^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{\delta}^k \hat{\mathcal{P}}^2(t) \quad (6.6)$$

где  $\hat{\delta}^0 \hat{\mathcal{P}}^0(t) = \vec{\mathcal{P}}^2(t)$ ;  $\hat{\delta} \hat{\mathcal{P}}^2(t) = 2\vec{\mathcal{P}}(t) \hat{\mathcal{P}}_1$ ;

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^2 \hat{\mathcal{P}}^2(t) &= \hat{\mathcal{P}}_1^2 - \frac{e}{c} \langle \vec{\mathcal{P}}(t), d^2 \vec{\mathcal{A}}(t) \rangle; \\ \frac{1}{k!} \hat{\delta}^k \hat{\mathcal{P}}^2 &= -2 \frac{e}{c} \frac{1}{k!} \langle \vec{\mathcal{P}}(t), d^k \vec{\mathcal{A}}(t) \rangle - \frac{e}{c} \frac{1}{(k-1)!} [\langle \hat{\mathcal{P}}_1, d^{(k-1)} \vec{\mathcal{A}}(t) \rangle]_{++} \\ &\quad + \frac{e^2}{c^2} \sum_{l, n=2}^{\infty} \frac{\delta_{l+n, k}}{l! n!} \langle d^n \vec{\mathcal{A}}(t), d^l \vec{\mathcal{A}}(t) \rangle, \quad k > 2; \end{aligned}$$

$\delta_{lk}$  – символ Кронекера. Аналогично

$$\hat{\mathcal{P}}_0 = (-i\hbar \partial_t + \lambda^{(+)}(t) + \delta^1 \lambda^{(+)}(t)) - \varepsilon(t) - c \langle \vec{\beta}, \hat{\mathcal{P}}_1 \rangle + e \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k \Phi(t) \quad (6.7)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{P}_0^2 = & \left[ \varepsilon(t) - c\langle \vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1 \rangle + e \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k \Phi(t) \right]^2 - \\ & - \left\{ [-i\hbar\partial_t + \lambda^{(+)}(t) + \hat{\delta}^1 \lambda^{(+)}(t)], \left[ \varepsilon(t) + c\langle \vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1 \rangle - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k \Phi(t) - (-i\hbar\partial_t + \lambda^{(+)}(t) + \hat{\delta}^1 \lambda^{(+)}(t)) \right] \right\}_+ . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Тогда оператор  $\hat{L}_{\text{KG}}$  можно представить в виде

$$\hat{L}_{\text{KG}} = \sum_{k=0}^N \hbar^{k/2} \hat{L}_k + O(\hbar^{(N+3)/2}), \quad \hat{L}_k = \hat{O}(\hbar), \quad (6.9)$$

где

$$\hat{L}_0 = -[(-i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}(t)), \varepsilon(t)]_+, \quad (6.10)$$

а  $\hat{\lambda}(t)$  определен в (2.8). При  $k > 0$

$$\begin{aligned} \hbar^{k/2} \hat{L}_k = & -c^2 \hat{\delta}^k \vec{P}^2 - 2 \frac{e\varepsilon(t)}{k!} d^k \Phi(t) - \frac{ec}{(k-1)!} [\langle \vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1 \rangle, d^{k-1} \Phi(t)]_{++} \\ & + e^2 \sum_{l,n=2}^{\infty} \frac{\delta_{l+n,k}}{l!n!} d^l \Phi(t) d^n \Phi(t) - \left[ (-i\hbar\partial_t + \lambda^{(+)}(t) + \hat{\delta}^1 \lambda^{(+)}(t)), \left( c\langle \vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1 \rangle \delta_{k1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (-i\hbar\partial_t + \lambda^{(+)}(t) + \hat{\delta}^1 \lambda^{(+)}(t)) \delta_{k2} - \frac{e}{(k-2)!} (1 - \delta_{k1}) d^{(k-2)} \Phi(t) \right) \right]_+ . \end{aligned} \quad (6.11)$$

Подставив (6.1) и (6.9) в (5.1) и приравняв к нулю слагаемые, имеющие одинаковую оценку по степеням  $\hbar^{1/2}$ , получим следующую рекуррентную систему уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{L}_0 \Psi_{(0)}(\vec{x}, t, \hbar) &= 0, \\ \hat{L}_0 \Psi_{(1)}(\vec{x}, t, \hbar) + \hat{L}_1 \Psi_{(0)}(\vec{x}, t, \hbar) &= 0, \\ \hat{L}_0 \Psi_{(2)}(\vec{x}, t, \hbar) + \hat{L}_1 \Psi_{(1)}(\vec{x}, t, \hbar) + \hat{L}_2 \Psi_{(0)}(\vec{x}, t, \hbar) &= 0, \\ \dots \end{aligned} \quad (6.12)$$

Полный набор решений уравнения  $\hat{L}_0 \Psi = 0$  имеет вид

$$\Psi_{(0)}(\vec{x}, t, \hbar) = \sqrt{\frac{m_0 c^2}{\varepsilon(t)}} |\nu, t\rangle, \quad (6.13)$$

где функции  $|\nu, t\rangle$  определены выражением (2.6), в котором в качестве функции Гамильтона  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)$  надо положить  $\mathcal{H} = \lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$ . Решение оставшихся уравнений системы (6.12) находится стандартным образом (см. (I.16.7)):

$$\begin{aligned} \Psi_{\nu}^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar) &= \sqrt{\frac{m_0 c^2}{\varepsilon(t)}} \sum_{k=0}^N [\hat{\mathcal{K}}_1(t)]^k |\nu, t\rangle + O(\hbar^{(N+1)/2}), \\ \hat{\mathcal{K}}_1(t) \varphi(t) &= \sum_{|\nu'|=0}^{\infty} |\nu', t\rangle \int_0^t d\tau \langle \tau, \nu' | (\hat{L}_{\text{KG}} - \hat{L}_0) | \varphi(\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (6.14)$$



Однако операторы  $\hat{L}_k$  не являются самосопряженными относительно нормы в  $L_2$ , что приводит к трудностям в интерпретации функций (6.14) как волновых функций частицы. Поэтому рассмотрим следующую задачу [51]:

Найти в пространстве положительно-частотных квазиклассически сосредоточенных состояний Клейна–Гордона такие операторы  $\hat{T}$  и  $\hat{\mathcal{H}}$ , что

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t, \hbar) &= \hat{T}(t, \hbar)\Phi(\vec{x}, t, \hbar), \\ (-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}(t, \hbar))\Phi(\vec{x}, t, \hbar) &= 0, \\ \langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle_{\text{KG}} &= \langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle_{L_2},\end{aligned}\quad (6.15)$$

где оператор  $\hat{\mathcal{H}}$  — самосопряженный оператор в  $L_2$ . Развитый ранее аппарат позволяет дать решение поставленной задачи в любом порядке по  $\sqrt{\hbar}$ , т.е. для любого  $N$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} &= \hat{\mathcal{H}}^{(N)}(t, \hbar) + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}), \\ \hat{T}(t, \hbar) &= \hat{T}^{(N)}(t, \hbar) + \hat{O}(\hbar^{(N+1)/2}).\end{aligned}\quad (6.16)$$

Для простоты ниже мы ограничимся случаем  $N = 2$ . Приведем явный вид операторов  $\hat{\mathcal{H}}^{(2)}$ ,  $\hat{T}^{(2)}$  ( $\hat{T}^{(2)})^{-1}$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}^{(2)} &= \hat{\lambda}(t) + \frac{\delta^3}{3!}\lambda^{(+)}(t) + \frac{\delta^4}{4!}\lambda^{(+)}(t) + \\ &+ \hbar^2 \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{\varepsilon(t)} \right) + \frac{1}{2\hbar^2} \left[ \left[ \frac{(c\vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1)}{2\varepsilon(t)}, \hat{L}_0 \right]_-, \frac{(c\vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1)}{2\varepsilon(t)} \right]_+ \right\},\end{aligned}\quad (6.17)$$

где  $d/dt = \partial_t + \langle \dot{\vec{X}}, \vec{\nabla} \rangle$ ;

$$\begin{aligned}\hat{T}^{(2)}(t, \hbar) &= \left\{ 1 - \frac{1}{2\varepsilon(t)}(c\vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1) - \frac{1}{4\varepsilon(t)}[(\hat{\vec{P}}_1, \lambda_{pp}(t)\hat{\vec{P}}_1) - (c\vec{\beta}, d^2\vec{\mathcal{A}}) - 2\hat{L}_0] + \right. \\ &\left. + \frac{3}{4\varepsilon(t)} \frac{(c\vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1)^2}{2\varepsilon(t)} \right\} \sqrt{\frac{m_0 c^2}{\varepsilon(t)}};\end{aligned}\quad (6.18)$$

$$\begin{aligned}(\hat{T}^{(2)}(t, \hbar))^{-1} &= \left\{ 1 + \frac{1}{2\varepsilon(t)}(c\vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1) + \frac{1}{4\varepsilon(t)}[(\hat{\vec{P}}_1, \lambda_{pp}(t)\hat{\vec{P}}_1) - (c\vec{\beta}, d^2\vec{\mathcal{A}}) - 2\hat{L}_0] - \right. \\ &\left. - \frac{1}{4\varepsilon(t)} \frac{(c\vec{\beta}, \hat{\vec{P}}_1)^2}{2\varepsilon(t)} \right\} \sqrt{\frac{\varepsilon(t)}{m_0 c^2}}.\end{aligned}$$

Таким образом, оператор  $\hat{\mathcal{H}}^{(N)}$  не совпадает с оператором

$${}^{(+)}\hat{\mathcal{H}} = e\Phi(\vec{x}, t) + \sqrt{c^2\hat{\vec{P}}^2 + m_0^2 c^4},\quad (6.19)$$

упорядоченным по Вейлю. Однако операторы  $\hat{\mathcal{H}}$  (6.15) и  ${}^{(+)}\hat{\mathcal{H}}$  (6.19) различаются только во втором порядке по  $\hbar$ , что указывает на возможность их совпадения при другом способе упорядочения.

В заключение заметим, что операторы  $\hat{A}$  в представлении (6.15) связаны с операторами  $\hat{A}$  в теории Клейна–Гордона соотношением

$$\hat{A} = \hat{T}(t, \hbar)\hat{A}\hat{T}^{-1}(t, \hbar).\quad (6.20)$$

Соотношение (6.20) позволяет, в частности, на пространстве положительно-частотных квазиклассически-сосредоточенных состояний определить самосопряженные относительно скалярного произведения (6.8) операторы координат и импульсов (с любой степенью точности по  $\sqrt{\hbar}$ )

$$\begin{aligned}\hat{X} &= (\hat{T}^{(N)}(t, \hbar))^{-1} \vec{x} \hat{T}^{(N)}(t, \hbar) + \hat{O}(\hbar^{(N+1)/2}), \\ \hat{P} &= (\hat{T}^{(N)}(t, \hbar))^{-1} \hat{p} \hat{T}^{(N)}(t, \hbar) + \hat{O}(\hbar^{(N+1)/2}).\end{aligned}\quad (6.21)$$

◇ Вопросы, связанные с определением операторов координат и импульсов для уравнения Клейна–Гордона, обсуждались ранее [1, 65, 66].

Система уравнений Гамильтона–Эренфеста, отвечающая гамильтониану (6.17), при  $N = 2$  примет вид

$$\begin{cases} \dot{z} = J\lambda_z^{(+)}(z, t) + \frac{1}{2} \langle \partial_z, \Delta_2 \partial_z \rangle J\lambda_z^{(+)}(z, t), \\ \dot{\Delta}_2 = J\lambda_{zz}^{(+)}(z, t)\Delta_2 - \Delta_2 \lambda_{zz}^{(+)}(z, t)J, \quad \Delta_2^\dagger = \Delta_2, \end{cases}\quad (6.22)$$

где

$$z = Z(t, \hbar) = (\vec{P}(t, \hbar), \vec{X}(t, \hbar)), \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{pp} & \sigma_{px} \\ \sigma_{xp} & \sigma_{xx} \end{pmatrix}.$$

Система (6.22) — замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений для квантовых средних  $\vec{P}(t, \hbar)$ ,  $\vec{X}(t, \hbar)$  и  $\Delta_2$  по теории Клейна–Гордона.

## 7. Квазиклассические ТКС бесспиновой релятивистской частицы в произвольном электромагнитном поле

Для получения гарантированных квантовых поправок к характеристикам спонтанного излучения бесспиновой релятивистской частицы удобно использовать квазиклассическое траекторно-когерентное представление и достаточно ограничиться точностью  $O(\hbar^{5/2})$  (mod( $\hbar^{5/2}$ )) для ТКС уравнения Клейна–Гордона. Приведем явный вид соответствующих ТКС и оператора перехода в ТК-представление в форме, удобной для расчета матричных элементов.

Квазиклассические ТКС, удовлетворяющие уравнению Клейна–Гордона (5.1), с точностью до  $O(\hbar^{5/2})$  можно представить в виде (см. также (A.12))

$$\Psi_\nu^{(2)}(\vec{x}, t, \hbar) = \hat{K}_2(t, \hbar)[1 - i\hbar^{1/2}\hat{\mathcal{F}}_1 - i\hbar\hat{\mathcal{F}}_2 - \hbar\hat{\mathcal{F}}_1\hat{\mathcal{F}}_1]H_\nu(t). \quad (7.1)$$

Здесь оператор  $\hat{K}_2$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{K}_2(t, \hbar) &= \Psi_0(\vec{x}, t, \hbar) \left\{ 1 - \frac{\langle c\vec{\beta}, \hat{\mathcal{P}}_1' \rangle}{2\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} \left[ \frac{1}{2}(\hat{\delta}^2\lambda - ed^2\Phi) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (-i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}_0) \right] + \frac{3}{2} \left( \frac{\langle c\vec{\beta}, \hat{\mathcal{P}}_1' \rangle}{2\varepsilon} \right)^2 \right\} \sqrt{\frac{m_0c^2}{\varepsilon}}.\end{aligned}\quad (7.2)$$

Скалярная функция  $\Psi_0(\vec{x}, t, \hbar)$  — функция типа ВКБ-решения с комплексной фазой  $S(\vec{x}, t)$

$$\Psi_0(\vec{x}, t, \hbar) = \frac{N_\hbar}{\sqrt{\det C(t)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(\vec{x}, t)\right),$$

где  $S(\vec{x}, t)$  – действие на комплексном ростке [31] (см. также часть I) с неотрицательной мнимой частью ( $\text{Im } S(\vec{x}, t) \geq 0$ )

$$S(\vec{x}, t) = \int_0^t (\langle \vec{P}(t), \dot{\vec{X}}(t) \rangle - \lambda^{(+)}(t)) dt + \langle \vec{P}(t), \Delta \vec{x} \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \Delta \vec{x}, B(t) C^{-1}(t) \Delta \vec{x} \rangle, \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{k=1}^3 a_k b_k;$$

$3 \times 3$  комплексные матрицы  $B(t) = [\vec{W}_1(t), \vec{W}_2(t), \vec{W}_3(t)]$ ,  $C(t) = [\vec{Z}_1(t), \vec{Z}_2(t), \vec{Z}_3(t)]$  являются решениями системы в вариациях ( $\det C(t) \neq 0$ ,  $\text{Im}(B(t)C^{-1}(t)) > 0$ ) (2.5)

$$\begin{pmatrix} \dot{B}(t) \\ \dot{C}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_{xp}^{(+)}(t) & -\lambda_{xx}^{(+)}(t) \\ \lambda_{pp}^{(+)}(t) & \lambda_{px}^{(+)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B(t) \\ C(t) \end{pmatrix}, \quad (7.3) \\ B(0) = \|b_i \delta_{ij}\|_{3 \times 3}, \quad C(0) = \|\delta_{ij}\|_{3 \times 3}, \\ \text{Im } b_i > 0 \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

и<sup>4</sup>

$$\lambda^{(\pm)} = e\Phi(\vec{p}, \vec{x}, t) \pm \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t), \quad \varepsilon(\vec{p}, \vec{x}, t) = \sqrt{c^2 \vec{P}^2 + m_0^2 c^4},$$

$\lambda_{px}^{(+)}(t)$ ,  $\lambda_{xx}^{(+)}(t)$ ,  $\lambda_{pp}^{(+)}(t)$ ,  $\lambda_{px}^{(+)}(t)$  –  $3 \times 3$ -матрицы, составленные из вторых производных функции  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t)$ , вычисленные в точке  $Z(t, z_0) = (\vec{X}(t, z_0), \vec{P}(t, z_0))$ ,  $z_0 = (\vec{p}_0, \vec{x}_0) \in \mathbb{R}_{px}^6$ ,  $\vec{X}(t)$ ,  $\vec{P}(t)$  – решение классической системы Гамильтона (1.7) с начальными условиями (2.1). Через  $\hat{\mathcal{P}}'_1$  в (7.2) обозначен оператор  $\hat{\delta}^1 \vec{P}(t) = \Delta \hat{\mathcal{P}}'_1 - (e/c) d^1 \vec{A}(t)$ . Здесь и дальнейшем используются обозначения

$$\begin{aligned} \hat{\delta}^k \varphi(t) &= (\langle \Delta \vec{x}, \nabla_z \rangle + \langle \Delta \hat{\mathcal{P}}'_1, \nabla_y \rangle)^k \varphi(\vec{y}, \vec{z}, t) \Big|_{\substack{\vec{y} = \vec{P}(t) \\ \vec{z} = \vec{X}(t)}}, \\ d^k \varphi(t) &= (\langle \Delta \vec{x}, \nabla_z \rangle)^k \varphi(\vec{z}, t) \Big|_{\vec{z} = \vec{X}(t)}, \\ \Delta \hat{\mathcal{P}}'_1 &= -i\hbar \nabla + B(t) C^{-1}(t) \Delta \vec{x}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Приведем явный вид операторов  $\hat{\lambda}_0^{(+)}$ ,  $\hat{\delta}^1 \lambda^{(+)}(t)$ ,  $\hat{\delta}^2 \lambda^{(+)}(t)$ ,  $\hat{\delta}^3 \lambda^{(+)}(t)$ :

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_0^{(+)} &= \left(1 + \hat{\delta}^1 + \frac{\hat{\delta}^2}{2}\right) \lambda^{(+)}(t) + (\Psi_0)^{-1} (-i\hbar \partial_t \Psi_0), \\ \hat{\delta}^1 \lambda^{(+)}(t) &= e d^1 \Phi + e \langle \vec{\beta}, \hat{\mathcal{P}}'_1 \rangle, \\ \hat{\delta}^2 \lambda^{(+)}(t) &= e (d^2 \Phi - \langle \vec{\beta}, d^2 \vec{A} \rangle) + \langle \hat{\mathcal{P}}'_1, \lambda_{pp}^{(+)} \hat{\mathcal{P}}'_1 \rangle, \\ \frac{1}{3!} \hat{\delta}^3 \lambda^{(+)}(t) &= \frac{e}{3!} (d^3 \Phi - \langle \vec{\beta}, d^3 \vec{A} \rangle) - \frac{e}{4c} [\langle d^2 \vec{A}, \lambda_{pp}^{(+)} \hat{\mathcal{P}}'_1 \rangle]_+ + \\ &\quad + \frac{c}{4\varepsilon} [\langle \vec{\beta}, \hat{\mathcal{P}}'_1 \rangle \langle \hat{\mathcal{P}}'_1, \lambda_{pp}^{(+)} \hat{\mathcal{P}}'_1 \rangle]_+. \end{aligned} \quad (7.5)$$

<sup>4</sup>Здесь приведены «положительно-частотные» ТКС уравнения (5.1), порождаемые фазовой траекторией системы Гамильтона (1.7) с функцией Гамильтона  $\lambda^{(+)}$ . «Отрицательно-частотные» ТКС строятся по той же схеме при замене  $\lambda^{(+)}$  на  $\lambda^{(-)}$ .

Здесь обозначено  $[\hat{A}, \hat{B}]_{\pm} = \hat{A}\hat{B} \pm \hat{B}\hat{A}$ . Определим также оператор  $\hat{\mathcal{F}}_1$  в (7.1)

$$\hat{\mathcal{F}}_1|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{\hbar} \sum_{|\nu|=0}^{\infty} |H_{\nu}(t)\rangle \int_0^t d\tau \langle H_{\nu}(\tau) | \frac{1}{3!} \hat{\delta}^3 \lambda^{(+)}(\tau) |\varphi(\tau)\rangle_{L_{\hbar}^t}. \quad (7.6)$$

Поскольку оператор  $\hat{\mathcal{F}}_2$  в (7.1) не окажет влияния на первую квантовую поправку к мощности спонтанного излучения, мы не приводим его явного вида. Функции  $|H_{\nu}(t)\rangle$  в (7.1) имеют вид

$$|H_{\nu}(t)\rangle = \prod_{l=1}^3 \frac{1}{\sqrt{\nu_l!}} (\hat{\Lambda}_l^+)^{\nu_l} \cdot 1, \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \nu_l = \overline{0, \infty}, \quad (7.7)$$

где  $\hat{\Lambda}_l^+$ ,  $\hat{\Lambda}_l$  – «обобщенные» операторы «рождения» и «уничтожения»:  $\hat{\Lambda} = (\hat{\Lambda}_1, \hat{\Lambda}_2, \hat{\Lambda}_3)$ ;  $\hat{\Lambda}^+ = (\hat{\Lambda}_1^+, \hat{\Lambda}_2^+, \hat{\Lambda}_3^+)$ ;

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_l^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar \operatorname{Im} b_l}} (\langle \vec{Z}_l^*, \Delta \vec{p}' \rangle - \langle \vec{W}_l^*, \Delta \vec{x} \rangle), \\ \hat{\Lambda}_l &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar \operatorname{Im} b_l}} (\langle \vec{Z}_l, \Delta \hat{p}' \rangle - \langle \vec{W}_l, \Delta \vec{x} \rangle), \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{X}(t), \quad \Delta \hat{p}' = -i\hbar \nabla + B(t)C^{-1}(t)\Delta \vec{x} \quad (l = 1, 2, 3)$$

со стандартными (бозевскими) коммутационными соотношениями

$$[\hat{\Lambda}_j, \hat{\Lambda}_k]_- = [\hat{\Lambda}_j^+, \hat{\Lambda}_k^+]_- = 0, \quad [\hat{\Lambda}_j, \hat{\Lambda}_k^+]_- = \delta_{kj}.$$

В дальнейшем нам потребуются соотношения, выражающие операторы  $\Delta \vec{x}$  и  $\Delta \hat{p}'$  через операторы  $\hat{\Lambda}^+$  и  $\hat{\Lambda}$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta \vec{x} \\ \Delta \hat{p}' \end{pmatrix} &= T \begin{pmatrix} \hat{\Lambda} \\ \hat{\Lambda}^+ \end{pmatrix}, \\ T &= i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} \begin{pmatrix} B^*(t)D_0^{1/2} & -B(t)D_0^{1/2} \\ C^*(t)D_0^{1/2} & -C(t)D_0^{1/2} \end{pmatrix}, \\ D_0^{1/2} &= \|(\operatorname{Im} b_i)^{-1/2} \delta_{ik}\|_{3 \times 3}, \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Через  $\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle_{L_{\hbar}^t}$  обозначим скалярное произведение в гильбертовом пространстве  $L_{\hbar}^t$  состояний, локализованных при  $\hbar \rightarrow 0$  в окрестности классической траектории (A.2):

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1(\vec{x}, t, \hbar) | \varphi_2(\vec{x}, t, \hbar) \rangle_{L_{\hbar}^t} &= \int d^3x \rho_{\hbar}(\vec{x}, t) \varphi_1^*(\vec{x}, t, \hbar) \varphi_2(\vec{x}, t, \hbar), \\ \rho_{\hbar}(\vec{x}, t) &= N_{\hbar}^2 |\det C(t)|^{-1} \exp((-2 \operatorname{Im} S(\vec{x}, t))/\hbar). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Заметим, что операторы  $\Delta \vec{x}$ ,  $\Delta \hat{p}'$ ,  $\hat{\mathcal{F}}_1$  являются самосопряженными в  $L_{\hbar}^t$ , а функции  $|H_{\nu}(t)\rangle$  образуют в  $L_{\hbar}^t$  полный ортонормированный набор

$$\langle H_{\nu'}(t) | H_{\nu}(t) \rangle_{L_{\hbar}^t} = \delta_{\nu\nu'}. \quad (7.11)$$

Кроме того, справедливы равенства

$$\begin{aligned}\hat{\Lambda}_l|H_\nu(t)\rangle &= \sqrt{\nu_l}|H_{\nu_1,\dots,\nu_{l-1},\dots,\nu_3}\rangle, \\ \hat{\Lambda}_l^+|H_\nu(t)\rangle &= \sqrt{\nu_l+1}|H_{\nu_1,\dots,\nu_{l+1},\dots,\nu_3}\rangle.\end{aligned}\quad (7.12)$$

Соотношения (7.9), (7.11) и (7.12) позволяют вычислить матричные элементы произвольного оператора  $\hat{A}(t) = A(\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{x}}, t, \hbar)$  по функциям  $\Psi_\nu^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar)$  с точностью до  $O(\hbar^{(N+1)/2})$ , если символ оператора  $\hat{A}(t)$  удовлетворяет предположению 1. Для этого разложим оператор  $\hat{A}_\hbar(t)$  в окрестности положения  $z(t, z_0)$  классической частицы на фазовой траектории в ряд Тейлора по степеням операторов  $\Delta\hat{\vec{x}}, \Delta\hat{\vec{p}}$

$$\hat{A}_\hbar(t) = A(\hat{\vec{p}}, \hat{\vec{x}}, t, \hbar) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \hat{\delta}^k A(t) + \hat{O}(\hbar^{(N+1)/2}), \quad (7.13)$$

где  $\hat{\delta}^k A(t)$  определено в (7.4). В качестве иллюстрации указанной схемы в главе III мы вычислим матричные элементы тока перехода с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ .

## 8. Нерасплывающиеся квазиклассические волновые пакеты для аксиально-симметричных квантовых систем

Представление о волновом пакете как о волновой функции, локализованной в ограниченной области конфигурационного пространства, возникшее еще в работах Шрёдингера и Эренфеста [11, 67–69], является одним из фундаментальных понятий квантовой механики. Многие проблемы квантовой теории, например, проблема предельного перехода из квантовой механики в классическую или проблема спонтанного излучения в ультрарелятивистском приближении [6, 56] имеют конструктивное решение в предположении, что существуют квантово-механические состояния рассматриваемых систем в виде волновых пакетов, остающихся «узкими» (локализованными) неограниченно долго, в то время как форма пакета оказывается несущественной.

Сформулируем постановку задачи о построении локализованных в окрестности классической траектории волновых пакетов, не расплывающихся с течением времени, на примере многомерной нерелятивистской квантовой системы, а потом перейдем к рассмотрению уравнения Клейна–Гордона.

Рассмотрим квантовую систему, динамика которой задается гамильтонианом  $\hat{\mathcal{H}}(t)$ , имеющим классический аналог — функцию Гамильтона  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)$ , равную  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t, 0)$ , где  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar)$  — полный символ оператора  $\hat{\mathcal{H}}(t)$ . Пусть  $\Psi(t)$  — динамическое состояние уравнения типа Шрёдингера

$$i\hbar\partial_t\Psi(t) = \hat{\mathcal{H}}(t)\Psi(t), \quad \Psi(0) = \Psi^0. \quad (8.1)$$

Условие нерасплывания квазиклассически сосредоточенного состояния уравнения (8.1) (волнового пакета)  $\Psi(t)$  естественно сформулировано как ограниченность во времени дисперсий координат и импульсов частицы

$$\begin{aligned}\max_{0 \leq t < \infty} |\sigma_{x_i, x_j}(t, \hbar)| &< \infty, & i, j = \overline{1, n}, \\ \max_{0 \leq t < \infty} |\sigma_{p_i, p_j}(t, \hbar)| &< \infty, & \hbar \in ]0, 1[.\end{aligned}\quad (8.2)$$

Точные решения уравнения (8.1) в форме нерасплывающихся волновых пакетов удается построить лишь в исключительных случаях. (По существу, все эти случаи исчерпываются квадратичными по  $\vec{x}$  и  $\vec{p}$  гамильтонианами [70]. Вопрос построения нерасплывающихся волновых пакетов для релятивистских и неквадратичных систем обсуждался в [70, 71].) Для гамильтонианов общего вида естественна задача о построении волновых пакетов, локализованных в окрестности классической траектории, в квазиклассическом приближении. Подчеркнем, что приближенные квазиклассически сосредоточенные состояния аппроксимируют при  $\hbar \rightarrow 0$  точное решение уравнения (8.1) с начальными условиями  $\Psi_\nu(\vec{x}, 0, \hbar)$  лишь для конечных интервалов времени  $t \in [0, T]$ , где  $T > 0$  не зависят от  $\hbar$ . Поэтому оценка нерасплывающегося квазиклассического пакета на всех временах требует дополнительных исследований.

Приведем выражения для первых и вторых моментов, вычисленных по квазиклассическим ТКС, которые являются базисом в пространстве квазиклассически сосредоточенных состояний  $\mathbb{CS}_S^{(3)}(Z(t), \infty)$ :

$$\begin{aligned} \langle x_j \rangle &= X_j(t) + O(\hbar), & \langle p_j \rangle &= P_j(t) + O(\hbar), & j &= \overline{1, n}; \\ \sigma_{xx}(t, \hbar) &= \frac{\hbar}{4} [C(t) D_\nu^{-1} C^+(t) + C^*(t) D_\nu^{-1} C^t(t)] + O(\hbar^2), \\ \sigma_{pp}(t, \hbar) &= \frac{\hbar}{4} [B(t) D_\nu^{-1} B^+(t) + B^*(t) D_\nu^{-1} B^t(t)] + O(\hbar^2); \\ D_\nu^{-1} &= \left\| \frac{2\nu_l + 1}{\text{Im } b_l} \delta_{kl} \right\|_{n \times n}, & \nu &= (\nu_1, \dots, \nu_n). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Матрицы  $B(t)$  и  $C(t)$  — решения системы в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{B} &= -\mathcal{H}_{xp}(t)B - \mathcal{H}_{xx}(t)C, & B(0) &= \|b_k \delta_{kj}\|, \\ \dot{C} &= \mathcal{H}_{pp}(t)B + \mathcal{H}_{px}(t)C, & C(0) &= \|\delta_{kj}\|, \quad \text{Im } b_k > 0. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Здесь  $\mathcal{H}_{pp}$ ,  $\mathcal{H}_{xx}$ ,  $\mathcal{H}_{xp}$ ,  $\mathcal{H}_{px}$  — матрицы, составленные из соответствующих вторых производных функции  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t, 0)$ , вычисленных в точке  $Z = (\vec{P}(t), \vec{X}(t))$ , где  $\vec{P}(t)$ ,  $\vec{X}(t)$  — решения классической системы Гамильтона.

Заметим, что приведенные выражения остаются справедливыми и для релятивистских квантовых систем.

Сформулируем условие, обеспечивающее нерасплывание (в смысле (8.2)) квазиклассических ТКС: для того чтобы волновой пакет  $\Psi_\nu(\vec{x}, t, \hbar)$ , представляющий собой главный член квазиклассической асимптотики, не расплывался, необходимо и достаточно (см. (8.3)), чтобы все решения системы в вариациях (8.4) были ограничены во времени  $t \in [0, \infty]$ .<sup>5</sup>

Если классическая система допускает одну циклическую переменную  $\varphi \pmod{2\pi}$ , условие ограниченности решений системы в вариациях для семейства равновесных окружностей можно записать в более простой форме.

В этом случае  $2n$  линейно независимых решений систем в вариациях (8.4) имеют вид

$$\begin{aligned} a_1 &= (\dot{\vec{P}}(t), \dot{\vec{X}}(t)), & a_2 &= \left( \frac{\partial \vec{P}(t)}{\partial E}, \frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial E} \right), \\ a_k(t+T) &= e^{\Omega_k T} a_k(t), & k &= \overline{3, 2n}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где  $\Omega_k, a_k(0)$  — собственные векторы и собственные значения матрицы монодромии системы (8.4). Требование существования комплексного роста эквивалентно устойчивости классической траектории, т.е. условию  $\text{Re } \Omega_k = 0$ . Решения

<sup>5</sup>Это условие, разумеется, не является достаточным условием нерасплывания точного решения, которое в начальный момент времени совпадает с квазиклассическим ТКС, поскольку, как мы уже отмечали, асимптотические оценки справедливы только для конечных временных интервалов  $[0, T]$ .

системы в вариациях (8.4) имеют наиболее простой вид в системе координат, где  $\tilde{x}_n = \varphi$  — циклическая координата. Тогда гамильтониан имеет вид  $\mathcal{H}(\vec{p}, I, \vec{x})$ , где  $I$  — импульс, сопряженный координате  $\varphi$ . Уравнение семейства равновесных окружностей примет вид

$$\Lambda^1(I) = \{p^k = p_0^k, p^n = I, x^k = x_0^k, \varphi = \omega(I)t + \varphi_0, k = 1, \dots, n-1\},$$

а решение соответствующей системы в вариациях

$$\tilde{a}_1 = (\vec{0}, 0, \vec{0}, \omega(I)), \quad \tilde{a}_2 = \left( \frac{\partial \vec{p}_0}{\partial E}, \frac{\partial I}{\partial E}, \frac{\partial \vec{x}_0}{\partial E}, \frac{\partial \omega}{\partial E} t \right), \quad \tilde{a}_k(t) = e^{\tilde{\Omega}_k t} a_k(0), \quad (8.6)$$

где  $\tilde{\Omega}_k, \tilde{a}_k$  — собственные векторы и собственные значения матрицы в вариациях

$$\mathcal{H}_{\text{var}} = \begin{pmatrix} -\mathcal{H}_{xp} & -\mathcal{H}_{xx} \\ \mathcal{H}_{pp} & \mathcal{H}_{px} \end{pmatrix}.$$

Как следует из теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений, условие (8.2) будет выполняться, если  $\partial\omega/\partial E = 0$  и отсутствуют присоединенные векторы.

Рассмотрим нерелятивистскую заряженную частицу, движение которой описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + e\Phi, \quad \vec{P} = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}, \quad (8.7)$$

$$\vec{A} = H(r)(-y, x), \quad \Phi = A_0 r^\mu, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Система Гамильтона при заданной энергии  $E$  допускает решения вида

$$\vec{X}(t) = R(\cos \omega t, \sin \omega t), \quad \vec{P}(t) = m\dot{\vec{X}} - \frac{e}{c}\vec{A}, \quad (8.8)$$

где  $R$  удовлетворяет условию

$$m\frac{\omega^2 R^2}{2} + A_0 R = E,$$

а

$$\omega = \frac{\omega_1}{2} + \sqrt{\frac{\omega_1^2}{4} + \omega_2^2}, \quad (8.9)$$

$$\omega_1 = \frac{e}{mc}[RH'(R) + 2H], \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{eA_0}{m}\mu R^{\mu-2}}, \quad H' = \frac{\partial H}{\partial R} = \frac{dH}{dR}\Big|_{r=R}.$$

Определим  $H(r)$  и  $\mu$ , для которых траектория (8.8) устойчива. Коэффициенты системы в вариациях (8.4) примут вид

$$\mathcal{H}_{pp} = e^{-i\omega\sigma_2 t} \left[ \frac{1}{m} \mathbb{I} \right] e^{i\omega\sigma_2 t},$$

$$\mathcal{H}_{px} = \mathcal{H}_{xp}^\dagger = e^{-i\omega\sigma_2 t} \left[ -i\frac{\omega_1}{2}\sigma_2 + \frac{eRH'}{2mc}\sigma_1 \right] e^{i\omega\sigma_2 t},$$

$$\mathcal{H}_{xx} = e^{-i\omega\sigma_2 t} \left\{ m \left[ \mu\frac{\omega_2^2}{2} + \omega R\frac{\omega_1'}{2} + \left( \frac{eH}{mc} \right)^2 + \frac{eR\omega_1 H'}{2mc} \right] \mathbb{I} \right\} + \quad (8.10)$$

$$+ \frac{m}{2} \left[ (\mu - 2)\omega_2^2 + \omega_1 R\frac{eH'}{mc} + \frac{eR\omega}{mc}(H' + RH'')\sigma_3 \right] e^{i\omega\sigma_2 t}.$$

Здесь  $\mathbb{I}$  — единичная матрица,  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  — матрица Паули. Решения системы в вариациях (8.4) будем искать в виде

$$B(t) = e^{-i\omega\sigma_2 t} A, \quad C(t) = e^{-i\omega\sigma_2 t} D. \quad (8.11)$$

Тогда, исключив матрицу  $A$  из полученной системы уравнений при помощи соотношения

$$A = m \left\{ \dot{D} - i \left[ \left( \omega - \frac{\omega_1}{2} \right) \sigma_2 - i \frac{eRH'}{2m} \sigma_1 \right] D \right\}, \quad (8.12)$$

найдем

$$\ddot{D} - 2i \left( \omega - \frac{\omega_1}{2} \right) \sigma_2 \dot{D} + \left[ (\mu - 2) \frac{\omega_2^2}{2} + \omega R \frac{\omega_1'}{2} \right] (1 + \sigma_3) D = 0. \quad (8.13)$$

Матрицу  $D$  будем искать в виде

$$D = e^{kt} (\vec{U}^{(1)}(k), \vec{U}^{(2)}(k)), \quad \vec{U}^{(1,2)} = c^{(1,2)} \vec{V}(k).$$

В результате вектор  $\vec{V}$  будет решением задачи на собственные значения

$$\left\{ k^2 - 2i \left( \omega - \frac{\omega_1}{2} \right) k \sigma_2 + \left[ (\mu - 2) \frac{\omega_2^2}{2} + \omega R \frac{\omega_1'}{2} \right] (1 + \sigma_3) \right\} \vec{V} = 0. \quad (8.14)$$

Уравнение (8.14) имеет нетривиальное решение, если

$$\det \left\{ k^2 - 2i \left( \omega - \frac{\omega_1}{2} \right) k \sigma_2 + \left[ (\mu - 2) \frac{\omega_2^2}{2} + \omega R \frac{\omega_1'}{2} \right] (1 + \sigma_3) \right\} = 0.$$

Следовательно,

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = -k_4 = i \sqrt{(\mu + 2) \omega_2^2 + \omega R \omega_1' + \omega_1^2}. \quad (8.15)$$

Корни  $k_1$  и  $k_2$  кратные, следовательно, уравнение (8.14) при  $k = 0$  будет иметь два линейно независимых решения, если ранг матрицы системы равен нулю, т.е.

$$\left[ (\mu - 2) \frac{\omega_2^2}{2} + \omega R \frac{\omega_1'}{2} \right] = 0. \quad (8.16)$$

Домножив соотношение (8.16) на  $(2R(\omega - \omega_1/2))^{-1}$ , получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial R} = 0. \quad (8.17)$$

Условие (8.2) тогда примет вид

$$(\mu + 2) \omega_2^2 + \omega R \omega_1' + \omega_1^2 > 0,$$

что эквивалентно условию  $\partial \omega / \partial E = 0$ .

Рассматривая соотношение (8.17) как уравнение для неизвестной функции  $H(r)$ , получим

$$\omega(R) = C_1, \quad (8.18)$$

где  $C_1$  — произвольная константа.

Подставив (8.2) в (8.18), найдем

$$\omega_2^2 = C_1^2 - \omega_1 C_1.$$



Полученное соотношение можно рассматривать как уравнение для  $H(r)$

$$H' + \frac{2H}{R} = \frac{mc}{eR} \left( C_1 - \mu \frac{eA_0}{mC_1} r^{\mu-2} \right).$$

Следовательно,

$$H(r) = \frac{C_2}{r^2} + \frac{mc}{2e} C_1 - \frac{\mu c A_0}{(\mu + 2) C_1} r^\mu. \quad (8.19)$$

Таким образом, во внешнем поле (8.7), (8.19)

$$\Phi = A_0 r^\mu, \quad \vec{A}(\vec{x}) = H(r)(-y, x)$$

волновой пакет (квазиклассические ТКС  $\Psi_\nu(\vec{x}, t, \hbar)$ ) не расплываются (на траекториях (8.8)).

Выпишем в заключение решение системы в вариациях (матрицу  $C$ ) в явном виде

$$C(t) = \sum_{l=2}^4 e^{-i(\omega\sigma_2 - \Omega_l)t} G_l, \quad (8.20)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = -\Omega_4 = \Omega, \quad \Omega = \sqrt{4\omega_2^2 + \omega_1^2}, \\ G_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\Omega} & \left( \frac{b_2}{m\Omega} \right) \\ -\frac{b_1}{m\Omega} & \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\Omega} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{RH'}{2m}, \\ G_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\Omega} - \frac{ib_1}{m\Omega} & -i \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\Omega} - \frac{ib_2}{m\Omega} \right) \\ i \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\Omega} - \frac{ib_1}{m\Omega} \right) & \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\Omega} - \frac{ib_2}{m\Omega} \end{pmatrix}, \\ G_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\Omega} + \frac{ib_1}{m\Omega} & i \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\Omega} + \frac{ib_2}{m\Omega} \right) \\ -i \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{\Omega} + \frac{ib_1}{m\Omega} \right) & \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{\Omega} + \frac{ib_2}{m\Omega} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Рассмотрим теперь классическую заряженную частицу, описываемую гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \varepsilon + e\Phi(r), \quad \varepsilon = \sqrt{c^2 p_r^2 + \frac{c^2}{r^2} \mathcal{P}_\varphi^2 + c^2 p_z^2 + m^2 c^4}, \quad (8.22)$$

где  $\mathcal{P}_\varphi = p_\varphi + \frac{e}{c} \mathcal{A}_\varphi$ ,  $\mathcal{A}_\varphi = r^2 H(r) + \alpha(r) z^2$ . Классическая система Гамильтона, отвечающая (8.22), имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= -\mathcal{H}_r = -\frac{c^2}{\varepsilon} \left[ -\frac{\mathcal{P}_\varphi^2}{r^3} + \frac{e}{c} \frac{\mathcal{P}_\varphi}{r^2} \partial_r \mathcal{A}_\varphi \right] - e \partial_r \Phi, \\ \dot{r} &= \mathcal{H}_{p_r} = \frac{c^2}{\varepsilon} p_r, \quad \dot{\varphi} = \mathcal{H}_{p_\varphi} = \frac{c^2}{r^2 \varepsilon} \mathcal{P}_\varphi, \quad \dot{p}_\varphi = -\mathcal{H}_\varphi = 0, \\ \dot{z} &= \mathcal{H}_{p_z} = \frac{c^2}{\varepsilon} p_z, \quad \dot{p}_z = -\mathcal{H}_z = -\frac{c^2}{\varepsilon} \left[ \frac{e}{c} \frac{\mathcal{P}_\varphi}{r^2} \partial_z \mathcal{A}_\varphi \right]. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Циклическая переменная  $\varphi$  отделяется:

$$\mathcal{P}_\varphi = I, \quad \varphi = c^2 \int_0^t \frac{\mathcal{P}_\varphi}{r^2(t)\varepsilon} dt + \varphi_0, \quad (8.24)$$

где

$$\mathcal{P}_\varphi = I + \frac{e}{c} \mathcal{A}_\varphi(R(t), Z(t)); \quad \varepsilon = \varepsilon(P_r(t), I, P_z(t), Z(t)),$$

а  $R(t), Z(t), P_r(t), P_z(t)$  — решения приведенной системы Гамильтона с гамильтонианом

$$\mathcal{H}(I) = \sqrt{c^2 p_r^2 + \frac{c^2}{r^2} \left( I + \frac{e}{c} \mathcal{A}_\varphi \right)^2} + p_z^2 + m^2 c^4 + e\Phi(r). \quad (8.25)$$

Точка покоя приведенной системы Гамильтона определяется условиями  $\dot{p}_r = \dot{p}_z = \dot{r} = \dot{z} = 0$ . В этом случае фазовая кривая имеет вид

$$\Lambda^1(I) = \left\{ r = R, \varphi = \omega t + \varphi_0, z = 0, p_r = 0, p_\varphi = I, p_z = 0 \right\}. \quad (8.26)$$

где  $\omega = \partial \mathcal{H} / \partial p_\varphi = c^2 \mathcal{P}_\varphi / \varepsilon R^2$ , а  $R$  определяется уравнением  $\mathcal{H}(R, I) = E_0$ .

Из условия  $\dot{p}_r = 0$  следует, что

$$\omega = \frac{\omega_1}{2} + \sqrt{\frac{\omega_1^2}{4} + \omega_2^2}, \quad \omega_1 = \frac{ecF'}{\varepsilon R}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{ec^2\Phi'}{\varepsilon R}}, \quad (8.27)$$

$$F = R^2 H(R), \quad \Phi' = \Phi'(r)|_{r=R}, \quad F' = F'(r)|_{r=R}$$

Система в вариациях, отвечающая траектории (8.27), примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{W}} &= -\mathcal{H}_{p_\varphi r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{W} - \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{H}_{zz} \end{pmatrix} \vec{Z}, \\ \dot{\vec{Z}} &= \begin{pmatrix} c^2/\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{H}_{p_\varphi p_\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & c^2/\varepsilon \end{pmatrix} \vec{W} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{H}_{p_\varphi r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{Z}. \end{aligned} \quad (8.28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{p_\varphi r} &= -\frac{2}{R} \left( \omega - \frac{\omega_1}{2} \right) + \frac{R\omega^2(\omega - \omega_1)}{c^2}, \quad \mathcal{H}_{p_\varphi p_\varphi} = \frac{c^2}{\varepsilon R^2} \left( 1 - \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \right), \\ \mathcal{H}_{zz} &= 2\frac{e}{c} \alpha(R)\omega, \quad \mathcal{H}_{rr} = \frac{\varepsilon}{c^2} \left[ 3\omega^2 - 4\omega\omega_1 + \omega_1^2 + \frac{ec}{\varepsilon} F'' + \frac{ec^2\Phi''}{\varepsilon} - \frac{R^2\omega^2}{c^2} (\omega - \omega_1)^2 \right]. \end{aligned}$$

Найдем собственные векторы и собственные значения матрицы  $\mathcal{H}_{\text{var}}$

$$\mathcal{H}_{\text{var}} f_k = k f_k, \quad \mathcal{H}_{\text{var}} = \begin{pmatrix} -\mathcal{H}_{xp} & -\mathcal{H}_{xx} \\ -\mathcal{H}_{pp} & -\mathcal{H}_{px} \end{pmatrix}. \quad (8.29)$$

После несложных вычислений получим

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = k_4 = i\Omega_1, \quad k_5 = -k_6 = i\Omega_2, \quad (8.30)$$

где

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{c^2}{\varepsilon} \mathcal{H}_{rr}}, \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{c^2}{\varepsilon} \mathcal{H}_{zz}},$$

$$f(k_1) = N_1(0, 0, 0, 0, \omega, 0), \quad f(k_{3,4}) = N_{3,4}\left(k_{3,4}, 0, 0, \frac{c^2}{\varepsilon}, \frac{c^2}{\varepsilon k_{3,4}} \mathcal{H}_{p_\varphi r}, 0\right),$$

$$f(k_{5,6}) = N_{5,6}\left(0, 0, k_{5,6}, 0, 0, \frac{c^2}{\varepsilon}\right), \quad N_j = \text{const}, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Если выполнены условия

$$\det \mathcal{H}_{\text{var}} = 0, \quad (8.31)$$

то существует собственный вектор

$$k_1 = 0 : f(k_2) = N_2(0, \mathcal{H}_{p_\varphi r}, 0, -\mathcal{H}_{p_\varphi p_\varphi}, 0, 0),$$

отвечающий собственному значению  $k_1 = 0$  и линейно независимый с вектором  $f(k_1)$ . Общее решение системы в вариациях в этом случае имеет вид

$$a(t) = \sum_{j=1}^6 c_j f(k_j) e^{k_j t}, \quad \text{Re } k_j > 0$$

и содержит только периодические функции, если  $\mathcal{H}_{rr} > 0$ ,  $\mathcal{H}_{zz} > 0$ .

Нетрудно показать, что решения системы в вариациях в декартовой системе координат также ограничены.

## ГЛАВА 2

# Квазиклассически сосредоточенные состояния релятивистских волновых уравнений в искривленном пространстве-времени

### 9. О приближении Эренфеста для квантово-механических уравнений в римановом пространстве

Данная глава посвящена дальнейшему развитию метода квазиклассически сосредоточенных состояний.

Проблема нахождения решений волновых уравнений занимает важное место при исследовании квантовых явлений в искривленном пространстве-времени. В терминах полного набора решений этих уравнений можно построить один из центральных объектов теории – пропагатор во внешнем гравитационном поле, провести вычисление амплитуд квантовых процессов в искривленном пространстве-времени, изучить структуру средних значений (см., например, [72–75]).

Простейшим волновым уравнением в искривленном пространстве-времени является уравнение для скалярного поля  $\Psi(x)$ , которое получается общековариантным обобщением уравнения Клейна–Гордона с возможным добавлением членов, описывающих неминимальную связь с гравитационным полем (обсуждение роли неминимальной связи проведено в работе [76]). Мы будем записывать это уравнение в виде

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{KG}}\Psi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g}}\hat{\mathcal{P}}_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\hat{\mathcal{P}}_\nu) - U(x) - m^2c^2 \right\} \Psi = 0. \quad (9.1)$$

Здесь  $g_{\mu\nu}(x)$  – метрика риманова пространства с сигнатурой  $(+, -, -, -)$ ,  $g = \det(g_{\mu\nu})$ ;  $m$  – масса частицы;  $c$  – скорость света;  $\hat{\mathcal{P}}_\mu = -i\hbar\partial_\mu - (e/c)\mathcal{A}_\mu(x)$ ,  $\mathcal{A}_\mu(x)$  – потенциалы внешнего электромагнитного поля. Функция  $U(x)$  играет роль внешнего скалярного поля. Например, при  $U = \hbar^2 R/6$ , где  $R$  – скалярная кривизна, уравнение (9.1) в безмассовом случае инвариантно относительно конформных преобразований [77, 78]. При  $U = \hbar^2\xi R$ , где  $\xi$  – параметр, в уравнение скалярного поля включена произвольная неминимальная связь с гравитационным полем (см., например, [76]). Уравнение (9.1) можно рассматривать также как уравнение для малых возмущений в теории скалярного поля с взаимодействием  $\lambda\varphi^4/4$  при наличии фонового скалярного поля  $\Phi(x)$ . В этом случае  $U(x) = \lambda\Phi^3(x)$ . В целом мы видим, что уравнение (9.1) представляет достаточно общее описание скалярного поля в искривленном пространстве-времени при наличии внешнего электромагнитного и фонового скалярного полей.

Хорошо известно, что в линейном пространстве решений уравнения (9.1) можно определить инвариантное скалярное произведение. Пусть  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – два (вообще говоря) комплексных решения уравнения (9.1), тогда скалярное произведение этих решений можно записать в виде

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \frac{A^2}{2mc} \int_{\Sigma} d\Sigma^\mu [(\hat{\mathcal{P}}_\mu \Psi_2)^* \Psi_1 + \Psi_2^* (\hat{\mathcal{P}}_\mu \Psi_1)]. \quad (9.2)$$

Здесь  $A$  – произвольная постоянная, введенная из соображений удобства,  $\Sigma$  – пространственноподобная гиперповерхность в римановом пространстве. При этом можно показать, что если  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  – решения уравнения (9.1), то скалярное произведение  $\langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle$  не зависит от выбора гиперповерхности  $\Sigma$ .

В качестве другого примера волнового уравнения к искривленному пространству рассмотрим уравнение Прока

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha V^\sigma = & -D_\beta W^{\alpha\beta} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} V^\alpha + i \frac{e(g-1)}{c\hbar} F^{\mu\alpha} V_\mu - \\ & - 2S_{\mu\nu\rho} S^{\mu\nu\alpha} V^\rho + S^{\mu\nu\alpha} W_{\mu\nu} + 2D_\beta (S^{\alpha\beta\sigma} V_\sigma) = 0, \end{aligned} \quad (9.3)$$

где  $W_{\mu\nu} = D_\mu V_\nu - D_\nu V_\mu$ ,  $D_\mu = \nabla_\mu - \frac{ie}{c\hbar} \mathcal{A}_\mu$  – удлиненная ковариантная производная,  $\mathcal{A}_\mu$  – потенциал внешнего электромагнитного поля,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$ ,  $S_{\mu\nu\alpha}$  – тензор кручения. Скалярное произведение для двух произвольных решений уравнения (9.3)  $U^\mu$  и  $V^\nu$  можно определить в виде

$$\langle U|V \rangle_P = - \int_\Sigma d\Sigma_\alpha \{ U^\mu (\hat{J}_{\mu\nu}^\alpha V^\nu) + (\hat{J}_{\nu\mu}^\alpha U^\mu) V^\nu \}, \quad (9.4)$$

где

$$\hat{J}_{\mu\nu}^\beta = \frac{i\hbar}{2mc} (D_\mu \delta_\nu^\beta - D^\beta g_{\mu\nu} + 2S_{\cdot\mu\nu}^\beta),$$

а  $\Sigma$  – пространственно подобная гиперповерхность.

Уравнение Прока описывает массивное комплексное векторное поле  $V^\mu(x)$ , которому соответствует заряженная частица с ненулевой массой и тремя возможными состояниями поляризации. Это уравнение в научной литературе представлено главным образом в контексте теории электрослабых взаимодействий, описываемых моделью Вайнберга–Салама. Следует отметить также работы, в которых изучались свойства интегрируемости уравнения Прока во внешних полях. Так, например, исследовалась динамика массивного векторного поля в окрестности черной дыры, описываемой метрикой Рейснера–Нордстрема–де Ситтера, и была показана возможность построения квазистационарных состояний [79]. Кроме того, в серии работ [80, 81] проведен анализ взаимодействия массивной частицы спина-1 с магнитным монополем и построены связанные состояния.

Сейц [82] и Спиноза [83] провели квазиклассическое исследование уравнения Прока с помощью стандартного метода ВКБ с вещественной фазой. Они, используя метод, предложенный Аудричем [84], построили квазиклассические уравнения движения векторной частицы со спином в пространстве Римана–Картана. В частности, было построено спиновое уравнение движения и констатирован факт взаимодействия вектора спина векторной частицы со всеми неприводимыми частями тензора кручения. Последнее обстоятельство является важным, поскольку, например, дираковская частица взаимодействует лишь с одной из трех неприводимых частей тензора кручения – с его псевдоследом (см., например, [85]). Этим подтверждается предположение Хейла [86], что частицы высших спинов могут оказаться более чувствительными индикаторами полей кручения. Заметим, что квазиклассический предел уравнения Прока изучался также Румпфом [87].

Однако, на наш взгляд, подход, основанный на ВКБ-приближении с вещественной фазой для получения квазиклассических уравнений движения, требует дополнительного обоснования. В частности, весь анализ строится, по существу, на одном единственном квантово-механическом состоянии, которое к тому же может не принадлежать пространству  $L_2$ . Кроме того, этот метод оставляет открытым вопрос, почему внешние поля в квазиклассических уравнениях следует брать на той или иной классической траектории.

Уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле в пространстве Римана–Картана может быть записано в следующем виде:

$$\hat{\mathcal{H}}_D \phi = \left\{ \gamma^\mu \left( -i\hbar D_\mu + \frac{e}{c} \mathcal{A}_\mu \right) + mc + \frac{3i\hbar}{2} \gamma^{\nu} S_\nu \right\} \phi = 0. \quad (9.5)$$

Здесь и далее индексы  $\mu, \nu, \alpha, \beta$  пробегает значения  $\overline{1, 3}$  и нумеруют координаты  $q^\mu$  риманова пространства с метрикой  $g^{\mu\nu}$  и сигнатурой  $(+, -, -, -)$ ,  $D_\mu = \nabla_\mu - \Gamma_\mu$ ,  $\nabla_\mu$  – оператор ковариантной производной вдоль координаты  $q^\mu$ ,  $\Gamma_\mu$  – спиновая связность,  $\mathcal{A}_\mu$  – электромагнитный потенциал, а  $S_\mu$  – псевдовектор кручения. Матрицы Дирака  $\gamma^\mu$  определяются соотношением  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ . Мы также используем матрицы  $\overset{*}{\gamma}^\nu = -\gamma\gamma^\nu$ , где  $\gamma = -i\gamma^5$  и  $\gamma^5 = -\frac{i}{4!}e_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta$ .

Скалярное произведение двух решений уравнения (9.5) можно определить соотношением

$$\langle \phi | \psi \rangle_D = - \int_{\Sigma} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha \bar{\phi} \gamma^\alpha \psi, \quad (9.6)$$

где  $\Sigma$  – пространственноподобная гиперповерхность.

В настоящей главе найдены приближенные решения уравнений Клейна–Гордона, Дирака и Прока, локализованные в окрестности мировой линии заряженной частицы во внешних гравитационном и электромагнитном полях, которые по-прежнему называются квазиклассическими траекторно-когерентными состояниями. Развита техника сведения уравнения Клейна–Гордона к уравнению типа Шрёдингера для ТКС, а уравнений Дирака и Прока – к уравнению типа Паули и получены соответствующие гамильтонианы. При этом построение ведется в геометрических терминах. Установлено, что с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , скалярное  $\Psi(x)$ , спинорное  $\phi(x)$  и векторное  $V^\nu(x)$  поля, удовлетворяющие уравнениям (9.1), (9.3) и (9.5) в классе положительно-частотных квазиклассически-сосредоточенных состояний, допускают стандартную квантовомеханическую интерпретацию.

Квантово-механическая интерпретация полей  $\Psi(x)$ ,  $\phi(x)$  и  $V^\mu(x)$  как волновых функций частицы сталкивается с известными трудностями [88–97]. Согласно общим принципам квантовой механики, волновая функция частицы является координатным представлением вектора гильбертова пространства (с положительно определенным скалярным произведением). Динамика волновой функции определяется уравнением Шрёдингера. Локальный характер физического времени в случае искривленного пространства-времени не позволяет в общем случае придать уравнению Дирака, Клейна–Гордона или Прока шрёдингеровскую форму с эрмитовым квантовым гамильтонианом. В то же время скалярные произведения (9.2), (9.4) и (9.6) не имеют определенного знака. При этом вообще не ясно, как следует понимать координатное представление в общекоординатно инвариантной теории.

Известно, что координатное представление в квантовой механике вводится с помощью оператора положения. В нерелятивистском случае оператор положения определяется как оператор (трехмерных) координат. Для уравнения Клейна–Гордона определение оператора положения встречает трудности уже в пространстве Минковского, хотя в некоторых случаях их можно преодолеть (см., например, [1]). Однако при наличии общекоординатной инвариантности введение оператора положения в общем случае невозможно. Тем самым становится неясным и статус координатного представления в общекоординатно инвариантной теории.

Представляется естественным попытаться найти приближенную схему, в рамках которой можно придать стандартный квантово-механический смысл уравнениям (9.1), (9.3) и (9.5). Будем рассуждать следующим образом. Рассмотрим мировую линию классической частицы в римановом пространстве. Попытаемся найти приближенное решение этих уравнений, квазиклассически сосредоточенное в окрестности этой мировой линии. Тогда такое решение можно приближенно считать волновой функцией в координатном представлении, если будут выполняться два условия: а) эволюция данного решения приближенно

описывается уравнением шредингеровского типа; б) скалярное произведение на таких приближенных решениях является положительно определенным. С физической точки зрения эти два условия могут рассматриваться как попытка разрешить известное противоречие между нелокальным характером квантово-механической волновой функции частицы и локальностью, в общем случае, физического времени в искривленном пространстве-времени (см., например, [89]).

Отметим два интересных свойства построенных решений. Во-первых, совокупность этих состояний образует базис в пространстве квазиклассически сосредоточенных решений уравнений Клейна–Гордона, Дирака и Прока. Во-вторых, квазиклассические ТКС допускают классификацию на положительно и отрицательно частотные состояния. Последнее обстоятельство заслуживает особого внимания. Дело в том, что в произвольном римановом пространстве отсутствует естественное разделение решений волновых уравнений на положительно и отрицательно частотные (см., например, [88]). В то же время такое разделение совершенно необходимо для интерпретации квантового поля в терминах частиц и античастиц и, следовательно, для корректной постановки задач и расчетах квантовых процессов. Поскольку ТКС допускают классификацию на положительно и отрицательно частотные, они могут найти широкое применение в задачах квантовой теории в искривленном пространстве-времени.

На основе полученных результатов приведен вывод общековариантного уравнения движения для спина частицы, движущейся во внешних электромагнитном, гравитационном и торсионном полях, непосредственно из уравнения Дирака и Прока.

При получении уравнения движения для спина массивной заряженной частицы, движущейся во внешних полях, как правило, используются следующие способы:

- рассматривается модель спиновой частицы, описываемой лагранжианом, содержащим вектор (тензор) спина изначально в качестве независимой динамической переменной (см., например, [59, 60, 98, 99]);
- суперсимметричные модели спиновых частиц, содержащие наряду с бозонными степенями свободы (которые описываются координатами  $q^\mu(\tau)$  конфигурационного пространства) также фермионные степени свободы, характеризующиеся в терминах антикоммутирующих грассмановых переменных  $\psi^a(\tau)$  (см., например, [100]);
- определение действия спиновой частицы посредством представления причинной функции Грина спинорного поля (взаимодействующего с внешним полем) в форме интеграла по траекториям, как, например в [101–104];
- с помощью стандартного ВКБ метода с вещественной фазой [94, 95];
- подход Эренфеста [11], в рамках которого проблема вывода классических уравнений движения для квантово-механических средних (в пределе  $\hbar \rightarrow 0$ ) связана с существованием специального класса динамических состояний квантовой системы в форме волновых пакетов, сосредоточенных в окрестности положения классической частицы.

В настоящей главе предложен вывод спинового уравнения, основанный именно на последнем из перечисленных выше подходов. Для этих целей используется теория комплексного ростка Маслова [31]. Полученные с помощью этого метода волновые функции (так называемые квазиклассические траекторно-когерентные состояния) являются асимптотическими по  $\text{mod } O(\hbar^{3/2})$  решениями исходного уравнения Дирака и Прока.

Принято считать, что движение классической спиновой частицы во внешних гравитационном и электромагнитном полях описывается уравнениями Папалетру [105, 106]. Однако связь этих уравнений с общековариантными волновыми уравнениями была установлена лишь частично [88]. В настоящей главе

доказывается, что в рамках ТК-приближения скалярные, дираковские и векторные частицы движутся по геодезической, а спиновое уравнение дираковской и векторной частиц совпадает с общековариантным обобщением уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди на случай внешних полей кручения [42, 108].

Глава организована следующим образом. В разд. 10 дано определение квазиклассически сосредоточенных состояний в искривленном пространстве-времени и исследованы их свойства. В разд. 11 для уравнения Клейна–Гордона предложена схема построения квазиклассических ТКС, удовлетворяющих этому уравнению с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$  при  $\hbar \rightarrow 0$ . Они одновременно являются точными решениями некоторого редуцированного уравнения Шрёдингера с квадратичным гамильтонианом в форме уравнения Томонага–Швингера. Этот гамильтониан является эрмитовым до  $O(\hbar^{1/2})$  относительно некоторого скалярного произведения. Квазиклассические ТК-состояния локализованы в окрестности классической траектории, которая, в свою очередь, определяет систему отсчета одиночного наблюдателя. В разд. 12 показано, что построенные ТКС реализуют гильбертово пространство с положительно определенным скалярным произведением.

В разд. 13 проведено построение специального класса решений типа волновых пакетов Эренфеста, локализованных в окрестности мировой линии заряженной частицы. Они являются асимптотическими при  $\hbar \rightarrow 0$  квазиклассическими траекторно-когерентными состояниями (ТКС), удовлетворяющими исходному уравнению Прока с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ . Принципиальным моментом является техника « $\gamma$ -перестройки» [31] с помощью которой удается показать, что проблема построения ТКС сводится к решению линейного эволюционного уравнения типа Паули на компоненты вектора поляризации. В разд. 14 мы доказываем, что обычное скалярное произведение, определенное на решениях уравнения Прока, задает на множестве ТКС гильбертову структуру. Таким образом, на основе метода квазиклассически сосредоточенных состояний удается решить проблему квантово-механической интерпретации решения общековариантного уравнения Прока как волновой функции частицы. В разд. 15 дан вывод общековариантного спинового уравнения движения для векторной частицы во внешних электромагнитных и торсионных полях. В разд. 16 на классе квазиклассически-сосредоточенных состояний получена квазиклассическая асимптотика ядра Швингера–де Вита для уравнений Клейна–Гордона и Прока в пространстве Римана–Картана.

В разд. 17–21 для уравнения Дирака в искривленном пространстве-времени при наличии внешних электромагнитного и торсионного полей, используя метод комплексного ростка Маслова, построены специальные классы приближенных решений типа волновых пакетов Эренфеста. Они образуют полный ортонормированный набор одночастичных квазиклассических траекторно-когерентных состояний (ТКС), локализованных в окрестности мировой линии заряженной частицы. С помощью рассмотренной ранее операции «перестройки фазы» проблему построения ТКС удастся свести к решению обыкновенного дифференциального уравнения на двухкомпонентный спинор.

Часть расчетов вынесена в приложения.

## 10. Квазиклассически сосредоточенные состояния заряженной частицы в искривленном пространстве-времени

По аналогии с плоским случаем дадим следующее определение квазиклассической сосредоточенности скалярной частицы в искривленном пространстве-времени:



◆ Состояния  $\Psi$  квантовой системы

$$\left\{ \left( -i\hbar D_\mu + \frac{e}{c} \mathcal{A}_\mu \right)^2 + U(x) - m^2 c^4 \right\} \Psi = 0 \quad (10.1)$$

назовем квазиклассически сосредоточенным на фазовой траектории  $z(s) = (p_\mu(s), q^\nu(s))$  класса  $\mathbb{CS}_{\text{KG}}(z(s), \tau(x))$ , если

1) кривая  $q^\mu(s)$  времениподобна, и существует семейство гиперповерхностей  $\tau(x) = s$  (где  $s$  – параметр семейства), определяемых уравнением

$$g_{\mu\nu}(\tau) q(\tau) \dot{q}^\mu(\tau) (x^\nu - q^\nu(\tau)) = 0; \quad (10.2)$$

2) для любого оператора  $\hat{A}$  с символом  $A(p, x, \hbar)$ , регулярно зависящим от  $\hbar$ , справедливо

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle_{\text{KG}} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{\|\Psi\|_s} \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle_s = A(p(s), q(s), 0). \quad (10.3)$$

Здесь и далее индексы  $\mu, \nu, \alpha, \beta$  пробегают значения  $\overline{1, 3}$  и нумеруют координаты  $q^\mu$  риманова пространства с метрикой  $g^{\mu\nu}$  и сигнатурой  $(+, -, -, -)$ ,  $D_\mu = \nabla_\mu - \Gamma_\mu$ ,  $\nabla_\mu$  – оператор ковариантной производной вдоль координаты  $q^\mu$ ,  $\Gamma_\mu$  – спиновая связность,  $\mathcal{A}_\mu$  – электромагнитный потенциал и обозначено

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle_s = \int_{\tau(x)=s} d\Sigma_\mu \dot{q}^\mu \Psi_1^* \Psi_2, \quad \|\Psi\|_s^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle_s. \quad (10.4)$$

**Теорема 10.1.** Если состояние  $\Psi$  – квазиклассически сосредоточенное класса  $\mathbb{CS}_{\text{KG}}(z(s), \tau(x))$ , то  $z(s)$  – решение классической системы Гамильтона с гамильтонианом  $\mathcal{H}^{(\text{cl})}(p, x) = c^2 \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu - m_0^2 c^4 - U(x)$ .

**Лемма 10.1.** Если  $\Psi \in \mathbb{CS}(z(s), \tau(x))$ , то справедливо соотношение

$$\frac{D}{ds} \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle_{\text{KG}} = \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi | [\hat{\mathcal{H}} \hat{A}]_- | \Psi \rangle_s. \quad (10.5)$$

**Доказательство.** Среднее значение оператора  $\hat{A}$  представим в виде

$$\langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle_{\text{KG}} = \int_{\tau(x)=s} d\Sigma_\mu G^\mu,$$

где

$$G^\mu = \frac{N^2}{2mc} g^{\mu\nu} [(\hat{\mathcal{P}}_\nu \Psi)^* \hat{A} \Psi + \Psi^* \hat{\mathcal{P}}_\nu \hat{A} \Psi].$$

Тогда

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left[ \int_{\tau(x)=s+\Delta s} d\Sigma_\mu G^\mu - \int_{\tau(x)=s} d\Sigma_\mu G^\mu \right],$$

так как в силу условия (10.3)  $G^\mu \rightarrow 0$  при удалении от классической траектории по гиперповерхности  $\tau(x) = s$ . Поэтому в числитель можно добавить интеграл по цилиндрической поверхности  $\sigma(R)$ , заключенной между гиперповерхностями

$\tau(x) = s$  и  $\tau(x) = s + \Delta s$ . Считая, что поверхность  $\sigma(R)$  бесконечно удалена от  $x(s)$ , получим

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \left[ \left( \int_{\tau(x)=s+\Delta s} - \int_{\tau(x)=s} + \int_{\sigma(\infty)} \right) d\Sigma_\mu G^\mu \right] = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_V d^4x \partial_\mu (\sqrt{-g} G^\mu).$$

Здесь мы воспользовались теоремой Гаусса, а  $V$  – объем, ограниченный поверхностями  $\tau(x) = s$ ,  $\tau(x) = s + \Delta s$  и  $\sigma$ . Следовательно,

$$\frac{d\langle A \rangle}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta s} \int_s^{s+\Delta s} ds \int_{\tau(x)=s} \frac{d^4x}{ds} \sqrt{-g} G^\mu{}_{;\nu} = \int_{\tau(x)=s} d\Sigma_\nu \dot{q}^\nu G^\mu{}_{;\mu}.$$

Учтем, что

$$G^\mu{}_{;\mu} = \frac{A^2}{2mc} \frac{1}{i\hbar} (\Psi^* \hat{\mathcal{H}} \hat{A} \Psi - (\hat{\mathcal{H}} \Psi)^* \hat{A} \Psi),$$

поскольку  $\hat{\mathcal{H}} \Psi = 0$ . Следовательно, утверждение леммы справедливо.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 10.1.

**Доказательство теоремы 10.1.** Хорошо известно, что вейлевский символ коммутатора упорядоченных по Вейлю операторов имеет вид

$$C(p, x, \hbar) = 2i \sin \left\{ \frac{\hbar}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial \pi_\nu} - \frac{\partial}{\partial p_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} \right) \right\} a(p, x) b(\pi, q) \Big|_{\substack{\pi=p \\ q=x}}. \quad (10.6)$$

Перейдем в (10.5) к пределу  $\hbar \rightarrow 0$  с учетом (10.6) и (10.3) и получим

$$\frac{dA}{ds} = \{ \mathcal{H}^{(\text{cl})}, A \}_{px}, \quad (10.7)$$

где фигурные скобки обозначают скобку Пуассона. В силу произвольности оператора  $A$  теорема доказана.

Аналогично для векторной частицы в пространстве Римана–Картана имеем следующее определение.

◆ *Состояния  $V$  квантовой системы  $\hat{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha V^\sigma = 0$  (9.3) назовем квазиклассически сосредоточенными на фазовой траектории  $z(s) = (p_\mu(s), q^\nu(s))$  класса  $\text{CS}_P(z(s), \tau(x))$ , если*

1) *кривая  $q^\mu(s)$  времениподобна, и существует семейство гиперповерхностей  $\tau(x) = s$ , определяемое уравнением*

$$g_{\mu\nu}(q(\tau)) \dot{q}^\mu(\tau) (x^\nu - q^\nu(\tau)) = 0; \quad (10.8)$$

2) *для произвольного скалярного оператора  $\hat{A}$  с символом  $A(p, x, \hbar)$ , регулярно зависящим от  $\hbar$  на гиперповерхности  $\tau(x) = s$ , справедливо*

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle V | \hat{A} | V \rangle_P = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle V | \hat{A} | V \rangle_s = A(p(s), q(s), 0); \quad (10.9)$$

3) *для произвольной  $4 \times 4$ -матрицы  $\Gamma$  при всех значениях  $\hbar \in [0, 1[$  существуют квантово-механические средние*

$$\langle V | \Gamma A | V \rangle_P \quad \langle V | \Gamma A | V \rangle_s.$$

Здесь обозначено

$$\langle U | V \rangle_s = \int_{\tau(x)=s} d\Sigma_\mu \dot{q}^\mu U^+ V. \quad (10.10)$$

**Теорема 10.2.** Если состояние  $V^\mu(\vec{x}, t, \hbar)$  квантовой системы (9.3) является квазиклассически сосредоточенным класса  $\mathbb{CS}_P(z(s), \tau(x))$ , то  $z(s)$  – решение классической системы Гамильтона с гамильтонианом  $\mathcal{H}^{(cl)}(p, x) = c^2 \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu - m_0^2 c^4$ .

Для доказательства теоремы нам потребуется следующее соотношение:

**Лемма 10.2.** Если  $V \in \mathbb{CS}_P(z(s), \tau(x))$ , то

$$\frac{D}{ds} \langle V | \hat{A} | V \rangle_P = \frac{1}{i\hbar} \langle V | [\overset{0}{\mathcal{H}}_{P\hat{A}}]_- | V \rangle_s. \quad (10.11)$$

**Доказательство** дословно повторяет доказательство предыдущей леммы.

**Доказательство теоремы.** Решение уравнения Прока разложим по собственным векторам главного символа гамильтониана, вычисленного в точках фазовой траектории  $z(s)$ :

$$V^\mu(\vec{x}, t, \hbar) = e^{\mu_j(s)} \Phi^j(\vec{x}, t, \hbar), \quad (10.12)$$

$$\overset{0}{\mathcal{H}}^\mu_\sigma(s) e^{\sigma_j(s)} = \lambda_j(s) e^{\mu_j(s)}, \quad (10.13)$$

где

$$\begin{aligned} \overset{0}{\mathcal{H}}^\mu_\sigma &= \frac{1}{2mc} [(\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}^\alpha - m^2 c^2) \delta^\mu_\sigma - \mathcal{P}_\sigma \mathcal{P}^\mu]; \\ \lambda_0 &= -\frac{mc}{2}, \quad \lambda_a = \frac{1}{2mc} (\mathcal{P}_\alpha \mathcal{P}^\alpha - m^2 c^2), \quad a = 1, 2, 3; \\ e_0^\mu &= N \mathcal{P}^\mu, \quad \mathcal{P}_\mu e^\mu_a = 0. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Тогда, как и для дираковской частицы, заключаем, что скалярные части функций  $\Phi^j(\vec{x}, t, \hbar)$  совпадают и что

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \Phi^0(\vec{x}, t, \hbar) = 0. \quad (10.15)$$

Тогда для средних значений скалярного оператора  $\hat{A}$  получим

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{D}{ds} \langle V | \hat{A} | V \rangle_P = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle V | \{[\hat{\mathcal{H}}_{KG}, \hat{A}]_- \delta_\alpha^\beta - \hat{\mathcal{P}}^\beta [\hat{\mathcal{P}}_\alpha, \hat{A}] - [\hat{\mathcal{P}}^\beta, \hat{A}]_- \hat{\mathcal{P}}_\alpha \} | V \rangle_s.$$

С учетом соотношений (10.14) и (10.15) получим

$$\dot{A} = \{\mathcal{H}^{(cl)}(p, x), A(p, x, 0)\}_{px}.$$

В силу произвольности оператора  $\hat{A}$  теорема доказана.

## 11. Конструкция квазиклассических ТКС для уравнения Клейна–Гордона

Перепишем уравнение (9.1) в эквивалентной форме

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0, \quad (11.1)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2mc} \{g^{\mu\nu} \hat{\mathcal{P}}_\mu \hat{\mathcal{P}}_\nu + i\hbar g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \hat{\mathcal{P}}_\alpha - U(x) - m^2 c^2\}. \quad (11.2)$$

Здесь

$$\hat{\mathcal{P}}_\mu = \hat{p}_\mu - \frac{e}{c} \mathcal{A}_\mu, \quad \hat{p}_\mu = -i\hbar \partial_\mu,$$

а  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$  – символы Кристоффеля для метрики  $g_{\mu\nu}$ . Вейлевская нормальная форма оператора (11.2) имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}^0 + \hbar \hat{\mathcal{H}}^1 + \hbar^2 \hat{\mathcal{H}}^2, \quad (11.3)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}^0 = \mathcal{H}^0(\hat{p}_\mu, x^\nu) = \frac{1}{2mc} \left\{ \frac{1}{3} (\hat{\mathcal{P}}_\mu g^{\mu\nu} \hat{\mathcal{P}}_\nu + g^{\mu\nu} \hat{\mathcal{P}}_\mu \hat{\mathcal{P}}_\nu + \hat{\mathcal{P}}_\mu \hat{\mathcal{P}}_\nu g^{\mu\nu}) - U(x) - m^2 c^2 \right\}, \quad (11.4)$$

$$\hat{\mathcal{H}}^1 = \mathcal{H}^1(\hat{p}_\mu, x^\nu) = -\frac{i}{8mc} \left\{ \hat{\mathcal{P}}_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \ln(-g)) + (g^{\mu\nu} \partial_\nu \ln(-g)) \hat{\mathcal{P}}_\mu \right\}, \quad (11.5)$$

$$\hat{\mathcal{H}}^2 = \mathcal{H}^2(x^\nu) = \frac{1}{2mc} \left\{ \frac{1}{3} (\partial_\mu \partial_\nu g^{\mu\nu}) + \frac{1}{4} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \ln(-g)) \right\}. \quad (11.6)$$

Оператору (11.2) сопоставим главный символ [16], который определяется соответствием

$$\mathcal{H}(\hat{p}_\mu, x^\nu, \hbar) \rightarrow \mathcal{H}(p_\mu, x^\nu, 0) = \mathcal{H}^0(p_\mu, x^\nu), \quad (11.7)$$

где

$$\mathcal{H}^0(p_\mu, x^\nu) = \frac{1}{2mc} \{g^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu - m^2 c^2 - U(x)\} \quad (11.8)$$

и  $\mathcal{P}_\mu = p_\mu - (e/c)\mathcal{A}_\mu$ . Функция  $\mathcal{H}^0(p_\mu, x^\nu)$  рассматривается как классический гамильтониан и вводится классическая фазовая траектория  $z(s) = (p_\alpha(s), q^\alpha(s))$  как решение системы Гамильтона

$$\dot{q}^\alpha = \mathcal{H}_{p_\alpha}^0 = \frac{1}{mc} g^{\alpha\nu} \mathcal{P}_\nu, \quad (11.9)$$

$$\dot{p}_\alpha = -\mathcal{H}_{x^\alpha}^0 = -\frac{1}{2mc} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu + \frac{e}{mc^2} g^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu \mathcal{A}_{\nu,\alpha} + \frac{1}{2mc} U_{,\alpha} \quad (11.10)$$

с начальными условиями  $q^\alpha(0) = \overset{0}{q}^\alpha$ ,  $p_\alpha(0) = \overset{0}{p}_\alpha$  и  $\mathcal{H}(\overset{0}{q}^\alpha, \overset{0}{p}_\alpha) = 0$ .

Уравнение траектории в лагранжевой форме имеет вид

$$\ddot{q}^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{q}^\alpha \dot{q}^\beta = \frac{e}{mc^2} g^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} \dot{q}^\nu + \frac{1}{2m^2 c^2} g^{\mu\alpha} U_{,\alpha}, \quad (11.11)$$

где  $F_{\alpha\nu} = \partial_\alpha \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\alpha$  – тензор электромагнитного поля, и, очевидно, совпадает при  $U = 0$  с уравнением Лоренца в римановом пространстве. Система (11.10) допускает первый интеграл движения

$$g_{\mu\nu}(q(s)) \dot{q}^\mu(s) \dot{q}^\nu(s) = 1 + \frac{1}{m^2 c^2} U(q(s)). \quad (11.12)$$

Ниже мы ограничимся рассмотрением таких траекторий  $z(s)$ , для которых выполняется условие  $g_{\mu\nu}(q(s)) \dot{q}^\mu(s) \dot{q}^\nu(s) > 0$  (случай  $g_{\mu\nu}(q(s)) \dot{q}^\mu(s) \dot{q}^\nu(s) < 0$  может быть рассмотрен по аналогии).

Для построения траекторно-когерентных состояний (ТКС), т.е. решений, удовлетворяющих уравнению (11.1) с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ ,

$$\mathcal{H}(\hat{p}_\mu, x^\nu, \hbar)\Psi = O(\hbar^{3/2}) \quad (11.13)$$

проведем квантование классической системы Гамильтона (11.10) в окрестности классической траектории  $z(s)$  (11.11) методом комплексного ростка [31]. Принципиальным моментом этого способа квантования является построение комплексных решений системы в вариациях линейной гамильтоновой системы, которая есть результат линеаризации системы Гамильтона (11.10) в окрестности фазовой траектории  $z(s)$ . Эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} W_\mu^{\bar{a}}(s) &= -\overset{0}{\mathcal{H}}_{x^\mu p_\alpha}(s) W_\alpha^{\bar{a}} - \overset{0}{\mathcal{H}}_{x^\mu x^\alpha}(s) Z^{\alpha\bar{a}}, \\ \frac{d}{ds} Z^{\mu\bar{a}}(s) &= \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_\mu p_\nu}(s) W_\alpha^{\bar{a}} + \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_\mu x^\alpha}(s) Z^{\alpha\bar{a}}. \end{aligned} \quad (11.14)$$

Индексы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  нумеруют решения системы (11.14), а под выражением типа  $\overset{0}{\mathcal{H}}_{x^\mu p_\nu}(s)$  здесь и далее понимается соответствующая функция, взятая на классической траектории  $z(s)$ , например,

$$\overset{0}{\mathcal{H}}_{x^\mu p_\nu}(s) = \overset{0}{\mathcal{H}}_{x^\mu p_\nu}(p(s), q(s)).$$

Пусть  $f_{\bar{a}} = (W_\mu^{\bar{a}}(s), Z^{\mu\bar{a}}(s))$ ,  $\bar{a} = 0, 1, 2, 3$  – комплексные решения системы (11.14), для которых введем симплектическую структуру, задаваемую кососкалярным произведением

$$\{f_{\bar{a}}, f_{\bar{b}}\} = W_\mu^{\bar{a}} Z^{\mu\bar{b}} - Z^{\mu\bar{a}} W_\mu^{\bar{b}}, \quad \{f_{\bar{a}}, f_{\bar{b}}^*\} = W_\mu^{\bar{a}} Z^{*\mu\bar{b}} - Z^{\mu\bar{a}} W_\mu^{*\bar{b}}. \quad (11.15)$$

Здесь знак \* означает комплексное сопряжение. Нетрудно проверить (см. разд. «Система в вариациях» части I), что для любых двух решений  $f_{\bar{a}}$  и  $f_{\bar{b}}$  вдоль траектории сохраняются следующие выражения:

$$\{f_{\bar{a}}, f_{\bar{b}}\}(s) = \text{const}, \quad \{f_{\bar{a}}, f_{\bar{b}}^*\}(s) = \text{const}. \quad (11.16)$$

Выберем в качестве одного из решений системы в вариациях (11.14) следующее вещественное решение:

$$f_0 = (W_\mu^0, Z^{\mu 0}) = (\dot{p}_\mu(s), \dot{q}^\mu(s)), \quad (11.17)$$

которое, очевидно, совпадает с вектором фазовой скорости на траектории  $z(s)$ . Три других линейно независимых комплексных решения  $f_a = \{W_\mu^a, Z^{\mu a}\}$ ,  $a, b = 1, 2, 3$ , системы (11.14) подчиним условиям

$$\{f_0, f_a\} = \{f_b, f_a\} = 0, \quad \{f_b, f_a^*\} = 2i\tilde{b}_a \delta_{ba}, \quad (11.18)$$

где  $\{\tilde{b}_a, a = 1, 2, 3\}$  – произвольный набор трех положительных чисел. Другими словами, решения  $f_0, f_1, f_2, f_3$  задают симплектический базис в  $\mathbb{C}^4$ . Из этих решений построим  $4 \times 4$  комплексную матрицу  $C(s)$  с элементами  $C^{\mu\bar{a}} = Z^{\mu\bar{a}}$ . Матрица  $C$  является невырожденной, если выполнено условие

$$\text{rank} \|\dot{q}^\mu(s)\| \neq 0. \quad (11.19)$$

Определим комплексную  $4 \times 4$  матрицу  $Q(s)$

$$Q_{\mu\nu}(s) = W_{\mu}^{\bar{a}}(C^{-1})_{\bar{a}\nu}. \quad (11.20)$$

Для мнимой части матрицы  $Q$  с учетом соотношений (11.17) и (11.18) имеем

$$\text{Im } Q_{\mu\nu} = \sum_{k=1}^3 \tilde{b}_a(C^{-1})_{a\nu}, \quad (11.21)$$

И, следовательно, матрица  $\text{Im } Q$  положительно определена:

$$\text{Im } Q > 0. \quad (11.22)$$

Ниже нам потребуются следующие свойства матрицы  $Q$ , которые являются прямым следствием соотношений (11.14)–(11.18) (см. разд. «Система в вариациях» части I):

$$1) Q(s) \text{ – симметричная матрица,} \quad (11.23)$$

$$2) \dot{Q}_{\mu\nu} + Q_{\mu\alpha} \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_{\alpha}x^{\nu}}(s) + \overset{0}{\mathcal{H}}_{x^{\mu}p_{\alpha}}(s)Q_{\alpha\nu} + Q_{\mu\alpha} \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_{\alpha}p_{\beta}}(s)Q_{\beta\nu} + \overset{0}{\mathcal{H}}_{x^{\mu}x^{\nu}}(s) = 0, \quad (11.24)$$

$$3) \dot{J} = J \{ \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_{\alpha}p_{\beta}}(s)Q_{\alpha\beta}(s) + \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_{\alpha}x^{\alpha}}(s) \}, \quad (11.25)$$

где  $J(s) = \det C(s)$ .

Сопоставим каждой траектории  $z(s)$  системы Гамильтона (11.14) функцию типа ВКБ-решения

$$|0, s\rangle = \frac{N_{\hbar}}{\sqrt{J(s)}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(x, s) \right], \quad (11.26)$$

где фаза  $S(x, s)$ , в отличие от стандартного ВКБ метода, является комплексно-значной и имеет вид

$$S(x, s) = \int_0^s ds \dot{q}^{\mu}(s)p_{\mu}(s) + p_{\mu}(s)\Delta x^{\mu} + \frac{1}{2}Q_{\mu\nu}(s)\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu}. \quad (11.27)$$

При записи (11.27) учтено, что  $\overset{0}{\mathcal{H}}(s) \equiv 0$ . Здесь и далее приняты следующие обозначения:

$$\Delta x^{\mu} = x^{\mu} - q^{\mu}(s), \quad \Delta \hat{p}_{\nu} = -i\hbar\partial_{\nu} - p_{\nu}(s), \quad (11.28)$$

$N_{\hbar}$  – нормировочный множитель, который будет определен ниже. Функция (11.26) обладает интересным свойством: в силу (11.22) для фазы  $S(x, s)$  имеем  $\text{Im } S \geq 0$  и, таким образом, при каждом фиксированном значении параметра  $s$  функция  $|0, a\rangle$  экспоненциально убывает при удалении от классической траектории  $z(s)$ .

Сопоставим комплексным решениям  $f_{\bar{a}}$  системы в вариациях (11.14) операторы рождения и уничтожения по формулам

$$\begin{aligned} \hat{a}_0 &= \dot{q}^{\mu}(s)\Delta \hat{p}_{\mu} - \dot{p}_{\mu}(s)\Delta x^{\mu}, \\ \hat{a}_c^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar b_c}} \left( \overset{*}{Z}{}^{\mu c}(s)\Delta \hat{p}_{\mu} - \overset{*}{W}_{\mu}{}^c(s)\Delta x^{\mu} \right), \\ \hat{a}_c &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar b_c}} \left( Z^{\mu c}(s)\Delta \hat{p}_{\mu} - W_{\mu}{}^c(s)\Delta x^{\mu} \right), \end{aligned} \quad (11.29)$$

Воспользовавшись (11.18), нетрудно убедиться, что операторы  $\hat{a}_c^+$  и  $\hat{a}_c$  удовлетворяют обычным бозевским перестановочным соотношениям для операторов рождения и уничтожения:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_0, \hat{a}_c] = [\hat{a}_0, \hat{a}_c^+] = 0, & \quad [\hat{a}_b, \hat{a}_c] = [\hat{a}_b^+, \hat{a}_c^+] = 0, \\ [\hat{a}_b, \hat{a}_c^+] = \delta_{bc}, & \quad b, c = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Кроме того, из (11.23) и (11.27) следует, что функция  $|0, s\rangle$  является вакуумным состоянием для операторов  $\hat{a}_{\bar{b}}$ , ( $\bar{b} = 0, 1, 2, 3$ ),

$$\hat{a}_0|0, s\rangle = 0, \quad \hat{a}_c|0, s\rangle = 0. \quad (11.31)$$

Действуя последовательно операторами рождения  $\hat{a}_c^+$  на вакуумное состояние  $|0, s\rangle$ , построим для заданной классической траектории  $z(s)$  «представление чисел заполнения», т.е. счетный набор состояний вида

$$|\nu, s\rangle = \prod_{c=1}^3 \frac{1}{\sqrt{\nu_c!}} (\hat{a}_c^+)^{\nu_c} |0, s\rangle. \quad (11.32)$$

Введем в рассмотрение функциональное пространство, определяемое как

$$\Upsilon_{\hbar}^S[x, s] = \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(x, s) \right] \sum_{|\varkappa|=0}^N C_{\varkappa}(s) \left( \frac{\Delta x^\mu}{\sqrt{\hbar}} \right)^{\varkappa}, \varkappa \in \mathbb{Z}_+^3, \quad N = \overline{0, \infty} \right\}. \quad (11.33)$$

Нетрудно видеть, что все функции  $|\nu, s\rangle$  (11.32) принадлежат этому пространству. Тогда для любой функции  $\Psi \in \Upsilon_{\hbar}^S[x, s]$  в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  справедлива оценка

$$\Delta x^\mu \Psi = O(\hbar^{1/2}), \quad \Delta \hat{p}_\mu \Psi = O(\hbar^{1/2}), \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (11.34)$$

В справедливости соотношений (11.34) нетрудно убедиться, если воспользоваться известной асимптотической оценкой

$$f^\sigma e^{-f/\hbar} = O(\hbar^\sigma), \quad f \geq 0, \quad \sigma > 0, \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (11.35)$$

Таким образом, операторы  $\Delta x^\mu$  и  $\Delta \hat{p}_\nu$  можно рассматривать как операторы малых при  $\hbar \rightarrow 0$  квантовых флуктуаций волнового пакета  $\Psi$  около классической траектории  $z(s)$ . Во избежание путаницы заметим, что построение ТКС ведётся в фиксированной системе координат  $x^\nu$ , определяемой метрикой  $g_{\mu\nu}(x)$ .

Вернёмся к оператору  $\hat{\mathcal{H}}$  (11.4) и проведём разложение его в окрестности траектории  $z(s)$  в ряд Тейлора по степеням операторов  $\Delta x^\mu$  и  $\Delta \hat{p}_\nu$  с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ , учитывая при этом оценки (11.34). Таким образом, на пространстве функций (11.33) имеем

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \overset{0}{\mathcal{H}}(p_\mu(s) + \Delta \hat{p}_\mu, q^\nu(s) + \Delta x^\nu) = \overset{0}{q}^\mu(s) \Delta \hat{p}_\mu - \overset{0}{p}_\mu \Delta x^\mu + \frac{1}{2} [\overset{0}{\mathcal{H}}_{x^\mu x^\nu}(s) \Delta x^\mu \Delta x^\nu + \\ &+ \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_\mu x^\nu}(s) \Delta \hat{p}_\mu \Delta x^\nu + \overset{0}{\mathcal{H}}_{x^\mu p_\nu}(x) \Delta x^\mu \Delta \hat{p}_\nu + \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_\mu p_\nu}(s) \Delta \hat{p}_\mu \Delta \hat{p}_\nu] + \hat{O}(\hbar^{3/2}) = \\ &= \hat{\lambda}_0 + \hat{O}(\hbar^{3/2}). \end{aligned} \quad (11.36)$$

Нетривиальным является следующее утверждение: функции (11.32) являются (точными!) решениями уравнения Шрёдингера с квадратичным гамильтонианом  $\hat{\pi}_0$

$$(-i\hbar \partial_s + \hat{\lambda}_0)|\nu, s\rangle = 0, \quad (11.37)$$

причем для любой функции  $\Psi \in \Upsilon_{\hbar}^S[x, s]$  имеет место оценка  $(-i\hbar\partial_s + \hat{\lambda}_0)\Psi = O(\hbar)$ .

Справедливость (11.37) следует из того, что операторы (11.29) являются точными операторами симметрии уравнения Шрёдингера (11.37):

$$\begin{aligned} [(-i\hbar\partial_s + \hat{\lambda}_0), \hat{a}_{\bar{b}}^+] &= 0, \\ [(-i\hbar\partial_s + \hat{\lambda}_0), \hat{a}_{\bar{b}}] &= 0, \end{aligned} \quad \bar{b} = 0, 1, 2, 3, \quad (11.38)$$

а вакуумное состояние  $|0, s\rangle$  (11.32) – точным его решением. При доказательстве соотношений (11.38) используются формулы (11.24) и (11.25). Используя предыдущие конструкции, перейдем к построению квазиклассических решений исходного уравнения (11.1). Следуя общей теории [31], в окрестности классической траектории  $q^\mu(s)$  порядка  $O(\hbar^{1/2})$  зададим семейство гиперплоскостей, определяемых уравнением<sup>6</sup>

$$g_{\mu\nu}(q(s))\dot{q}^\mu(s)(x^\nu - q^\nu(s)) = 0. \quad (11.39)$$

Разрешив в этой окрестности уравнение (11.39) относительно параметра  $s$ , получим некоторую гиперповерхность

$$\tau(x) = s, \quad (11.40)$$

сечениями которой служат гиперплоскости (11.40). По построению функция  $\tau(x)$  удовлетворяет, в частности, соотношению

$$\tau(q(s)) = s, \quad (11.41)$$

продифференцировав которое вдоль классической траектории  $q^\mu(s)$ , получим

$$\dot{q}^\mu(s)\tau_{,\mu}(q(s)) = 1. \quad (11.42)$$

Далее в силу уравнения (11.39) имеем

$$\tau_{,\mu}(x) = \frac{g_{\mu\nu}(q(\tau))\dot{q}^\nu(\tau)}{g_{\alpha\beta}(q(\tau))\dot{q}^\alpha(\tau)\dot{q}^\beta(\tau)} + O(\hbar^{1/2}). \quad (11.43)$$

Отсюда непосредственно следует выполнение в окрестности порядка  $O(\hbar^{1/2})$  классической траектории  $q^\mu(s)$  следующих полезных соотношений:

$$\dot{q}^\mu(\tau)\tau_{,\mu}(x) = 1 + O(\hbar^{1/2}), \quad (11.44)$$

$$g^{\mu\nu}(x)\tau_{,\mu}(x)\tau_{,\nu}(x) = 1 + \frac{1}{m^2c^2}U(q(\tau)) + O(\hbar^{1/2}). \quad (11.45)$$

Равенство (11.45) означает, что в указанной выше окрестности траектории гиперплоскости  $\tau(x)$  являются пространственно подобными и, таким образом, с учетом (11.41) задают систему отсчета одиночного наблюдателя, движущегося вдоль классической траектории  $q^\mu(s)$ .

Основной целью настоящего раздела является утверждение: функции вида<sup>7</sup>

$$\Psi_{(\nu)}(x, \tau(x)) = \left\{ \frac{N_{\hbar}}{\sqrt{-g(q(s))}} |\nu, s\rangle \right\} \Big|_{s=\tau(x)},$$

<sup>6</sup>Уравнение (11.39) в общей теории комплексного роста связано с так называемой  $\gamma$ -перестройкой [31].

<sup>7</sup>Во избежание путаницы квантовые числа, нумерующие состояние  $\Psi$ , будем писать в круглых скобках.



где  $|\nu, s\rangle$  определены в (11.32), удовлетворяют уравнению (9.1) с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ . Для этого, используя построенное выше, введем в рассмотрение функциональное пространство

$$Q_{\hbar}^S = \Upsilon_{\hbar}^S[x, s] \Big|_{s=\tau(x)},$$

где теперь

$$\begin{aligned} \Upsilon_{\hbar}^S[x, s] \Big|_{s=\tau(x)} = & \left\{ \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x, \tau(x))\right) \sum_{|\mathbf{x}|=0}^N C_{\mathbf{x}}(\tau(x)) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{x^\mu - q^\mu(\tau(x))}{\sqrt{\hbar}}\right)^{\mathbf{x}}, N = 0, 1, \dots \right\}, \end{aligned} \quad (11.46)$$

а  $S$  определяется выражением

$$\begin{aligned} S(x, \tau(x)) = & \int_0^{\tau(x)} p_\mu(\tau) dq^\mu(\tau) + p_\mu(\tau(x)) \{x^\mu - q^\mu(\tau(x))\} + \\ & + \frac{1}{2} Q_{\mu\nu}(\tau(x)) \{x^\mu - q^\mu(\tau(x))\} \{x^\nu - q^\nu(\tau(x))\}. \end{aligned} \quad (11.47)$$

Далее мы работаем в функциональном пространстве (11.46) и ищем решения уравнения (11.13) в виде  $\Psi(x, \tau(x), \hbar)$ . На множестве (11.46) оператор  $\hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu$  действует по правилу

$$\hat{p}_\mu = -i\hbar \left( \partial_\mu \Big|_{\tau=\text{const}} + \tau_{,\mu}(x) \frac{\partial}{\partial \tau} \right). \quad (11.48)$$

По аналогии с (11.28) введем обозначения

$$\Delta x^\mu = x^\mu - q^\mu(\tau(x)), \quad \Delta \hat{p}_\mu = -i\hbar \partial_\mu \Big|_{\tau=\text{const}} - p_\mu(\tau(x)). \quad (11.49)$$

Тогда для операторов (11.49) на элементах из  $Q_{\hbar}^S$  (11.34) справедливы оценки, аналогичные (11.34):

$$\Delta x^\mu \Psi = O(\hbar^{1/2}), \quad \Delta \hat{p}_\mu \Psi = O(\hbar^{1/2}). \quad (11.50)$$

В силу этих оценок описанная выше процедура построения локализованных состояний (11.32) переносится на построение локализованных решений исходного уравнения (9.1) в пространстве  $Q_{\hbar}^S$  (11.46) при замене параметра  $s$  функцией  $s = \tau(x)$ , определяемой уравнением (11.40).

Для построения квазиклассических ТК-состояний  $\Psi \in Q_{\hbar}^S$ , удовлетворяющих условию (11.13), проведем разложение оператора  $\hat{\mathcal{H}}$  (11.3) в ряд Тейлора по степеням операторов (11.49) с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ , учитывая при этом оценки (11.50). Тогда, принимая во внимание формулу (11.44), после продолжительных, но несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & -i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} + \hat{\mathfrak{H}}(x, \tau(x), \hbar) + O(\hbar^{3/2}), \\ \hat{\mathfrak{H}}(x, \tau(x), \hbar) = & \hat{\pi}_0 + \hbar \mathcal{H}^1(\tau) - \tau_{,\mu}(x) (\hat{\delta} \mathcal{H}_{p_\mu}^0(\tau)) \hat{a}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{H}_{p_\mu p_\nu}^0(\tau) \tau_{,\mu}(x) \tau_{,\nu}(x) \hat{a}_0^2. \end{aligned} \quad (11.51)$$

Здесь  $\hat{a}_0$  и  $\hat{\lambda}_0$  определяются, соответственно, выражениями (11.29) и (11.36), в которых следует провести формальную замену (11.40). Выражение для  $\hat{\mathcal{H}}(\tau)$ , согласно (11.5), имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}}(\tau) = -\frac{i}{4}\dot{q}^\mu(\tau)\partial_\mu \ln\{-g(q(\tau))\}, \quad (11.52)$$

а оператор  $\hat{\delta}$  есть

$$\hat{\delta} = \left( \Delta\hat{p}_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} + \Delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \Big|_{\tau=\text{const}}. \quad (11.53)$$

Таким образом, квазиклассические траекторно-когерентные состояния  $\Psi$ , определяемые как приближенные решения уравнения (9.1) с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ , в то же время удовлетворяют эволюционному уравнению шрёдингеровского типа

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi = \hat{\mathfrak{H}}(x, \tau(x), \hbar) \Psi \quad (11.54)$$

с оператором Гамильтона  $\hat{\mathfrak{H}}$ , определяемым формулой (11.51).

Заметим, что уравнение (11.54) совпадает по форме с уравнением Томонага–Швингера (см., например, [1]).

Перейдем к построению точных решений уравнения (11.54). Это нетрудно сделать, если воспользоваться формулами (11.30), (11.31) и (11.37), из которых непосредственно следует  $\hat{a}_0|\nu, \tau(x)\rangle = 0$ , где

$$|\nu, \tau(x)\rangle = |\nu, s\rangle \Big|_{s=\tau(x)}. \quad (11.55)$$

В итоге имеем

$$\Psi_{(\nu)}(x, \tau(x)) = \left\{ \frac{N\hbar}{\sqrt[4]{-g(q(s))}} \Big|_{s=\tau(x)} \right\} |\nu, s\rangle, \quad (11.56)$$

Отметим, что построенная выше функция является асимптотическим при  $\hbar \rightarrow 0$  решением задачи о распространении волны (см. подробнее [31], стр. 32) для гиперболического уравнения 2-го порядка (10.1). Начальные данные Коши в этой задаче задаются на начальной гиперповерхности  $\tau(x) = s_0$ , где  $s_0$  – начальное значение параметра  $s$ . Начальная функция есть

$$\Psi|_{\tau(x)=s_0} = \Psi_\nu(x^\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3, s_0), \tau(x) = s_0),$$

где

$$x^\mu = x^\mu(\xi_1, \xi_2, \xi_3, s_0)$$

– уравнение гиперповерхности  $\tau(x) = s_0$  в локальных координатах в окрестности точки  $q^\mu(s_0) = q^\mu(0)$ , а производная по координате  $s$ , трансверсальной к этой поверхности, есть

$$\frac{\partial \Psi_{(\nu)}}{\partial s} \Big|_{\tau(x)=s_0} = \hat{A}_{(+)} \Psi_{(\nu)}(x^\mu(\vec{\xi}), s_0).$$

Здесь главный символ оператора  $\hat{A}_{(+)}$  – функция  $A_{(+)} = A_{(+)}(\vec{\xi}, \vec{p}_\xi, s)$  – является положительным корнем уравнения  $\mathcal{H}(\vec{p}_\xi, p_s, \vec{\xi}, s) = 0$  относительно  $p_s$ .

## 12. Уравнение Клейна-Гордона в кривом пространстве. Основные свойства квазиклассических ТКС $\Psi_\nu$

Пусть  $\tau(x) = s$  – некоторая гиперплоскость, определяемая уравнением (11.37). Покажем, что с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$  ТКС (11.56) образуют ортонормированную систему функций относительно скалярного произведения (9.2), т.е.

$$\langle \Psi_{(\nu')} | \Psi_{(\nu)} \rangle_{\text{KG}} = \delta_{(\nu),(\nu')} + O(\hbar^{1/2}). \quad (12.1)$$

Таким образом, можно сказать, что с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$  скалярное произведение (9.2) задает на пространстве решений уравнения (9.1)  $\Psi_{(\nu)}$  гильбертову структуру с положительно определенной нормой. В самом деле, согласно (11.48)–(11.50), имеем

$$\hat{\mathcal{P}}_\mu = \mathcal{P}_\mu(\tau) + O(\hbar^{1/2}) = mcg_{\mu\nu}\dot{q}^\nu(\tau) + O(\hbar^{1/2}). \quad (12.2)$$

Тогда скалярное произведение (9.2) принимает вид

$$\langle \Psi_{(\nu')} | \Psi_{(\nu)} \rangle_{\text{KG}} = A^2 \int_{\tau(x)=s} d\Sigma_\mu \dot{q}^\mu(\tau) \Psi_{(\nu)} \Psi_{(\nu')}^* + O(\hbar^{1/2}). \quad (12.3)$$

Представим векторный элемент площади гиперплоскости  $\tau(x) = s$  в виде

$$d\Sigma_\mu = d\Sigma \tau_{,\mu}(x) \quad (12.4)$$

и, учитывая соотношение (11.44), имеем

$$\langle \Psi_{(\nu')} | \Psi_{(\nu)} \rangle_{\text{KG}} = A^2 \int_{\tau(x)=s} d\Sigma \Psi_{(\nu)} \Psi_{(\nu')}^* + O(\hbar^{1/2}). \quad (12.5)$$

Отсюда непосредственно следует положительная определенность скалярного произведения (9.2) на функциональном пространстве (11.46). Независимость значения скалярного произведения (9.2) от выбора пространственно подобной гиперплоскости  $\tau(x) = s$  с учетом формул (11.54) и (11.5) приводит к эрмитовости оператора Гамильтона  $\hat{\mathfrak{H}}$  (11.51)

$$\hat{\mathfrak{H}}^+ = \hat{\mathfrak{H}} \quad (12.6)$$

относительно скалярного произведения (12.5).

Кроме того, из определения операторов рождения  $\hat{a}_c^+$  и уничтожения  $\hat{a}_c$  (11.29) следует их эрмитова сопряженность относительно скалярного произведения (12.5)

$$\langle \Psi_{(\nu')} | \hat{a}_c^+ | \Psi_{(\nu)} \rangle_{\text{KG}} = \langle \hat{a}_c \Psi_{(\nu')} | \Psi_{(\nu)} \rangle_{\text{KG}}. \quad (12.7)$$

Рассмотрим далее выражение (12.3) «вакуумного» ТКС  $\Psi_{(0)} = \Psi_0$ , определяемого формулой (11.56), и покажем, что состояние  $\Psi_0$  может быть нормировано на единицу при подходящем выборе нормировочной константы  $N_\hbar$ , т.е.

$$\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle_{\text{KG}} = 1. \quad (12.8)$$

В этом случае справедливость условия ортонормированности (12.1) следует непосредственно из формул (11.30), (12.7) и (12.8). Для доказательства равенства (12.8) представим векторный элемент площади гиперплоскости  $\tau(x) = s$  в виде

$$d\Sigma_\mu = \sqrt{-g(x)} \frac{d^4x}{dx^\mu}.$$

Далее нам потребуется следующий факт из теории комплексного ростка. Пусть известно общее решение классической системы (12.9)  $q = Q(\tau, \overset{\circ}{z})$ ,  $p = P(\tau, \overset{\circ}{z})$ , зависящее от  $2n$  (в нашем случае  $n = 4$ ) начальных параметров  $\overset{\circ}{z} = (\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$ , иными словами,  $\overset{\circ}{q} = q(0, \overset{\circ}{z})$ ,  $\overset{\circ}{p} = p(0, \overset{\circ}{z})$ . Тогда матрица  $C(\tau, \overset{\circ}{z})$  равна

$$C^{\mu\bar{a}}(\tau, \overset{\circ}{z}) = \frac{\partial Q^\mu(\tau, \overset{\circ}{z})}{\partial \overset{\circ}{q}^\alpha} C^{\alpha\bar{a}}(0, \overset{\circ}{z}) + \frac{\partial Q^\mu(\tau, \overset{\circ}{z})}{\partial \overset{\circ}{p}^\alpha} B_{\alpha}^{\bar{a}}(0, \overset{\circ}{z}). \quad (12.9)$$

Покажем, что при преобразовании от одной системы координат в другую  $\tilde{q}^\mu = \tilde{q}^\mu(q)$  матрица (12.9) преобразуется по закону

$$\tilde{C}(\tau, \overset{\circ}{z}) = A(\tau)C(\tau, \overset{\circ}{z}), \quad A_\nu^\mu(\tau) = \left. \frac{\partial \tilde{q}^\mu}{\partial q^\nu} \right|_{q=q(\tau, \overset{\circ}{z})}. \quad (12.10)$$

Заметим, что начальные параметры  $\overset{\circ}{z} = (\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$  и  $\overset{\circ}{z} = (\overset{\circ}{p}, \overset{\circ}{q})$  связаны между собой соотношениями  $\overset{\circ}{p} = \tilde{p}$  и  $\overset{\circ}{q} = \tilde{q}(q(0, \overset{\circ}{z})) = \tilde{q}(\tilde{q})$ . Тогда, согласно (12.9), имеем

$$\begin{aligned} C^{\mu\bar{a}}(\tau, \overset{\circ}{z}) &= \frac{\partial q^\mu}{\partial \tilde{q}^\alpha}(\tau) \frac{\partial \tilde{q}^\alpha(\tau)}{\partial \tilde{q}^\sigma} \frac{\partial \tilde{q}^\sigma}{\partial \tilde{q}^\beta} C^{\beta\bar{a}}(0, \overset{\circ}{z}) + \frac{\partial q^\mu}{\partial \tilde{q}^\alpha}(\tau) \frac{\partial \tilde{q}^\alpha(\tau)}{\partial \tilde{p}_\sigma} \frac{\partial \tilde{p}_\sigma}{\partial \tilde{p}_\beta} B_{\beta}^{\bar{a}}(0, \overset{\circ}{z}) = \\ &= \frac{\partial q^\mu}{\partial \tilde{q}^\alpha}(\tau) \left( \frac{\partial \tilde{Q}^\alpha(\tau)}{\partial \tilde{q}^\sigma} \tilde{C}^{\sigma\bar{a}}(0, \overset{\circ}{z}) + \frac{\partial \tilde{Q}^\alpha(\tau)}{\partial \tilde{p}_\sigma} \tilde{B}_{\sigma}^{\bar{a}}(0, \overset{\circ}{z}) \right) = \frac{\partial q^\mu}{\partial \tilde{q}^\alpha}(\tau) \tilde{C}^{\alpha\bar{a}}(\tau, \overset{\circ}{z}), \end{aligned} \quad (12.11)$$

где

$$\tilde{C}^{\sigma\bar{a}}(0, \overset{\circ}{z}) = \frac{\partial \tilde{q}^\sigma}{\partial \tilde{q}^\beta} C^{\beta\bar{a}}(0, \overset{\circ}{z}), \quad \tilde{B}_{\sigma}^{\bar{a}}(0, \overset{\circ}{z}) = \frac{\partial \tilde{p}_\sigma}{\partial \tilde{p}_\beta} B_{\beta}^{\bar{a}}(0, \overset{\circ}{z}). \quad (12.12)$$

Тем самым соотношение (12.10) доказано.

Предположим теперь, что существует набор из трех вещественных векторов  $l_c(\tau) = (l_c^\mu(\tau))$ ,  $c = \overline{1, 3}$ , таких, что

$$\langle \dot{q}(\tau), l_c(\tau) \rangle = 0, \quad \langle l_c(\tau), l_b(\tau) \rangle = \delta_{cb}, \quad c, b = \overline{1, 3}. \quad (12.13)$$

Введем квадратную  $4 \times 4$ -матрицу

$$L(\tau) = \begin{pmatrix} N\dot{q}(\tau) \\ l_1(\tau) \\ \dots \\ l_3(\tau) \end{pmatrix}. \quad (12.14)$$

где  $N = (\langle \dot{q}(\tau), \dot{q}(\tau) \rangle)^{-1}$ . Очевидно, что в силу условий (12.13) матрица  $L(\tau)$  ортогональна, т.е.

$$L^{-1}(\tau) = (\dot{q}(\tau), l_1(\tau), l_2(\tau), l_3(\tau)). \quad (12.15)$$

Проведем в интеграле замену переменных  $(x^\mu) \rightarrow (\tilde{x}^\mu) = (\tau, \vec{\xi})$ , где

$$\tau = \tau(q), \quad \xi = L(\tau)\Delta q, \quad \xi = (0, \vec{\xi}), \quad \Delta q = L^{-1}\xi. \quad (12.16)$$

Таким образом, компоненты вектора  $\vec{\xi} = (\xi_c)$ ,  $c = \overline{1, 3}$ , равны  $\xi_c = \langle l_c(\tau), \Delta q \rangle$ . Матрица, составленная из производных  $\partial \tilde{x}^\mu / \partial x^\nu$ , в этом случае равна

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} = \begin{pmatrix} \nabla \tau \\ l_1(\tau) + \nabla \tau (\langle \dot{l}_1(\tau), \Delta x \rangle - \langle l_1(\tau), \dot{q}(\tau) \rangle) \\ l_2(\tau) + \nabla \tau (\langle \dot{l}_2(\tau), \Delta x \rangle - \langle l_2(\tau), \dot{q}(\tau) \rangle) \\ l_3(\tau) + \nabla \tau (\langle \dot{l}_3(\tau), \Delta x \rangle - \langle l_3(\tau), \dot{q}(\tau) \rangle) \end{pmatrix}. \quad (12.17)$$

Отсюда для матрицы  $A(\tau)$  (12.10) в силу соотношений (11.43) и (12.13) получим

$$A(\tau) = L(\tau). \quad (12.18)$$

Учитывая это, нетрудно найти матрицу  $\tilde{C}(\tau)$  (12.10):

$$\tilde{C}(\tau) = L(\tau)C(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & & & \\ 0 & \tilde{C}_{3 \times 3}(\tau) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \quad (12.19)$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{C}^{-1}(\tau) = C^{-1}(\tau)L^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_2 & & & \\ \tilde{a}_3 & \tilde{C}_{3 \times 3}^{-1}(\tau) & & \\ \tilde{a}_4 & & & \end{pmatrix}. \quad (12.20)$$

Рассмотрим теперь квадратичную форму  $\langle \Delta x, \text{Im } Q \Delta x \rangle$  в новой системе координат. Согласно (12.20), имеем

$$\begin{aligned} \langle \Delta x, \text{Im } Q \Delta x \rangle &= \langle \xi, (C^{-1}L^{-1})^+ D (C^{-1}L^{-1}) \xi \rangle = \\ &= \langle \xi, (\tilde{C}^{-1})^+ D \tilde{C}^{-1} \xi \rangle = \langle \vec{\xi}, (\tilde{C}_{3 \times 3}^{-1})^+ (D_{3 \times 3}) (\tilde{C}_{3 \times 3}^{-1}) \vec{\xi} \rangle, \end{aligned} \quad (12.21)$$

где  $D_{3 \times 3} = \text{diag}(b_1, b_2, b_3)$ . Положим

$$\text{Im } \tilde{Q}_{3 \times 3} = (\tilde{C}_{3 \times 3}^{-1})^+ (D_{3 \times 3}) (\tilde{C}_{3 \times 3}^{-1}). \quad (12.22)$$

Тогда равенство (12.21) принимает вид

$$\langle \Delta q, \text{Im } Q \Delta q \rangle = \langle \vec{\xi}, \text{Im } \tilde{Q}_{3 \times 3} \vec{\xi} \rangle. \quad (12.23)$$

В координатах  $\tilde{q}^\mu = (\tau, \vec{\xi})$  векторный элемент  $\sqrt{-g} d\Sigma_\alpha$  гиперповерхности  $\tau = \tau(q)$  равен  $(\sqrt{-\tilde{g}(\tau, \vec{\xi})} d^3 \xi, 0, 0, 0)$ . Отсюда и из (11.43) получаем выражение для элемента площади гиперповерхности  $\tau = \tau(g)$

$$d\Sigma = d^3 \xi \sqrt{-\tilde{g}(\tau, 0)} + O(\hbar^{1/2}). \quad (12.24)$$

Здесь мы учли, что в системе координат  $(\tau, \vec{\xi})$  классическая траектория  $x = q(\tau)$  описывается уравнениями  $\tau = s$ ,  $\vec{\xi} = 0$ . Из (12.17) следует, что якобиан преобразования  $J$  при замене координат (12.16) равен

$$J = \det \left\| \frac{\partial \tilde{q}^\mu}{\partial q^\nu} \right\| = \begin{vmatrix} \nabla \tau \\ l_1(\tau) \\ l_2(\tau) \\ l_3(\tau) \end{vmatrix} = (1 - \ddot{Q}_\mu(\tau) \Delta q^\mu)^{-1} \det L(\tau), \quad (12.25)$$

и, следовательно, в точках классической траектории  $x = q(\tau)$

$$J(\tau) = \det L(\tau) = 1. \quad (12.26)$$

Согласно общим правилам преобразования величины  $\sqrt{-\tilde{g}(\tilde{x})} = \sqrt{-g(q)}/J$ , отсюда следует, что

$$\sqrt{-\tilde{g}(\tau, 0)} = \frac{\sqrt{-g(\tau)}}{J} = \sqrt{-g(\tau)}. \quad (12.27)$$

Возвращаясь к интегралу (12.5), с учетом соотношений (12.24), (12.27) и явного вида (11.56) функций  $\Psi_{(\nu)}$  получим

$$\langle \Psi_{(\nu')} | \Psi_{(\nu)} \rangle_{\text{KG}} = \langle s, \nu' | \nu, s \rangle_s + O(\hbar^{1/2}), \quad (12.28)$$

где

$$\langle s, \nu' | \nu, s \rangle_s = \int_{\tau(x)=s} d^3\xi |\nu', \tau\rangle^* |\nu, \tau\rangle. \quad (12.29)$$

В силу эрмитовой сопряженности операторов  $\hat{a}_c$  и  $\hat{a}_c^+$ ,  $c = \overline{1, 3}$ , по отношению к скалярному произведению (12.29) последний интеграл равен

$$\langle s, \nu' | \nu, s \rangle_s = \langle s, 0 | 0, s \rangle_s \delta_{(\nu), (\nu')}. \quad (12.30)$$

Таким образом, задача сводится к определению величины

$$\langle s, 0 | 0, s \rangle_s = \frac{1}{|\det C(\tau)|} \int_{\tau(x)=s} d^3\xi \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \langle \vec{\xi}, \text{Im } \tilde{Q}_{3 \times 3}(\tau) \vec{\xi} \rangle\right). \quad (12.31)$$

Из соотношений (12.10), (12.18), (12.20) и (12.27) следует, что

$$\det C(\tau) = \det \tilde{C}(\tau) = \det \tilde{C}_{3 \times 3}(\tau). \quad (12.32)$$

Поступая аналогично тому, как это было сделано при вычислении интеграла (I.11.11), в итоге получим

$$\langle s, 0 | 0, s \rangle_s = \left[ \left( \prod_{c=1}^3 b_c \right) (\pi \hbar)^{-3} \right]^{-1/2}. \quad (12.33)$$

Из соотношений (12.28), (12.20) и (12.33) заключаем, что

$$N_{\hbar} = \left[ A \left( \prod_{c=1}^3 b_c \right) (\pi \hbar)^{-3} \right]^{1/4}. \quad (12.34)$$

Наконец, отметим еще одно важное свойство построенных выше ТКС  $\Psi_{(\nu)}$ : среднее значение любой квантовой наблюдаемой  $\hat{\mathcal{A}} = \mathcal{A}(\hat{p}_\mu, x^\nu)$  с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$  лежит на классической траектории, т.е.

$$\langle \Psi_{(\nu')} | \hat{\mathcal{A}} | \Psi_{(\nu)} \rangle = \mathcal{A}(s) \delta_{(\nu), (\nu')} + O(\hbar^{1/2}). \quad (12.35)$$

### 13. Траекторно-когерентные состояния уравнения Прока

В качестве лагранжиана векторного поля  $V^\mu$  возьмем лагранжиан (Г.4) (см. Приложение Г) и соответствующее уравнение Прока запишем в удобном для нас виде

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha V^\sigma = -\frac{\hbar^2}{2mc} \left\{ -D_\beta W^{\alpha\beta} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} V^\alpha + \frac{ie(g-1)}{c\hbar} F^{\mu\alpha} V_\mu - 2S_{\mu\nu\rho} S^{\mu\nu\alpha} V^\rho + S^{\mu\nu\alpha} W_{\mu\nu} + 2D_\beta (S^{\alpha\beta\sigma} V_\sigma) \right\} = 0. \quad (13.1)$$

Проведем упорядочение по Вейлю оператора  $\hat{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha$  в (13.1). В результате он примет вид

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha = \hat{\mathcal{H}}_\sigma^{\alpha 0} + i\hbar \hat{\mathcal{H}}_\sigma^{\alpha 1} + \hbar^2 \hat{\mathcal{H}}_\sigma^{\alpha 2}, \quad (13.2)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma^{\alpha 0} = -\frac{1}{2mc} \left\{ -\frac{2}{3} (G^{\alpha(\beta\mu)} \hat{\mathcal{P}}_\beta \hat{\mathcal{P}}_\mu + \hat{\mathcal{P}}_\beta G^{\alpha(\beta\mu)} \hat{\mathcal{P}}_\mu + \hat{\mathcal{P}}_\beta \hat{\mathcal{P}}_\mu G^{\alpha(\beta\mu)} \hat{\mathcal{P}}_\sigma) + \delta_\sigma^\alpha m^2 c^2 \right\}; \quad (13.3)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma^{\alpha 1} = -\frac{1}{2mc} \left\{ [\hat{\mathcal{P}}_\mu, S^{\mu\alpha}]_+ + [\hat{\mathcal{P}}_\mu, S^{\alpha\mu}]_+ - [\hat{\mathcal{P}}_\mu, G^{\alpha\beta\tau} \Gamma_{\beta\tau}^\mu]_+ - [\hat{\mathcal{P}}_\mu, G^{\alpha\beta\mu\nu} \Gamma_{\beta\nu}^\tau g_{\tau\sigma}]_+ + \frac{e(g-1)}{c} F_\sigma^\alpha - \frac{e}{c} G^{\alpha\mu\beta} \hat{\mathcal{P}}_\mu F_{\mu\beta} \right\}; \quad (13.4)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_\mu^{\alpha 2} = & 2S_{\alpha\beta\mu} S^{\alpha\beta\nu} + S^{\alpha\beta\nu} g_{\mu\beta} - S^{\alpha\beta\nu} g_{\beta\mu,\alpha} + S^{\nu\alpha\beta} g_{\beta\mu,\alpha} - \\ & - 2S^{\nu\alpha\beta} g_{\beta\mu} + S^{\nu\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta\mu} + S^{\nu\alpha\beta} g_{\beta\mu,\alpha} - \\ & - g^{\alpha\beta} (\Gamma^\nu_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta\mu} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \Gamma^\nu_{\gamma\mu}) - \frac{1}{3} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \delta^\nu_\mu + \\ & + g^{\nu\alpha} (\Gamma^\beta_{\beta\gamma} \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \Gamma^\beta_{\gamma\mu}) + g^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} + \\ & + \frac{1}{2} (g^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} \Gamma^\nu_{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} \Gamma^\nu_{\alpha\mu,\beta} - g^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \delta^\nu_\mu + g^{\alpha\beta} g_{\alpha\mu} \Gamma^\nu_{\beta\mu} + \\ & + g^{\alpha\beta} \Gamma^\nu_{\alpha\mu,\beta} + g^{\alpha\beta} \Gamma^\gamma_{\alpha\beta,\gamma} \delta^\nu_\mu - g^{\alpha\nu} g_{\beta\mu} \Gamma^\beta_{\alpha\mu} + g^{\alpha\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\mu,\beta} - \\ & - g^{\alpha\nu} g_{\alpha\mu} \Gamma^\beta_{\beta\mu} - g^{\alpha\nu} \Gamma^\beta_{\beta\mu,\alpha} + g^{\nu\alpha} g_{\beta\mu} \Gamma^\beta_{\mu\alpha} - g^{\alpha\nu} \Gamma^\beta_{\mu\alpha,\beta}). \end{aligned}$$

В формулах (13.3) и (13.4)  $\hat{\mathcal{P}}_\mu = \hat{p}_\mu - e\mathcal{A}_\mu/c$ , где  $\hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu$ ,  $G^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu})$ ,  $[\hat{B}, \hat{C}]_\pm = \hat{B}\hat{C} \pm \hat{C}\hat{B}$ . Оператору  $\hat{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha$  в (13.2) сопоставим главный символ

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha = \mathcal{H}_\sigma^\alpha(\hat{p}_\mu, x^\mu, \hbar) \rightarrow \mathcal{H}_\sigma^\alpha(p_\mu, x^\mu, 0) = \overset{0}{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha(p_\mu, x^\mu). \quad (13.5)$$

Тогда, согласно (13.3), имеем

$$\overset{0}{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha = \frac{1}{2mc} \{ \delta_\sigma^\alpha (g_{\mu\nu} \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu - m^2 c^2) - \mathcal{P}_\sigma \mathcal{P}^\alpha \}, \quad (13.6)$$

где  $\mathcal{P}_\mu = p_\mu - e\mathcal{A}_\mu/c$ . Для симметричной матрицы  $\overset{0}{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha$  рассмотрим задачу на собственные векторы и собственные значения

$$\overset{0}{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha e_i^\sigma = \lambda_i e_i^\alpha. \quad (13.7)$$

Нетрудно показать, что одним из собственных векторов является вектор  $e_0^\sigma = \mathcal{P}^\sigma$ , которому соответствует собственное значение  $\lambda_0 = -mc/2$ . Три других собственных вектора  $e_a^\sigma$ ,  $a = 1, 2, 3$ , удовлетворяют уравнению

$$e_a^\sigma \mathcal{P}_\sigma = 0 \quad (13.8)$$

и отвечают одному и тому же собственному значению

$$\lambda = \frac{1}{2mc} (g_{\mu\nu} \mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu - m^2 c^2). \quad (13.9)$$

Объявим  $\lambda$  классическим гамильтонианом и введем в рассмотрение классическую фазовую траекторию  $z(s) = (p_\alpha(s), q^\alpha(s))$  как решение соответствующей системы Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{q}^\alpha &= \lambda_{p_\alpha} = \frac{1}{mc} g^{\alpha\nu} \mathcal{P}_\nu, \\ \dot{p}_\alpha &= -\lambda_{q^\alpha} = -\frac{1}{mc} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial q^\alpha} \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}_\nu + \frac{e}{mc^2} g^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu \mathcal{A}_{\nu,\alpha}. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Тогда, очевидно, траектория  $z(s)$  описывается классическим уравнением Лоренца  $\frac{D}{ds} \dot{q}^\mu = \frac{e}{mc^2} F^\mu{}_\nu \dot{q}^\nu$  с начальными условиями

$$q^\alpha(0) = \overset{0}{q}{}^\alpha, \quad p_\alpha(0) = \overset{0}{p}_\alpha, \quad \lambda(\overset{0}{q}{}^\alpha, \overset{0}{p}_\alpha) = 0. \quad (13.11)$$

Специализируем теперь выбор собственных векторов  $e_i^\sigma$  (13.7) таким образом, чтобы вдоль классической траектории  $q^\mu(s)$  (13.11) выполнялись следующие условия:

$$e_0^\mu(q(s)) = \dot{q}^\mu(s), \quad (13.12)$$

$$\frac{D}{ds} e_a^\mu = \frac{e}{mc^2} F^\mu{}_\nu e_a^\nu, \quad (13.13)$$

$$g^{\mu\nu} e_\mu^i(s) e_\nu^j(s) = \eta^{ij}, \quad \eta^{ij} e_i^\mu(s) e_j^\nu(s) = g^{\mu\nu}. \quad (13.14)$$

где  $\eta^{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , а индексы  $i, j = 0, 1, 2, 3$  нумеруют векторы тетрады  $e_i^\sigma$ . (Во избежание путаницы там, где это потребуется, тетрадные индексы также будем обозначать  $(i), (j)$ .) В результате условия (13.11)–(13.14) задают ортонормированную тетраду, переносимую вдоль мировой линии  $q^\mu(s)$ .

Конструкции разд. 11 позволяют перейти к процедуре построения ТКС для уравнения (13.1). Для этого прежде всего необходимо проквантовать классическую систему Гамильтона (13.11) в окрестности фазовой траектории  $z(s, \overset{0}{p})$  методом комплексного ростка [31]. Этот этап подробно изложен в разд. 11 (см. также [42, 43, 107, 108]). В итоге мы получим ортонормированный набор состояний  $|\nu, s\rangle$ , каждое из которых локализовано в окрестности порядка  $O(\hbar^{1/2})$  фазовой траектории  $z(s, \overset{0}{z})$  и является точным решением уравнения Шрёдингера с квадратичным гамильтонианом  $\hat{\lambda}$ :

$$(-i\hbar\partial_s + \hat{\lambda})|\nu, s\rangle = 0, \quad (13.15)$$

где  $\hat{\lambda} = \hat{\delta}\lambda + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2\lambda$ .

На следующем этапе квантования методом комплексного ростка необходимо провести « $\gamma$ -перестройку», смысл которой заключается в задании в окрестности



классической траектории  $q^\mu(s)$  порядка  $O(\hbar^{1/2})$  семейства пространственно подобных гиперплоскостей  $\tau(x) = s$ , параметризованных аффинным параметром  $s$  и определяемых уравнением

$$g_{\mu\nu}(s)\dot{q}^\mu(s)(x^\nu - q^\nu(s)) = 0. \quad (13.16)$$

Тогда нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\tau_{,\mu}(x) = \dot{q}_\mu(\tau) + O(\hbar^{1/2}), \quad (13.17)$$

$$g^{\mu\nu}(x)\tau_{,\mu}(x)\tau_{,\nu}(x) = 1 + O(\hbar^{1/2}). \quad (13.18)$$

Здесь и ниже запись  $A(\tau)$  означает  $A(s)|_{s=\tau(x)}$ .

Введем в рассмотрение набор состояний

$$|\nu, \tau(x)\rangle = |\nu, s\rangle|_{s=\tau(x)}. \quad (13.19)$$

Тогда очевидно, что на множестве функций  $|\nu, \tau(x)\rangle$  оператор  $\hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu$  действует по правилу

$$\hat{p}_\mu = -i\hbar \left( \partial_\mu|_{\tau=\text{const}} + \tau_{,\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \quad (13.20)$$

а для операторов

$$\Delta x^\mu = x^\mu - q^\mu(x), \quad (13.21)$$

$$\Delta \hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu|_{\tau=\text{const}} - p_\mu(\tau) \quad (13.22)$$

в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  справедливы оценки

$$\Delta x^\mu |\nu, \tau(x)\rangle = O(\hbar^{1/2}), \quad \Delta \hat{p}_\mu |\nu, \tau(x)\rangle = O(\hbar^{1/2}). \quad (13.23)$$

Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\hat{a}_0 |\nu, \tau(x)\rangle = 0, \quad (13.24)$$

$$(-i\hbar\partial_\tau + \hat{\lambda}) |\nu, \tau(x)\rangle = 0, \quad (13.25)$$

где  $\hat{a}_0 = \dot{q}^\mu(\tau)\hat{p}_\mu - \dot{p}_\mu(\tau)\Delta x^\mu$ . По определению, ТКС представляют собой асимптотические решения, удовлетворяющие исходному уравнению (13.1) с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha V^\sigma = O(\hbar^{3/2}). \quad (13.26)$$

Решения уравнения (13.26) будем искать в виде

$$V^\mu(x) = V^\mu(x, \tau(x)) = e_i{}^\mu(\tau)u^i(\tau)\Psi_{(\nu)}(x, \tau(x)). \quad (13.27)$$

Здесь функции  $\Psi_{(\nu)}$  имеют вид

$$\Psi_{(\nu)}(x, \tau(x)) = \frac{N_\hbar}{\sqrt[4]{-g(q(\tau))}} |\nu, \tau\rangle \quad (13.28)$$

и являются, соответственно, ТКС уравнения Клейна–Гордона (11.1), тетрада  $e_i{}^\mu$  определяется условиями (13.11)–(13.14), а вектор-функция  $u^i$  определяется ниже и имеет смысл вектора поляризации векторной частицы [1]. Теперь нам

потребуется ряд дополнительных соотношений. Согласно (13.20)–(13.22), действие оператора  $\hat{p}_\mu$  на функции (13.27) можно переписать в виде

$$\hat{p}_\mu = p_\mu(\tau) + \Delta\hat{p}_\mu(\tau) = p_\mu(\tau) + \Delta\hat{p}_\mu + \tau_{,\mu}(-i\hbar\partial_\tau + \hat{\lambda}) - \tau_{,\mu}(\hat{a}_0 + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2\lambda). \quad (13.29)$$

Пусть  $A = A(p_\mu, x^\nu)$  – произвольная функция указанных аргументов. Определим действие операторов  $\hat{\delta}^l$ ,  $l = \overline{0, \infty}$ , следующим образом:

$$\hat{\delta}^l A(p_\mu, x^\nu) = \hat{N} \left[ \left( \Delta\hat{p}_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} + \Delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^l A(p_\mu, x^\nu) \Big|_{\substack{p_\mu = p_\mu(\tau) \\ x^\nu = q^\nu(\tau)}} \right], \quad (13.30)$$

где оператор  $\hat{N}$  проводит вейлевское упорядочение выражения, стоящего справа от него. Тогда нетрудно убедиться в справедливости формул

$$\begin{aligned} \hat{\delta} A(p_\mu, x^\nu) = & \hat{\delta} A_{p_\mu}(\tau) \left\{ \tau_{,\mu}(-i\hbar\partial_t + \hat{\pi}) - \tau_{,\mu} \left( \hat{a}_0 + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2\lambda \right) \right\} - \\ & - \frac{i\hbar}{2} \tau_{,\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} A_{p_\mu}(\tau) + \hat{O}(\hbar^{3/2}), \end{aligned} \quad (13.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 A(p_\mu, x^\nu) = & \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 A(p_\mu, x^\nu) - \tau_{,\mu} \hat{\delta} A_{p_\mu}(\tau) \hat{a}_0 + \\ & - \frac{1}{2} A_{p_\mu p_\nu}(\tau) \tau_{,\mu} \tau_{,\nu} \hat{a}_0^2 + \frac{i\hbar}{2} \tau_{,\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} A_{p_\mu}(\tau) + \hat{O}(\hbar^{3/2}). \end{aligned} \quad (13.32)$$

В формулах (13.31) и (13.32) действие оператора  $\hat{\delta}^l$  определяется так же, как и в (13.30), с формальной заменой  $\Delta\hat{p}_\mu \rightarrow \Delta\hat{p}_\mu$  (13.22). Вернемся теперь к уравнению (13.26) и с учетом (13.27) и оценок (13.23) перепишем его следующим образом:

$$\hat{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha V_{(\nu)}^\sigma = e_j^\alpha \left\{ \mathcal{H}_i^j + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 \mathcal{H}_i^j + i\hbar \mathcal{H}_i^j \right\} u^i \Psi_{(\nu)} + O(\hbar^{3/2}), \quad (13.33)$$

где в фигурных скобках стоят тетрадные компоненты величин, определенных в (13.3) и (13.4). Если теперь воспользоваться формулами (13.31), (13.32) и асимптотической оценкой

$$e_\alpha^\mu \tau_{,\mu} = O(\hbar^{1/2}), \quad (13.34)$$

справедливость которой следует из (13.14) и (13.17), то уравнение (13.33) с учетом (13.24) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} & \left\{ \lambda_0 + \hat{\delta} \mathcal{H}_{(0)}^{(0)} + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 \mathcal{H}_{(0)}^{(0)} + \frac{1}{4mc} (\hat{a}_0 \hat{\delta} \mathcal{P}^{(0)} + \hat{a}_0 \hat{\delta} \mathcal{P}_{(0)}) + i\hbar \mathcal{H}_{(0)}^{(0)} \right\} u^{(0)} \Psi_{(\nu)} + \\ & + \left\{ \hat{\delta} \mathcal{H}_a^{(0)} + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 \mathcal{H}_a^{(0)} + \frac{\hat{a}_0 \hat{\delta} \mathcal{P}_a}{4mc} + i\hbar \mathcal{H}_a^{(0)} \right\} u^a \Psi_{(\nu)} + O(\hbar^{3/2}) = 0, \end{aligned} \quad (13.35)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ -i\hbar \partial_\tau \delta_a^b - \frac{i\hbar e}{mc^2} F^a_b + i\hbar \Gamma_{(0)}^a_b + \hat{\delta} \mathcal{H}_b^a + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 \mathcal{H}_b^a + i\hbar \mathcal{H}_b^a \right\} u^b \Psi_{(\nu)} + \\ & + \left\{ \frac{i\hbar e}{mc^2} F^a_{(0)} + i\hbar \Gamma_{(0)}^a_{(0)} \hat{\delta} \mathcal{H}_{(0)}^a + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 \mathcal{H}_{(0)}^a + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4mc} \hat{a}_0 \hat{\delta} \mathcal{P}^a + i\hbar \mathcal{H}_{(0)}^a \right\} u^{(0)} \Psi_{(\nu)} + O(\hbar^{3/2}) = 0. \end{aligned} \quad (13.36)$$

Представим теперь компоненты вектора поляризации  $u^i$  в виде разложения по степеням  $\hbar^{1/2}$

$$u^i = \hat{u}^i + \sqrt{\hbar} \hat{u}^i + \hbar \hat{u}^i + O(\hbar^{3/2}). \quad (13.37)$$

Подставив (13.37) в (13.35) и приравняв слагаемые при одинаковых степенях  $\hbar$ , получим

$${}^0u^{(0)} = 0, \quad \sqrt{\hbar} {}^1u^{(0)}\Psi_{(\nu)} = \hat{Q}_a^{(1)} {}^0u^a\Psi_{(\nu)}, \quad (13.38)$$

$$\hbar {}^2u^{(0)}\Psi_{(\nu)} = \hat{Q}_a^{(2)} {}^0u^a + \sqrt{\hbar}\hat{Q}_a^{(1)} {}^1u^a\Psi_{(\nu)}, \quad (13.39)$$

где операторы  $\hat{Q}_a^{(1)}$  и  $\hat{Q}_a^{(2)}$  определены выражениями

$$\hat{Q}_a^{(1)} = -\frac{1}{mc}e_a^\sigma(\hat{\delta}\mathcal{P}_\sigma), \quad (13.40)$$

$$\hat{Q}_a^{(2)} = \frac{2}{mc}\hat{\delta}\mathcal{H}_{(0)}^0\hat{Q}_a^{(1)} + \frac{2}{mc}\left\{\hat{\delta}^2\mathcal{H}_a^{(0)} + \frac{1}{4mc}\hat{a}_0\hat{\delta}\mathcal{P}_a + i\hbar\mathcal{H}_a^{(0)}\right\}. \quad (13.41)$$

Подставим теперь выражения (13.38) в уравнение (13.36), после чего оно примет вид

$$\left\{(-i\hbar\partial_\tau + \hat{\pi})\delta_a^b - \frac{i\hbar e}{mc^2}F_b^a + i\hbar\Gamma_{(0)b}^a - \frac{1}{4mc}(\hat{\delta}\mathcal{P}_b\hat{\delta}\mathcal{P}^a + \hat{\delta}\mathcal{P}^a\hat{\delta}\mathcal{P}_b) + i\hbar\mathcal{H}_b^a + \hat{\delta}\mathcal{H}_{(0)}^a\right\} {}^0u^b\Psi_{(\nu)} + O(\hbar^{3/2}) = 0. \quad (13.42)$$

Наконец, подставим в уравнение (13.42) выражение (13.28) для функции  $\Psi_{(\nu)}$  и, принимая во внимание (13.25), получим уравнение для  ${}^0u^b$ :

$$\left\{\partial_\tau\delta_b^a - \frac{e(g-2)}{2mc^2}F_b^a + S^{(0)}{}_b^a + S^{a(0)}{}_b\right\} {}^0u^b(\tau) = 0. \quad (13.43)$$

Таким образом, проблема построения траекторно-когерентных состояний исходного уравнения Прока (13.1) сводится к решению линейного эволюционного уравнения типа Паули (13.43) на компоненты вектора поляризации  ${}^0u^b$  в нулевом приближении.

В заключение этого раздела выпишем в явном виде выражение для векторной функции (13.27):

$$V_{(\nu)}^\sigma = \{l_a^\sigma(\tau) + \dot{q}^\sigma(\tau)(\hat{Q}_a^{(1)} + \hat{Q}_a^{(2)})\} {}^0u^a\Psi_{(\nu)} + O(\hbar^{1/2}). \quad (13.44)$$

Следует заметить, что, несмотря на то, что решения (13.44) удовлетворяют исходному уравнению (13.1) с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ , сами они могут быть определены лишь с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$  (что отражено в (13.44)). Оставшиеся функции  ${}^1u^i$  и  ${}^2u^i$ , входящие в разложение (13.37), могут быть найдены из высших приближений для векторного поля Прока  $V^\sigma$ . Из этого замечания, в частности, следует, что среднее значение любой квантовой наблюдаемой в состоянии (13.44) корректно вычисляется лишь с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$ .

Наконец, отметим, что аналогичная проблема построения локализованных вблизи фазовой траектории решений для случая эллиптической системы уравнений исследовалась [109] с использованием подхода, близкого к методу квазиклассических ТКС.

## 14. Гильбертова структура на множестве квазиклассических ТКС уравнения Прока

Скалярное произведение для решений уравнения Прока (13.1) можно определить, если известно выражение для сохраняющего 4-тока векторного поля

$V^\mu$ , взаимодействующего с внешним электромагнитным и торсионным полями. Его нетрудно построить из лагранжиана (Г.4), откуда получаем

$$J^\beta = \frac{i\hbar}{2mc} \{V^{\alpha*} W_\alpha^\beta - V^\alpha W_\alpha^{\beta*} + 4S^{\beta[\alpha\nu]} V_\alpha^* V_\nu\}, \quad (14.1)$$

$$\nabla_\beta J^\beta = 0. \quad (14.2)$$

Если ввести оператор

$$\hat{J}_{\alpha\nu}^\beta = \frac{i\hbar}{2mc} D_\alpha \delta_\nu^\beta - D^\beta g_{\alpha\nu} + 2S^\beta_{\alpha\nu}, \quad (14.3)$$

то выражение для тока (14.1) можно переписать в более удобном для нас виде

$$J^\beta = V^{\alpha*} (\hat{J}_{\alpha\nu}^\beta V^\nu) + (\hat{J}_{\nu\alpha}^\beta V^\alpha)^* V^\nu. \quad (14.4)$$

Скалярное произведение для двух произвольных решений уравнения (13.1)  $U^\mu$  и  $V^\nu$  определим в виде

$$\langle U|V \rangle_P = - \int_{\tau(x)=s} d\Sigma_\alpha \{U^{\mu*} (\hat{J}_{\mu\nu}^\alpha V^\nu) + (\hat{J}_{\mu\nu}^\alpha U^\mu)^* V^\nu\}, \quad (14.5)$$

где  $d\Sigma_\alpha = \tau_{,\alpha} d\Sigma$  – векторный элемент площади гиперповерхности  $\tau(x) = s$ . Как и для уравнения Клейна–Гордона, скалярное произведение (14.5) не является положительно определенным и поэтому квантово-механическая интерпретация решений уравнения Прока (13.1) в общем случае сталкивается с трудностями. Покажем, что на множестве ТКС  $V^\mu$  (13.44) скалярное произведение (14.5) с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$  допускает гильбертову структуру. Для доказательства этого утверждения используем явный вид функции  $V^\mu$  (13.44)

$$V_{(\nu,\zeta)}^\mu = e_a^\mu \overset{0}{u}_{\zeta}^a \Psi_{(\nu)} + O(\hbar^{1/2}), \quad (14.6)$$

где индекс  $\zeta$  нумерует решения уравнения (13.43). Тогда имеем

$$\begin{aligned} \langle V_{(\nu',\zeta')} | V_{(\nu,\zeta)} \rangle_P &= - \int_{\tau(x)=s} d\Sigma_\alpha \{V_{(\nu',\zeta')}^{\mu*} (\hat{J}_{\mu\nu}^\alpha V_{(\nu,\zeta)}^\nu) + (\hat{J}_{\nu\mu}^\alpha V_{(\nu',\zeta')}^\mu)^* V_{(\nu,\zeta)}^\nu\} = \\ &= - \int_{\tau(x)=s} d\Sigma \tau_{,\alpha} \dot{q}^\alpha (g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu) \overset{0}{u}_{\zeta'}^a \overset{0}{u}_{\zeta}^b \Psi_{(\nu')}^* \Psi_{(\nu)} = \\ &= -\eta_{ab} \overset{0}{u}_{\zeta'}^a(s) \overset{0}{u}_{\zeta}^b(s) \int_{\tau(x)=s} d\Sigma \Psi_{(\nu')}^* \Psi_{(\nu)} = -\eta_{ab} \overset{0}{u}_{\zeta'}^a(s) \overset{0}{u}_{\zeta}^b(s) \delta_{(\nu),(\nu')} + O(\hbar^{1/2}). \end{aligned} \quad (14.7)$$

При выводе выражения (14.7) мы использовали асимптотическую оценку  $-i\hbar D_\mu = mc \dot{q}_\mu + O(\hbar^{1/2})$  и результаты предыдущего раздела.

Осталось показать, что вдоль классической траектории  $q^\mu(s)$  всегда можно добиться выполнения условия

$$\eta_{ab} \overset{0}{u}_{\zeta'}^a(s) \overset{0}{u}_{\zeta}^b(s) = -\delta_{\zeta\zeta'}. \quad (14.8)$$

Прежде всего заметим, что если  $\overset{0}{u}_{\zeta^a}$  и  $\overset{0}{u}_{\zeta'^a}$  два произвольных решения уравнения (13.43), то нетрудно убедиться, что величина  $\overset{*}{u}_{\zeta^a}(s) \overset{0}{u}_{a\zeta}(s)$  сохраняется вдоль классической траектории  $q^\mu(s)$ . Отсюда имеем

$$\overset{*}{u}_{\zeta^a}(s) \overset{0}{u}_{a\zeta}(s) = \overset{*}{u}_{\zeta^a}(0) \overset{0}{u}_{a\zeta}(0). \quad (14.9)$$

Это обстоятельство позволяет провести классификацию решений уравнения (13.43) по направлению вектора поляризации. Для этого подчиним компоненты вектора поляризации  $\overset{0}{u}^a(s)$  в начальный момент времени ( $s = 0$ ) условию

$$\langle \vec{\Sigma}_a^b, \vec{n} \rangle \overset{0}{u}_\zeta^a(0) = \zeta \overset{0}{u}_\zeta^b(0), \quad (14.10)$$

где вектор-матрица  $\vec{\Sigma} = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$  имеет своими компонентами матрицы спина векторного поля [?]

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.11)$$

Условие (14.10) фиксирует направление вектора поляризации при  $s = 0$  относительно произвольного единичного вектора  $\vec{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ . Уравнение (14.10) допускает следующий ортонормированный набор решений:

$$\begin{aligned} \overset{0}{u}_{\zeta_0^a}(0) &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ \overset{0}{u}_{\zeta_+^a}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \theta \cos \varphi + i \sin \varphi, -\cos \theta \sin \varphi - i \cos \theta, \sin \theta), \\ \overset{0}{u}_{\zeta_-^a}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\cos \theta \cos \varphi - i \sin \varphi, -\cos \theta \sin \varphi + i \cos \theta, \sin \theta), \\ \zeta_0 &= 0, \quad \zeta_+ = 1, \quad \zeta_- = -1. \end{aligned} \quad (14.12)$$

Решения (14.12) описывают три возможных состояния поляризации векторной частицы и удовлетворяют условию (14.8). В итоге с учетом (14.8) выражение (14.7) принимает вид

$$\langle V_{(\nu', \zeta')} | V_{(\nu, \zeta)} \rangle_P = \delta_{(\nu), (\nu')} \delta_{\zeta \zeta'} + O(\hbar^{1/2}). \quad (14.13)$$

## 15. Уравнение движения спина векторной частицы

В предыдущих разделах мы показали, что в траекторно-когерентном приближении уравнение Прока (13.1) допускает стандартную квантово-механическую интерпретацию. Это позволяет, в частности, определить среднее значение произвольного квантово-механического оператора  $\hat{A}$  в ТКС  $V^\sigma$  (13.44) с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$  при  $\hbar \rightarrow 0$  в виде

$$\langle \hat{A} \rangle = - \int_{\tau(x)=s} d\Sigma_\alpha \left[ V^{*\mu} \hat{J}_{\mu\nu}^\alpha (\hat{A} V^\nu) + (\hat{J}_{\mu\nu}^\alpha V^\mu)^* (\hat{A} V^\nu) \right] + O(\hbar^{1/2}). \quad (15.1)$$

Выберем в качестве оператора спина тензор  $\hat{T}_{\mu\nu}$  с компонентами

$$(\hat{T}_{\mu\nu})_\sigma^\rho = (\Sigma_{\mu\nu})_\sigma^\rho = i(g_{\mu\sigma} \delta_\nu^\rho - g_{\nu\sigma} \delta_\mu^\rho). \quad (15.2)$$

Определим классический тензор спина  $T_{\mu\nu}^{(\zeta)}(s)$  как квантово-механическое среднее оператора (15.2) в состоянии (14.6) с поляризацией  $\zeta$ . Тогда, согласно формуле (15.1), имеем

$$T_{\mu\nu}^{(\zeta)}(s) = - \int_{\tau(x)=s} d\Sigma_\alpha \left\{ V_{(\nu,\zeta)}^* \hat{J}_{\beta\rho}^\alpha (\hat{T}_{\mu\nu})_\sigma^\rho V_{(\nu,\zeta)}^\sigma + (\hat{J}_{\rho\beta}^\alpha V_{(\nu,\zeta)}^\beta)^* (\hat{T}_{\mu\nu})_\sigma^\rho V_{(\nu,\zeta)}^\sigma \right\}. \quad (15.3)$$

Отсюда получим

$$T_{\mu\nu}^{(\zeta)}(s) = i(\overset{0}{u}_{(\zeta)\mu} \overset{*}{u}_{(\zeta)\nu} - \overset{*}{u}_{(\zeta)\nu} \overset{0}{u}_{(\zeta)\mu})(s), \quad \overset{0}{u}_{(\zeta)\mu} = e_{a\mu} \overset{0}{u}^a. \quad (15.4)$$

С помощью тензора спина (15.3) можно определить псевдовектор спина  $a_{(\zeta)}^\alpha(s)$  в состоянии с поляризацией  $\zeta$

$$a_{(\zeta)}^\alpha(s) = \frac{1}{2} e^{\alpha\mu\nu\beta} T_{\mu\nu}^{(\zeta)}(s) \dot{q}_\beta. \quad (15.5)$$

Тогда очевидно

$$a_{(\zeta)}^\alpha(s) = i e^{\alpha\mu\nu\beta} \overset{*}{u}_{(\zeta)\mu} \overset{0}{u}_{(\zeta)\nu} \dot{q}_\beta. \quad (15.6)$$

Отсюда следует выполнение условия Тамма [59]

$$a_{(\zeta)}^\alpha \dot{q}_\alpha = 0. \quad (15.7)$$

Кроме того, из (15.6) и классификации (14.12) решений уравнения (11.14) следует

$$a_{(\zeta_0)}^\alpha = 0, \quad a_{(\zeta_\pm)}^\alpha a_{(\zeta_\pm)\alpha} = -1. \quad (15.8)$$

Таким образом, в состоянии с поляризацией  $\zeta = 0$  векторная частица обладает нулевым спином.

Для построения уравнения, которому удовлетворяет тензор спина  $T_{\mu\nu}$  (15.4), воспользуемся уравнением (13.43), в котором положим  $\tau(x) = s$ . В этом случае выражение (13.43) описывает эволюцию вектора поляризации вдоль классической траектории  $q(s)$  (13.11). Действуя ковариантной производной вдоль кривой  $q(s)$  на обе части уравнения (15.4), после несложных вычислений находим

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds} T^{\mu\nu} = & \frac{\mu_h}{c\hbar} (F^\mu{}_\beta T^{\beta\nu}) - F^\nu{}_\beta T^{\beta\mu} - (S^{\mu\kappa}{}_\beta - S_\beta{}^{\kappa\mu}) \dot{q}_\kappa T^{\beta\nu} + \\ & + (S^{\nu\kappa}{}_\beta - S_\beta{}^{\kappa\nu}) \dot{q}_\kappa T^{\beta\mu} + (\dot{q}^\mu T^{\beta\nu} - \dot{q}^\nu T^{\beta\mu}) \left\{ \frac{e(g-2)}{2mc^2} F_{\beta\alpha} - S_{\beta\sigma\alpha} \dot{q}^\sigma \right\} \dot{q}^\alpha, \end{aligned} \quad (15.9)$$

где  $\mu_h = g e \hbar / (2mc)$  – магнитный момент векторной частицы. Полагая в (15.9)  $S_{\mu\nu\alpha} = 0$ , приходим к спиновому уравнению в форме Найборга [110] без учета градиентных членов (см. также [59, 61]). Заметим, кроме того, что в отсутствие электромагнитного поля уравнение (15.9) отличается от уравнения, полученного в [82, 83], наличием дополнительного слагаемого в фигурных скобках. Наконец, с помощью соотношения (14.6) можно построить уравнение, которому удовлетворяет псевдовектор спина  $a^\alpha(s)$

$$\frac{D}{ds} a^\alpha = \frac{\mu_h}{c\hbar} F^{\alpha\beta} a_\beta + \frac{e(g-2)}{2mc^2} \dot{q}^\alpha a_\beta F^{\beta\gamma} \dot{q}_\gamma + 2S^{\gamma[\alpha\beta]} \dot{q}_\gamma a_\beta - \dot{q}^\alpha S^{\beta(\gamma\sigma)} a_\beta \dot{q}_\gamma \dot{q}_\sigma. \quad (15.10)$$

Уравнение (15.10) является ковариантным обобщением уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди (см., например, [59]) для векторной частицы с аномальным магнитным моментом на случай внешних полей кручения и при  $F_{\mu\nu} = 0$  совпадает с полученным в [82, 83]. Уравнение (15.10) также может быть получено другим способом (см. Приложение Д).

## 16. Квазиклассическая асимптотика ядра Швингера–Де Витта

Для оператора Гамильтона  $\hat{\mathcal{H}}$  (9.1) и  $\hat{\mathcal{H}}^\nu_\mu$  (9.3) рассмотрим следующую задачу<sup>8</sup>:

$$\{-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}\}\mathcal{K} = 0, \quad (16.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathcal{K}(x, y, t, s) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} \delta(x - y) \quad (16.2)$$

и

$$\{-i\hbar\partial_t \delta^\mu_\nu + \hat{\mathcal{H}}^\mu_\nu\} \mathcal{K}^\nu_\alpha = 0, \quad (16.3)$$

$$\lim_{t \rightarrow s} \mathcal{K}^\alpha_\beta(x, y, t, s) = \frac{1}{\sqrt{-g(x)}} (\delta^\alpha_\beta - \dot{q}^\alpha(s) \dot{q}_\beta(s)) \delta(x - y). \quad (16.4)$$

Здесь  $\delta$ -функция понимается относительно стандартной нормы в  $L_2(\mathbb{R}^4)$ .

Нетрудно заметить, что решение задачи (16.1), (16.2) в классе  $\mathbb{CS}_s^{(N+3)}(z(t), \infty)$  получается из (I.17.4) формальной заменой  $|\nu, t\rangle \rightarrow (-g(t))^{-1/4} |\nu, t\rangle$  и  $\hat{\mathcal{H}}_1 \rightarrow \hat{\mathcal{H}} + \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2 - \hat{\lambda}_0$ , где операторы  $\hat{\mathcal{H}}_k$ ,  $k = 0, 1, 2$ , определены в (11.4)–(11.6), а оператор  $\hat{\lambda}_0$  – в (11.36).

Рассмотрим теперь задачу (16.3), (16.4). Для ее решения построим асимптотически полный в  $\mathbb{CS}_p^{(N+3)}(z(t), \infty)$  набор состояний  $V^{(N)}_\nu(x, t, \hbar)$ . Решение уравнения

$$\{-i\hbar\partial_t \delta^\mu_\nu + \hat{\mathcal{H}}^\mu_\nu\} V^\nu = 0 \quad (16.5)$$

будем искать в виде, аналогичном (13.27)

$$V^\nu(x, t, \hbar) = e^\nu_j \Phi^j(x, t, \hbar) \quad (16.6)$$

где  $\Phi^j(x, t, \hbar) \in \mathbb{CS}_S^{(N+3)}(z(t), \infty)$ , а  $e^\nu_j(t)$  определено в (13.12)–(13.14). Подставив (16.6) в (16.5), получим следующую систему уравнений для определения функций  $\Phi^j(x, t, \hbar)$ :

$$\{-i\hbar\partial_t \delta^a_b - i\hbar e^a_\nu(t) \dot{e}^\nu_b(t) + \hat{\mathcal{H}}^a_b\} \Phi^a + \{-i\hbar e^a_\nu(t) \dot{e}^\nu_0(t) + \hat{\mathcal{H}}^a_0\} \Phi^0 = 0, \quad (16.7)$$

$$\{-i\hbar\partial_t - i\hbar e^0_\nu(t) \dot{e}^\nu_0(t) + \hat{\mathcal{H}}^0_0\} \Phi^0 + \{-i\hbar e^0_\nu(t) \dot{e}^\nu_a(t) + \hat{\mathcal{H}}^0_a\} \Phi^a = 0. \quad (16.8)$$

В силу оценок

$$\Delta \hat{p}_\mu = \hat{O}(\sqrt{\hbar}), \quad \Delta \hat{x}^\mu = \hat{O}(\sqrt{\hbar}), \quad -i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}_0 = \hat{O}(\hbar), \quad (16.9)$$

где  $\lambda_0 = (1 + \hat{\delta} + \hat{\delta}^2/2)\lambda$ ,  $\lambda = \frac{1}{2mc}(c^2 \mathcal{P}_\mu \mathcal{P}^\mu + m_0^2 c^4)$ , справедливых в классе функций  $\mathbb{CS}_S^{(N+3)}(z(t), \infty)$ , уравнение (16.8) можно разрешить относительно  $\Phi^0$ :

$$\Phi^0 = \hat{Q}_a \Phi^a. \quad (16.10)$$

Здесь

$$\hat{Q}_a = \{-i\hbar\partial_t - \dot{e}^0_\nu(t) \dot{e}^\nu_0(t) + \hat{\mathcal{H}}^0_0\}^{-1} \{i\hbar e^0_\nu(t) \dot{e}^\nu_a + \hat{\mathcal{H}}^0_a\} =$$

<sup>8</sup>О физическом смысле уравнений (16.1)–(16.3) см., например, в [73, 111].

$$= \sum_{k=0}^{N+2} \hbar^{k/2} \hat{Q}_a^{(k)} + O(\hbar^{(N+3)/2}), \quad (16.11)$$

где  $\hat{Q}_a^{(0)} = 0$ , операторы  $\hat{Q}_a^{(1)}$  и  $\hat{Q}_a^{(2)}$  определены в (13.40) и (13.41), а операторы  $\hat{Q}_a^{(k)}$ ,  $k > 2$ , определяются аналогично спинорному случаю (см. гл. 1). Подставив (16.10) в (16.7), для определения  $\Phi^b$  получим уравнение типа Паули

$$\{ -i\hbar \partial_t \delta^a_b - i\hbar e^a_\nu(t) \dot{e}^\nu_b(t) + \hat{\mathcal{H}}^a_b + (i\hbar e^a_\nu(t) \dot{e}^\nu_0(t) + \hat{\mathcal{H}}^a_0) \hat{Q}_b \} \Phi^b = 0. \quad (16.12)$$

Решение уравнения (16.12) ищем в виде

$$\Phi^b(x, t, \hbar) = \sum_{k=0}^N \hbar^{k/2} \overset{k}{\Phi}^b(x, t, \hbar), \quad (16.13)$$

где  $\overset{k}{\Phi}^b(x, t, \hbar) \in \mathcal{P}_t^\hbar$ . Тогда главный член квазиклассических ТКС имеет вид

$$\overset{0}{\Phi}^b_{(\nu, \eta)}(x, t, \hbar) = \overset{0}{u}^b_{(\eta)}(t) \frac{1}{\sqrt[4]{-g(t)}} |\nu, t\rangle, \quad \nu \in \mathbb{Z}_+^4, \quad \eta = -1, 0, 1, \quad (16.14)$$

$\overset{0}{u}^b_{(\eta)}(t)$  — решение уравнения (13.43) с начальным условием (14.12), а  $|\nu, t\rangle$  — полный набор квазиклассических ТКС, отвечающих гамильтониану (13.9) (см. часть I). Тогда

$$\Phi^a_{(\nu, \eta)}(x, t, \hbar) = \hat{T}_b^a(t, \hbar) \overset{0}{\Phi}^b_{(\nu, \eta)}(x, t, \hbar) + O(\hbar^{(N+1)/2}), \quad (16.15)$$

где оператор  $\hat{T}_b^a$  определяется аналогично соответствующему оператору главы 1. Тогда

$$V^{\mu}_{(\nu, \eta)}(x, t, \hbar) = (e^\mu_a(t) + \dot{q}^\mu(t) \hat{Q}_a) [\hat{T}_b^a(t, \hbar) \overset{0}{\Phi}^b_{(\nu, \eta)}(x, t, \hbar) + O(\hbar^{(N+1)/2})]. \quad (16.16)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\mu_\nu(x, y, t, s) &= [e^\mu_a(t) + \dot{q}^\mu(t) \hat{Q}_a(t, \hbar)] \mathcal{K}^a_b(x, y, t, s) \times \\ &\times [e^b_\nu(t) + \dot{q}_\nu(t) (\hat{Q}^b(t, \hbar))^+] + O(\hbar^{(N+1)/2}), \end{aligned} \quad (16.17)$$

где  $\mathcal{K}^a_b$  — фундаментальное решение задачи Коши уравнения (16.12), которое, согласно (16.16), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^a_b(x, y, t, s) &= \frac{1}{\sqrt[4]{g(t)g(s)}} = \\ &= \sum_{\eta=-1}^1 \hat{T}_c^a(t, \hbar) \overset{0}{u}^c_{(\eta)}(t) G^{(0)}(x, y, t, s) \overset{0}{u}^d_{(\eta)}(s) \hat{T}_{db}^+(s, \hbar) + O(\hbar^{(N+1)/2}), \end{aligned} \quad (16.18)$$

а  $G^{(0)}(x, y, t, s)$  определена в (I.14.20). В частности, для главного члена асимптотики получим

$$\mathcal{K}^\mu_\nu(x, y, t, s) = \sum_{\eta=-1}^1 e^\mu_a(t) \overset{0}{u}^a_{(\eta)}(t) e_{\nu b}(s) \overset{0}{u}^b_{(\eta)}(s) G^{(0)}(x, y, t, s). \quad (16.19)$$



## 17. Вспомогательные факты из теории комплексного роста

Упорядочивая по Вейлю оператор  $\hat{\mathcal{H}}_0$ , получим

$$\hat{\mathcal{H}}_D = \hat{\mathcal{H}}_0 + i\hbar\hat{\mathcal{H}}_1, \quad (17.1)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\hat{\mathcal{P}}_\mu + \hat{\mathcal{P}}_\mu\gamma^\mu) + mc, \quad (17.2)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = -\frac{1}{2}\Gamma_{\mu\nu}{}^\mu\gamma^\nu + \left(\frac{1}{4}\omega_\mu + \frac{3}{2}S_\mu\right)\tilde{\gamma}^\mu. \quad (17.3)$$

Здесь  $\hat{\mathcal{P}}_\mu = \hat{p}_\mu + \frac{e}{c}A_\mu$ ,  $\hat{p}_\mu = -i\hbar\partial_\mu$ ,  $\Gamma_{\mu\alpha}{}^\nu$  – символы Кристофеля, а псевдовектор  $\omega^\mu$  равен  $\omega^\mu = e^{\mu\nu\alpha\beta}\omega_{\nu\alpha\beta}$ , где  $\omega_{\nu\alpha\beta}$  – коэффициенты вращения Риччи, которые в терминах вещественной тетрады  $e_j^\alpha$  (определяемой соотношением  $g^{\mu\nu} = e_i^\mu\eta^{ij}e_j^\nu$ ,  $i, j, k, l = \overline{1, 3}$ , где  $\eta^{ij} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ ) имеют вид  $\omega_{\mu\nu\alpha} = e_\alpha^i e_{i\nu;\mu}$ . Главный символ оператора (17.1) определяется по правилу

$$\hat{\mathcal{H}}_D = \mathcal{H}_D(\hat{p}, q, \hbar) \rightarrow \mathcal{H}_D(p, q, 0) = \overset{0}{\mathcal{H}}(p, q) \quad (17.4)$$

и в нашем случае равен

$$\overset{0}{\mathcal{H}}(p, q) = \gamma^\mu\mathcal{P}_\mu + mc, \quad \mathcal{P}_\mu = p_\mu + \frac{e}{c}A_\mu. \quad (17.5)$$

(Здесь и ниже для удобства записи используем обозначения  $\hat{p} = (\hat{p}_\mu)$ ,  $q = (q^\mu)$ .)  
Рассмотрим спектральную задачу для эрмитовой матрицы (17.5)

$$\overset{0}{\mathcal{H}}\Pi_\pm = \lambda^{(\pm)}\Pi_\pm. \quad (17.6)$$

Обозначив через  $\mathcal{P}_i = e_i^\mu\mathcal{P}_\mu = (\mathcal{P}_0, -\vec{\mathcal{P}})$  тетрадные компоненты кинетического импульса, получим

$$\lambda^{(\pm)}(p, q) = mc \pm \varepsilon(p, q) \quad \varepsilon(p, q) = \sqrt{q^{\mu\nu}\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu} \quad (17.7)$$

и

$$\Pi_+(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + \mathcal{P}_0)}} \begin{pmatrix} \mathcal{P}_0 + \varepsilon \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \end{pmatrix}, \quad \Pi_-(p, q) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + \mathcal{P}_0)}} \begin{pmatrix} \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \\ \mathcal{P}_0 + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (17.8)$$

где  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  –  $2 \times 2$  матрицы Паули.

Введем в рассмотрение классическую фазовую траекторию  $r_\tau = (p = P(\tau), q = Q(\tau))$ , параметризованную натуральным параметром  $\tau$ , как решение гамильтоновой системы с гамильтонианом  $\lambda^{(-)}(p, q)$ :

$$\begin{aligned} \dot{Q}^\alpha &= \lambda_{p_\alpha}^{(-)} = -\frac{1}{mc}g^{\alpha\nu}\mathcal{P}_\nu, \\ \dot{P}_\alpha &= -\lambda_{q^\alpha}^{(-)} = \frac{1}{2mc}\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial q^\alpha}\mathcal{P}_\mu\mathcal{P}_\nu + \frac{e}{mc^2}g^{\mu\nu}F_\mu\mathcal{A}_{\nu,\alpha}. \end{aligned} \quad (17.9)$$

Отсюда для траектории  $q = Q(\tau)$  получаем хорошо известное уравнение Лоренца в римановом пространстве

$$\ddot{Q}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\dot{Q}^\alpha\dot{Q}^\beta = \frac{e}{mc^2}g^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}\dot{Q}^\beta. \quad (17.10)$$

Здесь и ниже точкой обозначается производная по собственному времени  $\tau$ . Заметим, что вдоль классической траектории  $\varepsilon = mc$ .

Для построения траекторно-когерентных состояний уравнения (9.5) требуется проквантовать систему Гамильтона (17.9) в окрестности классической траектории  $r_\tau$  методом комплексного роста Маслова [31]. Перечислим основные этапы процедуры построения комплексного роста, отвечающего заданной траектории  $r_\tau$ .

Линеаризуем систему Гамильтона (17.9) в окрестности траектории  $r_\tau$ . В итоге получим систему в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{W}_\mu^\alpha(\tau) &= -\lambda_{q^\mu p_\alpha}^{(-)}(\tau) W_\alpha^a - \lambda_{q^\mu q^\alpha}^{(-)}(\tau) Z^{\alpha a}, \\ \dot{Z}^{\mu\alpha}(\tau) &= -\lambda_{p_\mu p_\alpha}^{(-)}(\tau) W_\alpha^a + \lambda_{p_\mu q^\alpha}^{(-)}(\tau) Z^{\alpha a}. \end{aligned} \quad (17.11)$$

На пространстве решений  $f_a(\tau) = (W_\mu^a(\tau), Z^{\mu a}(\tau))$  системы (17.11) зададим симплектическую структуру

$$\begin{aligned} \{f_a, f_b\} &= W_\mu^a Z^{\mu b} - Z^{\mu a} W_\mu^b, \\ \{f_a, f_b^*\} &= W_\mu^a Z^{\mu b} - Z^{\mu a} W_\mu^b. \end{aligned} \quad (17.a)$$

Легко видеть, что для любых двух решений  $f_a$  и  $f_b$  системы (17.11) справедливо свойство

$$\{f_a, f_b\}(\tau) = \text{const} \quad \{f_a, f_b^*\}(\tau) = \text{const}. \quad (17.б)$$

Одним из очевидных решений уравнения (17.11) является касательный вектор в фазовой кривой  $r_\tau$

$$f_0(\tau) = (W_\mu^0(\tau), Z^{\mu 0}(\tau)) = (\dot{p}_\mu(\tau), \dot{q}^\mu(\tau)). \quad (17.12)$$

Три другие линейно независимые комплексные решения  $f_n = \{W_\mu^n, Z^{\mu n}\}$ ,  $n, m = 1, 2, 3$ , выберем таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\{f_0, f_n\} = \{f_n, f_m\} = \text{const}, \quad \{f_n, f_m^*\} = 2ib_n \delta_{nm}, \quad (17.13)$$

где  $b_n > 0$ ,  $n = 1, 2, 3$ , — набор из трех вещественных положительных чисел. Из векторов  $f_a(\tau)$ ,  $a = 0, 3$ , (образующих, по определению, комплексный росток [31]) построим две комплексные  $4 \times 4$ -матрицы

$$\begin{aligned} B(\tau) &= (\dot{P}(\tau), W^1(\tau), W^2(\tau), W^3(\tau)), \\ C(\tau) &= (\dot{Q}(\tau), Z^1(\tau), Z^2(\tau), Z^3(\tau)), \end{aligned} \quad (17.14)$$

иными словами,  $B_\mu^a(\tau) = W_\mu^a$ ,  $C^{\mu a} = Z^{\mu a}$ . Докажем, что матрица  $C(\tau)$  невырождена

$$\det C(\tau) \neq 0. \quad (17.15)$$

В самом деле, если  $\det C(\tau_1) = 0$  при некотором значении  $\tau_1$ , то существует такой вектор  $\vec{k} \in \mathbb{C}^4$ ,  $|\vec{k}| \neq 0$ , что  $C(\tau_1)\vec{k} = 0$ . Рассмотрим матрицу  $(C^+B - B^+C)(\tau)$ .

Легко видеть, что ее компоненты равны  $(C^+B - B^+C)_a^b(\tau) = \{f_b, f_a^*\}(\tau) = 2ib_a \delta_{ab}$ . Отсюда получим

$$\vec{k}^+(C^+B - B^+C)(\tau_1)\vec{k} = 2i \sum_{n=1}^3 b_n |k_n|^2 = 0.$$

В силу условия  $b_n > 0$  отсюда следует, что  $k_n = 0$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Но тогда из  $C(\tau_1)\vec{k} = 0$  следует, что  $k_0 \dot{Q}(\tau_1) = 0$ . Поскольку  $\text{rank} \|\dot{Q}(\tau)\| \neq 0$ , то  $k_0 = 0$ . Таким образом, приходим к противоречию.

Введем матрицу  $G(\tau) = B(\tau)C^{-1}(\tau)$ . Ее мнимая часть является неотрицательной матрицей вида

$$\text{Im } G(\tau) = (C^{-1}(\tau))^+ DC^{-1}(\tau), \quad D = \text{diag}(0, b_1, b_2, b_3). \quad (17.16)$$

Каждой фазовой траектории  $r_\tau$  системы Гамильтона (17.9) сопоставим функцию типа ВКБ-решения следующего вида:

$$|\nu, \tau\rangle = \frac{1}{\sqrt{\det C(\tau)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(q, \tau)\right). \quad (17.17)$$

Здесь комплекснозначная фазовая функция  $S(q, \tau)$  имеет вид

$$S(q, \tau) = \int_0^\tau dt \left[ \dot{q}^\mu(t) p_\mu(t) + \mathcal{P}_\mu(\tau) \Delta q^\mu + \frac{1}{2} \Delta q^\mu G_{\mu\nu}(\tau) \Delta q^\nu \right], \quad (17.18)$$

где  $\Delta q^\mu = q^\mu - Q^\mu(\tau)$ . Отсюда в силу равенства (17.16) следует, что при каждом фиксированном значении параметра  $\tau$  функция (17.17) экспоненциально убывает при удалении от классической траектории  $q^\mu = Q^\mu(\tau)$ . Сопоставим векторам комплексного  $f_a(\tau)$  операторы «рождения» и «уничтожения»

$$\begin{aligned} \hat{a}_0(\tau) &= \dot{q}^\mu(\tau) \Delta \hat{p}_\mu - \dot{p}_\mu(\tau) \Delta q^\mu, \\ \hat{a}_n^+(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar b_n}} \left( \overset{*}{Z}{}^{\mu\nu}(\tau) \Delta \hat{p}_\mu - \overset{*}{W}_\mu{}^n(\tau) \Delta q^\mu \right), \\ \hat{a}_n(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar b_n}} \left( Z^{\mu\nu}(\tau) \Delta \hat{p}_\mu - W_\mu{}^n(\tau) \Delta q^\mu \right), \quad n = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (17.19)$$

где  $\Delta \hat{p}_\mu = -i\hbar \partial_\mu - \Pi_\mu(\tau)$ . Легко видеть, что введенные операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}_0, \hat{a}_n] = [\hat{a}_0, \hat{a}_n^+] = [\hat{a}_n^+, \hat{a}_m^+] = 0, \quad [\hat{a}_n^+, \hat{a}_m] = \delta_{nm}, \quad n, m = 1, 2, 3. \quad (17.20)$$

С помощью операторов «рождения»  $\hat{a}_n^+$  построим набор состояний вида

$$|\nu, \tau\rangle = \prod_{n=1}^3 \frac{1}{\sqrt{\nu!}} (\hat{a}_n^+)^{\nu_n} |0, \tau\rangle. \quad (17.21)$$

Тогда для функций (17.17) и (17.21) следует, что

$$\hat{a}_n |0, \tau\rangle = 0, \quad \hat{a}_0 |\nu, \tau\rangle = 0. \quad (17.22)$$

Классическому гамильтониану  $\lambda^{(-)}(p, q)$  сопоставим упорядоченный по Вейлю квадратичный оператор

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_0^{(-)} &= \lambda^{(-)}(\tau) + \hat{a}_0(\tau) + \frac{1}{2} \{ \langle \Delta q, \lambda_{qq}^{(-)}(\tau) \Delta q \rangle + \\ &+ \langle \Delta q, \lambda_{qp}^{(-)}(\tau) \Delta \hat{p} \rangle + \langle \Delta \hat{p}, \lambda_{pq}^{(-)}(\tau) \Delta q \rangle + \langle \Delta \hat{p}, \lambda_{pp}^{(-)}(\tau) \Delta \hat{p} \rangle \}, \end{aligned} \quad (17.23)$$

где скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначают скалярное произведение векторов, например

$$\langle \Delta \hat{p}, \lambda_{pq}^{(-)}(\tau) \Delta \hat{q} \rangle = \Delta p_\mu \lambda_{p_\mu q^\nu}^{(-)}(\tau) \Delta q^\nu$$

и т.д. Заметим, что в нашем случае  $\lambda^{(-)}(\tau) = 0$ , поскольку  $\dot{Q}_\mu(\tau) \dot{Q}^\mu(\tau) = 1$ . Нетрудно показать, что функции  $|\nu, \tau\rangle$  вида (17.21) являются точными решениями уравнения Шрёдингера

$$(-i\hbar \partial_\tau - \hat{\lambda}_0^{(-)}) |\nu, \tau\rangle = 0. \quad (17.24)$$

Справедливость этого утверждения следует, в частности, из того факта, что операторы  $\hat{a}_n^+$  являются точными симметриями уравнения (17.21).

Следуя общей процедуре построения комплексной функции действия  $S(q, \tau(q))$ , отвечающей лагранжеву многообразию с комплексным ростком (так называемая операция перестройки фазы [31]), рассмотрим в окрестности классической траектории  $q = Q(\tau)$  уравнение

$$\dot{Q}_\mu(\tau)(q^\mu - Q^\mu(\tau)) = 0. \quad (17.25)$$

Это уравнение имеет вид  $F(\tau, q) = 0$  и задает в неявном виде функцию  $\tau = \tau(q)$ . Иными словами, получаем параметризованное по  $\tau$  семейство гиперплоскостей, пересекающих кривую  $q = Q(\tau)$ . Условие однозначной разрешимости уравнения (17.25) в окрестности кривой  $q = Q(\tau)$  имеет вид  $F_{,\tau}(\tau, q)|_{q=Q(\tau)} \neq 0$  и выполняется автоматически, поскольку

$$F_{,\tau}(\tau, q)|_{q=Q(\tau)} = -\dot{Q}_\mu(\tau)\dot{Q}^\mu(\tau) = -1. \quad (17.26)$$

Продифференцировав далее уравнение (17.25) по  $q^\alpha$ , получим

$$\tau_{,\alpha} = \frac{\dot{Q}(\tau(q))}{1 - \ddot{Q}_\beta(\tau(q))\Delta q^\beta} = \dot{Q}_\alpha(\tau(q)) + O(|\Delta q|). \quad (17.27)$$

Здесь и ниже  $\Delta q = q - Q(\tau(q))$ . Из (17.27), в частности, следует, что

$$\tau_{,\alpha}\Delta q^\alpha = 0, \quad (17.28)$$

$$\tau_{,\mu}q^{\mu\nu}(Q(\tau))\tau_{,\nu} = 1 + O(|\Delta q|). \quad (17.29)$$

Равенство (17.29) означает, что при каждом фиксированном значении параметра  $\tau$  в достаточно малой окрестности точки кривой  $q = Q(\tau)$  соответствующая гиперплоскость является пространственно-подобной.

Определим класс функций вида

$$\mathcal{F}_\hbar^s = \left\{ \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(q, \tau) \right] \sum_{|\varkappa|=0}^N C_{\varkappa}(\tau) \left( \frac{\Delta q}{\hbar^{1/2}} \right)^{\varkappa} \right\} \Big|_{\tau=\tau(q)}, \quad (17.30)$$

где комплексная фаза  $S(q, \tau)$  определена в (17.18), а  $C_{\varkappa}(\tau)$  — гладкие двухкомпонентные вектор-функции со значениями в  $\mathbb{C}^2$ . В дальнейшем (с целью упрощения формул), если в некоторой функции, зависящей от  $q, p$ , проведена подстановка  $q = Q(\tau(q)), p = P(\tau(q))$ , то эту функцию будем обозначать той же буквой с аргументом  $\tau$ , например  $A(\tau) = A(p, q)|_{p=P(\tau(q)), q=Q(\tau(q))}$ . Аналогично для функ-

ций типа  $L(\tau)$ , которые с самого начала имеют своим аргументом параметр  $\tau$ , следует понимать  $L(\tau) = L(\tau(q))$ .

Покажем, что величина  $\langle \Delta q, \text{Im } G \Delta q \rangle = 0$  обращается в нуль только на кривой  $q = Q(\tau)$ . В самом деле, предположим противное, т.е.  $\langle \Delta q, \text{Im } G \Delta q \rangle = 0$  вне кривой  $q = Q(\tau)$ . Заметим, что в силу невырожденности матрицы  $G$  существует  $n$ -вектор  $\zeta \neq 0$  такой, что  $\Delta q = C\zeta$  (здесь мы воспользовались тем, что  $\Delta q \neq 0$  при  $q \neq Q(\tau)$ ). Из условия  $\langle \Delta q, \text{Im } G \Delta q \rangle = 0$  и равенства (17.16) следует, что  $(C_{n\nu}^{-1}\Delta q^\nu = 0 \rightarrow (C^{-1})_{n\nu}C^{\nu a}\zeta_a \rightarrow \xi_n = 0, n = 1, 2, 3$ . Таким образом,  $\Delta q^\mu = C^{\mu 0}\zeta_0 = \dot{Q}^\mu\zeta_0$ . Но в силу ортогональности (17.25) векторов  $\Delta q^\mu$  и  $\dot{Q}^\mu$  отсюда следует, что  $\zeta_0 = 0$ . Полученное противоречие доказывает сформулированное утверждение.

Отметим теперь, что для любой функции  $\varphi \in \mathcal{F}_\hbar^s$  при  $\hbar \rightarrow 0$  справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\Delta q^\mu \varphi = O(\hbar^{1/2}), \quad \Delta \hat{p}_\mu \varphi = O(\hbar^{1/2}), \quad (17.31)$$

где  $\Delta \hat{p}_\mu$  – оператор, который на класс функций  $\mathcal{F}_\hbar^s$  действует по правилу

$$\Delta \hat{p}_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^\mu} \Big|_{\tau=\text{const}} - P_\mu(\tau(q)). \quad (17.32)$$

Справедливость соотношений (17.31) вытекает из хорошо известной оценки

$$\xi^f e^{-\xi/\hbar} = O(\hbar^f), \quad \xi \geq 0, \quad f > 0, \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (17.33)$$

В дальнейшем нам потребуется также асимптотическая оценка

$$(-i\hbar \partial_\tau + \hat{a}_0)\varphi = O(\hbar). \quad (17.34)$$

## 18. Конструкция квазиклассических ТКС для уравнения Дирака

Перейдем теперь к построению асимптотических по  $\text{mod } O(\hbar^{3/2})$  решений уравнения (9.5), т.е. решений, удовлетворяющих исходному уравнению с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$

$$\hat{\mathcal{H}}_D \phi(q, \hbar) = O(\hbar^{3/2}). \quad (18.1)$$

Остановимся прежде всего на некоторых свойствах матриц  $\Pi_\pm(p, q)$  (17.8), которые в точках классической траектории  $r_\tau$  имеют вид

$$\Pi_+(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2(1-\dot{q})}} \begin{pmatrix} 1 - \dot{q}_0 \\ -\langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{q}} \rangle \end{pmatrix}, \quad \Pi_-(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2(1-\dot{q})}} \begin{pmatrix} -\langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{q}} \rangle \\ 1 - \dot{q}_0 \end{pmatrix}, \quad (18.2)$$

где  $\dot{q}_i = e_i^\alpha(\tau) \dot{Q}_\alpha = \langle \dot{q}_0, -\dot{\vec{q}} \rangle$ .

1) Матрицы (18.2) удовлетворяют условиям ортогональности и полноты

$$\bar{\Pi}_{\zeta'}(\tau) \Pi_\zeta(\tau) = \zeta \delta_{\zeta \zeta'}, \quad \zeta = \pm 1, \quad (18.3)$$

$$\Pi_+(\tau) \bar{\Pi}_+(\tau) - \Pi_-(\tau) \bar{\Pi}_-(\tau) = 1, \quad (18.4)$$

где  $\bar{\Pi}_\zeta = \overset{\dagger}{\Pi}_\zeta \rho_3$  – лагранжево сопряжение.

2) Для произвольного 4-вектора  $a_\mu(\tau)$  с тетрадными компонентами  $a_i(\tau) = e_i^\mu(\tau) a_\mu(\tau) = \langle a_0(\tau), -\vec{a}(\tau) \rangle$  справедливы тождества

$$\begin{aligned} \gamma^\mu(\tau) a_\mu(\tau) \Pi_\pm(\tau) &= \mp \Pi_\pm(\tau) (\dot{Q}^\mu a_\mu(\tau)) \pm \\ &\pm \Pi_\mp(\tau) \left\langle \vec{\sigma}, \left( \dot{\vec{q}} a_0(\tau) + \vec{a}(\tau) + \langle \dot{\vec{q}}, \vec{a}(\tau) \rangle \frac{\dot{\vec{q}}}{1 - \dot{q}_0} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (18.5)$$

$$\begin{aligned} \overset{\dagger}{\gamma}^\mu(\tau) a_\mu(\tau) \Pi_\pm(\tau) &= \pm \Pi_\mp(\tau) (\dot{Q}^\mu a_\mu(\tau)) \mp \\ &\mp i \Pi_\pm(\tau) \left\langle \vec{\sigma}, \left( \dot{\vec{q}} a_0(\tau) + \vec{a}(\tau) + \langle \dot{\vec{q}}, \vec{a}(\tau) \rangle \frac{\dot{\vec{q}}}{1 - \dot{q}_0} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (18.6)$$

$$\frac{d}{d\tau} \Pi_\pm(\tau) = -\frac{i}{2} \Pi_\pm(\tau) \frac{\langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{q}} \times \ddot{\vec{q}} \rangle}{1 - \dot{q}_0} - \frac{1 - \dot{q}_0}{2} \Pi_\mp(\tau) \frac{d}{d\tau} \frac{\langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{q}} \rangle}{1 - \dot{q}_0}, \quad (18.7)$$

где  $\ddot{\vec{q}} = \frac{d}{d\tau} \dot{\vec{q}}$ . В частности, из (18.5) следует равенство

$$\gamma^\mu(\tau) \dot{Q}_\mu \Pi_\pm(\tau) = \mp \Pi_\pm(\tau). \quad (18.8)$$

Волновую функцию  $\phi$ , удовлетворяющую уравнению (18.1), будем искать в виде

$$\begin{aligned}\phi(q, \hbar) &= \phi(q, \tau(q), \hbar) = \Pi_+(\tau)J^{(+)}(q, \hbar) + \Pi_-(\tau)J^{(-)}(q, \hbar) = \\ &= \sum_{n=0}^2 \hbar^{n/2} (\Pi_+(\tau) \overset{n}{J}^{(+)}(q, \hbar) + \Pi_-(\tau) \overset{n}{J}^{(-)}(q, \hbar)),\end{aligned}\quad (18.9)$$

где  $\tau(q)$  – гладкая функция, удовлетворяющая уравнению (17.25), а двухкомпонентные спиноры  $\overset{n}{J}^{(\pm)}(q, \hbar) \in \mathcal{F}_\hbar^s$ . Рассмотрим оператор  $\Delta \hat{p}_\mu = -i\hbar\partial/\partial q^\mu - \Pi_\mu(\tau(q))$ , действие которого в классе функций  $\mathcal{F}_\hbar^s$  удобно записать в следующем виде:

$$\Delta \hat{p}_\mu = \Delta \hat{p}_\mu + \tau_{,\mu}(-i\hbar\partial_\tau + \hat{a}_0) - \tau_{,\mu}\hat{a}_0. \quad (18.10)$$

Это позволит с учетом асимптотических оценок (17.31) и (17.34) дать асимптотическую оценку и для оператора  $\Delta \hat{p}_\mu$  на множестве  $\mathcal{F}_\hbar^s$ . Разложив оператор  $\hat{\mathcal{H}}_D$  (17.1)–(17.3) в окрестности кривой  $r_\tau = (P(\tau), Q(\tau))$  в ряд Тейлора по степеням операторов  $\Delta \hat{p} = (\Delta \hat{p}_\mu)$  и  $\Delta q = (\Delta q^\mu)$ , получим с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_D &= \mathcal{H}_D(\hat{p}, q, \hbar) = \mathcal{H}_D(p(\tau) + \Delta \hat{p}, q(\tau) + \Delta q, \hbar) = \\ &= \overset{0}{\mathcal{H}}(\tau) + \frac{1}{2} [\langle \overset{0}{\mathcal{H}}_p(\tau), \{\Delta \hat{p} + \nabla\tau(-i\hbar\partial_\tau + \hat{a}_0) - \nabla\tau\hat{a}_0\} \rangle]_+ + \\ &+ \langle \overset{0}{\mathcal{H}}_q(\tau), \Delta q \rangle + \frac{1}{2} (\langle \Delta q, \overset{0}{\mathcal{H}}_{qq}(\tau)\Delta q \rangle + [q, \overset{0}{\mathcal{H}}_{qp}(\Delta \hat{p} + \nabla\tau\hat{a}_0)])_+ + \\ &+ \langle (\Delta \hat{p} - \nabla\tau\hat{a}_0), \overset{0}{\mathcal{H}}_{pp}(\tau)(\Delta \hat{p} - \nabla\tau\hat{a}_0) \rangle + \hbar\mathcal{H}_D(\tau) + \hat{O}(\hbar^{3/2}).\end{aligned}\quad (18.11)$$

Воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned}\hat{a}_0\Delta q &= \Delta q\hat{a}_0 - i\hbar\dot{Q}(\tau), \\ \hat{a}_0\Delta \hat{p} &= \Delta \hat{p}\hat{a}_0 - i\hbar\dot{P}(\tau),\end{aligned}\quad (18.12)$$

Тогда уравнение (18.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}& [\langle \overset{0}{\mathcal{H}}_p(\tau), \nabla\tau \rangle (-i\hbar\partial_\tau + \hat{a}_0 - \hat{a}_0) + (\overset{0}{\mathcal{H}}(\tau) + (\hat{\delta} + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2) \overset{0}{\mathcal{H}}(\tau)) - \\ & - (\langle \Delta q, \overset{0}{\mathcal{H}}_{qp}(\tau)\nabla\tau \rangle - \langle \Delta \hat{p}, \overset{0}{\mathcal{H}}_{pp}(\tau)\nabla\tau \rangle) \hat{a}_0 + \\ & + \frac{1}{2} \langle \nabla\tau, \overset{0}{\mathcal{H}}_{pp}(\tau)\nabla\tau \rangle \hat{a}_0^2 + \hbar\mathcal{H}_1(\tau) ] \phi = O(\hbar^{3/2}).\end{aligned}\quad (18.13)$$

Уравнение (18.13) в силу асимптотической оценки (17.24) очевидно эквивалентно системе условий

$$\begin{aligned}& [\gamma^\mu(\tau)\tau_{,\mu}(-i\hbar\partial_\tau + \hat{a}_0 - \hat{a}_0) + \overset{0}{\mathcal{H}}(\tau) + \\ & + (\hat{\delta} + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2) \overset{0}{\mathcal{H}}(\tau) + \hbar\mathcal{H}_1(\tau)] \phi = O(\hbar^{3/2}),\end{aligned}\quad (18.14)$$

$$\hat{a}_0\phi = O(\hbar). \quad (18.15)$$

Подставив (18.9) в (18.14) и используя формулы (18.5)–(18.8), а также соотношение

$$\gamma^\mu(\tau)\tau_{,\mu}\dot{\Pi}_\pm(\tau) = \mp\Pi_\pm(\tau) + O(\hbar^{1/2}), \quad (18.16)$$

которое является прямым следствием формул (17.27) и (18.8), получим

$$\Pi_+ \left[ \left\{ (i\hbar\partial_\tau - \hat{\lambda}_0^{(-)}) + 2mc + \left( \hat{\delta} + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 \right) \lambda^{(-)} - \dot{Q}^\mu \left[ \left( \hat{\delta} + \frac{1}{2}\hat{\delta}^2 \right) \mathcal{P}_\mu \right] + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\hbar}{2} \frac{\langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{q}} \times \ddot{\vec{q}} \rangle}{1 - \dot{q}_0} + i\hbar \bar{\Pi}_+ \mathcal{H}_1 \Pi_+ \} J^{(+)} + \\
& + \left\{ - \langle \vec{\sigma}, \left[ \left( \hat{\delta} + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \mathcal{P}_0 \dot{\vec{q}} + \left( \hat{\delta} + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \vec{\mathcal{P}} + \langle \hat{\Delta} \vec{\mathcal{P}}, \dot{\vec{q}} \rangle \frac{\dot{\vec{q}}}{1 - \dot{q}_0} \right] \right\rangle - \\
& \quad - \frac{i\hbar}{2} (1 - \dot{q}_0) \frac{d}{dt} \frac{\langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{q}} \rangle}{1 - \dot{q}_0} + i\hbar \bar{\Pi}_+ \mathcal{H}_1 \Pi_- \} J^{(-)} - \\
& \quad - \Pi_+ \left\{ \left[ (i\hbar \partial_\tau - \hat{\lambda}_0^{(-)}) + \hat{\Delta} \lambda^{(-)} - \dot{Q}^\mu \left[ \left( \hat{\delta} + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \mathcal{P}_\mu \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\hbar}{2} \langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{q}} \times \ddot{\vec{q}} \rangle + i\hbar \bar{\Pi}_- \mathcal{H}_1 \Pi_- \right\} J^{(-)} + \\
& + \left\{ - \langle \vec{\sigma}, \left[ \left( \hat{\delta} + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \mathcal{P}_0 \dot{\vec{q}} + \left( \hat{\delta} + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \vec{\mathcal{P}} + \left\langle \left( \hat{\delta} + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \vec{\mathcal{P}}, \dot{\vec{q}} \right\rangle \frac{\dot{\vec{q}}}{1 - \dot{q}_0} \right] \right\rangle - \\
& \quad - \frac{i\hbar}{2} (1 - \dot{q}_0) \frac{d}{d\tau} \frac{\langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{q}} \rangle}{1 - \dot{q}_0} + i\hbar \bar{\Pi}_- \mathcal{H}_1 \Pi_+ \} J^{(-)} \Big] = O(\hbar^{3/2}). \quad (18.17)
\end{aligned}$$

Затем следует воспользоваться тождеством  $\hat{\delta}^1 \lambda^{(-)} = \dot{Q}^\mu \hat{\delta}^1 \mathcal{P}_\mu$ . Собрав слагаемые одного порядка по  $\hbar^{1/2}$  в первой квадратной скобке, получим

$$J^{(+)} = 0, \quad J^{(+)} = \frac{1}{2mc} \hat{Q}_1 J^{(-)}, \quad J^{(+)} = \frac{1}{2mc} \left( \hat{Q}_2 J^{(-)} + \hat{Q}_1 J^{(-)} \right), \quad (18.18)$$

где операторы  $\hat{Q}_1$  и  $\hat{Q}_2$  имеют вид

$$\hbar^{1/2} \hat{Q}_1 = \left\langle \vec{\sigma}, \left( \hat{\delta}^1 \mathcal{P}_0 \dot{\vec{q}} + \hat{\delta}^1 \vec{\mathcal{P}} + \langle \hat{\delta}^1 \vec{\mathcal{P}}, \dot{\vec{q}} \rangle \frac{\dot{\vec{q}}}{1 - \dot{q}_0} \right) \right\rangle, \quad (18.19)$$

$$\begin{aligned}
\hbar \hat{Q}_2 &= \frac{1}{2} \left\langle \vec{\sigma}, \left( \hat{\delta}^2 \mathcal{P}_0 \dot{\vec{q}} + \hat{\delta}^2 \vec{\mathcal{P}} + \langle \hat{\delta}^2 \vec{\mathcal{P}}, \dot{\vec{q}} \rangle \frac{\dot{\vec{q}}}{1 - \dot{q}_0} \right) \right\rangle + \\
& + \frac{i\hbar}{2} (1 - \dot{q}_0) \frac{d}{dt} \frac{\langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{q}} \rangle}{1 - \dot{q}_0} - i\hbar \Pi_+ \bar{H}_1 \Pi_+. \quad (18.20)
\end{aligned}$$

Приняв во внимание соотношения (18.18), получим из второй квадратной скобки в (18.17) единственное уравнение на двухкомпонентный спинор  $J^{(-)}(q, \hbar)$

$$\begin{aligned}
& \left[ (-i\hbar \partial_\tau + \hat{\lambda}_0^{(-)} - \frac{1}{2} \hat{\delta}^1 \lambda^{(-)} + \frac{1}{2} \dot{q}^\mu \hat{\delta}^2 \mathcal{P}_\mu - \frac{\hbar}{2} \frac{\langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{q}} \times \ddot{\vec{q}} \rangle}{1 - \dot{q}_0} - \right. \\
& \quad \left. - i\hbar \bar{\Pi}_- \mathcal{H}_1 \Pi_- + \frac{\hbar}{2mc} \hat{Q}_1^2 \right) J^{(-)} = 0. \quad (18.21)
\end{aligned}$$

Уравнение (18.21) может быть преобразовано к виду

$$\left[ (-i\hbar \partial_\tau + \hat{\lambda}_0^{(-)}) - i\hbar \frac{d}{d\tau} \ln \sqrt{-g(\tau)} + \hbar \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}(\tau) \rangle \right] J^{(-)} = 0, \quad (18.22)$$

где вектор-функция  $\vec{\mathcal{B}}(\tau)$  равна

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{B}} &= \frac{e}{2mc^2} \left\{ (\vec{e}^\mu \times \dot{\vec{q}}) \frac{e_0^\beta}{1 - \dot{q}_0} + \frac{1}{2} (\vec{e}^\mu \times \vec{e}^\beta) \right\} F_{\mu\beta} - \\
& - \frac{1}{2} \left\{ (\vec{e}^\mu \times \vec{e}^{\nu, \mu}) + \frac{1}{1 - \dot{q}_0} \dot{\vec{q}} \times (\vec{e}^{\nu, \mu} e_0^\mu - \vec{e}^\mu \vec{e}^{\nu, 0; \mu}) \right\} \dot{q}_\nu -
\end{aligned}$$

$$-\left\{ \left( \frac{1}{4}\omega_0 + \frac{3}{2}S_0 \right) \dot{q} + \left( \frac{1}{4}\omega + \frac{3}{2}\vec{S} \right) + \frac{\left\langle \dot{q}, \left( \frac{1}{4}\vec{\omega} + \frac{3}{2}\vec{S} \right) \right\rangle}{1 - \dot{q}_0} \dot{q} \right\}. \quad (18.23)$$

Здесь  $\omega_i = e_i^\mu \omega_\mu = (\omega_0, -\vec{\omega})$  и  $S_i = e_i^\mu S_\mu = (S_0, -\vec{S})$ , а  $g(\tau) = \det \|\delta_{\mu\nu}(\tau)\|$ . Положим далее

$$\begin{aligned} J^{(-)}(q, \hbar) &= v(\tau(q)) \Psi_\nu(q, \hbar), \\ \Psi_\nu(q, \hbar) &= \frac{1}{\sqrt[4]{-g(\tau(q))}} |\nu, \tau(q)\rangle, \end{aligned} \quad (18.24)$$

где  $v(\tau)$  – двухкомпонентный спинор, подлежащий определению. Подставив (18.24) в (18.22) и приняв во внимание тождество (17.20), получим

$$\left( -i \frac{d}{d\tau} + \langle \vec{\sigma}, \vec{B}(\tau) \rangle \right) v(\tau) = 0. \quad (18.25)$$

Таким образом, проблема построения ТКС для уравнения Дирака (18.1) сводится к решению обыкновенного линейного дифференциального уравнения (18.25) относительно переменной  $\tau$  с последующей подстановкой в решение функции  $\tau = \tau(q)$ . Задав для уравнения (18.25) те же начальные условия, что и в случае плоского пространства:

$$v_{0\zeta}(\tau_0) = \sqrt{\frac{1}{2}} e^{i\alpha} \begin{pmatrix} \zeta \sqrt{1 + \zeta \cos \theta} \exp(-i\varphi/2) \\ \sqrt{1 - \zeta \cos \theta} \exp(i\varphi/2) \end{pmatrix}, \quad \zeta = \pm 1, \quad (18.26)$$

где  $\hat{v}_{0\zeta'}(\tau_0) v_{0\zeta}(\tau_0) = \delta_{\zeta\zeta'}$ ,  $\sum_{\zeta} v_{0\zeta}(\tau_0) \hat{v}_{0\zeta'}(\tau_0) = 1$ , получим при каждом фиксированном значении параметра  $\tau$  набор двухкомпонентных спиноров  $v_\zeta(\tau)$ ,  $\zeta = \pm 1$ , удовлетворяющих условиям полноты и ортогональности.

Выпишем теперь явный вид функции  $\phi(q, \hbar)$  (18.9). С учетом соотношений (18.18) и равенства (18.24) имеем

$$\begin{aligned} \phi_{\nu,\zeta}(q, \hbar) &= N_\hbar \left( \left[ \Pi_-(\tau) + \frac{1}{2mc} \Pi_+ \sum_{k=1}^2 \hbar^{k/2} \hat{Q}_k(\tau) \right] \Psi_\nu(q, \hbar) v_\zeta(\tau) + \right. \\ &\left. + \sqrt{\hbar} \left[ \Pi_-(\tau) + \frac{\sqrt{\hbar}}{2mc} \Pi_+ \hat{Q}_1 \right] J^{(-)}(q, \hbar) + \hbar \Pi_- J^{(-)}(q, \hbar) \right) \Big|_{\tau=\tau(q)}, \end{aligned} \quad (18.27)$$

где  $N_\hbar$  – константа, смысл которой будет придан ниже.

В заключение этого раздела покажем, что при подходящем выборе константы  $N_\hbar$  решения (18.6) образуют с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$  ортонормированный набор функций относительно дираковского скалярного произведения

$$\langle \phi_{\nu',\zeta'} | \phi_{\nu,\zeta} \rangle_D = - \int_{\tau(q)=s} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha \bar{\phi}_{\nu',\zeta'} \gamma^\alpha \phi_{\nu,\zeta} = \delta_{\nu\nu'} \delta_{\zeta\zeta'} + O(\hbar^{1/2}), \quad (18.28)$$

где  $d\Sigma_\alpha$  – векторный элемент поверхности  $\tau(q) = s$ . Заметим, что выбор гиперплоскости  $\tau(q) = s$  в качестве поверхности интегрирования физически обоснован, поскольку, согласно выражению (17.29), в малой окрестности классической траектории  $q = Q(\tau)$  гиперплоскость  $\tau = \tau(q)$  является пространственноподобной. Подставив функцию (18.27) в явном виде в (18.28), получим

$$\langle \phi_{\nu',\zeta'} | \phi_{\nu,\zeta} \rangle_D = -N_\hbar^2 \hat{v}_{\zeta'}^+(\tau) \int_{\tau(q)=\tau} \sqrt{-g(\tau)} d\Sigma_\alpha \bar{\Pi}_-(\tau) \gamma^\alpha(\tau) \Pi_-(\tau) v_\zeta(\tau) \Psi_{\nu'}^* \Psi_\nu + O(\hbar^{1/2}).$$



Поскольку

$$\int_{\tau(q)=\tau} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha \cdots = \int_{\tau(q)=\tau} d\Sigma \frac{\tau, \alpha}{\sqrt{g^{\mu\nu} \tau, \mu \tau, \nu}} \cdots, \quad (18.29)$$

то в пределах рассматриваемой точности по  $\hbar^{1/2}$  имеет место равенство

$$\int_{\tau(q)=\tau} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha \cdots = \int_{\tau(q)=\tau} d\Sigma \dot{Q}_\alpha \cdots + O(\hbar^{1/2}). \quad (18.30)$$

Отсюда с учетом соотношений (17.27) и (17.29) найдем

$$\begin{aligned} \langle \phi_{\nu', \zeta'} | \phi_{\nu, \zeta} \rangle_D &= -N_{\hbar}^2 v_{\zeta'}^{\dagger}(\tau) \bar{\Pi}_-(\tau) \dot{Q}_\alpha(\tau) \gamma^\alpha(\tau) \Pi_-(\tau) \times \\ &\times v_\zeta(\tau) \int_{\tau(q)=\tau} d\Sigma \Psi_{\nu'}^* \Psi_\nu + O(\hbar^{1/2}). \end{aligned} \quad (18.31)$$

Воспользуемся теперь тождеством

$$\bar{\Pi}_-(\tau) \dot{Q}_\alpha \gamma^\alpha(\tau) = \Pi_-(\tau). \quad (18.32)$$

Действительно, взяв эрмитово сопряжение от (18.5) и учтя, что  $\gamma^\alpha = \rho_3 \gamma^\alpha \rho_3$ , получим (домножив справа на  $\rho_3$ ) уравнение (18.32). Отсюда в силу (18.3) и ортогональности спиноров  $v_\zeta(\tau)$ ,  $\zeta = \pm 1$ , следует

$$\langle \phi_{\nu', \zeta'} | \phi_{\nu, \zeta} \rangle_D = -N_{\hbar}^2 \langle \Psi_{\nu'} | \Psi_\nu \rangle \delta_{\zeta \zeta'} + O(\hbar^{1/2}). \quad (18.33)$$

Согласно (12.28), справедливо следующее условие ортогональности:

$$\int_{\tau(q)=\tau} d\Sigma \Psi_{\nu'}^* \Psi_\nu = \delta_{\nu \nu'} + O(\hbar^{1/2}). \quad (18.34)$$

Отсюда для нормировочной постоянной  $N_{\hbar}$  в (18.27) с учетом (12.34) при  $A = 1$  получим

$$N_{\hbar} = \left[ \left( \prod_{n=1}^3 b_n \right) \frac{1}{(\pi \hbar)^3} \right]^{1/4}. \quad (18.35)$$

## 19. Уравнение движения спина электрона во внешних гравитационном и электромагнитном полях

Для вывода уравнения движения спина обобщим оператор псевдовектора спина (Д.2) во внешнем электромагнитном поле на случай внешних гравитационного и торсионного полей:

$$\hat{T}^\mu = \gamma^5 (mc \gamma^\mu - \hat{\Pi}^\mu) + \frac{3}{2} \hbar (\gamma^{\mu\nu} S_\nu + S_\mu), \quad (19.1)$$

где  $\hat{\Pi}_\mu = i\hbar D_\mu - (e/c) A_\mu$ . Оператор  $\hat{T}^\mu$  можно также определить как

$$\hat{\hat{T}}^\mu = \hat{T}^\mu - \gamma^5 \gamma^\mu \hat{\mathcal{H}}_D. \quad (19.2)$$

Очевидно, что на решениях уравнения Дирака (9.5) операторы (19.1) и (19.2) совпадают

$$\hat{T}^\mu \phi = T^\mu \phi. \quad (19.3)$$

Однако во втором случае оператор спина имеет более простой вид

$$\hat{T}^\mu = i\gamma\gamma^{\mu\nu}\hat{\Pi}_\nu. \quad (19.4)$$

Определим классический псевдовектор спина  $a_\zeta^\mu$  как квантово-механическое среднее оператора (19.2) в состоянии (18.27) с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$ , т.е.

$$a_\zeta^\mu(\tau) + O(\hbar^{1/2}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \hat{T}^\mu \rangle_D(\tau) = - \int_{\tau(q)=\tau} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha \bar{\phi}_{\nu,\zeta} \gamma^\alpha \hat{T}^\mu \phi_{\nu,\zeta}. \quad (19.5)$$

Подставив в (19.5) выражения (18.27), (19.4) и приняв во внимание соотношения (18.5), (18.6), получим

$$a_\zeta^\mu(\tau) = mc \langle \vec{\eta}_\zeta(\tau), \vec{d}^\mu(\tau) \rangle, \quad (19.6)$$

где

$$\vec{\eta}_\zeta(\tau) = \vec{v}_\zeta^\dagger(\tau) \vec{\sigma} v_\zeta(\tau), \quad \vec{d}^\mu = e_0^\mu \dot{\vec{q}} + \vec{e}^\mu + \frac{\langle \vec{e}^\mu, \dot{\vec{q}} \rangle}{1 - \dot{q}} \dot{\vec{q}} \quad (19.7)$$

и  $e_i^\mu = (e_0^\mu, -\vec{e}^\mu)$ . Далее нам потребуется следующий факт. Покажем, что в траекторно-когерентном приближении эволюция квантово-механического среднего для произвольного оператора  $\hat{Q}$  описывается уравнением

$$\frac{D}{d\tau} \langle \hat{Q} \rangle_D(\tau) = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}_D, \hat{Q}]_- \rangle_D(\tau) + O(\hbar^{1/2}). \quad (19.8)$$

В самом деле, расписав левую часть (19.8), имеем

$$\langle \hat{Q} \rangle_D(\tau) = - \int_{\tau(q)=\tau} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha \bar{\phi}_{\nu,\zeta} \gamma^\alpha \hat{Q} \phi_{\nu,\zeta} = - \int_{\tau(q)=\tau} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha G^\alpha,$$

где  $G^\alpha = \bar{\phi}_{\nu,\zeta} \gamma^\alpha \hat{Q} \phi_{\nu,\zeta}$ . Тогда

$$\frac{D \langle \hat{Q} \rangle_D(\tau)}{d\tau} = - \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \left( \int_{\tau(q)=\tau+\Delta\tau} - \int_{\tau(q)=\tau} \right) \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha G^\alpha. \quad (19.9)$$

Дополним выражение, стоящее в числителе дроби (19.9), до интеграла по замкнутой гиперповерхности, добавив интеграл  $\int_{\sigma(\infty)} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha G^\alpha$ . Здесь  $\sigma(\infty)$  – цилиндрическая поверхность, достаточно удаленная от классической траектории  $q = q(\tau)$  и соединяющая гиперплоскости  $\tau(q) = \tau + \Delta\tau$  и  $\tau(q) = \tau$ . Это не меняет значение интеграла (19.9), поскольку  $G^\alpha$  экспоненциально убывает при удалении от траектории  $q = q(\tau)$ . Тогда, воспользовавшись теоремой Гаусса, перепишем выражение (19.9) в виде

$$\frac{D \langle \hat{Q} \rangle_D(\tau)}{d\tau} = - \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \int d^4q \sqrt{-g} G^\alpha_{;\alpha}. \quad (19.10)$$

Нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$G^\alpha{}_{;\alpha} = -\frac{1}{i\hbar}\bar{\phi}_{\nu,\zeta}[\hat{H}_D, \hat{Q}]_-\phi_{\nu,\zeta}. \quad (19.11)$$

Отсюда и из (19.10) следует, что

$$\frac{D\langle\hat{Q}\rangle_D(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{i\hbar} \lim_{\Delta\tau\rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \int d^4q \sqrt{-g} \bar{\phi}_{\nu,\zeta}[\hat{H}_D, \hat{Q}]_-\phi_{\nu,\zeta}. \quad (19.12)$$

В интеграле (19.12) выполним замену переменных (18.29):

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta\tau\rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \int d^4q \sqrt{-g} \dots = \\ & = \lim_{\Delta\tau\rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} dt \int d^3\xi \sqrt{-\tilde{g}(\tau, \vec{\xi})} \dots = \int d^3\xi \sqrt{-\tilde{g}(\tau, \vec{\xi})} \dots \end{aligned} \quad (19.13)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\int_{\tau}^{\tau+\Delta\tau} f(t)dt = 0 + f(\tau) + \Delta\tau + O(\Delta\tau^2)$ . Таким образом,

$$\frac{D\langle\hat{Q}\rangle_D(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{i\hbar} \int_{\tau=\text{const}} d^3\xi \sqrt{-\tilde{g}(\tau, \vec{\xi})} \bar{\phi}_{\nu,\zeta}[\hat{H}_D, \hat{Q}]_-\phi_{\nu,\zeta}. \quad (19.14)$$

С другой стороны, в пределах заданной точности ( $\text{mod } O(\hbar^{1/2})$ ) справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau(q)=\tau} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha \bar{\phi}_{\nu,\zeta} \gamma^\alpha \dots = \int_{\tau(q)=\tau} d\Sigma \frac{\tau_{,\alpha}}{\sqrt{q^{\mu\nu} \tau_{,\mu} \tau_{,\nu}}} \bar{\phi}_{\nu,\zeta} \gamma^\alpha \dots = \\ & = \int_{\tau(q)=\tau} d\Sigma \bar{\phi}_{\nu,\zeta} \dot{Q}_\alpha \gamma^\alpha \dots + O(\hbar^{1/2}) = \int_{\tau(q)=\tau} d\Sigma \bar{\phi}_{\nu,\zeta} \dots + O(\hbar^{1/2}). \end{aligned} \quad (19.15)$$

Последнее соотношение следует из тождества (18.32). Из (19.15) следует, что

$$\int_{\tau(q)=\tau} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha \bar{\phi}_{\nu,\zeta} \gamma^\alpha \dots = \int_{\tau=\text{const}} d^3\xi \sqrt{-\tilde{g}(\tau, \vec{0})} \bar{\phi}_{\nu,\zeta} \dots + O(\hbar^{1/2}). \quad (19.16)$$

Таким образом, для правой части равенства (19.14) с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$ , согласно (19.16), имеем

$$\begin{aligned} \frac{D\langle\hat{Q}\rangle_D(\tau)}{d\tau} & = -\frac{i}{\hbar} \int_{\tau(q)=\tau} \sqrt{-g} d\Sigma_\alpha \bar{\phi}_{\nu,\zeta} \gamma^\alpha [\hat{H}_D, \hat{Q}]_-\phi_{\nu,\zeta} + O(\hbar^{1/2}) = \\ & = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}_D, \hat{Q}]_- \rangle_D + O(\hbar^{1/2}), \end{aligned} \quad (19.17)$$

что доказывает справедливость соотношения (19.8).

С помощью (19.8) теперь не составит труда получить уравнение

$$\frac{Da^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc^2} F^{\mu\nu}(\tau) a_\nu + 3e^{\mu\nu\alpha\beta} S_\nu(\tau) a_\alpha \dot{q}_\beta. \quad (19.18)$$

которому удовлетворяет вектор спина (19.6). Легко видеть, что уравнение (19.18) в случае плоского пространства-времени совпадает со спиновым уравнением, полученным ранее [43] из уравнения Дирака в пространстве Минковского–Картана. В отсутствие полей кручения ( $S_\nu = 0$ ) уравнение (19.18) совпадает с уравнением Баргманна–Мишеля–Телегди (1.33) при  $g = 2$ . Заметим, наконец, что, положив  $F_{\mu\nu} = 0$  в уравнении (19.18), мы приходим к спиновому уравнению (см., например, [85, 112]).

Отметим в заключение ряд следствий, вытекающих из предыдущих построений. Во-первых, имеет место равенство

$$a_\zeta^\mu(\tau)\dot{q}_\mu = 0, \quad (19.19)$$

которое очевидным образом следует из (19.6) и (19.7). Во-вторых,

$$a_\zeta^\mu(\tau)a_{\zeta\mu}(\tau) = -1. \quad (19.20)$$

Для доказательства последнего равенства заметим, что из уравнения (19.18) следует сохранение квадрата вектора вдоль классической траектории:  $a_\zeta^\mu(\tau)a_{\zeta\mu}(\tau) = \text{const}$ . С другой стороны, в силу (19.6) и (19.7) имеем

$$a_\zeta^\mu(\tau)a_{\zeta\mu}(\tau) = -\langle \vec{\eta}_\zeta(\tau), \vec{\eta}_\zeta(\tau) \rangle = \text{const}. \quad (19.21)$$

Если теперь в начальный момент времени  $\tau = 0$  задать двухкомпонентные спиноры  $v_\zeta(0)$ ,  $\zeta = \pm 1$ , в виде (18.26), то получим (19.20). Подчеркнем, что соотношения (19.19) и (19.20) следуют из описанной выше процедуры построения спинового уравнения движения, а не возникают как дополнительные требования.

## 20. Квантово-механическая интерпретация общековариантного уравнения Дирака

Выше мы показали, что при вычислении асимптотического по  $\text{mod } O(\hbar^{1/2})$  решения (18.27) уравнения Дирака в него вошли два произвольных двухкомпонентных спинора  $J_{\nu,\zeta}^{1,2(-)}(q, \hbar)$ , для определения которых необходимо знать следующее (по  $\text{mod } O(\hbar^{5/2})$ ) приближение. Если мы хотим ограничиться асимптотическими  $\text{mod } O(\hbar^{1/2})$  решениями, можно положить  $J_{\nu,\zeta}^{1,2(-)} = 0$ . В этом случае асимптотика (18.27) имеет вид

$$\phi_{\nu,\zeta}(q, \hbar) = \hat{K}_{\tau(q)}^{(0)}(\hbar) J_{\nu,\zeta}^{0(-)}(q, \hbar), \quad (20.1)$$

где двухкомпонентный спинор  $J_{\nu,\zeta}^{0(-)}$  определен в (19.21), а оператор  $\hat{K}_{\tau(q)}^{(0)}(\hbar)$  равен

$$\hat{K}_{\tau(q)}^{(0)}(\hbar) = \left[ \Pi_-(\tau) + \frac{1}{2mc} \Pi_+(\tau) \sum_{k=1}^2 \hbar^{k/2} \hat{Q}_k(\tau) \right] \Big|_{\tau=\tau(q)}. \quad (20.2)$$

Таким образом, оператор (20.2) сводит задачу построения траекторно-когерентных состояний (по  $\text{mod } O(\hbar^{3/2})$ ) уравнения Дирака (18.1) к решению уравнения (19.19) относительно двухкомпонентного спинора  $J^{0(-)}$ .

Более того, как следует из результатов разд. 18, оператор  $\hat{K}_{\tau(q)}^{(0)}(\hbar)$  унитарным образом (с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$ ) осуществляет переход к двухкомпонентной теории в классе функций  $\mathcal{F}_{\hbar}^s$ . Действительно, для любых двух функций  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{F}_{\hbar}^s$  со скалярным произведением

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle = \int_{\tau(q)=\tau} d\Sigma \varphi_1^\dagger \varphi_2 \quad (20.3)$$

имеем

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle_D = \langle \hat{K}_{\tau(q)}^{(0)}(\hbar)\varphi_1, \hat{K}_{\tau(q)}^{(0)}(\hbar)\varphi_2 \rangle_D = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle + O(\hbar^{1/2}). \quad (20.4)$$

В полной аналогии со случаем уравнения Дирака в плоском пространстве-времени (см. главу 1) будем говорить, что оператор  $\hat{K}_{\tau(q)}^{(0)}(\hbar)$  задает переход к квазиклассическому (по mod  $O(\hbar^{1/2})$ ) ТК-представлению. Нетрудно проверить также то, что оператор Дирака  $\hat{\mathcal{H}}_D$  в квазиклассическом ТК-представлении равен

$$\overline{(\hat{K}_{\tau(q)}^{(0)}(\hbar))} \hat{\mathcal{H}}_D \hat{K}_{\tau(q)}^{(0)}(\hbar)\varphi = (-i\hbar\partial_\tau + \hat{\mathfrak{H}})\varphi + O(\hbar^{3/2}), \quad \varphi \in \mathcal{F}_{\hbar}^s. \quad (20.5)$$

Здесь черта сверху означает дираково сопряжение, а оператор  $\hat{\mathfrak{H}}$  определяется выражением

$$\hat{\mathfrak{H}} = \hat{\lambda}_0^{(-)} - i\hbar \frac{d}{d\tau} \ln(-g(\tau))^{1/4} + \hbar \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}(\tau) \rangle. \quad (20.6)$$

Таким образом, с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ , общековариантное уравнение Дирака (9.5) в квазиклассическом ТК-представлении принимает вид эволюционного уравнения типа Паули на двухкомпонентный спинор

$$(-i\hbar\partial_\tau + \hat{\mathfrak{H}})\varphi = 0, \quad \varphi \in \mathcal{F}_{\hbar}^s. \quad (20.7)$$

При этом гамильтониан  $\hat{\mathfrak{H}}$  одночастичной двухкомпонентной теории является эрмитовым оператором по отношению к скалярному произведению (20.3). Это утверждение является очевидным в силу эрмитовой сопряженности операторов  $\Delta\hat{p}$  и  $\hat{q}$  по отношению к тому же скалярному произведению.

Из приведенных выше результатов следует, что конструктивный и с физической точки зрения, по-видимому, наиболее оправданный переход к квантово-механическому описанию в искривленном пространстве-времени должен включать в себя понятие классической траектории. Математически в рамках теории комплексного ростка процедура построения квантовой механики из общековариантного уравнения Дирака основывается, во-первых, на операции «перестройки фазы» [31] (смысл которой заключается во введении семейства пространственно-подобных гиперповерхностей Коши, ортогональных данной классической траектории и играющих роль локального физического времени), и, во-вторых, на переходе к квазиклассическому ТК-представлению, в котором уравнение Дирака принимает вид уравнения Паули и описывает динамику двухкомпонентного спинора.

Первый основной вывод, связанный с физическим содержанием полученных в настоящей главе результатов, состоит, по нашему мнению, в том, что изложенная здесь схема квазиклассического траекторно-когерентного приближения позволяет дать естественную квантово-механическую интерпретацию волновой функции уравнения Клейна–Гордона, Дирака и Прока в искривленном пространстве-времени. Она основана в первую очередь на конструкции полного набора ортонормированных состояний  $\Psi(\nu)$ ,  $\phi(\nu, \zeta)$  и  $V_{(\nu, \zeta)}^\mu$ , локализованных в

пределе при  $\hbar \rightarrow 0$  в окрестности положения частицы на классической траектории  $z(s)$ , – квазиклассических ТКС, являющихся приближенными (с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$  при  $\hbar \rightarrow 0$ ) асимптотическими решениями исходного уравнения (9.1), (9.3) и (9.5).

Подчеркнем два принципиальных момента, связанных с возможностью построения квазиклассических траекторно-когерентных состояний для релятивистского волнового уравнения скалярной квантовой частицы.

Во-первых, существенным условием справедливости изложенной здесь схемы построения таких состояний является условие  $\text{rank} \|\dot{q}^\mu(s)\| \neq 0$  на фазовой траектории  $z(s) = (p_\alpha(s), q^\alpha(s))$  системы Гамильтона (11.10) и (13.10). Это условие приводит к невырожденности матрицы  $C(s)$ ,  $\det C(s) \neq 0$ , в формуле (11.20). Когда это условие не выполнено, для построения локализованных состояний уравнений (9.1), (13.1) в окрестности тех точек классической траектории, где  $\text{rank} \|\dot{q}^\mu(s)\| = 0$ , требуется использовать общую конструкцию канонического оператора Маслова с комплексной фазой в той ее версии, которая изложена в работе [32].

Во-вторых, для плоского пространства Минковского хорошо известен метод собственного времени  $s$  для интегрирования уравнений Клейна–Гордона, Дирака, Прока (метод Фока–Швингера). Для произвольного внешнего поля основная трудность использования этого метода состоит в отсутствии регулярной процедуры выбора контура в комплексной плоскости  $s$ , интегрирование вдоль которого переводит решение  $\tilde{\Psi}(x^\mu, s)$  уравнения типа Шрёдингера «в собственном времени»  $i\hbar \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial s} = \hat{\mathcal{H}}\tilde{\Psi}$  в решение  $\Psi(x^\mu)$  исходного уравнения  $\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0$ . Требование аналитичности коэффициентов уравнения в методе собственного времени представляет дополнительную трудность в возможности его непосредственного обобщения на случай искривленного пространства-времени. С этой точки зрения, метод квазиклассических ТКС, основанный на теории комплексного роста, позволяет обойти указанные трудности, если вести речь не о точных, а о приближенных по  $\hbar \rightarrow 0$  локализованных решениях исходного уравнения. Вместо условия аналитичности достаточно потребовать (при заданной точности решения  $\sim O(\hbar^{3/2})$ ) существования ограниченных производных третьего порядка по переменным  $x^\mu$ . При этом переход от решения  $|\nu, s\rangle$  эволюционного уравнения (11.37) к решению  $\Psi_\nu(x^\mu)$  исходного уравнения осуществляется на основе уравнения « $\gamma$ -перестройки» (11.37), определяющего функцию  $\tau(x^\mu)$  при замене параметра  $s$  на  $\tau(x^\mu)$  в формуле (11.55).

С этим же уравнением связан второй основной вывод, касающийся физического содержания настоящей работы: в рамках квазиклассического траекторно-когерентного приближения наш метод приводит к следующей (возможной) концепции локального времени для квантовой скалярной и векторной частиц в искривленном пространстве-времени. Эволюционный параметр  $\tau$  в квантовых уравнениях (11.54), (13.43) и (18.22) играет роль физического времени, а его зависимость от точки наблюдения  $(x^\mu)$ , лежащей в малой окрестности классической траектории  $q^\mu = q^\mu(s)$  (11.10), определяется ковариантным уравнением « $\gamma$ -перестройки» (11.39). При этом в точке  $x^\mu$  на самой классической траектории это локальное время совпадает с локальным временем  $s$  классического наблюдателя  $\tau(x^\mu) \Big|_{x^\mu=q^\mu(s)} = s$ .

В заключение отметим, что уравнение Прока (9.3) и Дирака (9.5) в квазиклассическом пределе приводит к правильному уравнению движения на тензор (вектор) спина. Последнее утверждение следует, например, из результатов работы [112], где показано, что вид спинового уравнения (15.9) (при  $S_{\mu\nu\alpha} = 0$ ) следует из самых общих физических предположений на классический тензор (вектор) спина. В свою очередь, эти выводы могут служить косвенным доказательством корректности и самого уравнения Прока (9.3).

## ГЛАВА 3

# Квазиклассически сосредоточенные состояния уравнений квантовой механики в калибровочных полях

### 21. Вводные замечания

Метод вывода классических уравнений движения из квантово-механических имеет общий характер. Он применим для эволюционных квантово-механических уравнений с произвольным матричным гамильтонианом  $\hat{\mathcal{H}}_h(t)$ , имеющим классический аналог

$$\hat{L}\Psi = 0, \quad \hat{L} = \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{H}}_h(t) \right), \quad \Psi \in \mathcal{L}^{(k)} = L_2(\mathbb{R}_x^n) \otimes \mathbb{C}^k, \quad k \geq 2, \quad (21.1)$$

где  $\hat{\mathcal{H}}_h(t) = \mathcal{H}(-i\hbar \overset{1}{\nabla}, \overset{2}{\vec{x}}, t, \hbar)$ ,  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar) - k \times k$ -матрица, гладко зависящая от  $(p, x) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_x^n$ ,  $t \in \mathbb{R}^1$ ,  $\hbar \in (0, 1]$  (значки 1, 2 указывают порядок действия некоммутирующих операторов  $-i\hbar \nabla, x$ ).

Суть метода состоит в следующем:

1) для уравнения (21.1) комплексным методом ВКБ строятся с любой степенью точности по степеням  $\hbar^n$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , одночастичные квазиклассические ТКС  $\Psi_\nu^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar) \bmod \hbar^N : (L\Psi_\nu^{(N)} = O(\hbar^{N/2}))$ , сосредоточенные в окрестности фазовой траектории «затравочной» гамильтоновой системы: функция Гамильтона этой системы – одно из возможных собственных значений  $\lambda(\vec{p}, \vec{x}, t)$  матричной функции Гамильтона – эрмитовой матрицы  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t, 0)$ ;

2) по волновым функциям  $\Psi_\nu^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar)$  вычисляются с гарантированной по  $\hbar \rightarrow 0$  точностью ( $\bmod \hbar^{N/2-1}$ ) средние значений  $\bar{a}_j(t, z_0, \hbar)$  наблюдаемых из выбранного набора операторов  $\hat{A} = \{\hat{A}_k^j(t) : \mathcal{L}^{(k)} \rightarrow \mathcal{L}^{(k)}, j = \overline{1, m}\}$ ;

3) далее производные по времени от средних значений  $\bar{a}_j(t, z_0, \hbar)$  операторов  $\hat{A}_k^j(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , выражаются через средние значения этих же операторов, причем с той же точностью по  $\hbar \rightarrow 0$ , с которой вычислены все эти средние.

Важно подчеркнуть, что поскольку точность построения приближенных квазиклассических ТС согласована с точностью вычисления средних значений, то тем самым гарантирована справедливость получаемых «классических» уравнений движения. Это приводит, в свою очередь, к возникновению иерархии «классических» систем, градуированной точностью приближения по  $\hbar^{N/2}$ ,  $N \geq 3$ , с которой строятся квазиклассические ТКС, и соответствующей точностью, с которой вычисляются квантовые средние: а именно, «классика» нулевого порядка ( $\bmod \hbar^{1/2}$ ), если использованы ТКС ( $\bmod \hbar^{1/2}$ ) и уравнения для средних получены с гарантированной по  $\hbar \rightarrow 0$  точностью  $O(\hbar^{3/2})$ ; классика «первого» порядка ( $\bmod \hbar^{3/2}$ ), если квазиклассические ТКС строились с точностью  $O(\hbar^{5/2})$  и т.д. Оказывается, что в этом смысле «нулевая» классика – замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений относительно средних набора наблюдаемых, явно не зависящая от  $\nu$  и от выбора состояния из полного набора ТКС  $\Psi_\nu^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar)$ , по которым производится усреднение.

В рамках такого подхода в главе 1 показано, например, что для оператор Дирака–Паули во внешнем электромагнитном поле «нулевая» классика есть расщепленная система уравнения Лоренца и уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди, в которой поля вычислены на траекториях уравнения Лоренца (в качестве соответствующего набора операторов  $\hat{A}$  использовались операторы  $\hat{x}$ ,

$\hat{p} = -i\hbar\nabla, \hat{S}_\mu$ , где  $\hat{S}_\mu$  – псевдовектор поляризации Баргманна (В.1) [46]). Другие примеры вывода классических уравнений движения из уравнений Дирака в полях кручения, уравнения Дирака с внешним электромагнитным полем в пространстве Римана–Картана и из уравнения Прока приведены в главе 2.

Основной результат разд. 23 заключается в выводе классических уравнений движения относительно квантовых средних, рассчитанных по квазиклассическим ТКС ( $\text{mod } \hbar^{N/2}, N = 3, 5$ ) операторов Шрёдингера и Дирака в хромомэлектромагнитном поле, для набора наблюдаемых: координат, импульсов и изоспина частицы. При этом оказывается, что в нулевом приближении по  $\hbar \rightarrow 0$  классические уравнения движения ( $\text{mod } \hbar^{1/2}$ ) описывают свободно движущуюся точечную частицу, средний изоспин которой эволюционирует в силу уравнения

$$\dot{I}^a = g\varepsilon^{abc}(cA_0^b - \langle \dot{\vec{x}}, \vec{A}^b \rangle)I^c,$$

где потенциалы хромомэлектромагнитного поля  $A_\mu^a(x)$  вычислены в точках траектории свободного движения неабелева заряда  $x = c\beta^0 t + x^0, \beta^0 = \text{const}$ . Иными словами, в классической механике нулевого порядка изоспин частицы не влияет на траекторию точечного заряда. Это влияние проявляется в следующих порядках по  $\hbar$  и описывается выведенной в разд. 23 системой классических уравнений движения ( $\text{mod } \hbar^{3/2}$ ). Полученная система, вырожденная по спиновой переменной, является гамильтоновой в фазовом пространстве, представляющем собой прямое произведение стандартного фазового пространства и пространства, дуального к алгебре Ли группы  $SU(2)$ . Она оказывается эквивалентной (в релятивистском случае после перехода к собственному времени) известным уравнениям Вонга [7, 113, 114].

## 22. Конструкция квазиклассических траекторно-когерентных состояний во внешнем калибровочном поле с группой симметрии $SU(2)$

### 22.1. Оператор Шрёдингера

Рассмотрим уравнение Шрёдингера в произвольном хромомэлектромагнитном поле с калибровочной группой  $SU(2)$  [114]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\Psi, \quad \Psi \in \mathcal{L}^{(2)} = L_2(\mathbb{R}_x^3) \otimes \mathbb{C}_I^2, \quad (22.1)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \left( \hat{\vec{p}} - g\hbar \sum_{a=1}^3 \vec{A}^a \tau^a \right)^2 + g\hbar \sum_{a=1}^3 \vec{A}_0^a \tau^a, \quad (22.2)$$

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla, \quad A_\mu^a \equiv A_\mu^a(\vec{x}, t) = (A_0^a, \vec{A}^a), \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad a = 1, 2, 3,$$

где  $g$  – заряд,  $m$  – масса частицы;  $A_\mu^a$  – векторный потенциал калибровочного поля;  $\tau^a = \sigma^a/2, a = 1, 2, 3$ , – генераторы группы  $SU(2)$ . Напряженности хромомэлектрического и хромомангнитного полей определяются выражениями

$$\vec{E}^a = -\nabla A_0^a - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}^a}{\partial t} - g\varepsilon^{abc} \vec{A}^b A_0^c, \quad \vec{B}^a = \nabla \times \vec{A}^a + \frac{g}{2} \varepsilon^{abc} \vec{A}^b \times \vec{A}^c, \quad (22.3)$$

Полный символ гамильтониана (22.2) имеет вид

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar) = \mathcal{H}_0(\vec{p}) + c\hbar g \sum_{a=1}^3 \tau^a D^a(\vec{p}, \vec{x}) +$$



$$+ \hbar^2 \left[ \frac{g^2 c}{8m} \sum_{a=1}^3 \sum_{j=1}^3 (A_j^a(\vec{x}, t))^2 - \frac{i}{2mc} \operatorname{div} A^a(\vec{x}, t) \right], \quad (22.4)$$

Здесь обозначено

$$\mathcal{H}_0 = \mathbb{I} \cdot \lambda(\vec{p}), \quad \lambda(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m}, \quad \mathbb{I} = \|\delta_{ij}\|_{2 \times 2},$$

$$D^a(\vec{x}, \vec{p}) = A_0^a(\vec{x}, t) - \frac{1}{mc} \sum_{j=1}^3 A_j^a(\vec{x}, t) p_j.$$

Квазиклассические ТКС возникают в результате квантования движения «затравочной» классической системы комплексным методом ВКБ–Маслова (методом комплексного роста [31]). Для символа (22.4) функция Гамильтона такой системы есть  $\lambda(\vec{p})$  и определяет свободное движение частицы по фазовой траектории

$$l_\tau = \{Z(t, z_0) = (\vec{P}(t, z_0), \vec{X}(t, z_0)), t \in [0, T]\},$$

$$\vec{P}(t, z_0) = p^0, \quad \vec{X}(t, z_0) = \frac{\vec{p}^0}{m} t + \vec{x}^0, \quad z_0 = (p^0, x^0). \quad (22.5)$$

Сопоставим фазовой траектории (22.5) волновой пакет с центром в точке  $r^n(z_0)$

$$\Psi_0(\vec{x}, t, \hbar) = \frac{N_\hbar}{\sqrt{J(t, z_0)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, t, z_0) \right\},$$

где комплексная фазовая функция (комплексное действие)

$$S(\vec{x}, t, z_0) = \frac{(p^0)^2}{2m} t + \sum_{j=1}^3 \left[ p_j^0 (x_j - x_j(t, z_0)) + \frac{1}{2} \frac{b_j m}{b_j t + m} (x_j - x_j(t, z_0))^2 \right],$$

амплитуда  $J(t) = \prod_{j=1}^3 (b_j t / m - 1)$  и нормировочный множитель

$$N_\hbar = \left[ (\pi \hbar)^{-3} \prod_{j=1}^3 \operatorname{Im} b_j \right]^{1/4}. \quad (22.6)$$

Параметры  $b_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , подчинены условию  $\operatorname{Im} b_j > 0$  (что обеспечивает неотрицательность мнимой части фазовой функции:  $\operatorname{Im} b_j \geq 0$ ). Тогда главный член квазиклассических ТКС ( $\operatorname{mod} \hbar^{3/2}$ ) определяется формулой

$$\Psi_\nu^{z_0} = \Psi_0^{z_0} u_0^{\nu\zeta}(\vec{x}, t, \hbar),$$

где функция  $u_0^{\nu\zeta}(\vec{x}, t, \hbar)$  – решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} u_0^{\nu z_0} = -i \hat{F}_0 u_0^{\nu z_0} \quad (22.7)$$

с начальными данными

$$u_0^{\nu\zeta}|_{t=0} = |\nu, 0\rangle v_\zeta(0), \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \nu_j = \overline{0, \infty}.$$

Здесь

$$\hat{F}_0 = - \sum_{j=1}^3 \left[ \frac{b_j m}{b_j t + m} \Delta x_j \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right] + gc \sum_{j=1}^3 \tau^a D^a(Z(t, z_0));$$

$$|\nu, t\rangle = \prod_{k=0}^3 \frac{1}{\sqrt{\nu_k!}} \left( \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^{\nu_k} H_{\nu_k} \left( \sqrt{\frac{\text{Im } b_k}{\hbar}} (x - x_k^0) \right);$$

$H_{\nu_k}(\eta_k)$  – полиномы Эрмита;  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \dot{X}(t), \nabla \rangle$  – оператор дифференцирования вдоль проекции фазовой траектории  $l_T^{z_0}$  (22.5) на конфигурационное пространство. Нетрудно проинтегрировать уравнение (22.7), если заметить, что скалярные операторы

$$\hat{\Lambda}_j^+(t, z_0) = \frac{i}{\sqrt{2}} \exp\{-i \arg c_j(t)\} \left( 2\eta_k - \frac{d}{d\eta_k} \right),$$

$$\eta_j = \sqrt{\frac{\text{Im } b_k}{\hbar}} \frac{(x_j - x_j(t, z_0))}{|c_j(t)|}, \quad c_j(t) = \frac{b_j t}{m} + 1,$$

являются точными динамическими симметриями этого уравнения. Поэтому орбитальные и изоспиновые переменные «разделяются» и решение представимо в виде

$$u_0^{\nu z_0}(\vec{x}, t, \hbar) = |\nu, t\rangle v_\zeta(t, z_0).$$

Скалярная часть функции  $u_0^{\nu \zeta}(\vec{x}, t, \hbar)$  равна

$$|\nu, t\rangle = \Psi_0(\vec{x}, t, \hbar) \prod_{j=0}^3 \frac{1}{\sqrt{|\nu_j!|}} (\hat{\Lambda}_j^+(t, z_0))^{\nu_j} \cdot 1 =$$

$$= \Psi_0(\vec{x}, t, \hbar) \prod_{j=0}^3 \frac{2^{\nu_j}}{\sqrt{|\nu_j!|}} \exp \left\{ i \left( \frac{\pi}{2} - \arg c_j(t) \right) \nu_j \right\} H_{\nu_j}(\eta_j).$$

Векторная часть  $v_\zeta(t, z_0)$  функции  $u_0^{\nu \zeta}(\vec{x}, t, \hbar)$ , связанная с дискретной (изоспиновой) степенью свободы, определяется как решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i \frac{dv_\zeta}{dt} + cg \left( \sum_{a=1}^3 \tau^a D^a(Z(t)) \right) v_\zeta = 0 \quad (22.8)$$

с начальным условием  $v_\zeta(0)$

$$2 \left( \sum_{a=1}^3 \tau^a I_0^a \right) v_\zeta(0) = \zeta v_\zeta(0), \quad \zeta = \pm 1,$$

где произвольный единичный вектор  $I_0 \in \mathbb{R}^3$  фиксирует проекцию изоспина в начальный момент времени. Пусть функции  $u_{k/2}(\vec{x}, t, z_0)$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ , являются решениями системы уравнений

$$\frac{d}{dt} u_{k/2} = -i \sum_{j=1}^3 \hat{F}_{j/2} u_{(k-j)/2},$$

$$\hat{F}_{j/2} = gc \sum_{a=1}^3 \tau^a \hat{\delta}^k D^a(Z(t)), \quad (22.9)$$

$$\hat{\delta}^k f(\vec{p}, \vec{x}, t) = \left[ \sum_{j=1}^3 \left\{ \Delta x_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \left( p_j + \frac{b_j m}{b_j t + m} \Delta x_j \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \right]^k f(\vec{z}, \vec{y}, t) \Big|_{\substack{\vec{z}=\vec{p}_0, \\ \vec{y}=\vec{X}(t, z_0)}}$$

с нулевыми начальными данными  $u_{k/2}$ ,  $k = \overline{1, \infty}$ . Определим квазиклассические ТКС (mod  $\hbar^{N/2}$ ) оператора (22.2) формулой

$$\Psi_{\nu\zeta}^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar) = \left( u_0^{\nu\zeta} + \sum_{k=1}^{N-1} \hbar^{k/2} u_{k/2} \right). \quad (22.10)$$

**Теорема 22.1.** Пусть потенциалы хромомэромагнитного поля  $A_\mu^a(\vec{x}, t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_x^1)$  и растут при  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  со всеми своими производными не быстрее некоторой степени  $|\vec{x}|$  равномерно по  $t \in [0, T]$ , причем оператор (22.2) в существенном самосопряжен. Тогда функция (22.10) является асимптотическим решением (mod  $\hbar^{N/2}$ ) уравнения (22.1) с начальными данными

$$\Psi_{\nu\zeta}^{(N)}(\vec{x}, 0, \hbar) = |\nu, 0\rangle v_\zeta(0). \quad (22.11)$$

(Функция (22.10) удовлетворяет уравнению (22.1) с точностью до функций,  $L_2$ -норма которых имеет порядок  $\hbar^{N/2}$  при  $\hbar \rightarrow 0$  равномерно по  $t \in [0, T]$ .)

Отметим следующие свойства:

1) построенные решения (22.10) являются истинными асимптотиками задачи Коши (22.1), (22.11), т.е. приближают точное решение задачи (22.1), (22.11) с точностью до  $O(\hbar^{N/2-1})$ , а именно, имеет место оценка

$$\|\hat{U}_\hbar(t) \Psi_{\nu\zeta}^{(N)}(\vec{x}, 0, \hbar) - \Psi_{\nu\zeta}^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar)\|_{\mathcal{L}(2)} < C_\nu(T) \hbar^{N/2-1},$$

где  $\hat{U}_\hbar(t)$  – унитарный оператор эволюции уравнения (22.1),  $C_\nu(T)$  – постоянная, не зависящая от  $\hbar$  (наличие такой оценки существенно для вывода классических уравнений относительно средних с гарантированной по  $\hbar \rightarrow 0$  точностью);

2) решения (22.10) образуют при каждом фиксированном  $t \in \mathbb{R}^1$  и  $z_0 \in \mathbb{R}_{px}^6$  полный ортонормированный с точностью до  $O(\hbar^{N/2-1})$  набор в пространстве состояний квантовой системы

$$\langle \Psi_{\nu\zeta}^{(N)}, \Psi_{\nu'\zeta'}^{(N)} \rangle = \delta_{\nu'\nu} \delta_{\zeta'\zeta} + O(\hbar^{N/2-1});$$

3) состояния  $\Psi_{\nu\zeta}^{(N)}(\vec{x}, t, \hbar)$  сосредоточены в пределе при  $\hbar \rightarrow 0$  в окрестности положения частицы на фазовой траектории как в  $x$ -представлении:

$$|\Psi_{\nu\zeta}^{(N)}|^2 \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \delta(x - X(t, z_0)),$$

так и в  $p$ -представлении:

$$|\Psi_{\nu\zeta}^{(N)}(\vec{p}, t, \hbar)|^2 \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \delta(p - p^0).$$

## 22.2. Оператор Дирака

Рассмотрим уравнение Дирака в произвольном хромоэлектромагнитном поле (22.3)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \hat{\mathcal{H}}_D \Psi, \quad \Psi \in \mathcal{L}^{(8)} = L_2(R_x^3) \otimes \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}_I^4, \\ \hat{\mathcal{H}}_D &= \mathcal{H}_0(\hat{p}) + (-i\hbar)\mathcal{H}_1(\vec{x}, t), \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla, \quad \mathcal{H}_0 = [c\langle \vec{\alpha}, \hat{p} \rangle + \rho_3 mc^2] \otimes \mathbb{I}, \\ \mathcal{H}_1 &= icg \left[ \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I} \otimes \tau^a) A_0^a(\vec{x}, t) - \sum_{a=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_j \otimes \tau^a A_0^a(\vec{x}, t) \right]. \end{aligned} \quad (22.12)$$

Здесь  $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ;  $\rho_3$  – матрицы Дирака,  $\mathbb{I} = \|\delta_{ij}\|_{4 \times 4}$  – единичный оператор в изоспиновом пространстве  $\mathbb{C}_I^2$ .

Для главного символа оператора Дирака в (22.12) – эрмитовой матрицы  $\mathcal{H}_0(\vec{p})$ ;  $\vec{p} \in \mathbb{R}_p^3$  – два ее четырехкратных собственных значения  $\lambda^{(\pm)}(\vec{p})$  и матрицы  $4 \times 8$ , составленные из соответствующих собственных векторов  $\Pi_{\pm}(\vec{p})$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda^{(\pm)}(p) &= \pm \varepsilon(p), \quad \varepsilon(p) = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4}, \\ \Pi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} 1 + \gamma^{-1} \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \end{pmatrix}, \quad \Pi_+ = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} -\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \\ 1 + \gamma^{-1} \end{pmatrix}, \\ \gamma^{-1} &= mc^2/\varepsilon = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta = cp/\varepsilon. \end{aligned} \quad (22.13)$$

Для уравнения (22.12) поставим задачу Коши

$$\begin{aligned} \Psi|_{t=0} &= \Psi_{\nu}(\vec{x}, 0, \hbar) \Pi_+ f_0, \\ \Psi_{\nu}(\vec{x}, 0, \hbar) &= N_{\nu} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=1}^3 \left( p_j^0 (x_j - x_j^0) + \frac{b_j (x_j - x_j^0)^2}{2} \right) \right\} \times \\ &\times \prod_{j=1}^3 i^{\nu_j} H_{\nu_j} \left( \sqrt{\frac{\text{Im } b_j}{\hbar}} (x_j - x_j^0) \right), \quad N_{\nu} = N_{\hbar} \left[ \prod_{j=1}^3 |\nu_j!| 2^{\nu_j} \right]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (22.14)$$

где  $\nu \in \mathbb{Z}_+^3$ ; произвольный вектор  $f_0 \in \mathbb{C}^4 \otimes \mathbb{C}_I^4$  нормирован условием  $\|\Pi_+ f_0\|_{\mathcal{L}^{(8)}} = 1$ ;  $H_{\nu_j}$  – полиномы Эрмита, а комплексные числа  $b_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , подчинены условию  $\text{Im } b_j > 0$ , а  $N_{\hbar}$  определен в (22.6). Такой выбор начальных данных диктуется физической постановкой задачи. Волновые пакеты (22.14) локализованы при  $\hbar \rightarrow 0$  в окрестности точки  $z_0 = (\vec{p}^0, \vec{x}^0)$  фазового пространства  $\mathbb{R}_{xp}^6$ :

$$\langle \Psi_{\nu}^{\zeta} | \vec{x} | \Psi_{\nu}^{\zeta} \rangle \rightarrow \vec{x}^0, \quad \langle \Psi_{\nu}^{\zeta} | \hat{p} | \Psi_{\nu}^{\zeta} \rangle \rightarrow \vec{p}^0$$

при  $\hbar \rightarrow 0$ , причем для  $\nu = 0$  и  $\text{Re } b = 0$  они минимизируют соотношение неопределенностей Гейзенберга, а при  $\text{Re } b \neq 0$  – Шрёдингера (см. об этом подробнее в части I).

Обозначим через точку на фазовой траектории свободно движущейся релятивистской частицы с энергией<sup>9</sup>  $\lambda^+(p)$ .

Определим скалярную функцию  $|\nu, t\rangle$  вида

$$|\nu, t\rangle = \prod_{j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{|\nu_j!|}} [(\hat{a}_j^+)^{\nu_j} \Psi_0(\vec{x}, t, \hbar)], \quad \Psi_0 = \frac{N_t}{\sqrt{J(t, z_0)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S^+(\vec{x}, t) \right\}. \quad (22.15)$$

<sup>9</sup>Здесь, как и в главе 1, мы ограничимся построением «положительно-частотных» (т.е. отвечающими собственному значению  $\lambda^+(\vec{p})$ ) решений. «Отрицательно-частотные» ТКС определяются теми же формулами с заменой всюду  $\lambda^+(p)$  на  $\lambda^-(p)$  и  $\Pi_{\pm}$  на  $\Pi_{\mp}$ .

Здесь комплексная фаза  $S^+(x, t)$  – действие на комплексном ростке [18] ( $\text{Im } S^+ \geq 0$ ):

$$S^+(t, z_0) = \int_0^t (\langle \vec{P}(t, z_0), \vec{X}(t, z_0) \rangle - \lambda^{(+)}(t)) d\tau + \langle \vec{p}^0, \Delta \vec{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta \vec{x}, Q(t, z_0) \Delta \vec{x} \rangle,$$

а обобщенные операторы «рождения»

$$\hat{a}_j^+(t, z_0) = \frac{1}{\sqrt{2 \text{Im } b_j \hbar}} [\langle \vec{Z}_j^*, (\hat{p} - \vec{p}^0) \rangle - \langle \vec{W}_j^*, (\vec{x} - \vec{X}(t, z_0)) \rangle], \quad (22.16)$$

где  $\vec{W}_j, \vec{Z}_j$  (знак \* при  $\vec{W}_j, \vec{Z}_j$  означает комплексное сопряжение) – вектор-столбцы с номером  $j \in \{1, 2, 3\}$  комплексных  $3 \times 3$ -матриц  $B(t, z_0)$  и  $C(t, z_0)$ , соответственно,

$$B(t, z_0) = B(0) = \text{diag}(b_1, b_2, b_3), \quad C(t, z_0) = \mathbb{I} + t \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}^0) B(0), \quad (22.16')$$

$$\lambda_{pp}^{(+)} = \frac{c^2}{\varepsilon} \|\delta_{ij} - \beta_i \beta_j\|_{3 \times 3}.$$

Якобиан  $J(t, z_0) = \det C \neq 0$ , и под  $J^{-1/2}$  понимается непрерывная ветвь корня.

Нетрудно установить (см. часть I), что функции  $|\nu, t\rangle$  образуют полный в  $L_2(\mathbb{R}_x^3)$  и ортонормированный набор решений уравнения типа Шредингера

$$(-i\hbar \partial_t + \hat{\lambda}^{(+)}) |\nu, t\rangle = 0, \quad (22.17)$$

$$\hat{\lambda}^{(+)} = \lambda^{(+)}(t) + (\dot{\vec{x}}, \Delta \hat{p}) + \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{p}, \lambda_{pp}^{(+)}(t) \Delta \hat{p} \rangle,$$

$$\Delta \hat{p} = \hat{p} - \vec{p}^0.$$

Определим гильбертово пространство  $L_{\hbar}^t$  (см. Приложение А) функций, зависящих от  $x, t$  со скалярным произведением

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle_{L_{\hbar}^t} = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{\varphi}_1 \varphi_2 \rho_{\hbar}^{z_0}(\vec{x}, t) d^3x,$$

где плотность меры

$$\rho_{\hbar}^{z_0} = \frac{N_0^2}{J(t, z_0)} \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \text{Im } S(\vec{x}, t) \right\} \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \delta(\vec{x} - \vec{X}(t)).$$

Тогда решение задачи Коши (22.12), (22.14) ищем в виде

$$\Psi_{\nu\zeta}(\vec{x}, t, \hbar) = \left[ \Pi_+(t) u_{\nu\zeta}(\vec{x}, t, \hbar) + \Pi_-(t) v_{\nu\zeta}(\vec{x}, t, \hbar) \right], \quad (22.18)$$

$$\zeta = (\zeta_1, \zeta_2), \quad \zeta_{1,2} = \pm 1,$$

где подлежащие определению вектор-функции  $u_{\nu\zeta}, v_{\nu\zeta}$  лежат в пространстве траекторно сосредоточенных спиноров, локализованных в окрестности положения классической частицы на фазовой траектории.

Подставим функцию (22.18) в уравнение (22.12) и разложим полученные выражения по собственным векторам  $\Pi_{\pm}(\vec{p}^0)$  (22.13) и в ряды Тейлора по операторам  $\Delta \hat{p} = \hat{p} - \vec{p}^0, \Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{X}(t, z_0)$  с учетом того, что при  $\hbar \rightarrow 0$  справедливы оценки  $\Delta \hat{p} = \hat{O}(\hbar^{1/2}), \Delta \vec{x} = \hat{O}(\hbar^{1/2})$  на классе функций  $\mathcal{P}_{\hbar}^s$  (см. часть I).

Затем, приравняв к нулю множители при  $\Pi_+(\vec{p}^0)$  и  $\Pi_-(\vec{p}^0)$  по отдельности, найдем выражение для  $u_{\nu\zeta}$  через  $v_{\nu\zeta}$  и уравнение относительно искомого вектора  $u_{\nu\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{u}_{k/2} \hbar^{k/2}$ . Решив это уравнение по теории возмущений по степеням  $\hbar^{1/2}$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , получим

$$\Psi_{\nu\zeta}^{(N)} = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_{k/2} \hbar^{k/2} + O(\hbar^{N/2-1})(\Pi_+(\vec{p}^0) + \Pi_-(\vec{p}^0)D^{(N)})u_{\nu\zeta} + O(\hbar^{N/2-1}), \quad (22.19)$$

$$\Psi_{k/2} = O(1), \quad k = \overline{0, (N-1)}.$$

Здесь функции  $u_{\nu\zeta}^{(N)} = \sum_{j=0}^{N-3} u_{j/2} \hbar^{j/2}$  определяются из уравнения

$$\sum_{j=0}^k \hat{\Phi}_{j/2} u_{(k-j)/2} = 0, \quad k = \overline{1, (N-3)},$$

с начальными условиями

$$u_0(0) = |\nu, 0\rangle V_{\zeta}(0), \quad u_{k/2}(0) = 0, \quad k = \overline{0, (N-3)},$$

$$\langle \vec{\sigma}, \vec{S}_0 \rangle \otimes (\vec{\sigma}, I_0) V_{\zeta}(0) = V_{\zeta}(0), \quad S_0, I_0 \in \mathbb{R}^3, \quad \|S\| = \|I\| = 1,$$

операторы  $\hat{\Phi}_{j/2}$  имеют вид ( $j = 0, 1, \dots, N-3$ )

$$\Phi_{j/2} \left\{ \frac{2}{(2\varepsilon)^{j+1}} \left[ \sum_{i=2}^{j+2} (2\varepsilon)^{j+2-i} Y_i^{j+2} \right] + R_1^{(j+2)/2} \right\},$$

$$Y_i^{j+2} = \sum_{\substack{(y_0, \dots, y_i): \\ \sum_{m=0}^i y_m = j+2 \\ y_m \in \mathbb{N}}} \left[ R_2^{y_0/2} \left( \prod_{l=1}^{i-2} R_3^{y_l/2} \right) R_2^{y_i/2} \right],$$

где

$$R_1^1 = -i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}^{(+)} - \frac{1}{2} \langle \Delta \hat{p}, \lambda_{pp}^{(+)}(p_0) \Delta \hat{p} \rangle + c\hbar g \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I}_2 \otimes \tau^a) D^a,$$

$$R_1^{a/2} = c\hbar g \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I}_2 \otimes \tau_a) \hat{\delta}^{(a-2)} D^a, \quad k \geq 3,$$

$$D^a(\vec{p}, \vec{x}, t) = A_0^0(\vec{x}, t) - \langle \vec{\beta}, \vec{A}^0(\vec{x}, t) \rangle,$$

$$R_2^{1/2} = -c \langle \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I}_I, M \Delta \hat{p} \rangle, \quad M = \left\| \frac{\beta_i^0 \beta_j^0}{1 + \gamma^{-1}} - \delta_{ij} \right\|_{3 \times 3},$$

$$R_1^{a/2} = c\hbar g \sum_{a=1}^3 \langle \vec{\sigma} \otimes \tau^0, M \hat{\delta}^{(a-2)} \vec{A}^a(\vec{x}, t) \rangle, \quad k \geq 3, \quad (22.20)$$

$$R_3^{1/2} = -2c \langle \vec{\beta}, \hat{\Delta} \vec{p} \rangle,$$

$$R_3^1 \equiv R_1^1 + 2c\hbar g \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I}_2 \otimes \tau^a) \langle \vec{\beta}, \vec{A}^a \rangle, \quad \mathbb{I}_2 = \|\delta_{ij}\|_{2 \times 2},$$

$$R_3^{k/2} = R_1^{k/2} + 2c\hbar g \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I}_2 \otimes \tau^a) \langle \vec{\beta}, \hat{\delta}^{(k-2)} \vec{A}^a \rangle, \quad k \geq 3,$$

$$\hat{\delta}^{(k-2)} f(\vec{p}, \vec{x}, t) = \left( \sum_{j=1}^3 [(\vec{x}_j - \vec{X}_j(t, z_0)) \partial / \partial y_j + (\vec{p}_j - \vec{p}_j^0) \partial / \partial z_j] \right)^{k-2} f(\vec{z}, \vec{y}, t) \Big|_{\substack{\vec{z}=\vec{p}^0 \\ \vec{y}=\vec{X}(t, z_0)}},$$

В частности, уравнения для  $u_0$ ,  $u_{1/2}$  имеют вид

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -i\hat{F}_0 u_0, \quad \hat{F}_0 = \frac{\hat{\lambda}^{(+)}}{\hbar} + cg \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I}_2 \otimes \tau^a) D^a(t), \quad (22.21)$$

$$\frac{\partial u_{1/2}}{\partial t} = -i(\hat{F}_0 u_{1/2} + \hat{F}_{1/2} u_0), \quad (22.22)$$

$$\hat{F}_{1/2} = cg \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I}_2 \otimes \tau^a) \hat{\delta}^{(1)} D^a(t)(\vec{p}, \vec{x}, t) + \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \frac{\partial^3 \lambda^{(+)}(\vec{p})}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k} \Delta \hat{p}_i \Delta \hat{p}_j \Delta \hat{p}_k.$$

Отсюда с учетом (22.17) находим

$$u_0^{\nu\zeta} \equiv u_0 = |\nu, \zeta, t\rangle = |\nu, t\rangle |\zeta, t\rangle, \quad (22.23)$$

$$|\zeta, t\rangle = \exp \left\{ -icg \int_0^t \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I} \otimes \tau^a) D^a(t) dt \right\} \vec{V}_\zeta(0).$$

Заметим, что функции  $u_0^{\nu\zeta}$  образуют полный ортонормированный набор решений уравнения (22.21) и, следовательно,

$$u = -i \sum_{\nu'\zeta'} \int_0^t \langle \nu', \zeta', \tau | \hat{F}_{1/2}(\tau) | d\tau | \nu', \zeta', t \rangle. \quad (22.24)$$

Оператор  $D^{(N)} = \sum_{j=1}^{N-3} D_{j/2} / p^{j/2}$ , где  $D_{j/2}$  вычисляются рекуррентно:

$$D_{j/2} = \frac{1}{2\varepsilon} \left( \frac{\hat{R}_2^{1/2}}{\hbar^{1/2}} + \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\hat{R}_3^{l/2}}{\hbar^{l/2}} D_{(j-1)/2} \right).$$

Отметим, что для построенных решений  $\Psi_{\nu\zeta}^{z_0(N)}$  (22.19) справедлива теорема и свойства 1, 2, 3, аналогичные нерелятивистскому случаю и доказанные в предыдущем разделе.

### 22.3. Пример. Постоянное хромагнитное поле

Построенные квазиклассические ТКС для операторов Шрёдингера (22.10) и Дирака (22.19) выражаются через элементарные функции в случае постоянных неабелевых потенциалов. Например, для однородного хромагнитного поля, направленного по третьей оси в изотопическом пространстве (см. также [114])

$$B_3^3 = gA_1^1 A_2^2, \quad B_j^k = 0, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \quad (22.25)$$

решение системы (22.8) имеет вид

$$v_\zeta(t) = (\cos \omega t + i \langle \vec{\sigma}, \vec{n} \rangle \sin \omega t) v_\zeta(0), \quad \zeta = \pm 1,$$

$$\omega = g\kappa/(2mc), \quad \varkappa = \left( \sum_{i=1}^2 (A_i^0 p_i)^2 \right), \quad \vec{n} = \left( \frac{A_1^1 p_1}{\varkappa}, \frac{A_2^2 p_2}{\varkappa}, 0 \right). \quad (22.26)$$

Отсюда легко получить явный вид главного члена ТКС ( $\text{mod } \hbar^{3/2}$ ) для оператора Шрёдингера (22.1)

$$\begin{aligned} \Psi_{\nu\zeta}^{(3)} &= \left( \prod_{j=1}^3 \frac{\text{Im } b_j}{(\pi\hbar)^3} \right)^{1/4} \prod_{j=1}^3 \left[ \left( \frac{b_j t}{m} + 1 \right) 2^{\nu_j} \nu_j! \right]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[ S(\vec{x}, t, z_0) + \hbar \left( \frac{\pi}{2} - \arg c_j(t) \right) \nu_j \right] \right\} \times \\ &\quad \times H_{\nu_j}(\cos \omega t + i \langle \vec{\sigma}, \vec{n} \rangle \sin \omega t) v_{\pm 1}(0), \end{aligned} \quad (22.27)$$

$$\begin{aligned} v_{\pm 1}(0) &\equiv v_{\pm 1}^{\vec{k}}(0), \quad \vec{k} = \vec{I}_0 = (I_0^1, I_0^2, I_0^3), \\ v_{+1}^{\vec{k}}(0) &= [2(k^3 + 1)]^{-1/2} \begin{pmatrix} k^3 + 1 \\ k^1 + ik^2 \end{pmatrix}, \\ v_{-1}^{\vec{k}}(0) &= [2(1 - k^3)]^{-1/2} \begin{pmatrix} k^3 - 1 \\ k^1 + ik^2 \end{pmatrix} \\ \vec{k} &= (k^1, k^2, k^3) \in \mathbb{R}^3, \quad \|\vec{k}\| = 1. \end{aligned}$$

Для оператора Дирака найдем  $|\zeta, t\rangle$  (22.21)

$$\begin{aligned} |\zeta, t\rangle &= (\mathbb{I} \cos \theta t + i \langle \vec{\sigma}, \vec{n} \rangle \sin \theta t) \vec{V}_{\zeta}(0), \quad \zeta = (\zeta_1, \zeta_2), \\ \theta &= \frac{g\kappa}{2[(p^0)^2 + m^2 c^2]}, \quad \vec{V}_{\zeta}(0) = v_{\zeta_1}^{s_0}(0) \otimes v_{\zeta_2}^{I_0}(0), \\ &\quad \zeta_1 = \pm 1, \quad \zeta_2 = \pm 1, \end{aligned}$$

где векторы  $\vec{n}$ ,  $v_{\zeta}^{\vec{k}}$ ,  $\vec{k} \in \{\vec{s}_0, \vec{I}_0\}$  определены в (22.26), (22.27), соответственно. Следовательно, главный член ТКС ( $\text{mod } \hbar^{3/2}$ ) оператора Дирака в постоянном поле имеет вид

$$\Psi_{\nu\zeta}^{z_0(3)} = \Pi_+(p_0) u_0^{\nu\zeta}, \quad u_0^{\nu\zeta} = |\nu, t\rangle |\zeta, t\rangle,$$

где функция  $|\nu, t\rangle$  определена в (22.15), а матрица  $\Pi_+(\vec{p})$  – в (22.13).

Используя формулы коммутации

$$\begin{aligned} \Delta \hat{p} \Psi_0^{z_0} &= \Psi_0^{z_0} \Delta \hat{p}, \quad \Delta \hat{p} = -i\hbar \nabla + Q(t, z_0) \Delta \vec{x}, \\ |\nu, t\rangle &= \Psi_0^{z_0} \varphi_{\nu}, \quad \varphi_{\nu} = \prod_{j=1}^3 \frac{1}{\sqrt{\nu_j!}} (\hat{\Lambda}_j^+)^{\nu_j} \mathbf{1}, \\ \hat{\Lambda}_j^+ &= \frac{1}{\sqrt{2 \text{Im } b_j \hbar}} [\langle \vec{Z}_j, \hat{p} \rangle - \langle \vec{W}_j^* - Q(t, z_0) \vec{Z}_j^*, \Delta \vec{x} \rangle], \end{aligned} \quad (22.28)$$

получим

$$\Psi_{\zeta\nu}^{z_0(3)} = \Psi_0^{z_0} \Pi_+(p^0) |\zeta, t\rangle,$$

где функции  $\varphi_{\nu}(t)$  выражаются через полиномы Эрмита, поскольку

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_j^+ &= \sum_{m=1}^3 \Gamma_m^j \left\{ 2\eta_m^j - \frac{d}{d\eta_m^j} \right\}, \\ \Gamma_m^j &= \sqrt{\alpha_m^j \beta_m^j}, \quad \eta_m^j = \Delta x_m \sqrt{\alpha_m^j / \beta_m^j}, \\ \alpha_m^j &= \left( \sum_{l=1}^3 Q_{ml} \bar{C}_{lj}^* \right) / (2\sqrt{2 \text{Im } b_j \hbar}), \\ \beta_m^j &= i\sqrt{\hbar} / (2 \text{Im } b_j) \bar{C}_{mj}, \end{aligned} \quad (22.29)$$



где  $B(t, z_0)$ ,  $C(t, z_0)$  – матрицы из (22.16). Следующий член  $\Psi_{1/2}$  разложения (22.19) имеет вид

$$\Psi_{1/2} = \hbar^{1/2} \left( \Pi_+(\vec{p}_0) u_{1/2} - \Pi_- \frac{C}{2\varepsilon(p_0)} \langle \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I}_I, M \hat{\delta} \vec{p} \rangle u_0 \right).$$

Здесь  $\Pi_{\pm}(p)$ ,  $\varepsilon(p)$ ,  $M$  определены в (22.13), (22.19'), а выражение для функции  $u_{1/2}$  находим по формуле (22.24), где оператор  $F_{1/2}$  в постоянном поле (22.25) запишется в виде ( $\lambda(\vec{p}) \equiv \lambda^{(+)}(\vec{p}) = +\varepsilon(\vec{p})$  (22.13))

$$F_{1/2} = -g \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I} \otimes \tau^a) G^a + \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \lambda_{ijk} \Delta \hat{p}_i \Delta \hat{p}_j \Delta \hat{p}_k,$$

$$G^a = \hat{\delta}^{(1)} = \sum_{ij} \lambda_{ij} A_i^a \Delta p_j \delta_i^a,$$

$$\lambda_{ij} = \left( \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_i \partial p_j} \right) (p_0) = \frac{c^2}{\varepsilon(p_0)} \|\delta_{ij} - \beta_i^a \beta_j^a\|, \quad \lambda_{ijk} = \left( \frac{\partial^3 \lambda}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k} \right) (\vec{p}_0) = -\beta_k^0 \lambda_{ij}.$$

С учетом соотношений

$$\langle \vec{\sigma}, \vec{a} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{b} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{a} \rangle = 2i \langle \vec{\sigma}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle,$$

$$\langle \vec{\sigma}, \vec{a} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{b} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{a} \rangle = 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{a} \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{b} \rangle \langle \vec{a}^2 \rangle,$$

справедливых для матриц Паули  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , получим

$$u_{1/2} = -i \sum_{\nu' \zeta'} \left[ -g \left\{ \int_0^t \cos 2\theta\tau \langle \varepsilon G_{\nu'\nu}, \vec{I}_{\zeta'\zeta} \rangle + \sin \theta\tau \langle \vec{n}, \vec{G}_{\nu'\nu}, \vec{I}_{\zeta'\zeta} \rangle + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2 \sin^2 \theta\tau \langle \vec{n}, \vec{G}_{\nu'\nu} \rangle \langle \vec{n}, \vec{I}_{\zeta'\zeta} \rangle d\tau \right\} \nu' \zeta' + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3!} \sum_{ijk} \lambda_{ijk} \int_0^t \langle \nu' | \Delta \hat{p}_i \Delta \hat{p}_j \Delta \hat{p}_k | \nu \rangle d\tau \nu' \zeta' \right),$$

$$\vec{G}_{\nu'\nu} = (G_{\nu'\nu}^1, G_{\nu'\nu}^2, G_{\nu'\nu}^3), \quad \vec{G}_{\nu'\nu}^j = \sum_{i=1}^3 \lambda_{ij} \langle \nu' | \Delta p_i | \nu \rangle A_j^j,$$

$$I_{\zeta'\zeta}^a = \langle \vec{V}_{\zeta'}(0) | \mathbb{I} \otimes \tau^a | \vec{V}_{\zeta}(0) \rangle = \frac{1}{2} \langle v_{\zeta_2}^{I_0}(0) | \sigma^a | v_{\zeta_2}^{I_0}(0) \rangle = \begin{cases} \pm I_0^a, & \zeta_2 = \zeta_2' = \pm 1, \\ \tilde{I}_0, & \zeta_2' = -1, \quad \zeta_2 = +1, \\ \bar{\tilde{I}}_0, & \zeta_2' = +1, \quad \zeta_2 = -1, \end{cases}$$

$$\tilde{I}_0 = \frac{1}{1 - (I_0^3)^2} \begin{pmatrix} I_0^3 I_0^1 - i I_0^2 \\ I_0^3 I_0^2 + i I_0^1 \\ (I_0^3)^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Далее введем обозначения

$$r_j = \Delta \hat{p}_j | \nu_j \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar}{2 \operatorname{Im} b_j}} (\bar{b}_j \sqrt{\nu_j} | \nu_j - 1 \rangle - b_j \sqrt{\nu_j + 1} | \nu_j + 1 \rangle),$$

$$r_{\nu}^j = \sum_{\nu'} \langle \nu' | \Delta \hat{p}_j | \nu \rangle = r_j | \nu_i \rangle | \nu_k \rangle,$$

$$\begin{aligned}
\vec{d}_\nu &= \sum_{\nu'} \vec{G}_{\nu'\nu} |\nu'\rangle = \left( \sum_{k=1}^3 \lambda_{1k} r_\nu^k A_1^1, \sum_{k=1}^3 \lambda_{2k} r_\nu^k A_2^2, 0 \right), \\
r_\nu^{123} &= \sum_{\nu'} \langle \nu' | \Delta \hat{p}_1 \Delta \hat{p}_2 \Delta \hat{p}_3 | \nu' \rangle |\nu'\rangle = \prod_{j=1}^3 r_j, \\
r_\nu^{ijk} \sum_{\nu'} \langle \nu' | \Delta \hat{p}_i^2 \Delta \hat{p}_j \rangle &= \left[ -\frac{\hbar}{2 \operatorname{Im} b_i} (\bar{b}_i^2 \sqrt{\nu_i(\nu_i - 1)} |\nu_i - 2\rangle - \right. \\
&\quad \left. - b_i \bar{b}_i (2\nu_i + 1) |\nu_i\rangle + b_i^2 \sqrt{(\nu_i + 1)(\nu_i + 2)} |\nu_i + 2\rangle \right] r_j |\nu_k\rangle, \\
r_\nu^{jjj} &= \sum_{\nu'} \langle \nu' | \Delta \hat{p}_j^3 | \nu \rangle = \left( i \sqrt{\frac{\hbar}{2 \operatorname{Im} b_j}} \right)^3 [\bar{b}_j^3 \sqrt{\nu_j(\nu_j - 1)(\nu_j - 2)} |\nu_j - 3\rangle - \\
&\quad - 3\bar{b}_j \bar{b}_j^2 (\nu_j)^{3/2} |\nu_j - 1\rangle + 3\bar{b}_j b_j^2 (\nu_j + 1)^{3/2} |\nu_j + 1\rangle - \\
&\quad - b_j^3 \sqrt{(\nu_j + 1)(\nu_j + 2)(\nu_j + 3)} |\nu_j + 3\rangle] |\nu_k\rangle, \quad i \neq j \neq k, \\
\vec{I}^\zeta &= \sum_{\zeta'} \vec{I}_{\zeta'\zeta} |\zeta't\rangle.
\end{aligned}$$

Вычислив интегралы, окончательно имеем

$$\begin{aligned}
u_{1/2} &= ig \left\{ \frac{\sin 2\theta t}{2\theta} \langle \vec{d}_\nu, \vec{I}^\zeta \rangle + \frac{1}{2\theta} (1 - \cos 2\theta t) (\vec{n} \times \vec{d}_\nu, \vec{I}^\zeta) + \right. \\
&\quad \left. + \left( t - \frac{\sin 2\theta t}{2\theta} \right) \langle \vec{n}, \vec{d}_\nu u \rangle \langle \vec{n}, \vec{I}^\zeta \rangle + \frac{1}{3!} \left[ \frac{18cp_1^0 p_2^0 p_3^0}{[(p^0)^2 + c^2 m^2]^{3/2}} r^{123} + \right. \\
&\quad \left. + 3 \sum_{i=1}^3 \frac{cp_i^0}{[(p^0)^2 + c^2 m^2]^{3/2}} \left( \frac{p_i^0}{(p^0)^2 + c^2 m^2} - 1 \right) r^{iii} + \right. \\
&\quad \left. + 3 \sum_{i=1}^3 \sum_{j \neq i} \frac{cp_i^0}{[(p^0)^2 + c^2 m^2]^{3/2}} \left( \frac{3p_i^0}{(p^0)^2 + c^2 m^2} - 1 \right) r^{ijj} \right].
\end{aligned}$$

В заключение отметим, что формулы коммутации (22.28) позволяют записать выражение для функции  $u_{1/2}$  через полиномы Эрмита аргументов  $\eta_m^j$  (22.29). Следующие приближения  $\Psi_{k/2}$ ,  $k \geq 2$ , асимптотического решения (22.19) строятся аналогично.

## 23. Классические уравнения движения mod $\hbar^{3/2}$ неабелевой частицы с изоспином 1/2 во внешнем калибровочном поле

### 23.1. Нерелятивистский случай

Определим классические динамические переменные  $\vec{x}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{I}$  как средние значения набора операторов координат  $\vec{x}$ , импульса  $\hat{p}$  и изоспина  $\hat{I}^a = \hbar \tau^a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , по функциям (22.10). С учетом свойств функции (22.10) имеем

$$\begin{aligned}
\langle \hat{A} \rangle &= \langle \Psi_{\nu\zeta}^{(N)} | \hat{A} | \Psi_{\nu\zeta}^{(N)} \rangle, \quad \hat{A} \in \{ \hat{x}, \hat{p}, \hat{I} \}, \\
\langle \hat{x} \rangle &= \vec{X}(t, z_0) + 2\hbar \operatorname{Re} \langle u_0 | \frac{\Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}} | u_{1/2} \rangle + O(\hbar^{1/2}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p} \rangle &= \vec{P}(t, z_0) + 2\hbar \operatorname{Re} \langle u_0 | \frac{\Delta \hat{p}}{\sqrt{\hbar}} | u_{1/2} \rangle + O(\hbar^{1/2}), \\
\langle \vec{I} \rangle &= \frac{\hbar}{2} \langle u_0 | \vec{\sigma} | u_0 \rangle + O(\hbar^{3/2}), \\
\Delta \vec{x} &= \vec{x} - \vec{X}(t, z_0), \quad \Delta \hat{p} = \hat{p} + Q(t) \Delta \vec{x}, \\
Q(t) &= \operatorname{diag} \left( \frac{b_j m}{b_j t + m} \right), \quad j = 1, 2, 3,
\end{aligned} \tag{23.1}$$

Здесь функции  $u_0, u_{1/2}$  определены в (22.7), (22.9). Дифференцируя равенство (23.1) по времени с учетом уравнений (22.7), (22.9), находим (mod  $\hbar^{1/2}$ )

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \vec{x} \rangle &= \frac{\partial \lambda}{\partial p}(\vec{p}_0) + i\hbar \left\{ \langle u_0 | \left[ \hat{F}_0, \frac{\Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}} \right] | u_{1/2} \rangle - \right. \\
&\quad \left. - \langle u_{1/2} | \left[ \hat{F}_0, \frac{\Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}} \right] | u_0 \rangle + \langle u_0 | \left[ \hat{F}_0, \frac{\Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}} \right] | u_0 \rangle \right\}, \\
\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle &= i\hbar \left\{ \langle u_0 | \left[ \hat{F}_0, \frac{\hat{\Delta} \tilde{p}}{\sqrt{\hbar}} \right] - \frac{iQ(t) \Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}} | u_{1/2} \rangle - \right. \\
&\quad \left. - \langle u_{1/2} | \left[ \hat{F}_0, \frac{\hat{\Delta} \tilde{p}}{\sqrt{\hbar}} \right] - \frac{iQ(t) \Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}} | u_0 \rangle - \langle u_0 | \left[ \hat{F}_{1/2}, \frac{\hat{\Delta} \tilde{p}}{\sqrt{\hbar}} \right] | u_0 \rangle, \right. \\
\frac{d}{dt} \langle \vec{I} \rangle &= \frac{i\hbar}{2} \langle u_0 | [F_0, \vec{\sigma}] | u_0 \rangle.
\end{aligned} \tag{23.2}$$

Используя тот факт, что матрица  $Q(t)$  удовлетворяет матричному уравнению Рикатти  $\dot{Q}(t) = \left\| \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_i \partial p_j} \right\| Q(t)$ , и вычислив коммутаторы операторов  $\hat{F}_0, \hat{F}_{1/2}, \Delta \vec{x}, \Delta \hat{p}, \vec{\sigma}$ :

$$\begin{aligned}
i \left[ \hat{F}_0, \frac{\Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}} \right] &= \lambda_{pp}(p_0) \frac{\hat{\Delta} \tilde{p}}{\sqrt{\hbar}}, \quad i \left[ \hat{F}_0, \frac{\hat{\Delta} \tilde{x}}{\sqrt{\hbar}} \right] + \frac{Q(t) \Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}} = 0, \\
i \left[ \hat{F}_0, \frac{\sigma^a}{2} \right] &= g c \varepsilon^{abc} D^b(t) \frac{\sigma^c}{2}, \quad i \left[ \hat{F}_{1/2}, \frac{\Delta \vec{x}}{\sqrt{\hbar}} \right] = -g \sum_{a=1}^3 \tau^a \lambda_{pp}(p_0) \vec{A}^a(t), \\
i \left[ \hat{F}_{1/2}, \frac{\hat{\Delta} \tilde{x}}{\sqrt{\hbar}} \right] &= -c g \sum_{a=1}^3 \tau^a \frac{\partial D^a}{\partial x}(t), \quad \lambda_{pp} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial p_i \partial p_j} = \frac{1}{m},
\end{aligned} \tag{23.3}$$

получим систему дифференциальных уравнений (mod  $\hbar^{3/2}$ ) для средних значений

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \vec{p} &= -c g \nabla_x \left( \sum_{a=1}^3 I^a D^a \right) (\vec{x}, \vec{p}, t), \\
\frac{d}{dt} \vec{x} &= \frac{\vec{p}}{m} - \frac{g}{m} \sum_{a=1}^3 I^a A^a(\vec{x}, t), \\
\frac{d}{dt} I^a &= g c \varepsilon^{abc} D^b(\vec{x}, \vec{p}, t) I^c.
\end{aligned} \tag{23.4}$$

Система (23.4) гамильтонова с функцией Гамильтона  $\mathcal{H} = \vec{p}^2/2m + g c \sum_{a=1}^3 I^a D^a(\vec{x}, \vec{p}, t)$  на фазовом пространстве  $\Phi = \mathbb{R}_{px}^6 \times SU^*(2)$ , симплектическая структура которого определяется (см. [115]) скобкой Пуассона  $\{, \}_{\Phi} = \{, \} + \{, \}_{SU^*(2)}$ , где  $\{, \}$

– стандартные скобки Пуассона, а  $\{\varphi_1, \varphi_2\}_{SU^*(2)} = \left( d, \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial q} \times \frac{\partial \varphi_2}{\partial q} \right] \right) \Big|_{q=\vec{I}}$ . Преобразуя уравнения (23.2) к лагранжевой форме, получим систему классических (mod  $\hbar^{3/2}$ ) уравнений движения нерелятивистской изоспиновой частицы, совпадающую с нерелятивистскими уравнениями Вонга [113, 114]

$$m\ddot{\vec{x}} = gF_\lambda^a I^a, \quad \dot{I}^a = g\varepsilon_{abc}[cA_0^b(\vec{x}, t) - (\dot{\vec{x}}, A^b(\vec{x}, t))I^c],$$

где  $F_\lambda^a$  – аналог силы Лоренца в неабелевом случае

$$F_\lambda^a = cE^a(\vec{x}, t) + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}^a(\vec{x}, t), \quad (23.5)$$

### 23.2. Релятивистский случай

Определим классические динамические переменные  $\bar{x}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{I}$  как средние значения операторов  $\hat{\vec{x}}$ ,  $\hat{\vec{p}}$ ,  $\hat{I}^a = \hbar(\mathbb{I}_2 \otimes \tau^a)$ ,  $a = 1, 2, 3$ , по функциям (22.19).

Для них справедливы соотношения, аналогичные (23.1) в силу свойства ортогональности матриц  $\Pi_+(\vec{p})$  и  $\Pi_-(\vec{p})$  (22.13). Функции  $u_0$ ,  $u_{1/2}$  определяются из уравнений (22.21), (22.21'), которые с учетом формул коммутации (22.5), а также

$$\begin{aligned} (-i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}^{(+)})\Psi_0^{z_0} &= \Psi_0^{z_0}(-i\hbar) \left[ \frac{d}{dt} + \langle \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0) Q(t, z_0) \Delta x, \nabla \rangle + \right. \\ &\quad \left. - \frac{(-i\hbar)}{2} \langle \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0) \nabla, \nabla \rangle \right] \end{aligned}$$

преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_0 &= -i\hat{F}_0 u_0, \quad \frac{d}{dt}u_{1/2} = -i(\hat{F}_0 u_{1/2} + \hat{F}_{1/2} u_0), \\ \hat{F}_0 &= -i(\lambda_{pp}^{(+)}(p_0) Q(t, z_0) \Delta x, \nabla) - \frac{\hbar}{2} \lambda_{pp}^{(+)} \nabla \cdot \nabla + gc \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I}_2 \otimes \tau^a) D^a(t), \\ \hat{F}_{1/2} &= cg \sum_{a=1}^3 (\mathbb{I}_2 \otimes \tau^a) \left( \frac{\partial D^a}{\partial x}(t) \Delta x + \frac{\partial D^a}{\partial p}(t) \hat{\Delta p} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{3!} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^3 \lambda^{(+)}}{\partial p_i \partial p_j \partial p_k} \Delta \hat{p}_i \Delta \hat{p}_j \Delta \hat{p}_k. \end{aligned}$$

В результате выкладок, аналогичных нерелятивистскому случаю (23.2), (23.3), (23.4), получим гамильтонову систему уравнений (mod  $\hbar^{3/2}$ ) относительно переменных  $\vec{x}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{I}$  (вырожденную по спину) с функцией Гамильтона вида

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \lambda^{(+)}(\vec{p}) + gc \sum_{a=1}^3 I^a D^a(\vec{x}, \vec{p}, t) + \frac{1}{3!} \text{Sp}(\lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}) \sigma_{pp}), \\ \frac{d}{dt}\vec{p} &= -gcV_x \left( \sum_{a=1}^3 I^a D^a \right) (\vec{x}, \vec{p}, t), \\ \frac{d}{dt}\vec{x} &= \frac{\partial \lambda^{(+)}}{\partial p} + gc \left( \frac{\partial}{\partial p} \sum_{a=1}^3 I^a D^a \right) (\vec{x}, \vec{p}, t) + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial}{\partial p} \text{Sp}(\lambda_{pp}^{(+)} \sigma_{pp}) \right) (\vec{p}). \\ \frac{d}{dt}I^a &= gc\varepsilon^{abc} D^b(\vec{x}, \vec{p}, t) I^c. \end{aligned} \quad (23.6)$$

Здесь  $\sigma_{pp}$  – матрица дисперсий операторов импульса, вычисленная по функциям (22.19)

$$(\sigma_{pp})_{ij} = \langle \Psi_{\nu\zeta}^{(N)} | \Delta \hat{p}_i \Delta \hat{p}_j | \Psi_{\nu\zeta}^{(N)} \rangle.$$

В лагранжевых переменных система имеет вид ( $\dot{\vec{x}} = d\vec{x}/dt$ )

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} &= g \lambda_{pp}^{(+)} \sum_{a=1}^3 F_{\lambda^a}(\vec{x}, \vec{p}, t) I^a, \\ \frac{dI^a}{dt} &= g \varepsilon^{abc} [c A_0^b(\vec{x}, t) - \langle \dot{\vec{x}}, \vec{A}^b(\vec{x}, t) \rangle] I^c, \\ \lambda_{pp}^{(+)} &= \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{m} \|\delta_{ij} - \beta_i \beta_j\|, \end{aligned} \quad (23.7)$$

где  $F_{\lambda^a}$  определено в (23.5). При переходе от гамильтоновых уравнений движения к лагранжевым использован тот факт, что в пределах заданной точности  $\text{mod } \hbar^{3/2}$  слагаемым

$$\frac{d}{dt} (\text{Sp} (\lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}) \sigma_{pp})) \sim \hbar$$

можно пренебречь.

Система уравнений (23.7) после перехода к собственному времени  $d\tau = \sqrt{1 - \beta^2} dt$  совпадает с релятивистски-инвариантными уравнениями Вонга

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = g F_a^{\mu\nu} I^a \frac{dx_\nu}{d\tau}, \quad \frac{dI^a}{d\tau} = g \varepsilon^{abc} \frac{dx_\mu}{d\tau} A^{\mu b} I^c,$$

где  $F_a^{\mu\nu}$  – тензор хромоэлектромагнитного поля [114], а 4-векторы  $x^\mu$  и  $A^{\mu b}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , имеют компоненты  $(ct, \vec{x}(\tau))$  и  $(A_0^b(\vec{x}, \tau), A^b(\vec{x}, \tau))$ , соответственно.

**Замечание.** Предложенный в работе алгоритм построения квазиклассических ТКС  $\Psi_{\nu\zeta}^{(N)}$  (22.10) и вывода систем уравнений относительно квантовых средних набора наблюдаемых позволяет провести вычисления с любой степенью точности по  $\hbar^{1/2}$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , что дает возможность получить новые «классические» уравнения  $\text{mod } \hbar^{N/2}$ . Так, при  $N = 5$  в уравнениях движения неабелевой частицы в хромоэлектромагнитном поле возникают члены, описывающие взаимодействие спина с изоспином, но получение этих уравнений выходит за рамки настоящей работы.

## ГЛАВА 4

# Теория спонтанного излучения в квазиклассическом траекторно-когерентном приближении

Характерное свойство квазиклассических траекторно-когерентных состояний быть локализованными в окрестности классической траектории, а также тот факт, что они образуют (в любом порядке по степеням  $\hbar^{1/2}$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ ) полный набор состояний, делают их удобным базисом для расчета сечений широкого круга квантовых процессов при взаимодействии заряженных частиц с внешними полями, особенно тех из них, которые в соответствующей области параметров допускают описание на классическом языке, т.е. на языке классических уравнений движения.

В настоящей главе мы рассматриваем одну из таких задач – расчет характеристик спонтанного излучения электромагнитных волн бозоном и электроном, движущимися в произвольном внешнем поле. Эта задача имеет последовательное решение в квантовой электродинамике [52]. Однако получить теоретические результаты в удобном для физического анализа виде удастся сравнительно редко, что стимулирует разработку приближенных методов расчета. Мы будем использовать новый приближенный метод расчета основных характеристик спонтанного излучения релятивистской частицы – метод квазиклассических траекторно-когерентных состояний (ТКС), развитый для релятивистских уравнений Дирака и Клейна–Гордона в главе I.

Основной результат состоит в следующем: используя одночастичные квазиклассические ТКС уравнения Клейна–Гордона и Дирака для релятивистской частицы, движущейся в произвольном внешнем электромагнитном поле, мы получили спектрально-угловое распределение излучений энергии в виде конкретного функционала от классической траектории частицы. Под классической траекторией здесь понимается решение соответствующей системы уравнений Гамильтона–Эренфеста для  $N = 2$ . (Заметим, что в разложении по малому параметру  $\hbar \rightarrow 0$  решение системы Гамильтона–Эренфеста сводится к решению системы Гамильтона, системы в вариациях и уравнения Баргманна–Мишеля–Телегди.) Полученное выражение позволяет найти все характеристики излучения бозона и электрона в произвольном внешнем поле с учетом первой квантовой поправки включительно в той области инвариантных параметров процесса излучения, где выполняются следующие условия: отдача фотона мала ( $\hbar\omega/E \ll 1$ ) и его движение квазиклассично ( $\lambda/a \ll 1$ , где  $\lambda$  – де-Бройлевская длина волны,  $a$  – характерный размер системы (в случае магнитного поля  $\lambda/a \sim \hbar\omega_0/E$ ,  $\omega_0$  – частота вращения)). Кроме того, показано, что с точностью до  $O(\hbar^2)$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , мощность излучения бозона совпадает с усредненной по спиновым состояниям мощностью излучения электрона.

Особо подчеркнем, что в методе квазиклассических ТКС нет ограничений снизу на энергию частицы. Выражения для первой квантовой поправки справедливы при всех энергиях электрона (при которой поправка мала по сравнению с классической частью) и учитывают как квантовую отдачу излучения, так и флуктуационные члены, характеризующие квантование движения бозона. Это обстоятельство позволяет в полученных выражениях для характеристик излучения рассмотреть предельные случаи. В частности, получены общие формулы для полной излученной энергии в нерелятивистском приближении и в приосевом приближении (при квазипериодическом движении). На их основе удалось получить выражение для мощности спонтанного излучения нерелятивистской частицы в произвольном аксиально-симметричном магнитном поле.

Кроме того, они проиллюстрированы примерами гармонического осциллятора и постоянного однородного магнитного поля. Результаты вычислений в этих случаях хорошо согласуются с ранее известными [116–118].

## 24. Спектрально-угловое распределение энергии спонтанного излучения бозона

Найдем матричные элементы тока перехода [55] по состоянию  $\Psi_\nu$  (6.13), удовлетворяющему уравнению Клейна–Гордона (5.1) с точностью до  $O(\hbar^{5/2})$ :

$$\vec{M}(\nu, \nu', t) = \frac{1}{2m_0c} \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left[ -i \left( \omega t - \frac{\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle \right) \right] [(\hat{\mathcal{P}}\Psi_{\nu'})^* \Psi_\nu + \Psi_{\nu'}^* \hat{\mathcal{P}}\Psi_\nu] d^3x, \quad (24.1)$$

где единичный вектор  $\vec{n} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$  характеризует направление вылета фотона.

Используя оценки (6.3), (6.4) и явный вид функций (6.13) с точностью до  $O(\hbar^{3/2})$ , для матричных элементов (24.1) при  $N = 2$  имеем

$$\begin{aligned} \vec{M}(\nu, \nu', t) = & \exp \left[ -i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t) \rangle \right) \right] \times \\ & \times \langle t, \nu | \left\{ \left( \vec{\beta}(t) + \frac{\hbar\omega\vec{n}}{2\varepsilon} \right) + \frac{1}{c} [\lambda_{pp}^{(+)} \hat{\mathcal{P}}_1 + i\omega\vec{\beta}\langle \vec{n}, \Delta\vec{x} \rangle] + \right. \\ & \left. + \left\{ -\frac{1}{2\varepsilon} e d^2 \vec{\mathcal{A}} - \frac{\omega^2}{2c^2} \langle \vec{n}, \Delta\vec{x} \rangle^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + i\frac{\omega}{\varepsilon} \langle \vec{n}, \Delta\vec{x} \rangle \hat{\mathcal{P}}_1 - \left[ \frac{\langle c\vec{\beta}, \hat{\mathcal{P}}_1 \rangle}{2\varepsilon}, \left( \frac{c\hat{\mathcal{P}}_1}{\varepsilon} + \frac{i\omega}{c} \vec{\beta}\langle \vec{n}, \Delta\vec{x} \rangle \right) \right]_+ + \right. \right. \\ & \left. \left. + 4\vec{\beta} \left( \frac{\langle c\vec{\beta}, \hat{\mathcal{P}}_1 \rangle}{2\varepsilon} \right)^2 - \frac{\vec{\beta}}{c} \left( \frac{\delta^2\lambda}{2} - \frac{ed^2\Phi}{2} \right) \right\} + \right. \\ & \left. + i\frac{\sqrt{\hbar}}{c} \left\{ [\hat{\mathcal{F}}_1^+, (\lambda_{pp}^{(+)} \hat{\mathcal{P}}_1 + i\omega\vec{\beta}\langle \vec{n}, \Delta\vec{x} \rangle)]_- \right\} \right| \nu, t \rangle + O(\hbar^{3/2}), \\ & \langle \chi(t) | \hat{\mathcal{F}}_1^+ | \varphi(t) \rangle = \langle \varphi(t) | \hat{\mathcal{F}}_1 | \chi(t) \rangle. \end{aligned}$$

С учетом соотношений (I.11.8) и (6.21) получим окончательное выражение для матричных элементов тока перехода в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{M}(\nu, \nu', t) = & \exp \left\{ -i\omega t + i\frac{\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t, \hbar) \rangle \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{c} \dot{\vec{X}}(t, \hbar) \delta_{\nu\nu'} - i\sqrt{\frac{\hbar}{2c^2}} [\dot{C}(t) \vec{\mu}_+ + i\omega\vec{\beta}\langle \vec{n}, C(t) \vec{\mu}_+ \rangle] + \right. \\ & \left. + i\sqrt{\frac{\hbar}{2c^2}} [\dot{C}^*(t) \vec{\mu}_- + i\omega\vec{\beta}\langle \vec{n}, C^*(t) \vec{\mu}_- \rangle] - \right. \\ & \left. - \delta_{\nu\nu'} \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\omega^2}{2} \vec{\beta}\langle \vec{n}, \sigma_{xx}(t) \vec{n} \rangle - i\omega\lambda_{pp}^{(+)}(t) \sigma_{px}(t) \vec{n} + \right. \right. \\ & \left. \left. + i\omega\lambda_{px}^{(+)}(t) \sigma_{xx}(t) \vec{n} \right] + \hbar \vec{\mathcal{L}}(t, \nu, \nu') \delta_{|\nu|, |\nu'|+2} \right\} + O(\hbar^{3/2}). \quad (24.2) \end{aligned}$$

Мы не приводим явного вида вектора  $\vec{\mathcal{L}}(t, \nu, \nu')$ , так как можно показать, что в пределах рассматриваемой по  $\hbar \rightarrow 0$  точности квантовая поправка в матричном элементе, пропорциональная символу Кронекера  $\delta_{|\nu|, |\nu'|+2}$ , не влияет на характеристики излучения.

В формуле (24.2) мы используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\hat{\vec{X}} &= \vec{X}(t) + \Delta\vec{x} - i\sqrt{\hbar}(\Delta\vec{x}\hat{G} - \hat{G}^+\Delta\vec{x}) + \hat{O}(\hbar^{3/2}), \\ \sqrt{\hbar}\hat{G} &= \sqrt{\hbar}\hat{\mathcal{F}}_1 - \frac{e}{3!c\hbar}\langle\Delta\vec{x}, d^2\vec{A}\rangle, \\ \langle\chi(t)|\hat{G}^+|\varphi(t)\rangle &= \langle\varphi(t)|\hat{G}^+|\chi(t)\rangle, \\ \vec{X}(t, \hbar) = \langle\hat{\vec{X}}\rangle &= \langle t, \nu|\hat{\vec{X}}|\nu, t\rangle = \vec{X}(t) + \hbar\vec{X}_{\Phi}^1(t) + O(\hbar^2),\end{aligned}\quad (24.3)$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{X}}(t, \hbar) = \langle\dot{\hat{\vec{X}}}\rangle &= \langle t, \nu|\dot{\hat{\vec{X}}}| \nu, t\rangle = \frac{d}{dt}\langle t, \nu|\hat{\vec{X}}|\nu, t\rangle = \\ &= c\vec{\beta} - \frac{\hbar}{4}c\vec{\beta}\sum_{k=1}^3\frac{2\nu_k+1}{c^2\text{Im}b_k}(|\dot{\vec{Z}}_k|^2 + \gamma^2|\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{Z}}_k\rangle|^2) - \\ &- \frac{\hbar}{2}\sum_{k=1}^3\frac{2\nu_k+1}{c\text{Im}b_k}\gamma^2\text{Re}[\dot{\vec{Z}}_k\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{Z}}_k^*\rangle] - \frac{\hbar}{2}\frac{e}{3c}\sum_{l=1}^3\frac{(2\nu_l+1)}{\text{Im}b_l}\times \\ &\times \text{Re}\{\langle\dot{\vec{Z}}_l, \vec{\nabla}\rangle\lambda_{pp}^{(+)}(t)(\dot{\vec{Z}}_l^* \times \vec{H}(\vec{x}, t))\}|_{\vec{x}=\vec{X}(t)} + \hbar\dot{\vec{X}}_{\Phi}^1(t) + O(\hbar^2),\end{aligned}\quad (24.4)$$

где последние слагаемые в (24.3) и (24.4) представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned}\hbar\begin{pmatrix} \dot{\vec{X}}_{\Phi}^1(t) \\ \dot{\vec{X}}_{\Phi}^2(t) \end{pmatrix} &= -i\sqrt{\hbar}\langle t, \nu|\left[\begin{pmatrix} \lambda_{pp}^{(+)}\hat{\vec{P}}_1 \\ \Delta\vec{x} \end{pmatrix}\hat{G} - \hat{G}^+\begin{pmatrix} \lambda_{pp}^{(+)}\hat{\vec{P}}_1 \\ \Delta\vec{x} \end{pmatrix}\right]|\nu, t\rangle = \\ &= \frac{\hbar}{4}\sum_{k,j=1}^3\frac{2\nu_j+1}{\text{Im}b_k\text{Im}b_j}\text{Im}\left\{\begin{pmatrix} \dot{\vec{Z}}_k \\ \dot{\vec{Z}}_k \end{pmatrix}[F(\vec{Z}_k^*, \vec{Z}_j^*, \vec{Z}_j) + \right. \\ &+ F(\vec{Z}_k^*, \vec{Z}_j, \vec{Z}_j^*) + F(\vec{Z}_j^*, \vec{Z}_k^*, \vec{Z}_j) + F(\vec{Z}_j, \vec{Z}_k^*, \vec{Z}_j^*) + \\ &\left. + F(\vec{Z}_j^*, \vec{Z}_j, \vec{Z}_k^*) + F(\vec{Z}_j, \vec{Z}_j^*, \vec{Z}_k^*)\right\},\end{aligned}\quad (24.5)$$

где

$$\begin{aligned}F(\vec{Z}_j, \vec{Z}_k, \vec{Z}_m) &= -\frac{1}{3!2}\int_0^t d\tau\left\{\frac{e}{3!}\langle\vec{Z}_j, \nabla\rangle\langle\vec{Z}_k, \nabla\rangle\langle\vec{Z}_m, (\vec{E}(\vec{x}, \tau) + \vec{\beta}(\tau) \times \vec{H}(\vec{x}, \tau))\rangle - \right. \\ &- \frac{e}{3!c}[\langle\vec{Z}_j, \nabla\rangle\langle(\vec{Z}_k \times \vec{H}(\vec{x}, \tau)), \dot{\vec{Z}}_m\rangle + \langle\vec{Z}_m, \nabla\rangle\langle\dot{\vec{Z}}_j, (\vec{Z}_k \times \vec{H}(\vec{x}, \tau))\rangle] + \\ &+ \frac{\varepsilon\gamma^2}{2c^2}[\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{Z}}_j\rangle\langle\dot{\vec{Z}}_k, \dot{\vec{Z}}_m\rangle + \gamma^2\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{Z}}_k\rangle\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{Z}}_m\rangle] + \\ &\left. + (\langle\dot{\vec{Z}}_j, \dot{\vec{Z}}_k\rangle + \gamma^2\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{Z}}_j\rangle\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{Z}}_k\rangle)\langle\vec{\beta}, \dot{\vec{Z}}_m\rangle\right\}|_{\vec{x}=\vec{X}(\tau)}.\end{aligned}$$

Заметим, что вектор  $\vec{X}(t, \hbar)$  является решением системы Гамильтона–Эренфеста (6.22). Соотношение (24.5) получено непосредственным вычислением интеграла. Также в (24.2) обозначено

$$\vec{\mu}_{\pm} = \left\{ \left( \sqrt{\frac{2\nu_1+1\pm 1}{2\text{Im}b_1}}\delta_{\nu'_1, \nu_1\pm 1}\delta_{\nu'_2, \nu_2}\delta_{\nu'_3, \nu_3} \right), \left( \sqrt{\frac{2\nu_2+1\pm 1}{2\text{Im}b_2}}\delta_{\nu'_1, \nu_1}\delta_{\nu'_2, \nu_2\pm 1}\delta_{\nu'_3, \nu_3} \right), \right. \\ \left. \left( \sqrt{\frac{2\nu_3+1\pm 1}{\text{Im}b_3}}\delta_{\nu'_1, \nu_1}\delta_{\nu'_2, \nu_2}\delta_{\nu'_3, \nu_3\pm 1} \right) \right\},\quad (24.6)$$



Матричные элементы тока перехода (24.2) зависят от  $3 \times 3$ -матриц дисперсий координат и корреляций координат и импульсов, рассчитанных (с точностью до  $O(\hbar^2)$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ ) по квазиклассическим ТКС (7.1). Здесь

$$\sigma_{AB} = \frac{1}{2} \langle (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}) \rangle - \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(t) &= \frac{\hbar}{4} [C(t)D_\nu C^+(t) + C^*(t)D_\nu C^t(t)], \\ \sigma_{px}(t) &= \frac{\hbar}{4} [B(t)D_\nu C^+(t) + B^*(t)D_\nu C^t(t)], \end{aligned} \quad (24.7)$$

где

$$D_\nu = \left\| (2\nu_k + 1) \frac{\delta_{kj}}{\text{Im } b_k} \right\|_{3 \times 3}.$$

Теперь найдем спектрально-угловое распределение энергии излучения [52]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \sum_{|\nu'|=0}^\infty I^{(\lambda)}(\nu, \nu'), \\ I^{(\lambda)}(\nu, \nu') &= \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{M}(t_1, \nu, \nu') \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{M}(t_2, \nu, \nu') \rangle^*, \end{aligned} \quad (24.8)$$

где разложение по векторам  $\vec{e}_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2$ , характеризует поляризационные свойства излучения

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}_\pi = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, -\sin \theta), \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_\sigma = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0). \end{aligned} \quad (24.9)$$

После суммирования квадрата матричного элемента по конечным состояниям частицы  $\nu'_1$ ,  $\nu'_2$  и  $\nu'_3$  получим

$$\begin{aligned} \sum_{|\nu'|=0}^\infty I^{(\lambda)}(\nu, \nu') &= \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \times \\ &\times \exp \left\{ -i\omega(t_1 - t_2) + i\frac{\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t_1, \hbar) \rangle - i\frac{\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t_2, \hbar) \rangle \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{c^2} \langle \vec{e}_\lambda, \dot{\vec{X}}(t_1, \hbar) \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \dot{\vec{X}}(t_2, \hbar) \rangle + \hbar B_R^{(\lambda)}(t_1, t_2) + \hbar B_\Phi^{(\lambda)}(t_1, t_2) \right\} + O(\hbar^2) \end{aligned} \quad (24.10)$$

где

$$\begin{aligned} B_R^{(\lambda)}(t_1, t_2) &= \frac{i}{2c^2} [\text{Im}(\langle \vec{e}_\lambda, \dot{C}(t_1) D_0 \dot{C}^+(t_2) \vec{e}_\lambda \rangle) - \\ &- i\omega \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle \text{Im}(\langle \vec{e}_\lambda, \dot{C}(t_1) D_0 C^+(t_2) \vec{n} \rangle) + \\ &+ i\omega \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_1) \rangle \text{Im}(\langle \vec{n}, C(t_1) D_0 \dot{C}^+(t_2) \vec{e}_\lambda \rangle) + \\ &+ \omega^2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_1) \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle \text{Im}(\langle \vec{n}, C(t_1) D_0 C^+(t_2) \vec{n} \rangle)]; \\ B_\Phi^{(\lambda)}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \sum_{k,j=1}^2 (-1)^{k+j+1} \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_1) \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle \times \right. \\ &\times \text{Re}[\langle \vec{n}, C(t_k) D_\nu C^+(t_j) \vec{n} \rangle] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i\omega}{c^2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_1) \rangle \operatorname{Re}[\langle \vec{n}, C(t_1) D_\nu \dot{C}^+(t_k) \vec{e}_\lambda \rangle] - \\
& - \frac{i\omega}{c^2} \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle \operatorname{Re}[\langle \vec{e}_\lambda, \dot{C}(t_k) D_\nu C^+(t_2) \vec{n} \rangle] + \\
& + \frac{1}{c^2} \operatorname{Re}[\langle \vec{e}_\lambda, \dot{C}(t_1) D_\nu \dot{C}^+(t_2) \vec{e}_\lambda \rangle] \Big\}. \tag{24.11}
\end{aligned}$$

Из формул (24.10) и (24.11) следует, что спектрально-угловое распределение энергии излучения (24.8) бесспиновой релятивистской частицы с учетом первых квантовых поправок включительно представлено в виде конкретного функционала от классической траектории (решений уравнений Лоренца  $\vec{r}(t)$  и системы в вариациях  $B(t)$   $C(t)$ ).

Анализируя характер квантовых поправок, отметим следующее: квантовая поправка  $B_R^{(\lambda)}$  определяется классической траекторией частицы, а  $B_\Phi^{(\lambda)}$  – параметрами волнового пакета  $\Psi_\nu(\vec{x}, t, \hbar)$  (7.1),  $\nu_j$   $b_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и связана с квантовыми флуктуациями основных динамических переменных  $\vec{x}$  и  $\vec{p}$ . Поэтому поправку  $B_R^{(\lambda)}$ , зависящую от параметров  $\vec{x}_0$  и  $\vec{p}_0$ , можно интерпретировать как квантовую поправку, связанную с отдачей фотона, а  $B_\Phi^{(\lambda)}$ , зависящую от  $\nu_i$ ,  $b_i$ ,  $\vec{x}_0$  и  $\vec{p}_0$ , естественно считать флуктуационной квантовой поправкой к излучению, учитывающей квантование движения частицы.

Проинтегрируем (24.8) и (24.10) по частоте, используя соотношение [119]

$$\int_0^\infty d\omega \exp(i\omega\xi) = \pi\delta(\xi) + iP\frac{1}{\xi}. \tag{24.12}$$

Тогда для углового распределения излученной энергии найдем [120]

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left[ \pi \int_{-\infty}^\infty dt \frac{A^{(\lambda)}(t, \hbar)}{\langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle} - \right. \\
& \left. - \frac{\hbar}{2c} \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \frac{A_R^{(\lambda)}(t_1, t_2)}{ct_1 - ct_2 - \langle \vec{n}, \vec{X}(t_1) \rangle + \langle \vec{n}, \vec{X}(t_2) \rangle} \right] + O(\hbar^2), \tag{24.13}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A^{(\lambda)}(t, \hbar) &= A_{\text{cl}}^{(\lambda)}(t) + \hbar A_\Phi^{(\lambda)}(t); \\
A_{\text{cl}}^{(\lambda)}(t) &= (\mathcal{D}_t \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta} \rangle)^2; \\
\hbar A_\Phi^{(\lambda)}(t) &= \frac{2}{c} (\mathcal{D}_t \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta} \rangle) (\mathcal{D}_t \langle \vec{e}_\lambda, (\dot{\vec{X}}(t, \hbar) - c\vec{\beta}) \rangle) + \\
& + \frac{2}{c} (\mathcal{D}_t \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta} \rangle) [\mathcal{D}_t^2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{n}, (\vec{X}(t, \hbar) - \vec{X}(t)) \rangle] + \\
& + \frac{\hbar}{2c^2} \operatorname{Re}\{(\mathcal{D}_t \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta} \rangle) [\mathcal{D}_t^3 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{n}, C(t) D_\nu C^+(t) \vec{n} \rangle] + \\
& + |\mathcal{D}_t^2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta} \rangle D_\nu^{1/2} C^+ \vec{n}|^2 + 2[\langle \vec{e}_\lambda, (\mathcal{D}_t \dot{C}(t)) D_\nu (\mathcal{D}_t \dot{C}^+(t)) \vec{e}_\lambda \rangle + \\
& + \langle \vec{e}_\lambda, (\mathcal{D}_t \vec{\beta}) \rangle (\mathcal{D}_t^2 \langle \vec{e}_\lambda, \dot{C}(t) D_\nu C^+(t) \vec{n} \rangle)] + \\
& + 2[\langle \vec{e}_\lambda, (\mathcal{D}_t \dot{C}(t)) D_\nu (\mathcal{D}_t^2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta} \rangle C^+(t) \vec{n} \rangle)]\}; \\
A_R^{(\lambda)}(t_1, t_2) &= \operatorname{Im}\{(\mathcal{D}_{t_1}^2 \mathcal{D}_{t_2}^2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_1) \rangle) \times
\end{aligned} \tag{24.14}$$

(24.15)

$$\begin{aligned}
& \times \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle \langle \vec{n}, C(t_1) D_0 C^+(t_2) \vec{n} \rangle + \\
& + \mathcal{D}_{t_1} \mathcal{D}_{t_2}^2 (\langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle) \langle \vec{e}_\lambda, \dot{C}(t_1) D_0 C^+(t_2) \vec{n} \rangle + \\
& + \mathcal{D}_{t_1}^2 \mathcal{D}_{t_2} (\langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_1) \rangle) \langle \vec{n}, C(t_1) D_0 \dot{C}^+(t_2) \vec{e}_\lambda \rangle + \\
& + \mathcal{D}_{t_1} \mathcal{D}_{t_2} (\langle \vec{e}_\lambda, \dot{C}(t_1) D_0 \dot{C}^+(t_2) \vec{e}_\lambda \rangle). \tag{24.16}
\end{aligned}$$

Здесь через  $\mathcal{D}_t$  обозначен оператор

$$\mathcal{D}_t = \frac{d}{dt} \frac{1}{1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle}.$$

Таким образом, мы видим, что в угловом распределении энергии излучения (24.13) существуют два типа квантовых поправок, определяемых слагаемыми  $A_\Phi^{(\lambda)}(t)$  и  $A_R^{(\lambda)}(t)$ , соответственно. Поправка, связанная с  $A_\Phi^{(\lambda)}(t)$ , зависит от параметров  $\nu, b, \vec{x}_0, \vec{p}_0$  начального состояния квантовой частицы – волнового пакета (6.14) и поэтому ее естественно называть флуктуационной частью квантовых поправок к излучению, учитывающей квантование движения электрона, в то время как  $A_R^{(\lambda)}(t)$  зависит лишь от начальных координат  $\vec{x}_0, \vec{p}_0$  классической частицы и определяет квантовые поправки к характеристикам излучения, связанные с отдачей излучаемого фотона.

◇ Наличие двух типов квантовых поправок к излучению электрона отражает «двухмасштабный» характер квазиклассических асимптотик волновых функций (6.14), использованных в расчете характеристик излучения. При квантовании классической системы Гамильтона (7.1) методом комплексного роста (см. гл. 1) возникают два малых безразмерных параметра (формально пропорциональных  $\hbar$  и  $\sqrt{\hbar}$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ ). Первый из них – отношение де-бройлевской длины волны к характерным размерам системы – определяет быстрые (с частотой  $\sim 1/\hbar$ ) осцилляции волновой функции, второй характеризует квантовые флуктуации частицы около классической траектории с частотой  $1/\sqrt{\hbar}$ .

Рассмотрим подробнее спектрально-угловое распределение излученной энергии без учета квантовых флуктуаций (т.е. без члена  $\hbar A_\Phi(t)$  (24.16)). Если известно общее решение системы Гамильтона  $\vec{P}(t, z_0)$  и  $\vec{X}(t, z_0)$ , зависящее от шести параметров  $z_0 = (\vec{p}_0, \vec{x}_0) \in \mathbb{R}_{px}^6$ , задача интегрирования системы в вариациях (7.3) решается дифференцированием этих решений по параметрам  $\vec{p}_0$  и  $\vec{x}_0$ . Матрицы  $B(t)$  и  $C(t)$  равны, соответственно, (см. (I.10.34))

$$\begin{aligned}
B(t) &= \left\| \frac{\partial P_i(t, z_0)}{\partial p_{0j}} \right\| B(0) + \left\| \frac{\partial P_i(t, z_0)}{\partial x_{0j}} \right\|, \\
C(t) &= \left\| \frac{\partial X_i(t, z_0)}{\partial p_{0j}} \right\| B(0) + \left\| \frac{\partial X_i(t, z_0)}{\partial x_{0j}} \right\|, \tag{24.17}
\end{aligned}$$

а матрица  $B(0)$  определена в (7.3). Подставив (24.17) в выражение

$$2i \operatorname{Im}(\langle \vec{n}, C(t_1) D_0 C^+(t_2) \vec{n} \rangle),$$

найдем, что

$$\langle \vec{n}, [C(t_1) D_0 C^+(t_2)] \vec{n} \rangle = i \{ \langle \vec{n}, \vec{x}(t_1) \rangle, \langle \vec{n}, \vec{X}(t_2) \rangle \}_{x_0 p_0}, \tag{24.18}$$

где через  $\{a, b\}_{x_0 p_0}$  обозначены скобки Пуассона

$$\{a, b\}_{x_0 p_0} = \left\langle \frac{\partial a}{\partial \vec{p}_0}, \frac{\partial b}{\partial \vec{x}_0} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial a}{\partial \vec{x}_0}, \frac{\partial b}{\partial \vec{p}_0} \right\rangle. \tag{24.19}$$

С учетом (24.18) найдем спектрально-угловое распределение излученной энергии без учета квантовых флуктуаций

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \left\{ \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_1) \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle + \right. \\ &\quad + \frac{i\hbar}{c^2} [i\omega \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_1) \rangle \{ \langle \vec{n}, \vec{X}(t_1) \rangle, \langle \vec{e}_\lambda, \dot{\vec{X}}(t_2) \rangle \}_{x_0 p_0} + \\ &\quad + i\omega \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle \{ \langle \vec{n}, \vec{X}(t_2) \rangle, \langle \vec{e}_\lambda, \dot{\vec{X}}(t_1) \rangle \}_{x_0 p_0} - \\ &\quad - \{ \langle \vec{e}_\lambda, \dot{\vec{X}}(t_1) \rangle, \langle \vec{e}_\lambda, \dot{\vec{X}}(t_2) \rangle \}_{x_0 p_0} \left. \right\} \exp \left\{ i\omega \left[ t_1 - t_2 - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t_1) \rangle + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t_2) \rangle + \frac{\hbar\omega}{c^2} \{ \langle \vec{n}, \vec{X}(t_1) \rangle, \langle \vec{n}, \vec{X}(t_2) \rangle \}_{x_0 p_0} \right] \right\} + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (24.20)$$

После суммирования по поляризациям фотона и интегрирования по частоте окончательно найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \left\{ \pi \int_{-\infty}^\infty \frac{[(\mathcal{D}_t \vec{\beta})^2 - \langle \vec{n}, \mathcal{D}_t \vec{\beta} \rangle^2]}{1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle} dt + \right. \\ &\quad + \frac{\hbar}{4c} \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \frac{1}{c(t_1 - t_2) - \langle \vec{n}, (\vec{X}(t_1) - \vec{X}(t_2)) \rangle} \times \\ &\quad \times \mathcal{D}_{t_1}^2 \mathcal{D}_{t_2}^2 \left[ (\langle \vec{\beta}(t_1), \vec{\beta}(t_2) \rangle - 1) \langle \vec{n}, \{ \vec{X}(t_1), \vec{X}(t_2) \}_{p_0, x_0}(t_1, t_2) \vec{n} \rangle + \right. \\ &\quad + (1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t_1) \rangle)(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t_2) \rangle) \text{Sp} \{ \vec{X}(t_1), \vec{X}(t_2) \}_{p_0, x_0}(t_1, t_2) + \\ &\quad + (1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t_2) \rangle) \langle \vec{n}, \{ \vec{X}(t_1), \vec{X}(t_2) \}_{p_0, x_0}(t_1, t_2) \vec{\beta}(t_1) \rangle + \\ &\quad \left. + (1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t_1) \rangle) \langle \vec{\beta}(t_2), \{ \vec{X}(t_1), \vec{X}(t_2) \}_{p_0, x_0}(t_1, t_2) \vec{n} \rangle \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (24.21)$$

Отметим, что в случае нестационарного электрического поля

$$\vec{E} = \vec{E}(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$$

формула (24.21) принимает достаточно простой вид. Действительно, из (24.17) для этого случая найдем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial P_k(t, z_0)}{\partial p_{0j}} \right\| &= \left\| \frac{\partial X_k(t, z_0)}{\partial x_{0j}} \right\| = \|\delta_{kj}\|, & \left\| \frac{\partial P_k(t, z_0)}{\partial x_{0j}} \right\| &= 0, \\ \left\| \frac{\partial X_k(t, z_0)}{\partial p_{0j}} \right\| &= \left\| \int_0^t \frac{c^2 dt}{\varepsilon(t)} (\delta_{kj} - \beta_j(t) \beta_k(t)) \right\|, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \{ \langle \dot{\vec{X}}(t_1), \vec{e}_\lambda \rangle, \langle \dot{\vec{X}}(t_2), \vec{e}_\lambda \rangle \}_{x_0 p_0} &= 0, \\ \{ \langle \vec{n}, \vec{x}(t_1) \rangle, \langle \vec{e}_\lambda, \dot{\vec{X}}(t_2) \rangle \}_{x_0 p_0} &= -\langle \vec{n}, \lambda_{pp}^{(+)}(t_2) \vec{e}_\lambda \rangle, \\ \{ \langle \vec{n}, \vec{X}(t_1) \rangle, \langle \vec{n}, \vec{X}(t_2) \rangle \}_{x_0 p_0} &= \int_{t_2}^{t_1} \frac{c^2 dt}{\varepsilon(t)} (1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t) \rangle^2). \end{aligned}$$

В результате выражение (24.20) преобразуется к виду

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \int_0^\infty d\omega \omega^2 |\langle \vec{e}_\lambda, \vec{B}(\omega) \rangle|^2,$$

где

$$\begin{aligned} \vec{B}(\omega) = & \int_{-\infty}^\infty dt \vec{\beta}(t) \left( 1 - \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon(t)} \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t) \rangle \right) \exp \left\{ \int_0^t dt \left[ 1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t) \rangle + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon(t)} \left( 1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t) \rangle^2 \right) \right] \right\} + O(\hbar^2). \end{aligned}$$

## 25. Спектрально-угловое распределение энергии спонтанного излучения электрона

Оператор  $\widehat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar)$  (4.6) задает по  $\text{mod}O(\hbar^{3/2})$  переход к квазиклассическому ТК-представлению

$$\begin{aligned} \varphi &= (\widehat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar))^{-1} \Psi + O(\hbar^{3/2}), \\ \widehat{\mathcal{A}}_+ &= (\widehat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar))^{-1} \widehat{\mathcal{A}}_\hbar \widehat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar) + \widehat{O}(\hbar^{3/2}). \end{aligned}$$

Вычислим в этом представлении оператор тока перехода:

$$\begin{aligned} \widehat{j}_+ &= \vec{\alpha} \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle \right) \right], \\ \vec{n} &= (n_1, n_2, n_3) = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta). \end{aligned} \quad (25.1)$$

С учетом формулы (Б.6) получим

$$\begin{aligned} \widehat{j}_+ &= (\widehat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar))^{-1} \vec{\alpha} \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle \right) \right] \widehat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar) + \widehat{O}(\hbar^{3/2}) = \\ &= \left[ 1 + i\sqrt{\hbar} \hat{\pi}_1^+ + i\hbar \hat{\pi}_2^+ - \hbar (\hat{\pi}_1^+)^2 \right] \left\{ \left[ 1 - \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1^+ \right)^2 \right] \vec{\beta} \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle \right) \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[ 1 - \frac{\hbar}{2} \left( \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1^+ \right)^2 \right] - \frac{\sqrt{\hbar}}{2\varepsilon} \hat{Q}_1^+ \vec{\beta} \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle \right) \right] \frac{\sqrt{\hbar}}{2\varepsilon} \hat{Q}_1^+ + \\ &\quad + \left( \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle - \vec{\sigma} \right) \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle \right) \right] \frac{\sqrt{\hbar}}{2\varepsilon} (\hat{Q}_1^+ + \sqrt{\hbar} \hat{Q}_2^+) + \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{\hbar}}{2\varepsilon} (\hat{Q}_1^+ + \sqrt{\hbar} \hat{Q}_2^+) \left( \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle - \vec{\sigma} \right) \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle \right) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left( 1 - i\sqrt{\hbar} \hat{\pi}_1 - (i\hat{\pi}_2 + \hat{\pi}_1^2) \hbar \right) + \widehat{O}(\hbar^{3/2}). \end{aligned} \quad (25.2)$$

Здесь мы воспользовались тождеством (В.5). В результате найдем оператор  $\widehat{j}_+$  (25.2) с точностью до  $\widehat{O}(\hbar^{3/2})$

$$\widehat{j}_+ = \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{x} \rangle \right) \right] \left\{ \vec{\beta} \left( 1 - i\frac{\omega}{c} \langle \vec{n}, \Delta \vec{x} \rangle - \frac{\omega^2}{2c^2} \langle \vec{n}, \Delta \vec{x} \rangle^2 \right) + \frac{1}{c} \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i\omega}{2c^2} \left( \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 \langle \Delta \vec{x}, \vec{n} \rangle + \langle \vec{n}, \Delta \vec{x} \rangle \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 \right) - \frac{e}{c^2} \lambda_{pp}^{(+)} d^2 \vec{\mathcal{A}} - \vec{\beta} \frac{1}{2\varepsilon} \langle \widehat{\mathcal{P}}_1, \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle + \\
& + \frac{-i\sqrt{\hbar}}{c} \left[ (\lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 - i\omega \vec{\beta} \langle \vec{n}, \Delta \vec{x} \rangle) \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+ (\lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 - i\omega \vec{\beta} \langle \vec{n}, \Delta \vec{x} \rangle) \right] + \\
& + \frac{e\hbar}{2\varepsilon^2} \vec{\beta} \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle \right] - \\
& - \frac{\hbar}{2\varepsilon} \left[ \vec{\sigma} \times \dot{\vec{\beta}} + \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \rangle + \frac{\gamma \langle \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \vec{\sigma} \times \vec{\beta} \right] + \\
& + \frac{e\hbar}{2\varepsilon^2} \left[ \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{H}) \rangle + \vec{\sigma} \times (\vec{\beta} \times \vec{H}) \right] - \\
& - \frac{1}{2\varepsilon} \left[ \langle \vec{\beta}, \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 + \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 \langle \vec{\beta}, \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \right] + \\
& + \frac{-i\omega\hbar}{2\varepsilon} \left[ \vec{\sigma} \times \vec{n} - \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{n} \times \vec{\beta} \rangle - \vec{\sigma} \times \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{n} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right] \Big\} + \widehat{O}(\hbar^{3/2}). \quad (25.3)
\end{aligned}$$

Здесь  $\widehat{\mathcal{P}}_1 = -i\hbar\nabla + B(t)C^{-1}(t)\Delta\vec{x} - \frac{e}{c}d^1\vec{\mathcal{A}}$ .

Аналогичные вычисления дают следующие выражения для операторов координат и скорости в ТК-представлении (см. также (Б.8)):

$$\begin{aligned}
\hat{X}(t, \hbar) &= (\widehat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar))^{-1} \vec{x} \mathcal{K}_D^{(2)}(t, \hbar) = \\
&= \vec{x}(t) + \Delta\vec{x} - i\sqrt{\hbar}(\Delta\vec{x}\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+\Delta\vec{x}) + O(\hbar^{3/2}); \quad (25.4) \\
\hat{X}(t, \hbar) &= (\widehat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar))^{-1} c\vec{\alpha}\widehat{\mathcal{K}}_D^{(2)}(t, \hbar) = \\
&= \dot{\vec{x}} \left( 1 - \frac{1}{2\varepsilon} \langle \widehat{\mathcal{P}}_1, \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \right) + \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 - \\
&- \frac{e}{c} \lambda_{pp}^{(+)} d^2 \vec{\mathcal{A}} - \frac{1}{2\varepsilon} \left( \langle \dot{\vec{x}}, \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 + \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 \langle \dot{\vec{x}}, \widehat{\mathcal{P}}_1 \rangle \right) - \\
&- i\sqrt{\hbar} [\lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1 \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+ \lambda_{pp}^{(+)} \widehat{\mathcal{P}}_1] + \\
&+ \frac{e\hbar}{2\varepsilon^2} \left[ \dot{\vec{x}} \left( \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle + \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{H} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right) - \right. \\
&\left. - c \left( \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E} \rangle + \langle \vec{\sigma} \times \vec{E} \rangle + \vec{\sigma} \times \vec{\beta} \frac{\gamma \langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right) \right] + \widehat{O}(\hbar^{3/2}). \quad (25.5)
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (25.3), для оператора тока перехода в ТК-представлении (mod  $O(\hbar^{3/2})$ ) получим

$$\begin{aligned}
\hat{j}_+ &= \frac{1}{2c} [\hat{X}(t, \hbar) \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \hat{X}_+ \rangle \right) \right] + \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \hat{X}_+ \rangle \right) \right] \hat{X}(t, \hbar)] + \\
&+ \frac{i\omega\hbar}{2\varepsilon} \left[ \vec{\sigma} \times \vec{n} - \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{n} \times \vec{\beta} \rangle - \vec{\sigma} \times \vec{\beta} \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{n} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \right] \times \\
&\times \exp \left[ i\omega \left( t - \frac{1}{c} \langle \vec{n}, \vec{x}(t) \rangle \right) \right] + \widehat{O}(\hbar^{3/2}). \quad (25.6)
\end{aligned}$$

Найдем матричный элемент тока перехода  $\hat{j}_+$  (25.6). С учетом (7.12), (7.12) и (I.16.12)

$$\vec{M}(t, \nu, \zeta, \nu', \zeta') = \langle \zeta', H_{\nu'} | \hat{j}_+ | H_{\nu}, \zeta \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ i\omega t - \frac{i\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t, \zeta, \zeta', \hbar) \rangle \right\} \left\{ \frac{1}{c} \dot{\vec{X}}(t, \zeta, \zeta', \hbar) \delta_{\nu\nu'} - \right. \\
&\quad - i\sqrt{\frac{\hbar}{2c^2}} [\dot{C}(t)\vec{\mu}_+ + i\omega\vec{\beta}(t)\langle \vec{n}, C(t)\vec{\mu}_+ \rangle] \delta_{\zeta\zeta'} + \\
&\quad + i\sqrt{\frac{\hbar}{2c^2}} [\dot{C}^*(t)\vec{\mu}_- + i\omega\vec{\beta}(t)\langle \vec{n}, C^*(t)\vec{\mu}_- \rangle] \delta_{\zeta\zeta'} - \\
&\quad - \delta_{\nu\nu'} \delta_{\zeta\zeta'} \frac{1}{c^2} \left[ \frac{\omega^2}{2} \vec{\beta}(t)\langle \vec{n}, \sigma_{xx}(t)\vec{n} \rangle + \right. \\
&\quad \left. + i\omega\lambda_{pp}^{(+)}(t)\sigma_{px}(t)\vec{n} + i\omega\lambda_{px}^{(+)}(t)\sigma_{xx}(t)\vec{n} \right] + \\
&\quad + \frac{i\hbar\omega}{2\varepsilon(t)} \left[ \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta') \times \vec{n} - \frac{\vec{\beta}(t)}{1+\gamma^{-1}(t)} \langle \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta'), \vec{n} \times \vec{\beta}(t) \rangle - \right. \\
&\quad \left. - \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta') \times \vec{\beta}(t) \frac{\langle \vec{n}, \vec{\beta}(t) \rangle}{1+\gamma^{-1}(t)} \right] \delta_{\nu\nu'} + \hbar\vec{\mathcal{L}}(t, \nu, \zeta, \zeta') \delta_{|\nu, |\nu'|+2} \left. \right\} + O(\hbar^{3/2}). \quad (25.7)
\end{aligned}$$

Здесь  $\vec{\mu}_{\pm}$  определен в (24.6). Мы не приводим явного вида вектора  $\vec{\mathcal{L}}(t, \nu, \zeta, \zeta')$ , так как можно показать, что квантовая поправка  $\delta_{|\nu, |\nu'|+2}$  в матричном элементе, пропорциональная символу Кронекера, не влияет в пределах рассматриваемой точности по  $\hbar \rightarrow 0$  на характеристики излучения. Средние значения операторов  $\hat{X}(t, \hbar)$  и  $\hat{\dot{X}}(t, \hbar)$  по функциям (4.11) в (25.7) имеют вид

$$\begin{aligned}
&\langle \hat{X}(t, \hbar) \rangle = \vec{X}(t, \zeta, \zeta', \hbar) = \\
&= \vec{X}(t, \hbar) \delta_{\zeta\zeta'} + \hbar\vec{X}_S(t, \zeta, \zeta') + O(\hbar^2); \quad (25.8) \\
&\langle \hat{\dot{X}}(t, \hbar) \rangle = \dot{\vec{X}}(t, \zeta, \zeta', \hbar) = \\
&= \dot{\vec{X}}(t, \hbar) \delta_{\zeta\zeta'} + \frac{ec^2\hbar}{2\varepsilon^2(t)} \left\{ \langle \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta'), \vec{E}(t) \times \vec{\beta}(t) \rangle \frac{\vec{\beta}(t)}{1+\gamma^{-1}(t)} - \right. \\
&\quad - \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta') \times \vec{E}(t) - \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta') \times \vec{\beta}(t) \frac{\gamma(t)\langle \vec{\beta}(t), \vec{E}(t) \rangle}{1+\gamma^{-1}(t)} + \\
&\quad \left. + \vec{\beta}(t) \left[ \gamma^{-1}(t)\langle \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta'), \vec{H}(t) \rangle + \frac{\langle \vec{\beta}(t), \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta') \rangle \langle \vec{\beta}(t), \vec{H}(t) \rangle}{1+\gamma^{-1}(t)} \right] \right\} + \\
&\quad + \hbar\dot{\vec{X}}_S(t, \zeta, \zeta') + O(\hbar^2). \quad (25.9)
\end{aligned}$$

Здесь  $\dot{\vec{X}}(t, \hbar)$  и  $\vec{X}(t, \hbar)$  определены в (24.3) и (24.4), а  $\dot{\vec{X}}_S(t, \zeta, \zeta')$  и  $\vec{X}_S(t, \zeta, \zeta')$  могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \dot{\vec{X}}_S(t, \zeta, \zeta') \\ \vec{X}_S(t, \zeta, \zeta') \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\text{Im } b_k} \text{Im} \left\{ \begin{pmatrix} \dot{\vec{Z}}_k(t) \\ \vec{Z}_k(t) \end{pmatrix} \int_0^t d\tau \times \right. \\
&\times \left\{ \frac{e}{\varepsilon(\tau)} \langle \vec{\eta}(\tau, \zeta, \zeta'), \left[ \vec{E}(\tau) - \vec{\beta}(\tau) \frac{\langle \vec{\beta}(\tau), \vec{E}(\tau) \rangle}{1+\gamma^{-1}(\tau)} \right] \left[ \vec{\beta}(\tau) \frac{\gamma(\tau)\langle \vec{\beta}(\tau), \dot{\vec{Z}}_k^*(\tau) \rangle}{1+\gamma^{-1}(\tau)} + \dot{\vec{Z}}_k(\tau) \right] \right\rangle - \\
&\quad - \frac{ce}{2\varepsilon(\tau)\gamma(\tau)} \langle \vec{Z}_k^*(\tau), \vec{\nabla} \rangle \left\langle \vec{\eta}(\tau, \zeta, \zeta'), \left( \vec{\beta}(\tau) \frac{\gamma(\tau)\langle \vec{\beta}(\tau), \vec{H}(\vec{x}, \tau) \rangle}{1+\gamma^{-1}(\tau)} + \vec{H}(\vec{x}, \tau) \right) \right\rangle \Big|_{\vec{x}=\vec{x}(\tau)} + \\
&\quad \left. + \frac{e\gamma(\tau)}{\varepsilon(\tau)} \langle \vec{\beta}(\tau), \dot{\vec{Z}}_k^*(\tau) \rangle \left\langle \vec{\eta}(\tau, \zeta, \zeta'), \left( \vec{\beta}(\tau) \frac{\gamma(\tau)\langle \vec{\beta}(\tau), \vec{H}(\tau) \rangle}{1+\gamma^{-1}(\tau)} + \vec{H}(\tau) \right) \right\rangle \right\}. \quad (25.10)
\end{aligned}$$

Найдя обычными методами квантовой электродинамики [52] спектрально-угловое распределение энергии и вероятности излучения, получим [64, 120, 125–127]

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c} \int_0^\infty \omega^2 d\omega (F_\lambda^{\uparrow\uparrow} \delta_{\zeta\zeta'} + F_\lambda^{\uparrow\downarrow} \delta_{\zeta-\zeta'}), \quad (25.11)$$

$$\frac{d\omega_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 \hbar c} \int \omega d\omega (F_\lambda^{\uparrow\uparrow} \delta_{\zeta\zeta'} + F_\lambda^{\uparrow\downarrow} \delta_{\zeta-\zeta'}), \quad (25.12)$$

$$F_\lambda^{\uparrow\uparrow} = \sum_{|\nu'|=0}^\infty \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{M}^{\uparrow\uparrow}(t_1) \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{M}^{\uparrow\uparrow}(t_2) \rangle^*,$$

$$F_\lambda^{\uparrow\downarrow} = \sum_{|\nu'|=0}^\infty \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{M}^{\uparrow\downarrow}(t_1) \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{M}^{\uparrow\downarrow}(t_2) \rangle^*.$$

Здесь в матричных элементах выделены слагаемые, соответствующие излучению с переворотом спина и без него:

$$\vec{M}(t, \zeta, \zeta', \hbar) = (\delta_{\zeta\zeta'} + \delta_{\zeta, -\zeta'}) \vec{M}(t, \zeta, \zeta', \hbar) = \delta_{\zeta\zeta'} \vec{M}^{\uparrow\uparrow}(t, \hbar) + \delta_{\zeta, -\zeta'} \vec{M}^{\uparrow\downarrow}(t, \hbar),$$

где  $\delta_{\zeta\zeta'}$  — символ Кронекера.

Просуммируем квадрат матричного элемента по конечным состояниям электрона  $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3$  и представим его в следующем виде:

$$F_\lambda^{\uparrow\uparrow}(\omega, \hbar) = \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \exp \left\{ i\omega(t_1 - t_2) - \right.$$

$$\left. -i\frac{\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t_1, \zeta, \zeta, \hbar) \rangle + i\frac{\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t_2, \zeta, \zeta, \hbar) \rangle \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{c^2} \langle \vec{e}_\lambda, \dot{\vec{X}}(t_1, \zeta, \zeta, \hbar) \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \dot{\vec{X}}(t_2, \zeta, \zeta, \hbar) \rangle + \hbar B_R^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega) + \right.$$

$$\left. + \hbar B_\Phi(t_1, t_2, \omega) + \hbar B_S^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega) \right\} + O(\hbar^2), \quad (25.13)$$

где  $B_R^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega)$  и  $B_\Phi^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega)$  определены в (24.10), а

$$B_S^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega) = \frac{i\omega}{2\varepsilon(t_1)} \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle \times$$

$$\times \left[ \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\eta}(t_1, \zeta, \zeta) \times \vec{\beta}(t_1) \rangle \frac{\langle \vec{n}, \vec{\beta}(t_1) \rangle}{1 + \gamma^{-1}(t_1)} - \right.$$

$$\left. - \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\eta}(t_1, \zeta, \zeta) \times \vec{n} \rangle + \langle \vec{\eta}(t_1, \zeta, \zeta), \vec{n} \times \vec{\beta}(t_1) \rangle \frac{\langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_1) \rangle}{1 + \gamma^{-1}(t_1)} \right] -$$

$$- \frac{i\omega}{2\varepsilon(t_2)} \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_1) \rangle \left[ \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\eta}(t_2, \zeta, \zeta) \times \vec{\beta}(t_2) \rangle \frac{\langle \vec{n}, \vec{\beta}(t_2) \rangle}{1 + \gamma^{-1}(t_2)} - \right.$$

$$\left. - \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\eta}(t_2, \zeta, \zeta) \times \vec{n} \rangle + \langle \vec{\eta}(t_2, \zeta, \zeta), \vec{n} \times \vec{\beta}(t_2) \rangle \frac{\langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle}{1 + \gamma^{-1}(t_2)} \right]. \quad (25.14)$$



Для случая с переворотом спина аналогичные вычисления дают

$$\begin{aligned}
F_{\lambda}^{\uparrow\downarrow}(t, \hbar) = & \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega t - (\omega/c)\langle \vec{n}, \vec{X}(t) \rangle)} \left\{ \frac{1}{c} \langle \vec{e}_{\lambda}, \dot{\vec{X}}(t, \zeta, -\zeta, \hbar) \rangle + \right. \\
& + \left( -\frac{i\omega}{c} \right) \langle \vec{e}_{\lambda}, \vec{\beta}(t) \rangle \langle \vec{n}, \vec{X}(t, \zeta, -\zeta, \hbar) \rangle + i \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon} \langle \vec{\eta}(t, \zeta, -\zeta), \left[ \vec{n} \times \vec{e}_{\lambda} - \right. \\
& \left. \left. - \vec{n} \times \vec{\beta}(t) \frac{\langle \vec{e}_{\lambda}, \vec{\beta}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}(t)} + \vec{e}_{\lambda} \times \vec{\beta}(t) \frac{\langle \vec{n}, \vec{\beta}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}(t)} \right] \rangle \right\} \Big|^2 + O(\hbar^3). \quad (25.15)
\end{aligned}$$

Таким образом, с учетом первых квантовых поправок можно представить энергию излучения (25.11) в виде функционала от классической траектории.

Рассмотрим коротко характеристики квантовых поправок в формуле (25.13). Слагаемое  $B_R^{(\lambda)}$  описывает влияние спина на излучение и определяется только классической траекторией, т.е. решениями уравнений Лоренца и Баргманна–Мишеля–Телегди. Как показано ниже, слагаемое  $B_{\Phi}^{(\lambda)}$  также определяется классической траекторией, точнее, только решениями уравнений Лоренца, тогда как слагаемое  $B_{\Phi}^{(\lambda)}$  связано с «квантовым характером траектории», а именно, с квантовыми флуктуациями основных динамических переменных  $\vec{x}$  and  $\hat{p}$ . Точнее,  $B_{\Phi}^{(\lambda)}$  явно зависит от параметров начального состояния квантовой частицы, т.е. от параметров волнового пакета  $\Psi_{\nu, \zeta}(\vec{x}, t, \hbar)$  (4.11), сосредоточенного при  $\hbar \rightarrow 0$  в окрестности классической траектории: от числа  $\nu$ , которое определяет осцилляции волнового пакета, и от действительной и мнимой частей комплексных параметров  $b_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , которые, согласно (24.7), определяют ширину пакета и отклонения координат и моментов от их значений в состоянии равновесия.

Как будет показано в следующем разделе, этим слагаемым можно пренебречь в ультрарелятивистском случае, так же как и «флуктуационной» частью средних значений  $\vec{X}(t, \zeta, \zeta', \hbar)$ ,  $\dot{\vec{X}}(t, \zeta, \zeta', \hbar)$  операторов и скоростей в экспоненте и в первом слагаемом формулы (25.13).

Полученные выражения (25.11)–(25.15) позволяют, в принципе, учесть вклад всех квантовых поправок первого порядка по  $\hbar \rightarrow 0$  в характеристики спонтанного излучения электрона в произвольном внешнем электромагнитном поле (равномерно по релятивизму) и исследовать процесс радиационной самополяризации электронов.

◇ Поскольку выражения (25.11)–(25.13) получены для функций, образующих базис в пространстве  $\mathbb{CS}_D^{(3)}(Z(t), \infty)$ , то  $\vec{X}(t, \zeta, \zeta', \hbar)$ ,  $C(t)$  и  $\mathcal{U}(t, \zeta)$  можно находить непосредственно из системы Гамильтона–Эренфеста (4.19).

## 26. Ультрарелятивистское приближение

Рассмотрим излученную энергию (24.7), (25.11) и вероятность излучения с переворотом спина (25.12) в ультрарелятивистском приближении [6, 56], когда параметр  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \rightarrow \infty$ . Ограничимся случаем, когда излучение в заданном направлении формируется участком траектории длины  $\Delta l$ ,  $\Delta l \sim O(\gamma^{-1})$  [121] (например, синхротронное излучение [52]). При этом, как известно, излучаются в основном высокие частоты

$$\omega = O(\gamma^3), \quad \gamma \rightarrow \infty. \quad (26.1)$$

В выражении для спектрально-углового распределения излученной энергии (24.7) введем аналогично [56] новые переменные

$$t_1 = t + \frac{1}{2}\tau, \quad t_2 = t - \frac{1}{2}\tau. \quad (26.2)$$

Подынтегральное выражение в интеграле по  $t$  будем рассматривать как спектрально-угловое распределение мощности излучения и учтем, что основной вклад в интеграл дает область малых значений  $\tau$  [56, 122]

$$\tau = O_\gamma(\gamma^{-1}), \quad \gamma \rightarrow \infty. \quad (26.3)$$

С учетом (26.1) и (26.3) разложим выражения (24.2)–(24.4) и (24.9) в ряд по  $\gamma^{-1} \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \vec{X}(t, \hbar) - \vec{X}(t) &= O_\gamma(1), \quad \dot{\vec{X}}(t, \hbar) - c\vec{\beta}(t) = O_\gamma(1), \\ \omega(t_1 - t_2) - \frac{\omega}{c} \langle \vec{n}, (\vec{X}(t_1) - \vec{X}(t_2)) \rangle &= \\ &= \omega\tau \left( 1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle - \langle \vec{n}, \ddot{\vec{\beta}} \rangle \frac{\tau^2}{24} \right) + O_\gamma(\gamma^{-1}), \\ \text{Re}[2\langle \vec{n}, C(t_1)D_\nu C^+(t_2)\vec{n} \rangle - \langle \vec{n}, C(t_1)D_\nu C^+(t_1)\vec{n} \rangle - \\ &\quad - \langle \vec{n}, C(t_2)D_\nu C^+(t_2)\vec{n} \rangle] = O_\gamma(\gamma^{-1}), \\ \text{Re}[\langle \vec{n}, C(t_1)D_\nu \dot{C}^+(t_1)\vec{e}_\pi \rangle - \\ &\quad - \langle \vec{n}, C(t_1)D_\nu \dot{C}^+(t_2)\vec{e}_\pi \rangle] = O_\gamma(\gamma^{-1}); \\ \langle \vec{n}, [C(t_1)D_0 C^+(t_2) - C^*(t_1)D_0 C^\Gamma(t_2)]\vec{n} \rangle &= \\ = \tau \langle \vec{n}, [\dot{C}(t)D_0 C^+(t) - \dot{C}^*(t)D_0 C^\Gamma(t)]\vec{n} \rangle + \\ + \left(\frac{\tau}{2}\right)^3 \left[ \frac{1}{3!} \langle \vec{n}, [\ddot{C}(t)D_0 C^+(t) - \ddot{C}^*(t)D_0 C^\Gamma(t)]\vec{n} \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle \vec{n}, [\ddot{C}(t)D_0 \dot{C}^+(t) - \ddot{C}^*(t)D_0 \dot{C}^\Gamma(t)]\vec{n} \rangle \right] + O_\gamma(\gamma^{-4}). \end{aligned} \quad (26.4)$$

Поскольку справедлива оценка

$$\begin{aligned} \dot{C}^\Gamma \vec{n} &= (B^\Gamma \lambda_{pp}^{(+)} + C^\Gamma \lambda_{px}^{(+)})\vec{n} = \\ &= \left[ B^\Gamma + C^\Gamma \left\| \left( -\frac{e}{c} \mathcal{A}_{k,j} \right) \right\| \right] \frac{c^2}{\varepsilon} (\vec{n} - \vec{\beta} \langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle) = O_\gamma(\gamma^{-1}), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \vec{n}, [C(t_1)D_0 C^+(t_2) - C^*(t_1)D_0 C^\Gamma(t_2)]\vec{n} \rangle &= \\ = i\tau \left( 1 - \frac{\tau^2}{24} \frac{d^2}{dt^2} \right) \text{Im}[\langle \vec{n}, \dot{C}(t)D_0 C^+(t)\vec{n} \rangle] + O_\gamma(\gamma^{-1}). \end{aligned}$$

Используя тождества (I.10.22), (I.10.23) и формулу  $\dot{C} = \lambda_{pp}^{(+)}(t)B + \lambda_{px}^{(+)}(t)C$ , найдем, что

$$\begin{aligned} \text{Im}[\langle \vec{n}, \dot{C}(t)D_0 C^+(t)\vec{n} \rangle] &= \langle \vec{n}, \lambda_{pp}^{(+)}(t)\vec{n} \rangle = 1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle^2, \\ \text{Im}[\langle \vec{n}, C(t_1)D_0 \dot{C}^+(t_2)\vec{e}_\lambda \rangle] &= \langle \vec{n}, \lambda_{pp}^{(+)}(t_2)\vec{e}_\lambda \rangle + O_\gamma(\gamma^{-2}) = \\ &= \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t_2) \rangle \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t_2) \rangle + O_\gamma(\gamma^{-2}). \end{aligned}$$

Для мощности излучения из (24.7) окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{dW^{(\lambda)}}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_{-\infty}^\infty d\tau \times \\ &\times \exp \left\{ i\omega\tau \left[ 1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t) \rangle + \frac{\tau \dot{\vec{\beta}}^2(t)}{24} \right] \right\} \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t + \tau/2) \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t - \tau/2) \rangle \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\hbar\omega}{\varepsilon(t)} \left[ 1 + i\omega\tau \left[ 1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t) \rangle + \frac{\tau^2 \dot{\vec{\beta}}^2(t)}{24} \right] \right] \right\} + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (26.5)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $\langle \vec{n}, \ddot{\vec{\beta}} \rangle = -\dot{\vec{\beta}}^2 + O_\gamma(\gamma^{-1})$ . Очевидно, что выражение (26.5) (с точностью до  $O(\hbar^2)$ ) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dW_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi^2 c} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_{-\infty}^\infty d\tau \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t + \tau/2) \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t - \tau/2) \rangle \times \\ &\times \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \hbar\omega} \exp \left[ \frac{i\omega\varepsilon}{\varepsilon - \hbar\omega} \tau \left( 1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}(t) \rangle + \frac{\tau^2 \dot{\vec{\beta}}^2(t)}{24} \right) \right] + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (26.6)$$

Формула (26.6) совпадает (с точностью до  $O(\hbar^2)$ ) с выражением для спектрально-углового распределения мощности излучения  $dW_{\text{rad}}^{(\lambda)}/d\Omega$  [56].

◇ Поскольку квантовые флуктуации не влияют на излучение в ультрарелятивистском приближении, то формулу (26.6) можно было бы получить непосредственно из (24.19).

Вычислим теперь вероятность перехода с переворотом спина. Воспользовавшись оценками (26.1)–(26.3), найдем, что

$$\vec{\eta}(t_{1,2}, \zeta, -\zeta) = \vec{\eta}(t, \zeta, -\zeta) + O_\gamma(\gamma^{-1}), \quad \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta} \rangle = O_\gamma(\gamma^{-1})$$

и

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}(t) \rangle \langle \vec{n}, \vec{X}(t, \zeta, -\zeta) \rangle &= O_\gamma(\gamma^{-2}), \\ \vec{n} \times \vec{\beta} &= O_\gamma(\gamma^{-1}), \quad \langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle = 1 + O_\gamma(\gamma^{-2}). \end{aligned}$$

В результате (25.15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} F_\lambda^{\uparrow\downarrow} &= \int_{-\infty}^\infty dt \int_{-\infty}^\infty d\tau e^{i\omega\tau(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle + \tau^2 \dot{\vec{\beta}}^2/24)} \times \\ &\times \frac{\hbar^2 \omega^2}{4\varepsilon^2} \langle \vec{\eta}(t, \zeta, -\zeta), \vec{e}_\lambda \times \vec{q}_1 \rangle \langle \vec{\eta}(t, \zeta, -\zeta), \vec{e}_\lambda \times \vec{q}_2 \rangle^* + O_\gamma(\gamma^5). \end{aligned}$$

Здесь  $\vec{q}_{1,2} = (1 - \gamma^{-1}(t \pm \tau/2))^{-1} \vec{\beta}(t \pm \tau/2) - \vec{n}$ . Используя соотношения

$$\begin{aligned} \vec{\eta}^*(t, \zeta, -\zeta') &= \vec{\eta}(t, \zeta', \zeta), \\ \langle \vec{a}, \vec{\eta}(t, \zeta, -\zeta) \rangle \langle \vec{b}, \vec{\eta}(t, -\zeta, \zeta) \rangle &= \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta), \vec{a} \rangle \langle \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta), \vec{b} \rangle + i \langle \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta), \vec{a} \times \vec{b} \rangle \end{aligned}$$

и просуммировав по состояниям поляризации с помощью тождества

$$\sum_{\lambda=1}^2 e_{\lambda}^i e_{\lambda}^k = \delta_{ik} - n_i n_k,$$

получим для вероятности перехода с переворотом спина

$$\begin{aligned} \frac{dw_{\text{rad}}}{d\Omega} = & \frac{e_0^2 \hbar}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \omega^3 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{4\varepsilon^2(t)} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \{ \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 \rangle (1 - \langle \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta), \vec{n} \rangle^2) + \\ & + \langle \vec{n}, \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta) \rangle [ \langle \vec{n}, \vec{q}_1 \rangle \langle \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta), \vec{q}_2 \rangle - \langle \vec{n}, \vec{q}_2 \rangle \langle \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta), \vec{q}_1 \rangle ] - \\ & - i [ \langle \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta) - \langle \vec{n}, \vec{\eta}(t, \zeta, \zeta) \rangle \vec{n} ], \vec{q}_1 \times \vec{q}_2 \} , \end{aligned} \quad (26.7)$$

Формула (26.7) (с точностью до  $O(\hbar^2)$ ) совпадает с формулой (14.4) из [56].

## 27. Нерелятивистское приближение

Рассмотрим выражение для спектрально-углового распределения излучения в нерелятивистском приближении, когда параметр  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \rightarrow 1$  ( $\beta \rightarrow 0$ ). В этом случае проведем формальное разложение выражений (24.2) и (24.3) в ряд по степеням  $c^{-1} \rightarrow 0$  ограничившись старшим (по  $c^{-1}$ ) членом разложения, т.е. фактически рассматривая дипольное приближение. Тогда из (24.9) получим

$$\begin{aligned} \sum_{|\nu'|=0}^{\infty} I_{\lambda}(\nu, \nu') = & \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \times \\ & \times \exp[-i\omega(t_1 - t_2)] \left\{ \langle \vec{e}_{\lambda}, \dot{\vec{X}}(t_1, \hbar) \rangle \langle \vec{e}_{\lambda}, \dot{\vec{X}}(t_2, \hbar) \rangle + \right. \\ & + \frac{\hbar}{2} \text{Re}[\langle \vec{e}_{\lambda}, \dot{C}(t_1) D_{\nu} \dot{C}^+(t_2) \vec{e}_{\lambda} \rangle] + \\ & \left. + \frac{i\hbar}{2} \text{Im}[\langle \vec{e}_{\lambda}, \dot{C}(t_1) D_0 \dot{C}^+(t_2) \vec{e}_{\lambda} \rangle] \right\} + O(\hbar^2) + O_c(c^{-3}), \end{aligned} \quad (27.1)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\vec{X}}(t, \hbar) = & c\vec{\beta} - \frac{e\hbar}{72} \sum_{k,j=1}^3 \frac{2\nu_j + 1}{\text{Im } b_k \text{ Im } b_j} \text{Im} \left\{ \dot{\vec{Z}}_k(t) \cdot \right. \\ & \cdot \int_0^t d\tau \{ \text{Re}[\langle \vec{Z}_j(\tau), \nabla \rangle \langle \vec{Z}_j^*(\tau), \nabla \rangle] \langle \vec{Z}_k^*(\tau), \vec{E}(\vec{x}, \tau) \rangle + \\ & \left. + 2 \langle \vec{Z}_k^*(\tau), \nabla \rangle \text{Re}[\langle \vec{Z}_j(\tau), \nabla \rangle \langle \vec{Z}_j^*(\tau), \vec{E}(\vec{x}, \tau) \rangle] \right\} \Big|_{\vec{x}=\vec{X}(\tau)} \Big\} + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (27.2)$$

Аналогично для (25.15) получим

$$\begin{aligned} F^{\uparrow\downarrow} = & \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\{i\omega t\} \left[ -i \frac{\hbar\omega}{2mc^2} \langle \vec{\eta}(t, \zeta, -\zeta) \vec{n} \times \vec{e}_{\lambda} \rangle + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(-i\hbar)e}{2mc^2} \langle \vec{e}_{\lambda}, \vec{a}(t, \zeta, -\zeta) \rangle + O(\hbar^2) + O_c(c^{-3}) \right] \right|^2, \end{aligned} \quad (27.3)$$

где  $\vec{a}(t, \zeta, -\zeta)$  обозначает

$$\begin{aligned} \vec{a}(t, \zeta, -\zeta) = & \sum_{k=1}^3 \int_0^t \frac{d\tau}{\text{Im } b_k} [\dot{\vec{Z}}_k(t) \langle \vec{Z}_k^*(\tau), \nabla \rangle \langle \vec{\eta}(\tau, \zeta, -\zeta), \vec{H}(\vec{x}, \tau) \rangle - \\ & - \dot{\vec{Z}}_k^*(t) \langle \vec{Z}_k(\tau), \nabla \rangle \langle \vec{\eta}(\tau, \zeta, -\zeta), \vec{H}(\vec{x}, \tau) \rangle] \Big|_{\vec{x}=\vec{X}(\tau)}. \end{aligned} \quad (27.4)$$

Чтобы найти полную энергию излучения в нерелятивистском приближении, проинтегрируем (27.1) по углам, используя следующие соотношения [52]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \oint d\Omega \sum_{\lambda=1}^2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{a} \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{b} \rangle &= \frac{4}{3} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle; \\ \frac{1}{2\pi} \oint d\Omega \sum_{\lambda=1}^2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{a} \rangle \langle \vec{b}, \vec{e}_\lambda \rangle \langle \vec{c}, \vec{n} \rangle &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \oint d\Omega \sum_{\lambda=1}^2 \langle \vec{e}_\lambda, \vec{a} \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{b} \rangle \langle \vec{n}, \vec{c} \rangle \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle = \frac{2}{15} [4 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \langle \vec{c}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \langle \vec{b}, \vec{d} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{d} \rangle \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle].$$

С учетом соотношения (24.11) для полной энергии из (24.7) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{rad}}(\vec{x}_0, \vec{p}_0, \nu, b) = & \frac{2e^2}{3c^3} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \langle \ddot{\vec{X}}(t, \hbar), \ddot{\vec{X}}(t, \hbar) \rangle + \frac{\hbar}{2} \text{Re}[\text{Sp}(\ddot{\vec{C}}(t) D_\nu \ddot{\vec{C}}^+(t))] \right] dt + \right. \\ & \left. + \frac{\hbar}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \frac{1}{t_1 - t_2} \text{Im}[\text{Sp}(\ddot{\vec{C}}(t_1) D_0 \ddot{\vec{C}}^+(t_2))] \right\} + O(\hbar^2) + O_c(c^{-4}), \end{aligned} \quad (27.5)$$

где

$$\ddot{\vec{X}}(t, \hbar) = \frac{d}{dt} \dot{\vec{X}}(t, \hbar) = \frac{d^2}{dt^2} \langle \vec{x} \rangle,$$

а  $\dot{\vec{X}}(t, \hbar)$  в дипольном приближении определен в (27.2).

Аналогично, используя (25.15), для вероятности излучения с переворотом спина получим

$$\begin{aligned} w_{\text{rad}}^{\uparrow\downarrow} = & \frac{e^2 \hbar}{6\pi m^2 c^5} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \exp\{i\omega(t_1 - t_2)\} \times \\ & \times \left\{ \omega^2 \langle \vec{\eta}(t_1, \zeta, -\zeta), \vec{\eta}^*(t_2, \zeta, -\zeta) \rangle + \right. \\ & \left. + \langle \vec{a}(t_1, \zeta, -\zeta), \vec{a}^*(t_2, \zeta, -\zeta) \rangle \right\} + O(\hbar^2) + O_c(c^{-6}) \end{aligned} \quad (27.6)$$

или

$$w_{\text{rad}}^{\uparrow\downarrow} = \frac{e^2 \hbar}{6\pi m^2 c^5} \int_0^{\infty} \omega d\omega \{ \omega^2 |\vec{\eta}(\omega, \zeta, -\zeta)|^2 + |\vec{a}(\omega, \zeta, -\zeta)|^2 \} + O(\hbar^2) + O_c(c^{-6}), \quad (27.7)$$

где

$$\vec{a}(\omega, \zeta, -\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\{i\omega t\} \vec{a}(t, \zeta, -\zeta), \quad \vec{\eta}(\omega, \zeta, -\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\{i\omega t\} \vec{\eta}(t, \zeta, -\zeta)$$

– фурье-образы функций  $\vec{a}(t)$  и  $\vec{\eta}(t)$ .

## 28. Приосевое приближение при квазипериодическом движении

Рассмотрим релятивистскую заряженную частицу, совершающую квазипериодическое движение

$$\vec{x}(t) = c\vec{\beta}_{\parallel}t + \vec{x}_1(t), \quad (28.1)$$

где  $c\vec{\beta}_{\parallel}$  – средняя скорость движения, а  $\vec{x}_1(t)$  – периодическая ( $\vec{x}_1(t+T) = \vec{x}_1(t)$ ) или почти периодическая функция [123]. Такое движение может быть реализовано в ряде практических важных случаев: внутри ондуляторов, в каналах монокристаллов и в поле плоской электромагнитной волны. В частности, при аксиальном каналировании релятивистских частиц возможно движение типа «розетки» [124], когда  $\vec{x}_1(t)$  – квазипериодическая функция. Ограничим наше рассмотрение случаем, когда

$$1) \quad \kappa \ll 1, \quad \kappa = \max_{t \in \mathbb{R}^1} \gamma |\vec{\beta}_{\perp}|, \quad (28.2)$$

где  $\vec{\beta}_{\perp}$  – поперечная составляющая скорости.

2) будем считать, что движение (28.1) устойчиво в линейном приближении.

Первое предположение соответствует «ондуляторному» режиму работы ондулятора. Второе существенно при рассмотрении бесконечного ондулятора.

Если вектор  $\vec{X}_1(t)$  – периодическая функция, будем считать, что система в вариациях (2.5) допускает решения Флоке

$$\begin{aligned} \dot{a}_k &= J\lambda_{zz}^{(+)}(t)a_k, & a_k(t+T) &= \exp(i\Omega_k T)a_k(t), \\ \text{Im } \Omega_k &= 0, & k &= 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (28.3)$$

а система (3.2) имеет решение Флоке вида

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{dt} + \langle \vec{\sigma}, \vec{B}(t) \rangle \right] u_{\zeta} &= 0, & u_{\zeta}(t+T) &= e^{i\Omega_{\zeta} T} u_{\zeta}(t), \\ \text{Im } \Omega_{\zeta} &= 0, & \zeta &= \pm 1. \end{aligned} \quad (28.4)$$

Условие (28.3) эквивалентно тому, что траектория (28.1) устойчива в линейном приближении. Среднее значение оператора  $\vec{x}$  в этом случае можно представить в виде

$$\langle \vec{x} \rangle = \vec{X}(t, \zeta, \zeta, \hbar) = c\vec{\beta}_{\parallel}^q t + \vec{X}_1(t, \zeta, \zeta, \hbar), \quad (28.5)$$

где  $\vec{X}_1(t+T, \zeta, \zeta, \hbar) = \vec{X}_1(t, \zeta, \zeta, \hbar)$ , а  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \vec{\beta}_{\parallel}^q = \vec{\beta}_{\parallel}$ . Проведем в выражениях (25.10) разложение по малому параметру  $\kappa$  (28.2). Тогда для полной излученной энергии получим

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{I}_{\lambda}^{\dagger\dagger}(\omega)}{(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle)^2} d\omega, \quad (28.6)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{\lambda}^{\dagger\dagger} &= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \exp\{-i\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle)(t_1 - t_2)\} \times \\ &\times \{ \tilde{B}_0^{(\lambda)}(t_1, t_2, \hbar) + \hbar \tilde{B}_R^{(\lambda)}(t_1, t_2) + \tilde{B}_{\Phi}^{(\lambda)}(t_1, t_2) \} + O(\hbar^2); \end{aligned} \quad (28.7)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_0^{(\lambda)}(t_1, t_2, \hbar) &= \langle \vec{q}_\lambda, \ddot{\vec{X}}_1(t_1, \zeta, \zeta, \hbar) \rangle \langle \vec{q}_\lambda, \ddot{\vec{X}}_1(t_2, \zeta, \zeta, \hbar) \rangle; \\
\tilde{B}_R^{(\lambda)}(t_1, t_2) &= \frac{i}{2} \text{Im} \langle \vec{q}_\lambda, \ddot{C}(t_1) D_0 \ddot{C}^+(t_2) \vec{q}_\lambda \rangle; \\
\tilde{B}_\Phi^{(\lambda)}(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \text{Re} \langle \vec{q}_\lambda, \ddot{C}(t_1) D_\nu \ddot{C}^+(t_2) \vec{q}_\lambda \rangle; \\
\vec{q}_\lambda &= \vec{e}_\lambda + \frac{\langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}_\parallel^q \rangle}{1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_\parallel^q \rangle} \vec{n}.
\end{aligned}$$

В каждом порядке по  $\hbar$  мы ограничились старшими слагаемыми по  $\kappa$  и в некоторых выражениях провели интегрирование по частям. Векторы  $\vec{X}_1(t, \zeta, \zeta, \hbar)$  и  $\vec{\beta}_\parallel^q$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
c\vec{\beta}_\parallel^q &= \frac{1}{T} \{ \vec{X}(T, \zeta, \zeta, \hbar) - \vec{X}(0, \zeta, \zeta, \hbar) \} |_{k=0}, \\
\dot{\vec{X}}_1(t+T, \zeta, \zeta', \hbar) &= \dot{\vec{x}}_1(t) + \dot{\vec{X}}(t, \zeta, \zeta', \hbar) |_{k=0} - c\vec{\beta}_\parallel^q,
\end{aligned}$$

где  $\dot{\vec{X}}(t, \zeta, \zeta', \hbar) |_{k=0}$  определяется из соотношения (25.8) с заменой  $\vec{\beta}(t) \rightarrow \vec{\beta}_\parallel$ .

Аналогично для вероятности излучения с переворотом спина запишем

$$\frac{dw_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 \hbar c^3} \int_0^\infty \omega \tilde{I}_\lambda^{\uparrow\downarrow}(\omega) d\omega, \quad (28.8)$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_\lambda^{\uparrow\downarrow}(\omega) &= \left| \int_{-\infty}^\infty dt \exp\{-i\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_\parallel^q \rangle)(t_1 - t_2)\} \times \right. \\
&\times \left. \left\{ \langle \vec{q}_\lambda, \dot{\vec{X}}_1(t, \zeta, -\zeta, \hbar) \rangle + i \frac{\hbar\omega}{2m_0 c^2 \gamma_\parallel} \langle \vec{\eta}(t, \zeta, -\zeta), \vec{p}_\lambda \rangle \right\} \right|^2; \\
\vec{p}_\lambda &= \vec{n} \times \vec{e}_\lambda - \vec{n} \times \vec{\beta}_\parallel \frac{\langle \vec{e}_\lambda, \vec{\beta}_\parallel \rangle}{1 + \gamma_\parallel^{-1}} + \vec{e}_\lambda \times \vec{\beta}_\parallel \frac{\langle \vec{n}, \vec{\beta}_\parallel \rangle}{1 + \gamma_\parallel^{-1}}. \\
\gamma_\parallel &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_\parallel^2}}.
\end{aligned} \quad (28.9)$$

Здесь  $\dot{\vec{X}}_1'(t, \zeta, -\zeta, \hbar)$  — решение системы (3.2) с начальным условием  $\vec{\eta}|_{t=0} = \vec{\eta}(0, \zeta, -\zeta)$  (4.18).

Проинтегрируем (28.6) по частоте. С учетом соотношения (24.11) найдем

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}^\lambda}{d\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi c^3 (1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_\parallel^q \rangle)^3} \left\{ \int_{-\infty}^\infty dt \left[ \tilde{B}_0^{(\lambda)}(t, t, \hbar) + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \hbar \tilde{B}_\Phi^{(\lambda)}(t, t, \hbar) \right] - i \frac{\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \frac{\tilde{B}_R^{(\lambda)}(t_1, t_2)}{t_1 - t_2} \right\} + O(\hbar^2). \quad (28.10)
\end{aligned}$$

В полученном выражении проведем суммирование по поляризации и интегрирование по углам. С учетом соотношения

$$\sum_\lambda \langle \vec{e}_\lambda, \vec{a} \rangle \langle \vec{e}_\lambda, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{n}, \vec{a} \rangle \langle \vec{n}, \vec{b} \rangle,$$

где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — произвольные векторы, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda} \tilde{B}_0^{(\lambda)}(t_1, t_2, \hbar) &= \langle \ddot{X}_1(t_1, \zeta, \zeta, \hbar), G(\vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q) \ddot{X}_1(t_1, \zeta, \zeta, \hbar) \rangle, \\ \sum_{\lambda} \tilde{B}_R^{(\lambda)}(t_1, t_2, \hbar) &= \frac{i}{4} \text{Sp} \left\{ G(\vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q) \left[ \ddot{C}(t_1) D_0 \ddot{C}^+(t_2) - \ddot{C}^*(t_1) D_0 \ddot{C}^t(t_2) \right] \right\}, \\ \sum_{\lambda} \tilde{B}_{\Phi}^{(\lambda)}(t_1, t_2, \hbar) &= \frac{i}{4} \text{Sp} \left\{ G(\vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q) \left[ \ddot{C}(t_1) D_{\nu} \ddot{C}^+(t_2) + \ddot{C}^*(t_1) D_{\nu} \ddot{C}^t(t_2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (28.11)$$

где

$$G(\vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q) = \left\| \left( \delta_{jk} + \frac{n_j n_k}{(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle)^2} \right) \left( 2 - 2 \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle - (1 - (\vec{\beta}_{\parallel}^q)^2) \right) \right\|_{3 \times 3}.$$

Подставив (28.11) в (28.10), с учетом [56]

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int \frac{d\Omega}{(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle)^3} &= \frac{1}{(1 - \beta^2)^2}, \\ \frac{1}{4\pi} \int \frac{n_j n_k}{(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle)^4} d\Omega &= \frac{4}{3} \frac{\beta_j \beta_k}{(1 - \beta^2)^3}, \\ \frac{1}{4\pi} \int \frac{n_j n_k}{(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta} \rangle)^5} d\Omega &= \frac{1}{3} \frac{(1 - \beta^2) \delta_{jk} + 6 \beta_j \beta_k}{(1 - \beta^2)^4}, \end{aligned} \quad (28.12)$$

получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{rad}} &= \frac{2e^2}{3c^3(1 - (\vec{\beta}_{\parallel}^q)^2)^3} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dt [A_0(t, \hbar) + \hbar A_{\Phi}(t)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\hbar}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \frac{A_R(t_1, t_2)}{t_1 - t_2} \right\} + O(\hbar^2); \end{aligned} \quad (28.13)$$

$$\begin{aligned} A_0(t, \hbar) &= \langle \ddot{X}_1(t, \zeta, \zeta, \hbar), R(\beta_{\parallel}^q) \ddot{X}_1(t, \zeta, \zeta, \hbar) \rangle; \\ A_{\Phi}(t) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \text{Sp} \left( R(\beta_{\parallel}^q) \ddot{C}(t) D_{\nu} \ddot{C}^+(t) \right) \right]; \\ A_R(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \text{Im} \left[ \text{Sp} \left( R(\beta_{\parallel}^q) \ddot{C}(t_1) D_{\nu} \ddot{C}^+(t_2) \right) \right]; \\ R(\beta_{\parallel}^q) &= \left\| (1 - (\vec{\beta}_{\parallel}^q)^2) \delta_{jk} + (\vec{\beta}_{\parallel}^q)_j (\vec{\beta}_{\parallel}^q)_k \right\|_{3 \times 3}. \end{aligned}$$

До сих пор мы использовали только условие малости параметра  $\kappa$ . Если мы будем считать, что матрица  $C(t)$  составлена из решений Флоке (28.3), то, переходя стандартным образом к мощности излучения, из (28.6) получим

$$\frac{dW_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} = \frac{e^2}{(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle) c^3} \sum_{n=0}^{\infty} [R_0^{(\lambda)}(n, \hbar) + \hbar R_{\Phi}^{(\lambda)}(n) + \hbar R_R^{(\lambda)}(n)], \quad (28.14)$$

где

$$R_0^{(\lambda)}(n) = \omega_{\text{cl}}^2(n) \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega_{\text{cl}}(n)(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle)t} \langle \vec{q}_{\lambda}, \dot{X}_1(t, \zeta, \zeta, \hbar) \rangle dt \right|^2,$$



$$R_{\Phi}^{(\lambda)}(n) = \sum_{k=1}^3 \frac{(2\nu_k + 1)\omega_k^4(n)}{4 \operatorname{Im} b_k} \times$$

$$\left[ \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega_k(n)(1-\langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle)t} \langle \vec{q}_{\lambda}, \vec{Z}_k(t) \rangle dt \right|^2 + \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega_k(n)(1-\langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle)t} \langle \vec{q}_{\lambda}, \vec{Z}_k^*(t) \rangle dt \right|^2 \right],$$

$$R_R^{(\lambda)}(n) = i \sum_{k=1}^3 \frac{\omega_k^4(n)}{4 \operatorname{Im} b_k} \left[ \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega_k(n)(1-\langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle)t} \langle \vec{q}_{\lambda}, \vec{Z}_k(t) \rangle dt \right|^2 - \right.$$

$$\left. - \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega_k(n)(1-\langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle)t} \langle \vec{q}_{\lambda}, \vec{Z}_k^*(t) \rangle dt \right|^2 \right],$$

где

$$\omega_{\text{cl}}(n) = \frac{\omega_0 n}{1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle}, \quad \omega_k(n) = \frac{\omega_0 n + \Omega_k}{1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel}^q \rangle},$$

а  $\Omega_k$  определено в (28.3).

## 29. Излучение заряженной частицы в электромагнитных полях специального вида

Рассмотрим ряд примеров, иллюстрирующих полученные выше результаты для конкретных физических систем.

### 29.1. Мощность спонтанного излучения нерелятивистского гармонического осциллятора в траекторно-когерентном состоянии

Для функции Гамильтона

$$\mathcal{H}(p, x) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x_1^2}{2}, \quad \vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \quad (29.1)$$

соответствующие решения системы Гамильтона (6.21) и системы в вариациях (7.3) имеют вид

$$X_1(t) = x_{10} \cos \omega t + \frac{p_{10}}{m\omega} \sin \omega t, \quad X_j = \frac{p_{j0}t}{m} + x_{j0};$$

$$P_1(t) = -m\omega x_{10} \sin \omega t + p_{10} \cos \omega t; \quad P_j(t) = p_{j0}, \quad j = 2, 3;$$

$$C(t) = \operatorname{diag} \left( \frac{b_1}{m\omega} \sin \omega t + \cos \omega t, 1 + \frac{b_2 t}{m}, 1 + \frac{b_3 t}{m} \right);$$

$$B(t) = \operatorname{diag}(b_1 \cos \omega t - m\omega \sin \omega t, b_2, b_3), \quad (29.2)$$

$$x_l(0) = x_{l0}, \quad p_l(0) = p_{l0}, \quad l = \overline{1, 3};$$

$$C(0) = \|\delta_{ki}\|_{3 \times 3}, \quad B(0) = \|b_k \delta_{ki}\|_{3 \times 3}, \quad \operatorname{Im} b_k > 0.$$

При этом среднее значение оператора скорости  $\dot{\vec{X}}(t, \hbar)$  совпадает с классическим и, следовательно,

$$\ddot{\vec{X}}(t, \hbar) = \ddot{\vec{X}}(t) = -\omega^2(x_{10} \cos \omega t + \frac{p_{10}}{m\omega} \sin \omega t, 0, 0). \quad (29.3)$$

Подставив (29.2) и (29.3) в (27.2), после стандартного перехода к мощности излучения [122] найдем

$$W(\vec{x}_0, \vec{p}_0, \nu, b) = \frac{e^2 \omega^2}{3m^2 c^3} [(m\omega x_{10})^2 + (p_{10})^2] + \frac{e^2 \hbar}{6c^3} \frac{2\nu_1 + 1}{\text{Im } b_1} \left[ \omega^4 + |b_1|^2 \frac{\omega^2}{m^2} \right] - \frac{e^2 \hbar \omega^3}{3c^3 m} + O(\hbar^2). \quad (29.4)$$

Положим в полученном выражении  $\nu_1 = 0$ . Тогда начальное состояние  $\Psi_\nu(\vec{x}, 0, \hbar)$  излучающей системы совпадает с коррелированным когерентным состоянием [118]. Переходя к обозначениям [118]

$$\begin{aligned} \text{Re } \alpha &= \frac{x_{10} \text{Im } b_1}{\sqrt{2\hbar \text{Im } b_1}}; & \text{Im } \alpha &= \frac{p_{10} - x_{10} \text{Re } b_1}{\sqrt{2\hbar \text{Im } b_1}}, \\ r &= \frac{\sigma_{x_1 p_1}}{\sqrt{\sigma_{x_1 x_1} \sigma_{p_1 p_1}}} = \frac{\text{Re } b_1}{|b_1|}, & \xi &= \frac{2\sigma_{x_1 x_1} m \omega}{\hbar} = \frac{m \omega}{\text{Im } b_1}, \\ \sigma_{x_1 x_1} &= \frac{\hbar}{2 \text{Im } b_1}; & \sigma_{p_1 p_1} &= \frac{\hbar |b_1|^2}{2 \text{Im } b_1}, & \sigma_{x_1 p_1} &= \frac{\hbar \text{Re } b_1}{2 \text{Im } b_1}, \end{aligned} \quad (29.5)$$

где  $r$  – коэффициенты корреляции координат и импульсов,  $\xi$  – коэффициент «сжатия» начального коррелированного состояния,  $\alpha = \text{Re } \alpha + i \text{Im } \alpha$  – собственные числа обобщенных операторов симметрии [118], а  $\sigma_{x_1 x_1}$ ,  $\sigma_{p_1 p_1}$  и  $\sigma_{x_1 p_1}$  – соответствующие элементы матриц (26.4) в поле (29.1). Тогда выражение (29.4) в обозначениях (29.5) примет вид

$$W(\alpha, r, \xi) = \frac{2 e^2 \omega^3 \hbar}{3 m c^3} \left\{ \left[ \xi (\text{Re } \alpha)^2 + \frac{1}{\xi} \left( \text{Im } \alpha + \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \text{Re } \alpha \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \left[ \xi + \frac{1}{\xi(1-r^2)} - 2 \right] \right\}. \quad (29.6)$$

Выражение (29.6) совпадает с результатом работы [118] (формула (4.15) на стр. 215) для мощности спонтанного излучения заряженного гармонического осциллятора, находящегося в начальный момент времени в коррелированном когерентном состоянии.

## 29.2. Мощность спонтанного излучения нерелятивистской частицы, движущейся в постоянном и однородном магнитном поле и находящейся в начальный момент времени в траекторно-когерентном состоянии

Рассмотрим нерелятивистскую частицу, движущуюся в постоянном и однородном магнитном поле с потенциалом вида

$$\vec{\mathcal{A}} = \left( -\frac{H x_2}{2}, \frac{H x_1}{2}, 0 \right), \quad \Phi = 0, \quad H = \text{const}. \quad (29.7)$$

Квазиклассические ТКС такой частицы построены в (6.14). Решения соответствующей системы Гамильтона (24.6) и системы в вариациях (24.4) имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= U_1 \vec{x}_0 + U_2 \vec{p}_0, & \vec{p}(t) &= U_1 \vec{p}_0 + U_3 \vec{x}_0, \\ B(t) &= U_1 B(0) + U_3 C(0), & C(t) &= U_1 C(0) + U_2 B(0), \end{aligned} \quad (29.8)$$

где

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \exp(-i\sigma_2\omega t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_0 = \frac{eH}{mc}, \quad \lambda = \frac{eH}{2c}, \\
 U_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i\sigma_2(1 - \exp(-i\sigma_2\omega t)) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\
 U_3 &= -\frac{i\lambda}{2} \begin{pmatrix} (1 - \exp(-i\sigma_2\omega t))\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 B(0) &= \|b_k\delta_{kj}\|_{3\times 3}, \quad C(0) = \|\delta_{kj}\|_{3\times 3}, \quad \text{Im } b_k > 0.
 \end{aligned}$$

Подставив (29.8) в (27.1) и перейдя в полученных выражениях к мощности излучения, найдем

$$\begin{aligned}
 W(\vec{x}_0, \vec{p}_0, \nu, b) &= \frac{2e^2\omega^2}{3c^3} \left[ \left( \frac{\omega x_{20}}{2} + \frac{p_{10}}{m} \right)^2 + \left( \frac{\omega x_{10}}{2} - \frac{p_{20}}{m} \right)^2 \right] + \\
 &+ \frac{e^2\omega^2\hbar}{3c^3} \sum_{j=1}^2 \frac{(2\nu_j + 1)}{\text{Im } b_j} \left( \frac{|b_j|^2}{m^2} + \frac{\omega^2}{4} \right) - \frac{2e^2\omega^3\hbar}{3mc^3} + O(\hbar^2). \quad (29.9)
 \end{aligned}$$

При стандартном выборе траектории  $\vec{X}(t) = R(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$  из (29.9) получим

$$W = W_{\text{cl}}(1 + \hbar Q_1 + \hbar Q_2) + O(\hbar^2), \quad (29.10)$$

где

$$W_{\text{cl}} = \frac{2e^2}{3c^3} R^2 \omega^4, \quad Q_2 = -\frac{1}{m\omega R^2}, \quad Q_1 = \frac{1}{2R^2} \sum_{j=1}^2 \frac{(2\nu_j + 1)}{\text{Im } b_j} \left( \frac{|b_j|^2}{m^2\omega^2} + \frac{1}{4} \right).$$

Квантовые поправки в (29.10) к мощности классического излучения допускают следующую интерпретацию:  $\hbar Q_2 W_{\text{cl}}$  – квантовая поправка, учитывающая отдачу фотона, а  $\hbar Q_1 W_{\text{cl}}$  – квантовая поправка, учитывающая квантовые флуктуации координат и импульсов в начальном квазиклассическом траекторно-когерентном состоянии.

При  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ , когда ТК-состояние  $\Psi_\nu$  (24.2) совпадает с коррелированным когерентным состоянием, формула (29.9) переходит в выражение для мощности излучения, приведенное в работе [118] (формула (5.10), стр. 217).

Заметим, что при условиях

$$\text{Im } b_j = \frac{m\omega}{2}, \quad \text{Re } b_j = 0, \quad \nu_j = 0, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (29.11)$$

соотношение (29.10) преобразуется к следующему виду:

$$W = W_{\text{cl}} + O(\hbar^2),$$

тождественно совпадающему с выражением для средней за период мощности классической частицы, движущейся в постоянном и однородном магнитном поле. Это представляется естественным, так как условия (29.11) эквивалентны переходу к когерентным состояниям [70].

**29.3. Мощность спонтанного излучения нерелятивистской частицы в аксиально-симметричном магнитном поле, находящейся в начальный момент времени в траекторно-когерентном состоянии**

Рассмотрим нерелятивистскую частицу в аксиально-симметричном магнитном поле с потенциалом вида

$$\begin{aligned} \Phi &= 0, & \vec{A} &= H(r) \left( -\frac{x_2}{2}, \frac{x_1}{2}, 0 \right), \\ \vec{x} &= (x_1, x_2, x_3), & r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \end{aligned} \quad (29.12)$$

Найдем характеристики излучения частицы в поле (29.12). Для этого рассмотрим систему, описываемую гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + eA_0\Phi(r), \quad (29.13)$$

где  $\vec{A}(\vec{x})$  определено в (29.12). Наличие в (29.13) отличного от нуля скалярного потенциала  $A_0\Phi(r)$  позволяет провести физически корректную регуляризацию интегралов в (27.2) (см. разд. «Нерасплывающиеся квазиклассические волновые пакеты для аксиально-симметричных квантовых систем»). При  $\Phi(r)$ , удовлетворяющем условию

$$A_0 \frac{\partial \Phi(r)}{\partial r} = \frac{mr}{e} \left[ \sigma^2 - \sigma \frac{e}{c} (rH' + 2H) \right], \quad \sigma = \text{const}, \quad H' = \frac{\partial H}{\partial r},$$

подынтегральные выражения в (27.2) будут содержать только периодические функции, и переход от полной излученной энергии к мощности излучения осуществляется стандартным образом [122]. Положив в полученных выражениях  $A_0 = 0$ , получим решение задачи (29.12).

Расчет характеристик излучения проведем для классических траекторий вида  $\vec{X}(t) = R(\cos \omega t, \sin \omega t, 0)$ . В этом случае матрица  $C(t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} C(t) &= \begin{pmatrix} C_{2 \times 2}(t) & 0 \\ 0 & 1 + b_3 t/m \end{pmatrix}, \\ C_{2 \times 2} &= \sum_{l=2}^4 \exp[-i(\omega \sigma_2 - \Omega_l)t] G_l, \end{aligned} \quad (29.14)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= 0, & \Omega_3 &= -\Omega_4 = \Omega = \sqrt{4\omega_2^2 + \omega_1^2}, \\ \omega &= \frac{\omega_1}{2} + \sqrt{\frac{\omega_1^2}{4} + \omega_2^2}, & \omega_1 &= \frac{e}{c} (RH'(R) - 2H(R)), \\ \omega_2^2 &= \frac{eA_0}{mR} \Phi'(R), & \Phi'(R) &= \frac{\partial \Phi}{\partial R}, \end{aligned}$$

а матрицы  $G_l$  ( $l = 2, 3, 4$ ) определены в (8.21).

Подставив (29.14) в (27.2) и положив  $A_0 = 0$ , для мощности спонтанного излучения нерелятивистской частицы в произвольном аксиально-симметричном магнитном поле получим

$$W(\vec{x}_0, \vec{p}_0, \nu, b) = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^4 R^2}{c^3} - \frac{2}{3} \frac{e^2 \hbar \omega^3}{mc^3} +$$

$$+ \frac{e^2 \omega^4 \hbar}{3c^3} \sum_{l=1}^2 \frac{2\nu_l + 1}{\text{Im } b_l} \left[ \left( \frac{\alpha}{\omega} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left| \frac{b_l}{m\omega} \right|^2 \right] + O(\hbar^2). \quad (29.15)$$

В случае постоянного и однородного магнитного поля  $\alpha = 0$  и выражение (29.15) совпадает с (29.10).

Таким образом, методом квазиклассических траекторно-когерентных состояний удалось получить выражение для мощности спонтанного излучения нерелятивистской частицы в произвольном аксиально-симметричном магнитном поле с точностью до  $O(\hbar^2)$ . В выражении (29.15) выделены классический член и квантовая поправка, учитывающая как отдачу излучения, так и флуктуационные члены, характеризующие квантование движения частицы. Кроме того, в (29.15) явно выделена зависимость мощности излучения от характера квантовых состояний – квантовых чисел  $\nu_j$  и параметров  $b_j$  ( $j = 1, 2$ ), определяющих начальные дисперсии координат и импульсов в этих состояниях.

#### 29.4. Вероятность излучения с переворотом спина (в нерелятивистском приближении) для электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле

В однородном магнитном поле  $\vec{H} = (0, 0, H)$  уравнение движения спина (4.15) для нерелятивистского случая  $\varepsilon = mc^2$

$$\dot{\vec{\eta}} = \frac{e}{mc} \vec{\eta} \times \vec{H} \quad (29.16)$$

с начальными условиями (4.19) при  $\zeta' = -\zeta$  легко интегрируется:

$$\begin{aligned} \vec{\eta}(t) &= (C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}, iC_1 e^{i\omega_0 t} - iC_2 e^{-i\omega_0 t}, C_3)^t, \\ \omega_0 &= \frac{eH}{mc}, \quad C_1 = \frac{1}{2} e^{-i\varphi} (\cos \theta + \zeta), \\ C_2 &= \frac{1}{2} e^{i\varphi} (\cos \theta - \zeta), \quad C_3 = \sin \theta. \end{aligned} \quad (29.17)$$

Подставив (29.17) в (27.6), для вероятности излучения с переворотом спина за все время процесса найдем

$$w_{\text{rad}}^{\uparrow\downarrow} = \frac{e^2 \hbar}{6\pi m^2 c^5} \int_0^\infty \omega^3 I(\omega, \zeta, -\zeta) d\omega, \quad (29.18)$$

где

$$\begin{aligned} I(\omega, \zeta, -\zeta) &= \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 e^{i\omega(t_1 - t_2)} \langle \vec{\eta}(t_1, \zeta, -\zeta), \vec{\eta}^*(t_2, \zeta, -\zeta) \rangle = \\ &= 8\pi^2 |C_1|^2 \delta^2(\omega + \omega_0) + 4\pi^2 |C_3|^2 \delta^2(\omega) + 8\pi^2 |C_2|^2 \delta^2(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (29.19)$$

Понимая квадрат  $\delta$ -функции как  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \delta(\tau) T$  (см., например, [122]) и учитывая, что вклады первых двух слагаемых в (29.19) в вероятность  $w_{\text{rad}}^{\uparrow\downarrow}$  (29.18) равны нулю, из (29.16) найдем вероятность излучения с переворотом спина в единицу времени

$$\bar{w}_{\text{rad}}^{\uparrow\downarrow} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{w_{\text{rad}}^{\uparrow\downarrow}}{T} = \frac{e^2 \hbar}{6\pi m^2 c^5} 4\pi \omega_0^3 |C_2|^2.$$

Подставив сюда значение постоянной  $C_2$  из (29.17), окончательно получим

$$\bar{w}_{\text{rad}}^{\uparrow\downarrow} = \frac{\hbar e^2 \omega_0^3}{6m^2 c^5} (\cos \theta - \zeta)^2, \quad \zeta = \pm 1, \quad (29.20)$$

где угол  $\theta$  задает начальную ориентацию спина электрона относительно направления вектора  $\vec{l} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$  (см. (4.19)). Умножим (29.20) на энергию фотона  $\hbar \omega_0$  и просуммируем по состояниям поляризации начального спина электрона ( $\zeta = \pm 1$ ). В результате найдем полную мощность излучения с переворотом спина электрона (в однородном магнитном поле)

$$p_{\text{rad}}^{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{6} \frac{\hbar^2 e^2 \omega_0^4}{m^2 c^5} (1 + \cos^2 \theta). \quad (29.21)$$

При  $\theta = 0$  отсюда следует результат работы [117]

$$p_{\text{rad}}^{\uparrow\downarrow} = \frac{4}{3} \mu_0^2 \omega_0^4 c^{-3}, \quad \mu_0 = \frac{e \hbar}{2mc}.$$

### 29.5. Вероятность излучения с переворотом спина (в нерелятивистском приближении) для электрона, движущегося в произвольном фокусирующем аксиально-симметричном электрическом поле

Рассмотрим движение электрона в электрическом поле с потенциалом

$$\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) = 0, \quad \Phi(\vec{x}, t) = \Phi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (29.22)$$

Классическая траектория в поле (29.22) определяется системой Гамильтона

$$\dot{\vec{x}} = \mathcal{H}_{\vec{x}}, \quad \dot{\vec{p}} = -\mathcal{H}_{\vec{p}}, \quad \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + e\Phi(r). \quad (29.23)$$

Система (29.23) допускает движение электрона в плоскости  $z = 0$  по равновесной окружности

$$\vec{x}(t) = R(\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, 0), \quad \vec{p}(t) = m\dot{\vec{x}}(t), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{e}{mR} \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R}}, \quad (29.24)$$

а  $R$  определяется из условия  $\mathcal{H}(\vec{P}(t), \vec{X}(t)) = E$ , где  $E$  – энергия электрона. Уравнения движения спина (4.15) для заданной траектории электрона (29.24) имеют вид

$$\dot{\vec{\eta}} = -\frac{e}{2mc^2} \vec{\eta} \times (\dot{\vec{X}}(t) \times \vec{E}(t)), \quad (29.25)$$

где напряженность электрического поля  $E(t)$  вычислена на траектории электрона

$$\vec{E}(t) = -\frac{\partial \Phi(R)}{\partial R} (\cos \omega_0 t, \sin \omega_0 t, 0).$$

Система (29.25) с начальным условием (4.19) при  $\zeta' = -\zeta$  интегрируется аналогично предыдущему примеру

$$\vec{\eta}(t) = (C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}, -iC_1 e^{i\Omega t} + iC_2 e^{-i\Omega t}, C_3)^\top,$$

где  $C_1 = \frac{1}{2}e^{i\varphi}(\zeta - \cos \theta)$ ,  $C_2 = -\frac{1}{2}e^{-i\varphi}(\zeta + \cos \theta)$ ,  $C_3 = \sin \theta$ ,  $\theta$  – угол, задающий начальную ориентацию спина электрона относительно направления вектора  $\vec{\ell} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$  и

$$\Omega = \frac{e\omega_0}{mc^2} \frac{\partial \Phi(R)}{\partial R} \quad (29.26)$$

– частота прецессии спина электрона. Вычисления вероятности переходов с переверотом спина в единицу времени по формулам (27.6) аналогичны таковым в предыдущем примере. Приведем окончательный результат

$$\bar{w}_{\text{rad}}^{\uparrow\downarrow} = \frac{\hbar e^2 |\Omega|^3}{6\pi m^2 c^5} (\zeta - \cos \theta)^2. \quad (29.27)$$

Эффект радиационной самополяризации для релятивистских электрон-позитронных пучков в аксиально-симметричном электрическом поле рассмотрен в [128, 129].

### 29.6. Излучение релятивистской заряженной частицы, находящейся в начальный момент времени в траекторно-когерентном состоянии, в отсутствие внешнего поля

Хорошо известно, что в отсутствие внешнего поля электрон не излучает. Покажем, что полученные нами результаты не противоречат этому факту.

Система Гамильтона в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \lambda_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t), & \dot{\vec{p}} &= -\lambda_{\vec{x}}^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t), \\ \lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, t) &= \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c^4}, & \vec{p}(0) &= \vec{p}_0, & \vec{x}(0) &= \vec{x}_0. \end{aligned} \quad (29.28)$$

Тогда

$$\vec{X}(t) = \lambda_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{p}_0)t + \vec{x}_0, \quad \vec{P}(t) = \vec{p}_0. \quad (29.29)$$

Система в вариациях, отвечающая траектории (29.29), имеет вид

$$\dot{B} = 0, \quad \dot{C} = \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0)B, \quad B(0) = B_0, \quad C(0) = C_0. \quad (29.30)$$

Следовательно,

$$B(t) = B_0, \quad C(t) = \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0)B_0 t + C_0. \quad (29.31)$$

Средние значения операторов  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$  удобно найти из системы уравнений для квантовых средних (4.16), которая примет вид

$$\dot{\vec{p}} = 0, \quad \dot{\vec{x}} = \lambda_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{p}) + \frac{1}{2} \partial_{\vec{p}} \text{Sp} (\lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}) \sigma_{pp}), \quad (29.32)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{xx} &= \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}) \sigma_{px} + \sigma_{xp} \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}), \\ \dot{\sigma}_{xp} &= \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}), \quad \dot{\sigma}_{pp} = 0, \quad \dot{\vec{\eta}} = 0 \end{aligned} \quad (29.33)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \vec{p}(0) &= \vec{p}_0, & \vec{x}(0) &= \vec{x}_0, & \sigma_{xx}(0) &= \sigma_{xx}^0, & \sigma_{xp}(0) &= \sigma_{xp}^0, \\ \sigma_{pp}(0) &= \sigma_{pp}^0, & \vec{\eta}(0) &= \vec{\eta}_0(\zeta, \zeta'), \end{aligned}$$

где  $\vec{p}_0$  и  $\vec{x}_0$  определены в (29.28),  $\vec{\eta}_0(\zeta, \zeta')$  – в (4.18), а  $\sigma_{xx}^0$ ,  $\sigma_{xp}^0$  и  $\sigma_{pp}^0$  удовлетворяют соотношению неопределенностей Шрёдингера–Робертсона (I.11.23). Система уравнений (29.33) легко интегрируется:

$$\begin{aligned} \vec{P}(t, \hbar) &= \vec{p}_0, \quad \sigma_{pp}(t) = \sigma_{pp}^0, \quad \vec{\eta}(t) = \vec{\eta}_0(\zeta, \zeta'), \\ \vec{X}(t, \hbar) &= \left[ \lambda_{\vec{p}_0}^{(+)}(\vec{p}_0) + \frac{1}{2} \partial_{\vec{p}_0} (\lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0) \sigma_{pp}^0) \right] t + \vec{x}_0, \\ \sigma_{xp}(t) &= \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0) \sigma_{pp}^0 t + \sigma_{xp}^0, \\ \sigma_{xx}(t) &= \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0) \sigma_{pp}^0 \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0) t^2 + \left[ (\lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0) \sigma_{px}^0 + \sigma_{xp}^0 \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0)) \right] t + \sigma_{xx}^0. \end{aligned} \quad (29.34)$$

Спектрально-угловое распределение полной излученной энергии (25.7) имеет вид

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} = \frac{e_0^2}{4\pi^2 c} \int_0^\infty \omega^2 I^{(\lambda)}(\omega) d\omega, \quad (29.35)$$

где

$$\begin{aligned} I^{(\lambda)}(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 \exp \left\{ i\omega(t_1 - t_2) - \frac{i\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t_1, \hbar) \rangle + \frac{i\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{X}(t_2, \hbar) \rangle \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{c^2} B_0^{(\lambda)}(t_1, t_2, \hbar) + \hbar B_R^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega) + \right. \\ &\quad \left. + \hbar B_\Phi^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega) + \hbar B_S^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega) \right\} + O(\hbar^2), \end{aligned} \quad (29.36)$$

Обозначим

$$\vec{\pi} = \frac{1}{c} \lambda_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{p}_0) + \frac{1}{2c} \partial_{p_0} \text{Sp} (\lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}_0) \sigma_{pp}^0). \quad (29.37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 B_0^{(\lambda)}(t_1, t_2, \hbar) e^{i\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\pi} \rangle)(t_1 - t_2)} = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dt \langle \vec{e}_\lambda, \dot{\vec{X}}(t, \zeta, \zeta, \hbar) \rangle e^{i\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\pi} \rangle)t} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dt \exp \left\{ i\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\pi} \rangle)t - \frac{i\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{x}_0 \rangle \right\} \langle \vec{e}_\lambda, \vec{\pi} \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \frac{\langle \vec{e}_\lambda, \vec{\pi} \rangle}{1 - \langle \vec{n}, \vec{\pi} \rangle} \exp \left\{ -\frac{i\omega}{c} \langle \vec{n}, \vec{x}_0 \rangle \right\} \delta(\omega) \right|^2 = \tilde{B}_0^{(\lambda)}(\omega, \hbar) \delta^2(\omega). \end{aligned} \quad (29.38)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 B_R^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega) e^{i\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\pi} \rangle)(t_1 - t_2)} = \tilde{B}_R^{(\lambda)}(\omega) \delta^2(\omega), \\ &\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^\infty dt_1 \int_{-\infty}^\infty dt_2 B_\Phi^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega) e^{i\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\pi} \rangle)(t_1 - t_2)} = \tilde{B}_\Phi^{(\lambda)}(\omega) \delta^2(\omega), \end{aligned} \quad (29.39)$$



$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 B_{\Phi}^{(\lambda)}(t_1, t_2, \omega) e^{i\omega(1-\langle \vec{n}, \vec{\pi} \rangle)(t_1-t_2)} = \tilde{B}_S^{(\lambda)}(\omega) \delta^2(\omega),$$

где функции  $\tilde{B}_{\Phi}^{(\lambda)}(\omega)$ ,  $\tilde{B}_R^{(\lambda)}(\omega)$  и  $\tilde{B}_S^{(\lambda)}(\omega)$  регулярно зависят от  $\omega$ , и мы не приводим их явного вида, поскольку для наших целей он несуществен. Подставив (29.38) и (29.39) в (29.35), получим

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{rad}}^{(\lambda)}}{d\Omega} = 0. \quad (29.40)$$

### 29.7. Мощность спонтанного излучения релятивистского гармонического осциллятора, находящегося в траекторно-когерентном состоянии и движущегося равномерно и прямолинейно

Рассмотрим релятивистскую частицу в поле с потенциалами

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = 0, \quad \Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2(z - c\beta_{\parallel}t)^2). \quad (29.41)$$

Система Гамильтона в поле (29.41) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= \frac{c^2}{\varepsilon} \vec{p}, & \dot{p}_x &= \omega_1^2 x, & \dot{p}_y &= \omega_2^2 y, & \dot{p}_z &= \omega_3^2(z - c\beta_{\parallel}t), \\ \varepsilon &= \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m_0^2 c^4}. \end{aligned} \quad (29.42)$$

Система (29.42) допускает решение вида

$$\vec{X} = (0, 0, c\beta_{\parallel}t); \quad \vec{P} = (0, 0, p_0), \quad (29.43)$$

где  $p_0$  определяется из условия  $\beta_{\parallel} = cp_0/\varepsilon$ ,  $\varepsilon = \sqrt{c^2 p_0^2 + m_0^2 c^4}$ . Система в вариациях, отвечающая траектории (29.43), примет вид

$$\begin{aligned} \dot{B} &= -\lambda_{xx}^{(+)} C, & \dot{C} &= \frac{c^2}{\varepsilon} B, & \lambda_{xx}^{(+)} &= \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \omega_3^2), \\ B(0) &= \|b_k \delta_{kj}\|_{3 \times 3}, & C(0) &= \|\delta_{kj}\|_{3 \times 3}, \end{aligned} \quad (29.44)$$

тогда

$$\begin{aligned} C(t) &= \left\| \left( \cos \Omega_k t + \frac{b_k c^2}{\varepsilon \Omega_k} \sin \Omega_k t \right) \delta_{kj} \right\|_{3 \times 3}, & \Omega_k &= \frac{c\omega_k}{\sqrt{\varepsilon}}, \\ B(t) &= \left\| \left( b_k \cos \Omega_k t - \frac{\varepsilon \Omega_k}{c^2} \sin \Omega_k t \right) \delta_{kj} \right\|_{3 \times 3}, \end{aligned} \quad (29.45)$$

Система уравнений для квантовых средних (6.22) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \left( \omega_1^2 x, \omega_2^2 y, \omega_3^2(z - c\beta_{\parallel}t) \right)^{\top}, \\ \dot{\vec{x}} &= \frac{c^2}{\varepsilon} \vec{p} + \frac{1}{2} \partial_{\vec{p}} \text{Sp} \left( \lambda_{pp}^{(+)}(\vec{p}) \sigma_{pp} \right), \\ \dot{\sigma}_{xx} &= \lambda_{pp}^{(+)} \sigma_{px} + \sigma_{xp} \lambda_{pp}^{(+)}, \\ \dot{\sigma}_{xp} &= \lambda_{pp}^{(+)} \sigma_{pp} - \sigma_{xx} \lambda_{xx}^{(+)}, \\ \dot{\sigma}_{pp} &= -\lambda_{xx}^{(+)} \sigma_{xp} - \sigma_{px} \lambda_{xx}^{(+)}, \\ \lambda_{pp}^{(+)} &= \frac{c^2}{\varepsilon} \left\| \delta_{kj} - \frac{p_k p_j c^2}{\varepsilon^2} \right\|_{3 \times 3}. \end{aligned} \quad (29.46)$$

Система уравнений (29.46) допускает решение

$$\begin{aligned}
\vec{X}(t, \hbar) &= (0, 0, c\beta_{\parallel}t), \quad \vec{P}(t, \hbar) = \left(0, 0, \frac{\varepsilon}{c}\beta_{\parallel}\right); \\
\sigma_{xx}(t, \hbar) &= \frac{\hbar}{2} \left\| \frac{2\nu_k + 1}{\operatorname{Im} b_k} \left( \cos^2 \Omega_k t + \frac{c^2 \operatorname{Re} b_k}{2\varepsilon\Omega_k} \sin 2\Omega_k t + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{c^4 |b_k|^2}{\varepsilon^2 \Omega_k^2} \sin^2 \Omega_k t \right) \delta_{kj} \right\|_{3 \times 3}; \\
\sigma_{pp}(t, \hbar) &= \frac{\hbar}{2} \left\| \frac{2\nu_k + 1}{\operatorname{Im} b_k} \left( |b_k|^2 \cos^2 \Omega_k t - \frac{\varepsilon \Omega_k b_k}{2c^2} \sin \Omega_k t + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\varepsilon^2 \Omega_k^2}{c^4} \sin^2 \Omega_k t \right) \delta_{kj} \right\|_{3 \times 3}; \\
\sigma_{xp}(t, \hbar) &= \frac{\hbar}{2} \left\| \frac{2\nu_k + 1}{\operatorname{Im} b_k} \left[ \left( \cos \Omega_k t + \frac{c^2 \operatorname{Re} b_k}{\varepsilon \Omega_k} \sin \Omega_k t \right) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left( \operatorname{Re} b_k \cos \Omega_k t - \frac{\varepsilon \Omega_k}{c^2} \sin \Omega_k t \right) + \frac{(\operatorname{Im} b_k)^2 c^2}{2\varepsilon \Omega_k} \sin 2\Omega_k t \right] \delta_{kj} \right\|_{3 \times 3}.
\end{aligned} \tag{29.47}$$

Спектрально-угловое распределение энергии задается соотношением (25.7). Найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \vec{e}_{\lambda}, \dot{\vec{X}}(t, \hbar) \rangle e^{i\omega[t - \langle \vec{x}(t, \hbar), \vec{n} \rangle / c]} dt = 2\pi c \langle \vec{\beta}_{\parallel}, \vec{e}_{\lambda} \rangle \delta(\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel} \rangle)), \tag{29.48}$$

где обозначено  $\vec{\beta}_{\parallel} = (0, 0, \beta_{\parallel})$ . Аналогично

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 B_R^{(\lambda)}(t_1, t_2) e^{i\omega[1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel} \rangle]t} = \frac{4i\pi^2}{2c^2} \operatorname{Im} \langle \vec{q}_{\lambda}, A(\omega) \mathcal{D}_0 A^+(\omega) \vec{q}_{\lambda} \rangle,$$

где

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{C}(t) e^{i\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel} \rangle)t} dt = \\
&= \frac{1}{2} \left\| \left[ \left( \frac{b_k c^2}{\varepsilon} + i\Omega_k \right) \delta(\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel} \rangle) + \Omega_k) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{b_k c^2}{2\varepsilon} - i\Omega_k \right) \delta(\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel} \rangle) + \Omega_k) \right] \delta_{kj} \right\|_{3 \times 3}; \\
\vec{q}_{\lambda} &= \vec{e}_{\lambda} + \frac{\langle \vec{e}_{\lambda}, \vec{\beta}_{\parallel} \rangle}{1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel} \rangle} \vec{n}, \quad (i')^2 = -1, \quad (i')^* = i'
\end{aligned} \tag{29.49}$$

и

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 B_{\Phi}^{(\lambda)}(t_1, t_2) e^{i\omega(1 - \langle \vec{n}, \vec{\beta}_{\parallel} \rangle)t} = \\
&= \frac{2\pi^2}{c^2} \left\{ \operatorname{Re} \langle \vec{q}_{\lambda}, A(\omega) \mathcal{D}_0 A^+(\omega) \vec{q}_{\lambda} \rangle + \tilde{B}_{\Phi}^{(\lambda)}(\omega) \delta(\omega) \right\}.
\end{aligned}$$

Мы не приводим явного вида функции  $\tilde{B}_\Phi^{(\lambda)}(\omega)$ , поскольку она не окажет влияния на последующие вычисления. Подставив (29.48), (29.49) в (24.8) и (24.10), получим

$$W_{\text{rad}} = \frac{e^2 \hbar}{3c^3 (1 - \beta_{\parallel}^q)^3} \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{2\nu_k + 1}{2 \operatorname{Im} b_k} \left( \Omega_k^4 + |b_k|^2 \frac{\Omega_k^2 c^4}{\varepsilon^2} \right) - \frac{\Omega_k^3 c^2}{\varepsilon} \right] + O(\hbar^2). \quad (29.50)$$

В заключение этого раздела отметим, что использование квазиклассических траекторно-когерентных состояний для уравнения Дирака и Клейна–Гордона позволило построить выражения для характеристик спонтанного излучения электрона с учетом первой квантовой поправки включительно как некие (вполне конкретные) функционалы от классической траектории частицы. Причем под классической траекторией электрона теперь следует понимать решения системы уравнений Гамильтона–Эренфеста.

Полученное для первой квантовой поправки выражение справедливо при всех энергиях частиц (при которых квантовые поправки остаются меньше соответствующего классического члена) и учитывает как квантовую отдачу излучения, так и флуктуационные члены, определяющие квантовый характер траектории. Удастся выделить в явном виде ту часть квантовой поправки, которая исчезает в ультрарелятивистском приближении и с самого начала отбрасывалась в операторном методе [6, 56]. Для нерелятивистских частиц и частиц, совершающих квазипериодическое движение (в приосевом приближении), эта часть квантовой поправки оказывается существенной.

Выделена в общем виде спиновая зависимость в вероятности излучения. В предельном случае ультрарелятивистских электронов результат, естественно, совпадает с приведенным в [56]. В нерелятивистском случае получено сравнительно простое общее выражение для характеристик спонтанного излучения заряда с учетом его спиновых свойств.

Отметим, что для ультрарелятивистских частиц преимущество квазиклассического операторного метода [6, 130] состоит в том, что не требуется малости квантовых поправок на отдачу фотона, тогда как использование квазиклассических траекторно-когерентных состояний предполагает, что эти квантовые поправки малы. Но в нашем методе нет ограничений снизу на энергию частицы. Тем самым области применимости этих методов имеют как перекрывающуюся область (что позволяет контролировать методику расчетов), так и неперекрывающиеся области значений физических параметров проблемы спонтанного излучения заряда.

Кроме того, метод квазиклассических ТКС позволяет решить проблему влияния начальных условий излучающей частицы на характеристики излучения. Заметим, что эта же проблема рассматривалась в [131–134]. Мы решаем эту проблему в классе начальных состояний, являющихся квазиклассически сосредоточенными.

# ГЛАВА 5

## Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака

### 30. Вводные замечания

Эта глава посвящена асимптотическому (квазиклассическому) квантованию неинтегрируемых систем в режиме их регулярного движения [135]. В этом случае в  $2n$ -мерном фазовом пространстве не удается построить семейство инвариантных  $n$ -мерных лагранжевых торов. Тем не менее, неинтегрируемые гамильтоновы системы часто допускают торы с размерностью меньшей, чем размерность исходного конфигурационного пространства. Такая ситуация типична для систем, допускающих некоторый набор интегралов движения. Примером могут служить релятивистский электрон в неоднородном магнитном поле ускорителя (мягкая фокусировка), атом водорода в сильном магнитном поле (эффект Зеемана), анизотропная проблема Кеплера и т.д.

Строгая математическая теория квантования инвариантных неполномерных лагранжевых торов и построения квазиклассических асимптотик в общем случае была развита в работах [30, 31]. Основная идея этой теории (получившей название метода комплексного ростка Маслова) – сведение исходной проблемы построения асимптотических решений к изучению геометрических объектов классической механики – семейства инвариантных лагранжевых торов с комплексным ростком. Из этого семейства с помощью условий квантования (которые, наряду с индексом Маслова, содержат новые характеристики) выбирается дискретное подсемейство, которое определяет соответствующие спектральные серии – наборы квазиклассических уровней энергии и отвечающих им квазиклассических собственных функций. Собственные функции образуют асимптотически полный ортонормированный набор состояний и локализованы в окрестности классически допустимых областей движения.

В этой главе метод комплексного ростка Маслова применяется к построению квазиклассических спектральных серий оператора Дирака для случая, когда релятивистская классическая система допускает семейства инвариантных неполномерных лагранжевых торов. Качественно опишем основные стадии построения асимптотик, пренебрегая техническими деталями.

Рассматривается следующая спектральная задача:

$$(\hat{\mathcal{H}}_D - E)\Psi = 0, \quad (30.1)$$

где  $\hat{\mathcal{H}}_D = \mathcal{H}_D(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\vec{q}}, \vec{q}, \hbar)$  – упорядоченный по Вейлю оператор Дирака во внешнем электромагнитном поле;  $E$  – спектральный параметр, зависящий от  $\hbar$ , и  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$  – координаты (в общем случае криволинейные) в конфигурационном пространстве  $\mathbb{R}_q^3$ . Обозначим главный символ оператора  $\hat{\mathcal{H}}_D$  через  $\overset{0}{\mathcal{H}}(\vec{p}, \vec{q}) = \mathcal{H}_D(\vec{p}, \vec{q}, 0)$ . Матрица  $\overset{0}{\mathcal{H}}(\vec{p}, \vec{q})$  допускает два двукратно вырожденных собственных значения  $\lambda^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{q})$ , одно из которых –  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{q})$  – совпадает с классической функцией Гамильтона релятивистского электрона. Соответствующее классическое движение описывается системой Гамильтона

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\lambda_{\vec{q}}^{(+)}(\vec{p}, \vec{q}), \quad \frac{d\vec{q}}{dt} = \lambda_{\vec{p}}^{(+)}(\vec{p}, \vec{q}). \quad (30.2)$$

Основной целью данной главы является последовательное изложение конструкции квазиклассических спектральных серий оператора Дирака методом

комплексного ростка в случае, когда соответствующая релятивистская классическая система допускает семейство  $k$ -мерных ( $k = 0, 1, 2$ ) инвариантных изолированных многообразий. Сначала мы рассмотрим случай  $\Lambda^0(E)$  – точек покоя системы (30.2), затем  $\Lambda^1(E)$  – замкнутых фазовых траекторий, а потом перейдем к двумерным лагранжевым торами.

В случае  $k = 0$ , когда  $\Lambda^k(E)$  – устойчивая точка покоя гамильтоновой системы, формулы метода комплексного роста дают спектральные серии, отвечающие хорошо известному осцилляторному приближению. Для многомерных неинтегрируемых гамильтоновых систем случай  $\Lambda^1(E)$  является наиболее простым с точки зрения существования комплексного ростка  $r^n(E)$ , и, кроме того, представляет самостоятельный физический интерес для ряда важных приложений квантовой теории. Так, например, квазиклассическое квантование замкнутых стабильных орбит естественным образом возникает в квантовой теории синхротронного излучения при движении электрона по равновесной окружности в накопительном кольце [52, 56] и в квантовой теории каналированных ультрарелятивистских частиц в кристаллах в режиме аксиального каналирования [124, 131, 136].

Далее рассматривается случай частично интегрируемых систем (30.2), допускающих семейства двумерных инвариантных лагранжевых торов. Такая ситуация типична для электронов, движущихся в полях с аксиальной симметрией.

Предположим, что переменная  $q_3 = \varphi \pmod{2\pi}$  циклична. Тогда система (30.2) имеет два интеграла движения: интеграл энергии  $E_0 = \lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{q})$  и интеграл момента  $I_0 = p_\varphi$ . Предполагается, что в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_p^3 \times \mathbb{R}_q^3$  системы (30.2) существует область изменения параметров  $\omega = (E_0, I_0)$ , в которой допускаются гладкие двухпараметрические семейства инвариантных двумерных лагранжевых торов  $\Lambda^2(\omega) = \{(\vec{p}, \vec{q}) : \vec{p} = \vec{P}(\tau, \omega), \vec{q} = \vec{Q}(\tau, \omega)\}$ , лежащих на совместной поверхности энергетического уровня  $E_0$  и момента  $I_0$ . Вещественная переменная  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  на  $\Lambda^2(\omega)$  выбрана таким образом, что  $\tau_1 = t$ . Кроме того, предполагается, что  $\Lambda^2(\omega)$  определяется уравнением  $\vec{p} = \vec{P}(\tau, \omega), \vec{q} = \vec{Q}(\tau, \omega)$  посредством одного набора  $\tau \in \mathbb{R}_\tau^2$ .

Согласно общей теории комплексного роста [30, 31], для построения асимптотик, отвечающих инвариантному лагранжеву многообразию  $\Lambda^2(\omega)$ , недостаточно знать только многообразие  $\Lambda^2(\omega)$ .<sup>10</sup> Необходимо построить новый геометрический объект – комплексный росток  $r^3(\Lambda^2(\omega))$ , который отвечает за комплексную часть фазы квазиклассической асимптотики. По существу,  $r^3(\Lambda^2(\omega))$  задается набором трех линейно независимых векторов  $a_k(\tau)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , являющихся решениями линейной системы Гамильтона (которая получается из (30.1) линеаризацией в окрестности многообразия  $\Lambda^2(\omega)$ ), и удовлетворяет условию лагранжевости и диссипативности. В результате мы получаем геометрический объект  $[\Lambda^2(\omega), r^3(\Lambda^2(\omega))]$  – семейство лагранжевых многообразий  $\Lambda^2(\omega)$  с комплексным ростком  $r^3(\Lambda^2(\omega))$ .

Следующий существенный момент в построении квазиклассических асимптотик уравнения (30.1), отвечающих семейству  $\Lambda^2(\omega)$ , состоит в наличии на  $\Lambda^2(\omega)$  особых (фокальных) точек при его отображении на конфигурационное пространство. Хорошо известно, что в стандартном методе ВКБ [137, 138] наличие фокальных точек является препятствием для построения глобального асимптотического решения (которое справедливо во всем конфигурационном пространстве, включая фокальные точки). С помощью теории комплексного роста эта проблема решается путем построения канонического оператора с

<sup>10</sup>В этом принципиальное отличие от случая квазиклассических асимптотик Маслова с вещественной фазой [14, 16, 17], отвечающих инвариантным лагранжевым торами полной размерности (совпадающей с размерностью конфигурационного пространства).

комплексной фазой, который в действительности определяет правило вычисления локальных асимптотик. Первоначальная версия такого оператора была предложена Масловым [30]. Затем общая конструкция канонического оператора с комплексной фазой была модифицирована на случай неполномерных торov (многообразий), содержащих фокальные точки ([32, 33, 139], см также часть I).

Применительно к нашему случаю процедура построения регулярных асимптотик выглядит следующим образом. Многообразию  $\Lambda^2(\omega)$  покрывается семейством карт  $\Omega_j$ , образующих канонический атлас на нем. Пусть  $\pi_q(\Omega_j)$  – часть конфигурационного пространства, на которую проектируется карта  $\Omega_j$ . Для каждой области  $\pi_q(\Omega_j)$  соответствующее асимптотическое решение (mod  $O(\hbar^{3/2})$ ) уравнения (30.1) определяется из

$$(\hat{\mathcal{H}}_D - E)\Psi_E^j(\vec{q}, \hbar) = O(\hbar^{3/2}). \quad (30.3)$$

Это приближение полностью определяет главный член  $\overset{0}{\Psi}_E^j$  локальной асимптотики  $\Psi_E^j$ . Из функций  $\overset{0}{\Psi}_E^j$  при помощи канонического оператора  $\mathcal{K}_{\Lambda^2(\omega)}$  строится многозначная в конфигурационном пространстве функция  $\overset{0}{\Psi}_E$ . Чтобы избежать многозначности, необходимо наложить дополнительное условие, приводящее к условию квантования семейства  $[\Lambda^2(\omega), r^3(\Lambda^2(\omega))]$ . В отличие от полномерных лагранжевых торov, которые квантуются условием Бора–Зоммерфельда–Маслова [16], полученные условия квантования содержат дополнительные характеристики, определяемые комплексным ростком  $r^3(\Lambda^2(\omega))$  (см. [32, 33]).

В результате из непрерывного спектрального параметра  $E$  выбирается дискретный набор энергетических уровней  $E_{N,l}(\hbar)$ , где  $N, l(\hbar)$  – набор квантовых чисел, удовлетворяющих условию

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \hbar l(\hbar) = I_0, \quad \lim_{\hbar \rightarrow 0} E_{N,l}(\hbar) = E_0. \quad (30.4)$$

Уравнение (30.4) указывает на соответствие этой квазиклассической спектральной серии классическому движению с энергией  $E_0$  и моментом  $I_0$ .

Асимптотические собственные функции  $\overset{0}{\Psi}_{E_{N,l}}$  локализованы в некоторой окрестности проекции  $\Lambda^2(\omega)$  на  $\mathbb{R}_q^3$  и с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$  образуют асимптотически полный ортонормированный набор состояний

$$\langle \overset{0}{\Psi}_{E_{N',l'}} | \overset{0}{\Psi}_{E_{N,l}} \rangle_D = \int d\vec{q} \sqrt{g} \overset{0}{\Psi}_{E_{N',l'}}^+ \overset{0}{\Psi}_{E_{N,l}} = \delta_{NN'} \delta_{ll'} + O(\hbar^{1/2}). \quad (30.5)$$

Последовательность чисел  $E_{N,l}(\hbar)$  и функций  $\overset{0}{\Psi}_{E_{N,l}}$ , построенных таким образом, образуют квазиклассическую спектральную серию оператора Дирака  $\hat{\mathcal{H}}_D$ , которая в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  отвечает семейству инвариантных лагранжевых торov  $\Lambda^2(\omega)$ .

Для полноты картины отметим, что задача квазиклассического приближения для оператора Дирака в случае, когда соответствующая релятивистская система Гамильтона допускает семейства полномерных лагранжевых торov, была решена [14] построением канонического оператора Маслова с вещественной фазой. Эта же проблема решалась Лере [140] с точки зрения лагранжева анализа. Также следует отметить «калибровочно инвариантный» метод построения квазиклассических собственных значений и собственных функций для матричных дифференциальных операторов, предложенный Литтлджоном и Флином [141, 142]. Здесь, в отличие от традиционного подхода, для построения используются специальные калибровочно-инвариантные координаты в фазовом

пространстве, которые, однако, не являются каноническими. Отметим, что конструкция канонического оператора в искривленных фазовых пространствах, в которых отсутствует разделение переменных «координаты–импульсы», была предложена ранее М.В. Карасевым и В.П. Масловым [143–145] (см. также [115]).

Предложенный нами метод расчета квазиклассических уровней энергии, а также новые конкретные формулы для квазиклассических спектральных серий оператора Дирака, отвечающих частично интегрируемым гамильтоновым системам, могут иметь важное прикладное значение в спектроскопии и астрофизике.

Настоящая глава организована следующим образом. В разд. 31 построены квазиклассические спектральные серии оператора Дирака, отвечающие точке покоя системы Гамильтона. В разд. 32 в произвольной криволинейной системе координат для оператора Дирака во внешних электромагнитных и торсионных полях методом комплексного ростка построены квазиклассические спектральные серии, отвечающие движению релятивистского электрона по замкнутым стабильным орбитам. В разд. 33 полученные общие результаты применяются к квантованию частного, но важного в приложениях вида движения – стационарного вращения электрона по равновесной окружности в полях с аксиальной симметрией. В частности, построены спектральные серии релятивистского электрона в поле Кулона, в аксиально-симметричном электрическом поле кулоновского типа и в аксиально-симметричном магнитном поле фокусирующего типа. В разд. 34 рассматриваются состояния, квазиклассически сосредоточенные в фазовом пространстве на многообразии  $\Lambda_t^k$ . В разд. 35 приводятся конструкции комплексного ростка на семействе двумерных лагранжевых многообразий в форме, удобной для дальнейшего использования при построении квазиклассических спектральных серий оператора Дирака. В разд. 36 получена локальная асимптотика ( $\text{mod } O(\hbar^{3/2})$ ) уравнения Дирака в смешанной карте [152]. В разд. 37 полученные общие результаты применяются к построению спектральных серий электрона в аксиально симметричном фокусирующем магнитном поле, в кулоновском поле и в аксиально симметричном электрическом поле.

### 31. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака, отвечающие точке покоя системы Гамильтона

Рассмотрим гамильтониан

$$\hat{\mathcal{H}}_D(R) = c\langle \vec{\alpha}, \hat{\vec{P}} \rangle + \rho_3 mc^3 + e\Phi, \quad (31.1)$$

описывающий дираковскую частицу в электромагнитном поле с потенциалами  $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, R)$ ,  $\Phi(\vec{x}, R)$ , зависящими от  $N$  вещественных параметров  $R = (R_1, \dots, R_N)$ . Здесь  $\hat{\vec{P}} = \hat{p} - \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, R)$ ,  $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ ,  $e = -e_0$  – заряд электрона, а  $\vec{\alpha} = \rho_1\vec{\Sigma}$ ,  $\rho_3$  – матрицы Дирака в стандартном представлении. Символом оператора (31.1) является эрмитова матрица вида

$$\mathcal{H}_D(\vec{p}, \vec{x}, R) = c\langle \vec{\alpha}, \vec{P} \rangle + \rho_3 mc^2 + e\Phi(\vec{x}, R),$$

где  $\vec{P} = -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, R)$  – кинетический импульс. Спектральная задача для матрицы  $\mathcal{H}_D$

$$\mathcal{H}_D(\vec{p}, \vec{x}, R)\Pi_{\pm}(\vec{p}, \vec{x}, R) = \lambda^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, R)\Pi_{\pm}(\vec{p}, \vec{x}, R) \quad (31.2)$$

имеет решение (см. Приложение Б)

$$\lambda^{(\pm)}(\vec{p}, \vec{x}, R) = \epsilon \Phi(\vec{x}, R) \pm \epsilon, \quad \epsilon = (c^2 \vec{P}^2 + m^2 c^4)^{1/2}, \quad (31.3)$$

$$\begin{aligned} \Pi_+(\vec{p}, \vec{x}, R) &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} 1 + \gamma^{-1} \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \end{pmatrix}, \\ \Pi_-(\vec{p}, \vec{x}, R) &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \\ -(1 + \gamma^{-1}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (31.4)$$

где  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  – матрицы Паули,  $\vec{\beta} = c\vec{P}/\epsilon$ ,  $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \vec{\beta}^2}$ . Матрицы  $\Pi_\xi$ ,  $\xi = \pm 1$ , удовлетворяют условию ортогональности и полноты  $\sum_{\xi'} \Pi_{\xi'}^\dagger \Pi_\xi = \delta_{\xi'\xi}$ ,  $\sum_{\xi} \Pi_\xi \Pi_\xi^\dagger = 1$ .

Пусть у функции Гамильтона  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, R)$  существует невырожденная и устойчивая в линейном приближении точка покоя  $\Lambda^0(R) = (\vec{p}_0(R), \vec{x}_0(R))$ , тогда отвечающий ей комплексный росток  $r^3(\Lambda^0(R))$  образован векторами  $e^{i\Omega_k(R)t} a_k(R)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , где  $\Omega_k(R)$  и  $a_k(R)$  – собственные значения и собственные векторы матрицы  $\mathcal{H}_{\text{var}}(R)$ , т.е

$$\mathcal{H}_{\text{var}}(R)a(R) = i\Omega(\Omega)a(R), \quad (31.5)$$

нормированные условием

$$\{a_k(R), a_j(R)\} = \{a_k^*(R), a_j^*(R)\} = 0, \quad \{a_k^*(R), a_j(R)\} = 2i\delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, 3}, \quad (31.6)$$

(см. разд. 25 части I). Обозначим через  $\vec{H}(R)$  напряженность магнитного поля в точке  $\vec{x} = \vec{X}_0(R)$  и рассмотрим вспомогательную спектральную задачу

$$\langle \vec{\sigma}, \vec{B}(R) \rangle v_\zeta(R) = \Omega_\zeta(R) v_\zeta(R), \quad (31.7)$$

где  $\vec{B}(R) = e_0 \vec{H}(R)/(2mc)$  – вектор «поляризации» в точке покоя. Полагая  $\vec{H}(R)/|\vec{H}(R)| = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ , несложно получить общее решение уравнения (31.7), удовлетворяющее условию ортонормированности и полноты. Действительно, собственным значениям  $\Omega_\zeta(R) = \zeta |\vec{B}(R)|$  отвечают собственные векторы

$$v_\zeta(R) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta \sqrt{1 + \zeta \cos \theta(R)} \exp[-i\varphi(R)/2] \\ \sqrt{1 - \zeta \cos \theta(R)} \exp[i\varphi(R)/2] \end{pmatrix}, \quad \zeta = \pm 1, \quad (31.8)$$

такие, что  $v_{\zeta'}^\dagger v_\zeta = \delta_{\zeta'\zeta}$ ,  $\sum_{\zeta} v_\zeta v_\zeta^\dagger = \mathbb{I}$ .

Введем теперь в рассмотрение следующие объекты:

1) упорядоченный по Вейлю  $\hbar^{-1}$ -псевдодифференциальный оператор  $\hat{\lambda}(R) = \lambda^{(+)}(\hat{\vec{p}}, \vec{x}, R)$  с главным символом – функцией Гамильтона  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, R)$ , – для которого построим квазиклассическую спектральную серию  $[E_\nu(R), |\nu, R\rangle]$ , отвечающую точке покоя  $\Lambda^0(R)$  (см. разд. 35);

2) операторы

$$\hat{Q}_k(R) = -\frac{c}{\hbar^{k/2} k!} \langle \vec{\sigma}, \hat{\delta}^k \vec{P}(R) \rangle, \quad k = 1, 2, \quad (31.9)$$



где  $\delta^k \vec{P}(R)$  означает  $k$ -ый член в разложении оператора  $\hat{P}$  в ряд Тейлора по операторам  $\Delta \vec{p} = \hat{p} - \vec{P}_0(R)$ ,  $\Delta \vec{x} = \vec{x} - \vec{X}_0(R)$  в окрестности стационарной точки  $\Lambda^0(R)$ ;

3) матрицы  $\Pi_\zeta(R) = \Pi_\zeta(\vec{p}, \vec{x}, R)|_{\Lambda^0(R)}$ , которые в силу условия  $\dot{X}(R)/c = \vec{\beta}(R) = 0$  очевидно равны

$$\Pi_+(R) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \Pi_-(R) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} \\ -\mathbb{I}_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (31.10)$$

Тогда справедливо следующее утверждение [146]:

**Предложение 1.** Пусть

$$E_{\nu, \zeta}(R) = E_\nu(R) + \hbar \Omega_\zeta(R) + O(\hbar^2), \quad (31.11)$$

$$E_\nu(R) = \lambda^+(\vec{P}_0(R), \vec{X}_0(R)) + \hbar \sum_{k=1}^2 \Omega_k(R) \left( \nu_k + \frac{1}{2} \right). \quad (31.12)$$

Здесь  $E_\nu$  – квазиклассический спектр оператора  $\hat{\lambda}(R)$ . Тогда локализованные в окрестности стационарной точки  $\Lambda^0(R)$  состояния

$$\Psi_{E_{\nu, \zeta}(R)}(\vec{x}, \hbar) = \left[ \Pi_+(R) + \frac{1}{2mc^2} \Pi_-(R) \sum_{k=1}^2 \hbar^{k/2} \hat{Q}_k(R) \right] v_\zeta(R) | \nu, R \rangle \quad (31.13)$$

являются асимптотическими по  $\text{mod } O(\hbar^{3/2})$  собственными функциями оператора  $\hat{\mathcal{H}}_D(R)$

$$[\hat{\mathcal{H}}_D(R) - E_{\nu, \zeta}(R)] \Psi_{E_{\nu, \zeta}(R)}(\vec{x}, R, \hbar) = O(\hbar^{3/2}) \quad (31.14)$$

и образуют с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$  полный ортонормированный набор состояний

$$\langle \Psi_{E_{N'}} | \Psi_{E_N} \rangle_D = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \Psi_{E_{N'}}^+ \Psi_{E_N} = \delta_{N'N} + O(\hbar^{1/2}). \quad (31.15)$$

Введенная таким образом последовательность  $[E_{\nu, \zeta}(R), \Psi_{E_{\nu, \zeta}(R)}]$  образует квазиклассическую спектральную серию оператора Дирака  $\hat{\mathcal{H}}_D(R)$ , отвечающую нульмерному лагранжеву многообразию  $\Lambda^0(R)$ .

## 32. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака, отвечающие семейству замкнутых фазовых траекторий $\Lambda^1(E_0)$

Общий асимптотический подход к решению спектральной задачи для дифференциальных матричных операторов, основанный на конструкции канонического оператора Маслова с комплексной фазой, был рассмотрен в [33]. В настоящем разделе мы предлагаем менее формализованный подход к решению данной задачи и для оператора Дирака во внешних электромагнитных и торсионных полях строим асимптотические спектральные серии, отвечающие в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  движению классической частицы по замкнутым орбитам конфигурационного пространства.

### 32.1. Постановка задачи

Оговорим обозначения, используемые в дальнейшем. Декартовы координаты пространства Минковского с сигнатурой  $(+, -, -, -)$  будем обозначать  $x^i = (ct, x, y, z) = (x^0, x^{\bar{a}})$ ,  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = 1, 2, 3$ ;  $i, j, k = 0, 1, 2, 3$ , а криволинейные координаты, соответственно,  $q^\mu = (q^0, q^a)$ ,  $a, b, c = 1, 2, 3$ ;  $\alpha, \beta, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ . Ограничимся рассмотрением криволинейных систем координат со стационарной метрикой  $ds^2 = c^2 dt^2 - \eta_{ab}(q) dq^a dq^b$ , где  $\eta_{ab} = \frac{\partial x^{\bar{a}}}{\partial q^a} \delta_{\bar{a}\bar{b}} \frac{\partial x^{\bar{b}}}{\partial q^b}$ . Если ввести тройку векторов  $\vec{e}^u$  с компонентами  $e_a^{\bar{a}} = \frac{\partial x^{\bar{a}}}{\partial q^a}$ , то метрический тензор  $\eta_{ab}$  можно представить в виде  $\eta_{ab} = \langle \vec{e}_a, \vec{e}_b \rangle$ .

Уравнение Дирака в произвольной криволинейной системе координат  $q^\mu$  в пространстве Минковского запишем в виде

$$\left( \gamma^\mu \widehat{\mathcal{P}}_\mu - mc - \frac{3i\hbar}{2} \gamma^*{}^\mu S_\mu \right) \Psi = 0, \quad (32.1)$$

где  $\widehat{\mathcal{P}}_\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial q^\mu} - \frac{e}{c} \mathcal{A}_\mu$ ;  $e = -e_0$  – заряд электрона;  $\mathcal{A}_\mu$  – потенциалы внешнего электромагнитного поля, а  $S_\mu$  – псевдовектор кручения. Матрицы Дирака  $\gamma^\mu, \gamma^*{}^\mu$  определяются условиями  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ ,  $\gamma^*{}^\nu = i\gamma^5 \gamma^\nu$ ,  $\gamma^5 = -\frac{i}{4!} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta$  и могут быть выбраны в виде  $\gamma^0 = \rho_3$ ,  $\gamma^a = \eta^{ab} e_b^{\bar{a}} \gamma^{\bar{a}}$ ,  $\gamma^5 = -\rho_1$ , где  $\vec{\gamma} = (\gamma^{\bar{a}}) = \rho_3 \vec{\alpha}$ ,  $\vec{\alpha} = \rho_1 \vec{\Sigma}$ . Здесь  $\rho_1, \rho_3, \vec{\Sigma}$  – плоские матрицы Дирака в стандартном представлении. В нашем случае уравнение Дирака (32.1) примет вид

$$(-i\hbar \partial_t + \widehat{\mathcal{H}}_D) \Psi = 0, \quad (32.2)$$

где упорядоченный по Вейлю оператор  $\widehat{\mathcal{H}}_D$  можно представить в следующей форме:

$$\widehat{\mathcal{H}}_D = \widehat{\mathcal{H}}_0 + \hbar \widehat{\mathcal{H}}_1, \quad (32.3)$$

где

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = -\frac{c}{2} \alpha^{\bar{a}} (e_a^{\bar{a}} \widehat{\mathcal{P}}_a + \widehat{\mathcal{P}}_a e_a^{\bar{a}}) + \rho_3 mc^2 + e\Phi, \quad (32.4)$$

$$\widehat{\mathcal{H}}_1 = \frac{ic}{2} \alpha^{\bar{a}} e_{\bar{a},a}^a + \frac{3c}{2} (-\rho_1 S_0 + \langle \vec{\Sigma}, \vec{S} \rangle). \quad (32.5)$$

Здесь  $\alpha^{\bar{a}}$  – компоненты вектор-матрицы  $\vec{\alpha}$ , а  $S_i = (S_0, -\vec{S})$  – декартовы компоненты псевдовектора кручения.

Для оператора Дирака  $\widehat{\mathcal{H}}_D$  (32.3) рассмотрим спектральную задачу (30.1), где  $E$  – спектральный параметр. На множестве решений уравнения (30.1) введем скалярное произведение

$$\langle \Psi_{E'} | \Psi_E \rangle_D = \int d^3q \sqrt{g} \Psi_{E'}^\dagger \Psi_E, \quad g = \det(\eta_{ab}). \quad (32.6)$$

Обозначим через  $\Lambda^1(E_0) = \{p = P(\tau, E_0), q = Q(\tau, E_0)\}$  замкнутую фазовую траекторию классического электрона с энергией  $E_0$ , где функции  $P(\tau, E_0), Q(\tau, E_0) - T = T(E_0)$  – периодические решения системы Гамильтона (30.2) с релятивистской функцией Гамильтона:

$$\lambda^{(+)}(p, q) = e\Phi + \sqrt{c^2 \vec{\mathcal{P}}^2 + m^2 c^4}, \quad \vec{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}_{\bar{a}}), \quad \mathcal{P}_{\bar{a}} = e_{\bar{a}}^a \left( p_a + \frac{e}{c} \mathcal{A}_a \right).$$

Будем говорить, что последовательность чисел  $E_N = E_N(\hbar)$ , (где  $N$  – набор соответствующих квантовых чисел) и последовательность функций  $\Psi_{E_N}(q, \hbar)$  образуют квазиклассическую спектральную серию оператора Дирака  $\widehat{\mathcal{H}}_D$ , отвечающую в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  семейству замкнутых фазовых кривых  $\Lambda^1(E_0)$ , если выполнены следующие условия:

$$1) \quad \lim_{\hbar \rightarrow 0} E_N(\hbar) = E_0, \quad E' \leq E_0 \leq E'', \quad (32.7)$$

что означает соответствие данного квазиклассического набора уровней энергии  $E_N(\hbar)$  классическому движению с энергией  $E_0$ ;

2) справедливо условие (30.4);

3) функции  $\Psi_{E_N(\hbar)}(q, \hbar)$  при  $\hbar \rightarrow 0$  сосредоточены в малой трубчатой окрестности  $U_\delta(l_{E_0})$  (с диаметром  $\delta \sim \hbar^{1/2}$ ) замкнутой кривой  $l_{E_0} = q = Q(\tau, E_0)$ ;

4) функции  $\Psi_{E_N}$  с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$  обозначают (полный) ортонормированный набор состояний

$$\langle \Psi_{E_{N'}} | \Psi_{E_N} \rangle_D = \delta_{N'N} + O(\hbar^{1/2}). \quad (32.8)$$

Имея в виду именно эти свойства, мы называем асимптотические собственные функции  $\Psi_{E_N}$  стационарными траекторно-когерентными состояниями (ТКС), а соответствующее приближение 1)–4) для уравнения (30.1) – стационарным траекторно-когерентным приближением. Динамические ТКС уравнения Дирака были построены ранее в первой главе.

### 32.2. Стационарные ТКС оператора Дирака $\widehat{\mathcal{H}}_D$

Рассмотрим задачу о построении в явном виде набора приближенных решений  $\Psi_{E_N}$  уравнения Дирака (32.2), удовлетворяющих условию (30.3). Оператору Дирака  $\widehat{\mathcal{H}}_D$  (32.3) отвечает главный символ – матрица  $\mathcal{H}_0(p, q)$  вида

$$\mathcal{H}_0(p, q) = c\langle \vec{\alpha}, \vec{\mathcal{P}} \rangle + \rho_3 mc^2 + e\Phi. \quad (32.9)$$

Рассмотрим спектральные свойства матрицы (32.9). Уравнение

$$\mathcal{H}_0 f^{(\pm)} = \lambda^{(\pm)} f^{(\pm)} \quad (32.10)$$

имеет два двукратных собственных значения

$$\lambda^{(\pm)}(p, q) = eA_0 \pm \varepsilon, \quad \varepsilon = \sqrt{c^2 \vec{\mathcal{P}}^2 + m^2 c^4}. \quad (32.11)$$

Так же, как и в первой главе, отвечающие им собственные векторы  $f_j^{(\pm)}(p, q)$ ,  $j = 1, 2$ , объединим в  $4 \times 2$  блочные матрицы

$$\begin{aligned} \Pi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + mc^2)}} \begin{pmatrix} \varepsilon + mc^2 \\ c\langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \end{pmatrix}, \\ \Pi_- &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(\varepsilon + mc^2)}} \begin{pmatrix} c\langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \\ -(\varepsilon + mc^2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (32.12)$$

где  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  – матрицы Паули. Будем предполагать, что функция Гамильтона  $\lambda^{(+)}$  допускает семейство замкнутых фазовых траекторий с комплексным ростком  $[\Lambda^1(E_0), r^3(E_0)]$ . Тогда мы можем воспользоваться результатами первой главы. Будем также придерживаться всех принятых там обозначений.

Ниже нам потребуется ряд тождеств, которым удовлетворяют матрицы  $\Pi_{\pm}(\tau) = \Pi_{\pm}(p, q)|_{p=P(\tau), q=Q(\tau)}$ , для которых, согласно (32.12), имеем

$$\begin{aligned}\Pi_+ &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} 1+\gamma^{-1} \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \end{pmatrix}, \\ \Pi_- &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \\ -(1+\gamma^{-1}) \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (32.13)$$

где  $\gamma = \varepsilon/mc^2$ ;  $c\vec{\beta} = \vec{e}_a(\tau)\dot{Q}^a(\tau)$  и  $\vec{e}_a(\tau) = \vec{e}_a(q)|_{q=Q(\tau)}$ . Матрицы  $\Pi_{\pm}(\tau)$  удовлетворяют условиям ортогональности и полноты

$$\Pi_{\xi}^{\dagger} \Pi_{\xi} = \delta_{\xi'\xi}, \quad \sum_{\xi} \Pi_{\xi} \Pi_{\xi}^{\dagger} = I_{2 \times 2}, \quad \xi = \pm 1. \quad (32.14)$$

Кроме того, пусть  $\vec{a}$  – произвольный вектор, тогда (см. Приложение Б)

$$1) \quad \langle \vec{\alpha}, \vec{a} \rangle \Pi_{\pm} = \pm \Pi_{\pm} \langle \vec{\beta}, \vec{a} \rangle + \Pi_{\pm} \langle \vec{d}_1, \vec{a} \rangle, \quad (32.15)$$

$$2) \quad \langle \vec{\Sigma}, \vec{a} \rangle \Pi_{\pm} = \Pi_{\pm} \langle \vec{d}_2, \vec{a} \rangle \pm i \Pi_{\pm} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{a} \rangle, \quad (32.16)$$

$$3) \quad \rho_3 \Pi_{\pm} = \pm \gamma^{-1} \Pi_{\pm} + \Pi_{\mp} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle; \quad (32.17)$$

$$4) \quad \rho_1 \Pi_{\pm} = \pm \Pi_{\pm} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle - \gamma^{-1} \Pi_{\mp}; \quad (32.18)$$

$$5) \quad \frac{d}{d\tau} \Pi_{\pm} = \Pi_{\pm} d_3 \mp \Pi_{\mp} d_4, \quad (32.19)$$

где

$$\begin{aligned}\vec{d}_1 &= \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\vec{\beta}}{(1-\gamma^{-1})} - \vec{\sigma}, \quad \vec{d}_2 = \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\vec{\beta}}{(1-\gamma^{-1})} + \gamma^{-1} \vec{\sigma}, \\ d_3 &= \frac{i}{2} \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \rangle}{(1-\gamma^{-1})}, \quad d_4 = \frac{1}{2} \left\langle \vec{\sigma}, \left( \vec{\beta} \frac{\gamma \langle \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}} \rangle}{(1+\gamma^{-1})} + \dot{\vec{\beta}} \right) \right\rangle, \quad \dot{\vec{\beta}} = \frac{d}{d\tau} \vec{\beta}.\end{aligned}$$

Асимптотические собственные функции оператора Дирака (32.3) будем искать в виде

$$\Psi_E(q, \hbar) = \Phi_E(q, \tau(q), \hbar), \quad (32.20)$$

а отвечающие им асимптотические собственные числа  $E$ , удовлетворяющие условию (32.7), – в виде следующего разложения по  $\hbar$ :

$$E(\hbar) = E_0 + \hbar E_1 + O(\hbar^2). \quad (32.21)$$

В этом случае уравнение (32.2) относительно функции (32.20) приобретет вид

$$\left( -i\hbar c \langle \vec{\alpha}, \vec{\nabla} \tau \rangle \frac{\partial}{\partial \tau} + \widehat{\mathcal{H}}_D|_{\tau=\text{const}} - E \right) \Phi_E(q, \tau, \hbar) = O(\hbar^{3/2}), \quad (32.22)$$

где  $\vec{\nabla} = \vec{e}^a \partial q^a$ . Представим  $\Phi_E$  в виде линейной комбинации

$$\Phi_E(q, \tau) = \exp\left(\frac{1}{\hbar} E \tau\right) [\Pi_+(\tau) \mathcal{U}_E^{(+)}(q, \tau) - \Pi_-(\tau) \mathcal{U}_E^{(-)}(q, \tau)], \quad (32.23)$$

где двухкомпонентные спиноры  $\mathcal{U}_E^{(\pm)}(q, \tau)$  из класса  $\mathcal{P}_{\hbar}^s$  подлежат определению. Разложим левую часть уравнения (32.22) в ряд Тейлора по степеням операторов

$\Delta q$  и  $\Delta \hat{p}$  до второго порядка включительно и воспользуемся асимптотическими оценками (I.8.9). Тогда, подставив (32.23) в (32.22) и используя формулы (32.15)–(32.19), получим

$$\begin{aligned}
& e^{iE\tau/\hbar} \Pi_+ \left[ \left\{ \hat{F}_1 + \left\langle \dot{\vec{Q}}, \left( \hat{\delta}^1 + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \vec{\mathcal{P}} \right\rangle + e \left( \hat{\delta}^1 + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \Phi + \lambda^{(+)}(\tau) - i\hbar(d_3 + d_4 d_5) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \hbar \Pi_+ \mathcal{H}_1 \Pi_+ - E \right\} \mathcal{U}_E^{(+)} - \left\{ d_5 \hat{F}_1 - c \left\langle \vec{d}_1, \left( \hat{\delta}^1 + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \vec{\mathcal{P}} \right\rangle + \right. \\
& \quad \left. \left. + i\hbar(d_4 - d_3 d_5) - \hbar \overset{+}{\Pi}_+ \mathcal{H}_1 \Pi_- \right\} \mathcal{U}_E^{(+)} \right] + \\
& \quad + e^{iE\tau/\hbar} \Pi_- \left[ \left\{ -\hat{F}_1 - \left\langle \dot{\vec{q}}, \left( \hat{\delta}^1 + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \vec{\mathcal{P}} \right\rangle + e \left( \hat{\delta}^1 + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \Phi + \lambda^{(-)}(\tau) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + i\hbar(d_3 + d_4 d_5) + \hbar \overset{+}{\Pi}_- \mathcal{H}_1 \Pi_- - E \right\} \mathcal{V}_E^{(-)} - \right. \\
& \quad \left. - \left\{ d_5 \hat{F}_1 - c \left\langle \vec{d}_1, \left( \hat{\delta}^1 + \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \right) \vec{\mathcal{P}} \right\rangle + i\hbar(d_4 - d_3 d_5) - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \hbar \overset{+}{\Pi}_- \mathcal{H}_1 \Pi_+ \right\} \mathcal{U}_E^{(-)} \right] + O(\hbar^{3/2}) = 0. \tag{32.24}
\end{aligned}$$

В (32.24) через  $\hat{F}_1$  и  $d_5$  обозначены следующие выражения:

$$\hat{F}_1 = (-i\hbar \partial_\tau + \hat{\lambda}_0^{(+)} - \hat{a}_0 - \frac{1}{2} \hat{\delta}^2 \lambda^{(+)} + \hbar E_1, \quad d_5 = \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle}{\gamma(1 - \gamma^{-2})}.$$

Выражение  $\hat{\delta}^k A(\tau)$  обозначает  $k$ -й член в разложении в ряд Тейлора по степеням операторов  $\Delta q$  и  $\Delta \hat{p}$  упорядоченного по Вейлю оператора  $\hat{A} = A(\hat{p}, q)$  с символом  $A(p, q)$ :

$$\hat{\delta}^k A(\tau) = \left\{ \left( \left\langle \Delta \hat{p}, \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right\rangle + \left\langle \Delta q, \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \right\rangle \right)^k A(\tilde{p}, \tilde{q}) \right\} \Big|_{\substack{\tilde{p}=P(\tau) \\ \tilde{q}=Q(\tau)}}. \tag{32.25}$$

Спиноры  $\mathcal{U}_E^{(\pm)}$  в (32.24) разложим по степеням  $\hbar^{1/2}$ :

$$\mathcal{U}_E^{(\pm)} = \overset{0}{\mathcal{U}}_E^{(\pm)} + \hbar^{1/2} \overset{1}{\mathcal{U}}_E^{(\pm)} + \hbar \overset{2}{\mathcal{U}}_E^{(\pm)} + O(\hbar^{3/2}) \tag{32.26}$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\hbar$ . Получим цепочку условий

$$\begin{aligned}
\overset{0}{\mathcal{U}}_E^{(-)} &= 0, \quad \overset{1}{\mathcal{U}}_E^{(-)} = \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \overset{0}{\mathcal{U}}_E^{(+)}, \\
\overset{2}{\mathcal{U}}_E^{(-)} &= \frac{1}{2\varepsilon} (\hat{Q}_2 \overset{0}{\mathcal{U}}_E^{(+)} + \hat{Q}_1 \overset{1}{\mathcal{U}}_E^{(+)}),
\end{aligned} \tag{32.27}$$

где операторы  $\hat{Q}_1$  и  $\hat{Q}_2$  имеют вид

$$\hbar^{1/2} \hat{Q}_1 = d_5 \hat{a}_0 + \hbar^{1/2} \hat{Q}_1, \quad \hbar^{1/2} \hat{Q}_1 = c \langle \vec{d}_1, \vec{\mathcal{P}}_1 \rangle, \tag{32.28}$$

$$\begin{aligned}
\hbar \hat{Q}_2 &= \hbar^{1/2} e\varepsilon (\hat{\delta}^1 \Phi) \hat{Q}_1 - d_5 (\hat{F}_1 + \hat{a}_0) + \\
&+ \frac{1}{2} c \langle \vec{d}_1, \hat{\delta}^2 \vec{\mathcal{P}} \rangle - i\hbar(d_4 - d_3 d_5) + \hbar \overset{+}{\Pi}_- \mathcal{H}_1 \Pi_+.
\end{aligned} \tag{32.29}$$

Аналогичная процедура для выражения, стоящего при  $\Pi_+$  в (32.24), с учетом (32.27)–(32.29) приводит к уравнению типа Паули на двухкомпонентный спинор  $\overset{0}{\mathcal{U}}_E^{(+)}$ , которое после дополнительных упрощений приводится к виду

$$\left[ -i\hbar \partial_\tau + \hat{\lambda}_0^{(+)} - i\hbar \frac{d}{d\tau} \ln \sqrt[4]{g(\tau)} + \hbar \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}(\tau) \rangle + \right.$$

$$+ \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle}{2\varepsilon c \gamma (1 - \gamma^2)^2} \hat{a}_0^2 + \frac{\hbar^{1/2}}{\varepsilon} d_5 \hat{Q}_1 \hat{a}_0 \Big] \mathcal{U}_E^{0(+)} = 0. \quad (32.30)$$

$$\begin{aligned} \vec{B}(\tau) = & -\frac{ec}{2\varepsilon} \left( \vec{H}(\tau) - \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}(\tau)}{1 + \gamma^{-1}} \right) + \\ & + \frac{3c}{2} \left( -\vec{\beta} S_0(\tau) + \gamma^{-1} \vec{S}(\tau) + \frac{\vec{\beta} \langle \vec{\beta}, \vec{S}(\tau) \rangle}{1 - \gamma^{-1}} \right). \end{aligned} \quad (32.31)$$

где  $\vec{E}(\tau)$  и  $\vec{H}(\tau)$  – декартовы компоненты внешнего электромагнитного поля. Если в уравнении (32.30) спинор  $\mathcal{U}_E^{0(+)}$  выбрать в виде

$$\mathcal{U}_E^{0(+)} = [g(\tau)^{-1/4} |\nu, \tau\rangle \mathcal{U}(\tau), \quad (32.32)$$

где функции  $|\nu, \tau\rangle$  определены в (I.33.8) то, как нетрудно видеть, с учетом условия  $\hat{a}_0 |\nu, \tau\rangle = 0$  (I.30.12) уравнение (32.30) примет вид матричного уравнения для двухкомпонентного спинора  $v(\tau)$

$$\left( -i \frac{d}{d\tau} + \langle \vec{\sigma}, \vec{B}(\tau) \rangle \right) \mathcal{U}(\tau) = 0. \quad (32.33)$$

Отсюда следует замечательный вывод: задача построения состояний  $\Psi_E$ , удовлетворяющих уравнению (32.2), сводится к решению обыкновенной линейной системы дифференциальных уравнений (32.33) относительно переменной  $\tau$  с последующей подстановкой в решение функции  $\tau = \tau(q)$ :  $\mathcal{U}(\tau) \rightarrow \mathcal{U}(\tau(q))$ .

Выпишем теперь явный вид функции  $\Psi_E(q, \hbar)$ . Согласно (32.20), (32.23) и (32.27)–(32.29), имеем

$$\begin{aligned} \Psi_E(q, \hbar) = & e^{iE\tau/\hbar} \left[ \Pi_+(\tau) + \frac{1}{2\varepsilon} \Pi_-(\tau) (\hbar^{1/2} \hat{Q}_1 + \hbar \hat{Q}_2) \right] \times \\ & \times (\mathcal{U}_E^{0(+)} + \hbar^{1/2} \mathcal{U}_E^{1(+)} + \hbar \mathcal{U}_E^{2(+)}). \end{aligned} \quad (32.34)$$

Из (32.32) и (32.34) следует, во-первых, что функции  $\Psi_E$  образуют по  $\nu$  бесконечный набор стационарных квантовых состояний, а, во-вторых, они определены лишь с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$ , поскольку содержат два произвольных двухкомпонентных спинора  $\mathcal{U}_E^{1(+)}$  и  $\mathcal{U}_E^{2(+)}$ . Последние могут быть найдены из высших приближений. В дальнейшем мы будем иметь дело только с главным членом асимптотики (32.34), который, согласно (32.32), имеет вид

$$\mathring{\Psi}_E(q, \hbar) = \mathring{\Phi}_E(q, \tau, \hbar) \Big|_{\tau=\tau(q)} = ([g(\tau)]^{-1/4} e^{-iE\tau/\hbar} \Pi_+(\tau) \mathcal{U}(\tau) |\nu, \tau\rangle) \Big|_{\tau=\tau(q)}. \quad (32.35)$$

### 32.3. Условие квантования замкнутых орбит

Для построения квазиклассических спектральных серий оператора Дирака  $\hat{\mathcal{H}}_D$  выделим из семейства функций (32.35) функции, удовлетворяющие условию периодичности

$$\mathring{\Phi}_E(\vec{q}, \tau + T(E_0)) = \mathring{\Phi}_E(\vec{q}, \tau). \quad (32.36)$$

Покажем, что это условие приводит к квантованию типа Бора–Зоммерфельда семейства  $\Lambda^1(E_0)$  и выделяет в области непрерывного изменения параметра  $E_0$  ( $E' \leq E_0 \leq E''$ ) дискретный набор уровней энергии  $E_N(\hbar)$  и отвечающую им последовательность собственных функций  $\Psi_{E_N(\hbar)}$ .

Из результатов, полученных в предыдущем разделе, следует, что в стационарном ТК-состоянии взаимодействие спина электрона с внешним полем при заданном движении электрона по замкнутой орбите  $\Lambda^1(E_0)$  описывается уравнением (32.33). Поскольку имеет место равенство  $\vec{B}(\tau + T(E_0)) = \vec{B}(\tau)$ , система (32.33) представляет собой линейную гамильтонову систему с периодическими коэффициентами. В отличие от системы в вариациях (I.31.4), отвечающей периодическим траекториям  $z = Z(\tau)$ , система (32.33) допускает набор из двух линейно независимых устойчивых решений Флоке  $v_\zeta$ ,  $\zeta = \pm 1$ , удовлетворяющих условию ортогональности и полноты

$$v_\zeta(\tau + T(E_0)) = e^{-\omega_\zeta^s(E_0)T(E_0)}v_\zeta(\tau), \quad \text{Im } \omega_\zeta^s(E_0) = 0, \quad (32.37)$$

$$v_{\zeta'}^\dagger v_\zeta = \delta_{\zeta'\zeta}, \quad \sum_\zeta v_\zeta^\dagger v_\zeta = 1. \quad (32.38)$$

(Некоторые основные свойства решений Флоке системы (32.33) приведены в Приложении К.) Теперь нетрудно найти условия, при которых выполняется соотношение (32.36). Подставив в (32.36) явный вид функции  $\overset{0}{\Phi}_0$  (32.35) и используя формулы (I.34.2) и (32.37), получим условие квантования семейства  $[\Lambda^1(E_0), r^3(E_0)]$  в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{T(E_0)} \langle P(\tau, E_0), \dot{Q}(\tau, E_0) \rangle d\tau + \hbar T(E_0)E_1 = 2\pi\hbar l + \\ & + \hbar T(E_0) \left( \sum_{k=1}^2 \Omega_k(E_0) \left( \nu_k + \frac{1}{2} \right) + \omega_\zeta^s(E_0) \right) + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (32.39)$$

Отсюда следует, например, что равенство (32.36) будет заведомо выполнено, если выполнены условия

$$\int_0^{T(E_0)} \langle P(\tau, E_0), \dot{Q}(\tau, E_0) \rangle d\tau = 2\pi\hbar l(\hbar), \quad (32.40)$$

$$E_1 = \sum_{k=1}^2 \Omega_k(E_0) \left( \nu_k + \frac{1}{2} \right) + \omega_\zeta^s(E_0), \quad (32.41)$$

где последовательность целых чисел  $l(\hbar)$  и параметр  $\hbar$  следует связать условием

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \hbar l(\hbar) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{T(E_0)} \langle P(\tau, E_0), \dot{Q}(\tau, E_0) \rangle d\tau.$$

Здесь  $E_0$  – заданный уровень классической энергии электрона, отвечающий замкнутой орбите  $\Lambda^1(E_0)$ . В этом случае условие (32.40) выделяет в окрестности  $E' \leq E_0 \leq E''$  дискретный набор значений энергии  $E_l^{(0)}(\hbar) = E_0(\hbar l(\hbar))$ , такой, что  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} E_l^{(0)}(\hbar) = E_0$ . Таким образом, условия (32.40), (32.41) определяют с точностью до  $O(\hbar^2)$  спектральную последовательность уровней энергии в следующем виде:

$$E_N(\hbar) = E_{l, \nu_1, \nu_2, \zeta}(\hbar) = E_l^{(0)}(\hbar) + \hbar E_{l, \nu_1, \nu_2, \zeta}(\hbar) + O(\hbar^2), \quad (32.42)$$

где

$$E_l^{(0)}(\hbar) = E_0(\hbar l(\hbar)), \quad (32.43)$$

$$E_{l,\nu_1,\nu_2,\zeta}^{(1)}(\hbar) = \sum_{k=1}^2 \omega_k(E_l^{(0)}(\hbar))(\nu_k + 1/2) + \omega_\zeta^s(E_l^{(0)}(\hbar)). \quad (32.44)$$

Можно показать (см., например, [156]), что в разложении по  $\hbar$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ , условия квантования (32.40), (32.41) эквивалентны с точностью до  $O(\hbar^2)$  условию квантования типа Бора–Зоммерфельда семейства  $\Lambda^1(E)$ , где  $E = E_0 + \hbar E_1$ .

### 32.4. Замечания

1. Предложенная в этом разделе конструкция квазиклассических спектральных серий оператора Дирака обоснована при дополнительном предположении, что на замкнутой фазовой кривой  $\Lambda^1(E_0)$  нет фокальных точек, в которых  $|\dot{Q}(\tau)| = 0$ . Это предположение может не выполняться для замкнутых траекторий многомерных неинтегрируемых систем (см., например, [32]). В этом случае квантование замкнутых траекторий методом комплексного ростка требует привлечения новых вспомогательных конструкций [32, 33]. В частности, роль индекса Маслова [14, 15]) играет топологическая характеристика канонического базиса на семействе  $[\Lambda^1(E_0), r^n(E_0)]$ , введенного в [33].

2. В формулах настоящего раздела неявно предполагалось, что уравнение (I.29.4), определяющее семейство гиперплоскостей  $\tau = \tau(q)$ , однозначно и гладко разрешимо в окрестности  $U_\delta(E_0)$  всей замкнутой кривой  $l_{E_0}$ . Если это не так, то кривую  $l_{E_0}$  следует покрыть окрестностями  $U_\delta^j(E_0)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , в каждой из которых уравнение (I.29.4) допускает гладкое решение  $\tau^j = \tau^j(q)$ , построить набор геометрических объектов  $[\Lambda_j^1(E_0), r_j^n(E_0)]$  и специальным образом их «склеить» (подробности см. в [33]).

## 33. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака в электромагнитном поле с аксиальной симметрией

Как следует из предыдущих разделов, при построении спектральных серий оператора Дирака существенно используется конструкция комплексного ростка  $r^n(E_0)$ , а именно: набор из  $n$  решений Флоке системы в вариациях, удовлетворяющих условию квазипериодичности (I.25.18). Условия, которым должно удовлетворять семейство замкнутых фазовых кривых  $\Lambda^1(E_0)$  для того, чтобы существовал комплексный росток  $r^n(E_0)$ , могут быть получены в рамках общей теории Флоке. В случае, когда классическая функция Гамильтона допускает одну циклическую угловую переменную (см. Приложение II), вопрос о существовании комплексного ростка решается достаточно просто. Ниже мы рассмотрим три примера таких систем и для семейства  $\Lambda^1(E_0)$  построим квазиклассические спектральные серии оператора Дирака, отвечающие движению электрона по равновесной окружности. Для простоты изложения во всех трех случаях мы полагаем поля кривизны отсутствующими.



### 33.1. Спектральные серии релятивистского электрона, движущегося в аксиально-симметричном магнитном поле с мягкой фокусировкой

В цилиндрической системе координат  $(q^a) = (\rho, \varphi, z)$  зададим потенциалы электромагнитного поля

$$\mathcal{A}_\rho = 0, \quad \mathcal{A}_\varphi = \frac{b\rho^{2-q}}{2-q} \left[ 1 + \frac{q(2-q)}{2} \frac{z^2}{\rho^2} \right], \quad \mathcal{A}_z = \Phi = 0, \quad (33.1)$$

где  $0 < q < 1$  – параметр фокусировки, а  $b = \text{const}$ . Соответствующая релятивистская функция Гамильтона имеет вид

$$\lambda^{(+)}(p, q) = c\sqrt{p_\rho^2 + \rho^{-2} \left( p_\varphi + \frac{e}{c} \mathcal{A}_\varphi \right)^2 + p_z^2 + m^2 c^2} = c\varepsilon(p, q). \quad (33.2)$$

Функция (33.2) допускает циклическую угловую переменную  $\varphi \pmod{2\pi}$  и определяет семейство фазовых кривых  $\Lambda^1(I)$ , отвечающих устойчивому движению электрона по окружности радиуса  $R_0(I)$  с частотой вращения  $\omega_0(I)$  и угловым моментом  $p_\varphi = I$  (см. Приложение И):

$$\Lambda^1(I) = \{ \rho = R_0(I), \varphi = \omega_0(I)\tau, z = 0, p_\rho = 0, p_\varphi = I, p_z = 0 \}, \quad (33.3)$$

где

$$R_0^{2-q}(I) = \frac{cI}{eb} \left( \frac{2-q}{1-q} \right); \quad \omega_0(I) = \frac{eH(R_0)}{\varepsilon_0};$$

$\varepsilon_0 = \varepsilon(I)$ , а  $H(R_0) = b/R_0^q(I)$  – величина магнитного поля на равновесной орбите (33.3). Решения Флоке системы в вариациях, образующих комплексный росток  $r^3(I)$ , имеют вид

$$\begin{aligned} a_0(\tau, I) &= (0, 0, 0, 0, \omega_0(I), 0)^\top \\ a_1(\tau, I) &= e^{i\omega_1\tau} (0, 0, i\alpha_1^{-1}, 0, 0, \alpha_1)^\top, \quad \omega_1(I) = \omega_0(I)\sqrt{q}, \\ a_2(\tau, I) &= e^{i\omega_2\tau} \left( i\alpha_2^{-1}, 0, 0, \alpha_2, \frac{i\alpha_2}{R_0\sqrt{1-q}}, 0 \right)^\top, \\ \omega_2(I) &= \omega_0(I)\sqrt{1-q}, \end{aligned} \quad (33.4)$$

где  $\alpha_k = \sqrt{c/(\varepsilon_0\omega_k)}$ ,  $k = 1, 2$ . Согласно уравнению (I.29.4), кривой  $\Lambda^1(I)$  отвечает семейство гиперплоскостей вида  $\tau = \tau(q) = \varphi/\omega_0(I)$ .

Получим теперь явное выражение для спектра энергий (32.42). Условие (32.40) приводит к квантованию углового момента электрона:  $I = \hbar l(\hbar)$ . Здесь набор целых чисел  $l(\hbar)$  определяется условием  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \hbar l(\hbar) = I_0$ , где значение  $I_0$  отвечает орбите  $\Lambda^1(I_0)$ , лежащей на заданном уровне энергии  $E_0(I_0) = \lambda^{(0)}|_{\Lambda^1(I_0)}$ . Подсчитаем энергетическую добавку  $E_\zeta^s$ , обусловленную взаимодействием спина электрона с внешним полем. В отсутствие полей кручения вектор «поляризации»  $\vec{\mathcal{B}}(\tau)$ , определенный в (32.31), равен

$$\vec{\mathcal{B}} = -\frac{e}{2\varepsilon_0} \vec{H}(R_0), \quad (33.5)$$

где  $\vec{H}(R_0) = (0, 0, -H(R_0))$  и является постоянным. Отсюда, согласно формуле (К.6), имеем

$$E_\zeta^s = \hbar\omega_\zeta^s = \hbar\zeta|\vec{\mathcal{B}}| = \frac{\zeta\hbar}{2}\omega_0, \quad \zeta = \pm 1.$$

Выражение для квазиклассической серии уровней энергии принимает вид

$$E_{l,\nu_1,\nu_2,\zeta}(\hbar) = E_l^{(0)}(\hbar) + E_\zeta^s + \hbar \sum_{k=1}^2 \omega_k(\hbar l) \left( \nu_k + \frac{1}{2} \right) + O(\hbar^2), \quad (33.6)$$

$$\nu_1, \nu_2 = 0, \pm 1, \dots, \quad l = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \zeta = \pm 1,$$

где  $E_l^{(0)}(\hbar) = \sqrt{e^2 R_0^2(\hbar l) H^2(R_0(\hbar l)) + m^2 c^4}$  – главный член энергии электрона. Воспользуемся теперь определением циклической частоты  $\omega_0(I) = \partial E_0(I) / \partial I$ . Тогда с точностью до  $O(\hbar^2)$  справедливо разложение  $E_{l+\zeta/2}^{(0)}(\hbar) = E_l^{(0)}(\hbar) + (\zeta \hbar / 2) \omega_0(\hbar l) + O(\hbar^2)$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ . Отсюда следует

$$E_{l,\nu_1,\nu_2,\zeta}(\hbar) = E_{l+\zeta/2}^{(0)}(\hbar) + \hbar \sum_{k=1}^2 \omega_k(\hbar l) \left( \nu_k + \frac{1}{2} \right) + O(\hbar^2). \quad (33.7)$$

Величина  $\hbar(l + \zeta/2)$  есть, очевидно, полный момент электрона с учетом его спина.

Для квазиклассических волновых функций  $\overset{0}{\Psi}_{E_N}$  (32.35), отвечающих уровням энергии (33.7), нетрудно получить следующие выражения:

$$\overset{0}{\Psi}_{E_{l,\nu_1,\nu_2,\zeta}(q,\hbar)} = \frac{e^{il\varphi}}{\pi} \frac{\sqrt{W_1 W_2}}{\sqrt{2\hbar R_0} 2^{\nu_1+\nu_2} \nu_1! \nu_2!} \left\{ e^{-W_1^2 z^2 / 2\hbar} H_{\nu_1} \left( \frac{W_1 z}{\sqrt{\hbar}} \right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ e^{-W_2^2 (\rho - R_0)^2 / 2\hbar} H_{\nu_2} \left( \frac{W_2 (\rho - R_0)}{\sqrt{\hbar}} \right) \right\} \Pi_+(\tau) f_\zeta, \quad (33.8)$$

где  $W_1 = (\sqrt{q} e H(R_0) / c)^{1/2}$ ;  $W_2 = (\sqrt{1 - q} e H(R_0) / c)^{1/2}$ ;  $R_0 = R_0(\hbar l)$ ;  $H_\nu(\zeta)$  – полиномы Эрмита [64], а постоянные спиноры  $f_\zeta$ ,  $\zeta = \pm 1$ , определены в (К.6). Из вида функций (33.8) следует, что при  $\hbar \rightarrow 0$  они локализованы в окрестности равновесной окружности с радиусом  $R_0(I)$  и образуют полный ортонормированный набор состояний.

### 33.2. Спектральные серии электрона в классе аксиально-симметричных фокусирующих электрических полей

Рассмотрим движение электрона в аксиально-симметричном электрическом поле, которое в цилиндрической системе координат  $(q^a) = (\rho, \varphi, z)$  определяется потенциалами

$$\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A}_z = 0, \quad \Phi = \Phi_0 \rho^\mu, \quad (33.9)$$

где  $\Phi_0 = \text{const}$ , а  $\mu$  – параметр фокусировки. В этом случае оператор Дирака  $\widehat{\mathcal{H}}_D$  допускает оператор симметрии  $\hat{p}_z = -i\hbar \partial_z$ , поэтому целесообразно в самом начале отделить переменную  $z$  и искать квазиклассические стационарные состояния  $\Psi_E$  в виде

$$\Psi_E(q, \hbar) = e^{ik_z z} \widetilde{\Psi}_E(\rho, \varphi, \hbar). \quad (33.10)$$

Функции  $\widetilde{\Psi}_E$  отвечает классическая функция Гамильтона

$$\lambda^{(0)}(p, q) = c\varepsilon(p, q) + e\Phi_0 \rho^\mu, \quad (33.11)$$

где  $\varepsilon(p, q) = \sqrt{p_\rho^2 + p_\varphi^2 / \rho^2 + k_z^2 + m^2 c^2}$ . В фазовом пространстве с координатами  $(p_\rho, p_\varphi, \rho, \varphi)$  система Гамильтона с гамильтонианом (33.11) определяет семейство замкнутых фазовых кривых

$$\Lambda^1(I) = \{ \rho = R_0(I), \varphi = \omega_0(I)\tau, p_\rho = 0, p_\varphi = I \}, \quad (33.12)$$

описывающих движение электрона по равновесной окружности радиуса  $R_0(I)$ , где  $R_0^{\mu+2}(I) = cI^2/(e\varepsilon_0\Phi_0\mu)$ ,  $\varepsilon_0 = \varepsilon(I)$  (в дальнейшем считаем выполненным условие  $e\Phi_0\mu > 0$ ), с частотой вращения  $\omega_0(I) = v_\perp(I)(\text{sign } I)/R_0(I)$ , где  $v_\perp(I) = c|I|/(\varepsilon_0 R_0(I))$ . Заметим, что состояние  $\tilde{\Psi}_E$  соответствует движению электрона в «редуцированном» конфигурационном пространстве по окружности с радиусом  $R_0(I)$ , тогда как состоянию  $\Psi_E$  в «полном» конфигурационном пространстве  $(\rho, \varphi, z)$  отвечает движение по спирали с тем же радиусом и со скоростью вдоль оси  $z$ , равной  $\dot{z} = ck_z/\varepsilon_0$ . Энергия электрона на равновесной орбите вращения равна

$$E_0(I) = \lambda^{(+)}|_{\Lambda^1(I)} = e\Phi_0 R_0^\mu(I) + c\varepsilon_0. \quad (33.13)$$

Решение Флоке системы в вариациях, косоортогональное вектору  $a_0(\tau, I) = (0, 0, 0, \omega_0(I))$ , выберем в виде

$$a(\tau, I) = e^{i\omega\tau} \left( \alpha, 0, -i^{-1}, -\alpha^{-1} \frac{W_{p\varphi\rho}}{\omega} \right)^\top, \quad (33.14)$$

$$\omega(I) = \frac{|\omega_0|}{\sqrt{\mu + 2 - \beta_\perp^2}},$$

где

$$W_{p\varphi\rho} = \frac{\omega_0}{R_0}(-2 + \beta_\perp^2), \quad \alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_0\omega_0(I)}{c}}, \quad \beta_\perp^2 = \frac{v_\perp^2}{c^2}.$$

Из (33.14) следует условие существования комплексного ростка  $r^2(I)$ , образованного векторами  $a_0(\tau, I)$  и  $a(\tau, I)$ :  $\mu + 2 - v_\perp^2/c^2$ .

Перейдем теперь к построению квазиклассического спектра уровней энергии  $E_N(\hbar)$ , отвечающего в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  движению электрона по равновесной орбите  $\Lambda^1(I_0)$  с заданной энергией  $E_0 = E_0(I_0)$ . Из формулы (32.40) следует условие квантования углового момента:  $I = \hbar l(\hbar)$ , где  $\hbar l(\hbar) \rightarrow I_0$  при  $\hbar \rightarrow 0$ . Далее, согласно формуле (32.31), имеем

$$\vec{B}(\tau) = \frac{1}{2} \frac{\beta_\perp^2}{1 + \gamma^{-1}} \left( \frac{ck_z}{\varepsilon_0 R_0} \sin(\omega_0\tau), -\frac{ck_z}{\varepsilon_0 R_0} \cos(\omega_0\tau), \omega_0 \right), \quad (33.15)$$

где  $\tau = \varphi/\omega_0(I)$ . Таким образом, мы приходим к случаю 2, рассмотренному в Приложении К. Используя (К.11), несложно получить выражение для энергии спин-орбитального взаимодействия  $E_\zeta^s$

$$E_\zeta^s = \hbar\omega_\zeta^s = \zeta \left( \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{\hbar|\omega_0|}{2} \sqrt{1 - \beta_\perp^2} \right), \quad \zeta = \pm 1. \quad (33.16)$$

Окончательно для уровней энергии электрона получим

$$E_{l,\nu,\zeta}(\hbar) = E_{l+\zeta/2}^{(0)}(\hbar) + \hbar|\omega_0(I)|\sqrt{\mu + 2 - \beta_\perp^2(I)} \times \\ \times \left\{ \nu + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{2} \frac{\sqrt{1 - \beta_\perp^2(I)}}{\sqrt{\mu + 2 - \beta_\perp^2(I)}} \right\} \Big|_{I=\hbar l} + O(\hbar^2). \quad (33.17)$$

Из (33.17), в частности, следует, что для электрического поля «кулоновского типа» ( $\mu = -1$ ) явной зависимости энергии электрона от спина нет. В этом случае происходит перенумерация уровней энергии:

$$E_{l,\nu,\zeta}(\hbar) \rightarrow E_{l,\nu'}(\hbar), \quad \nu' = \nu + \frac{\zeta + 1}{2}. \quad (33.18)$$

Квазиклассический набор ортонормированных собственных функций, отвечающих уровням энергии (33.18), представляется в виде

$$\Psi_{E_l, \nu, \zeta}^{(0)}(q, \hbar) = \frac{e^{ik_z z} e^{i l \varphi}}{2\pi^{5/4} \hbar^{1/4}} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{R_0} 2^{\nu} \nu!} \left[ e^{-\alpha^2 (\rho - R_0)^2 / 2\hbar} H_{\nu} \left( \frac{\alpha(\rho - R_0)}{\sqrt{\hbar}} \right) \Pi_{+}(\tau) f_{\zeta} \right], \quad (33.19)$$

где  $R_0 = R_0(l\hbar)$ ;  $H_{\nu}(z)$  – полином Эрмита, а выражения для спиноров  $f_{\zeta}$  приведены в (К.11). Состояния (33.19) локализованы при  $\hbar \rightarrow 0$  в малой окрестности равновесной окружности радиуса  $R_0 = R_0(I_0)$ .

### 33.3. Спектральные серии релятивистского электрона, движущегося по экваториальным орбитам в кулоновском поле

В кулоновском поле с потенциалом  $\Phi = Ze_0/\rho$  классическая функция Гамильтона имеет вид

$$\lambda^{(+)}(p, q) = -\frac{Ze_0^2}{\rho} + c \sqrt{p_{\rho}^2 + \frac{p_{\theta}^2}{\rho^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \theta \rho^2} + m^2 c^2} = -\frac{Ze_0^2}{\rho} + c\varepsilon(p, q), \quad (33.20)$$

где  $(q^a) = (\rho, \varphi, z)$  – сферическая система координат, а  $e = -e_0$  – заряд электрона. Критическим точкам функции  $\tilde{\lambda}_I^{(+)}$  (см. Приложение II) отвечает семейство замкнутых фазовых кривых

$$\Lambda^1(I) = \left\{ p_{\rho} = 0, p_{\theta} = 0, p_{\varphi} = I, \rho = R_0(I), \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = \omega_0(I)\tau \right\}, \quad (33.21)$$

которые описывают стационарные вращения электрона по экваториальным орбитам радиуса  $R_0(I) = I^2/(\gamma(I)Ze_0^2 m)$  с частотой  $\omega_0(I) = v_{\perp}(I)/R_0(I)$ , где  $\gamma = (1 - \beta_{\perp}^2)^{-1/2}$ ,  $v_{\perp}^2 = Ze_0^2/(Ic^2)$ . Энергия электрона на равновесной орбите равна  $E_0(I) = mc^2 \gamma^{-1}(I)$ . Комплексный росток  $r^3(I)$  образован векторами

$$\begin{aligned} a_0(\tau, I) &= (0, 0, 0, 0, 0, \omega_0(I), 0)^{\top}, & a_1(\tau, I) &= e^{i\omega_0 \tau} (0, i\alpha_1^{-1}, 0, 0, \alpha_1, 0)^{\top}, \\ a_2(\tau, I) &= e^{i\omega_2 \tau} \left( i\alpha_2^{-1}, 0, 0, \alpha_2, 0, -\frac{i\alpha_2 W_{\rho p \varphi}}{\omega_0} \right)^{\top}, & \omega_2(I) &= \omega_0(I)\gamma^{-1}(I), \end{aligned} \quad (33.22)$$

где  $\alpha_1 = I^{-1/2}$ ,

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{c}{\varepsilon_0 \omega_2}}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon(I), \quad W_{\rho p \varphi} = \frac{\omega_0}{R_0} (-2 + \beta_{\perp}^2).$$

Функция  $\tau(q)$ , определенная уравнением (I.29.4), имеет вид  $\tau = \varphi/\omega_0(I)$ . Вектор поляризации  $\vec{B}$  (32.31) направлен вдоль оси  $Oz$  и равен

$$\vec{B} = \frac{e_0^2 Z \omega_0}{2c(1 + \gamma^{-1})\varepsilon_0 R_0} \vec{e}_z. \quad (33.23)$$

Из формулы (К.6) найдем спиновую поправку  $E_{\zeta}^s = \hbar \omega_{\zeta}^s = \frac{\hbar \zeta}{2} \omega_0 (1 - \gamma^{-1})$ . Тогда квазиклассический спектр энергий примет вид

$$E_{l, \nu_1, \nu_2, \zeta}(\hbar) = \left[ E_l^{(0)}(I) + \hbar \omega_0(I) \left( \nu_1 + \frac{1 - \zeta}{2} \right) + \right.$$

$$+ \hbar \omega_0(I) \gamma^{-1}(I) \left( \nu_2 + \frac{1 - \zeta}{2} \right) \Big]_{I=\hbar l(\hbar)} + O(\hbar^2), \quad (33.24)$$

$$\nu_1, \nu_2 = 0, \pm 1, \dots, \quad l = \overline{1, \infty}, \quad \zeta = \pm 1,$$

а для соответствующего набора квазиклассических собственных состояний получим

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Psi}_{E_{l,\nu_1,\nu_2,\zeta}(q,\hbar)} &= \frac{e^{il\varphi}}{\pi R_0} \frac{\sqrt{W_1 W_2}}{\sqrt{2\hbar 2^{\nu_1+\nu_2} \nu_1! \nu_2!}} \left\{ e^{-W_1^2(\theta-\pi/2)^2/2\hbar} H_{\nu_1} \left( \frac{W_1(\theta-\pi/2)}{\sqrt{\hbar}} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{-W_2^2(\rho-R_0)^2/2\hbar} H_{\nu_2} \left( \frac{W_2(\rho-R_0)}{\sqrt{\hbar}} \right) \right\} \Pi_+(\tau) f_\zeta. \end{aligned} \quad (33.25)$$

Здесь  $W_k = \alpha_k^{-1}$ ,  $k = 1, 2$ ;  $R_0 = R_0(\hbar l)$ ;  $H_\nu(\xi)$  – полиномы Эрмита, а  $f_\zeta$  – двухкомпонентные спиноры, определенные формулой (К.6).

В нерелятивистском пределе  $\beta_\perp \ll 1$  формула (33.24) дает квазиклассическую серию собственных значений оператора Шрёдингера [139]

$$E_{l,\nu_1,\nu_2,\zeta}(\hbar) = -mc^2 \frac{\alpha^2 Z^2}{2} \left( \frac{1}{l^2(\hbar)} - \frac{2}{l^3(\hbar)} (\nu_1 + \nu_2 + 1) \right) + O(\hbar^2), \quad (33.26)$$

где  $\alpha = e_0^2/(\hbar c)$  – постоянная тонкой структуры. Там же было установлено соответствие между квантовыми числами точного и приближенного спектров:  $n_l = l$ ,  $n_r = \nu_1 + \nu_2$ ,  $n_l \sim 1/\hbar$ , где  $n_r$  и  $n_l$  – соответственно, радиальное и орбитальное квантовые числа. Представляет интерес сравнить (33.24) с точным энергетическим спектром водородоподобного атома, полученным по теории Дирака. В этом случае имеем  $n_l = l + \nu_1$ ,  $n_r = \nu_2 + (1 - \zeta)/2$ ,  $n_l \sim 1/\hbar$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ .

В заключение отметим, что не составляет труда обобщить полученные в настоящем разделе результаты на случай ненулевых внешних полей кручения (если таковые вообще существуют в природе) и тем самым оценить их возможное влияние на квазиклассический энергетический спектр. В качестве примера рассмотрим атом водорода во внешнем торсионном поле вида

$$S_0 = S_0(\rho), \quad \vec{S} = (S_\perp(\rho) \sin \varphi, S_\perp(\rho) \cos \varphi, S_3(\rho)) \quad (33.27)$$

и подсчитаем в этом случае энергию спин-орбитального взаимодействия электрона  $E_\zeta^s = \hbar \omega_\zeta^s$ , движущегося по экваториальной орбите  $l_I = (\rho = R_0(I), \theta = \pi/2, \varphi = \omega_0(I)\tau)$ . В этом случае вектор «поляризации»  $\vec{\mathcal{B}}(\tau)$  (32.31) равен  $\vec{\mathcal{B}}(\tau) = (-\mathcal{B}_\perp \sin(\omega_0\tau), \mathcal{B}_\perp \cos(\omega_0\tau), \mathcal{B}_3)$ , где

$$\mathcal{B}_\perp = S_\perp - \beta_\perp S_0(R_0), \quad \mathcal{B}_3 = \frac{\omega_0}{2} + \sqrt{1 - \beta_\perp^2} \left[ S_0(R_0) - \frac{\omega_0}{2} \right]. \quad (33.28)$$

Отсюда, согласно формуле (К.11), получим

$$E_\zeta^s(\hbar l(\hbar)) = \hbar \omega_\zeta^s(\hbar l(\hbar)) = \zeta \hbar \left[ \frac{\omega_0(I)}{2} + \sqrt{\mathcal{B}_\perp^2(I) + \left( \mathcal{B}_3(I) - \frac{\omega_0(I)}{2} \right)^2} \right]_{I=\hbar l(\hbar)}. \quad (33.29)$$

### 34. Состояния, квазиклассически сосредоточенные на многообразии $\Lambda_t^k$

Рассмотрим состояния уравнения Шрёдингера, квазиклассически сосредоточенные при каждом  $t \in [0, \pi]$  на многообразии

$$\Lambda_t^k = \{z(t, \tau) = (\vec{p}(t, \tau), \vec{x}(t, \tau)), \tau \in \mathbb{R}^k\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Здесь мы предполагаем, что многообразие  $\Lambda_t^k$  при всех  $t \in [0, T]$ ,  $T < \infty$ , можно задать одним набором координат  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ . Представляется естественным дать следующее определение:

◆ Состояние  $\Psi$  назовем квазиклассически сосредоточенным на многообразии  $\Lambda_t^k$  класса  $\mathbb{CS}_S(\Lambda_t^k, \hbar)$  ( $\Psi \in \mathbb{CS}_S(\Lambda_t^k)$ ), если при каждом  $t \in [0, \pi]$

$$1) \quad \{-i\hbar\partial_t + \widehat{\mathcal{H}}\}\Psi = 0. \quad (34.1)$$

где гамильтониан  $\widehat{\mathcal{H}}(t)$  – упорядоченный по Вейлю оператор с символом  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, \hbar)$ ;

2) для волновой функции  $\Psi(\vec{x}, t, \hbar)$  в  $x$ -представлении и  $\widetilde{\Psi}(\vec{p}, t, \hbar)$  в  $p$ -представлении существуют обобщенные пределы

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\Psi(\vec{x}, t, \hbar)|^2 = \int_{\Lambda_t^k} d\sigma \delta(\vec{x} - \vec{X}(t, \tau)), \quad (34.2)$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} |\widetilde{\Psi}(\vec{p}, t, \hbar)|^2 = \int_{\Lambda_t^k} d\sigma \delta(\vec{p} - \vec{P}(t, \tau)); \quad (34.3)$$

3) для любого  $N < \infty$  и  $\hbar \in [0, 1[$  существуют квантовые моменты

$$\Delta_\alpha(t, \hbar), \quad 0 \leq |\alpha| \leq N.$$

Здесь  $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{2n}$  – мультииндекс,  $\Delta_\alpha(t, \hbar) = \langle \Psi | \{\Delta \hat{z}\}^\alpha | \Psi \rangle$ ,  $\{\Delta \hat{z}\}^\alpha$  – оператор с вейлевским символом  $(\Delta z)^\alpha$ ,  $\Delta z = z - \langle \hat{z} \rangle$ , а  $d\sigma$  – мера на  $\Lambda_t^k$ ,  $\int_{\Lambda_t^k} d\sigma = 1$ .

Тогда справедливо следующее утверждение:

**Теорема 34.1.** Если состояние  $\Psi(\vec{x}, t, \hbar)$  является квазиклассически сосредоточенным класса  $\mathbb{CS}_S(\Lambda_t^k, \hbar)$ , то  $\Lambda_t^k = \hat{g}_t \Lambda_0^k$ , где  $\hat{g}_t$  – фазовый поток гамильтониановой системы (30.1), отвечающей гамильтониану  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, 0)$  (34.1).

**Доказательство.** Согласно теореме Эренфеста, среднее значение произвольного оператора  $\hat{A}$  (с регулярно зависящим от  $\hbar$  символом  $A(\vec{p}, \vec{x}, t, \hbar)$ ) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \langle \Psi | \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} | \Psi \rangle + \frac{1}{i\hbar} \langle \Psi | [\widehat{\mathcal{H}}, \hat{A}] | \Psi \rangle. \quad (34.4)$$

Согласно правилам работы с упорядоченными по Вейлю операторами, для вейлевского символа оператора  $\hat{C}$  ( $\hat{C} = [\widehat{\mathcal{H}}, \hat{A}]_-$ ) получим

$$C(\vec{p}, \vec{x}, t) = 2i \sin \left\{ \frac{\hbar}{2} \left( \left\langle \frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial}{\partial \vec{\pi}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial \vec{p}}, \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \right\rangle \right) \right\} \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) A(\vec{\pi}, \vec{q}, t, \hbar) \Big|_{\substack{\vec{\pi}=\vec{p} \\ \vec{q}=\vec{x}}} \quad (34.5)$$

Подставив (34.5) в (34.4) и перейдя к пределу при  $\hbar \rightarrow 0$ , с учетом (34.2) получим

$$\int_{\Lambda_t^k} d\sigma \left[ \frac{\partial A(t, \tau)}{\partial t} + \{\mathcal{H}, A\}_{px}(t, \tau) \right] = \frac{d}{dt} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \hat{A} \rangle, \quad (34.6)$$

где  $A(t, \tau) = A(\vec{P}(t, \tau), \vec{X}(t, \tau), t, 0)$ . Поскольку  $\Lambda_t^k$  можно задать одним набором  $\tau$ , в качестве  $d\sigma$  можно выбрать  $d\sigma = \mathcal{N} d^k \tau$ , где  $\mathcal{N}^{-1} = \int_U d^k \tau$  и  $U \subset \mathbb{R}^k$  – область изменения  $\tau$ . Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{\Lambda_t^k} d\sigma A(t, \tau) = \mathcal{N} \int_U d^k \tau \frac{d}{dt} A(t, \tau). \quad (34.7)$$

Подставим (34.7) в (34.6) и в силу произвольности  $\hat{A}$  получим

$$\frac{dA(t, \tau)}{dt} = \frac{\partial A(t, \tau)}{\partial t} + \{\mathcal{H}, A\}_{px}(t, \tau). \quad (34.8)$$

Здесь  $\{\mathcal{H}, A\}_{xp}$  – скобка Пуассона. Из (34.8), в частности, следует, что  $\vec{x} = \vec{X}(t, \tau)$  и  $\vec{p} = \vec{P}(t, \tau)$  являются решениями системы Гамильтона с гамильтонианом  $\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t)$  и начальным условием

$$\vec{p}(0) = \vec{P}(t, \tau)|_{t=0}, \quad \vec{x}(0) = \vec{X}(t, \tau)|_{t=0},$$

что и требовалось доказать.

Естественно поставить вопрос, как связаны квазиклассически сосредоточенные состояния классов  $\mathbb{CS}_S(\Lambda_t^k)$  и  $\mathbb{CS}_S(Z(t, \tau), N)$ . Ответ на этот вопрос дает следующая теорема:

**Теорема 34.2.** Пусть  $\Lambda_t^k = \{Z(t, \tau), \tau \in U \subset \mathbb{R}^4\}$ ,  $0 \leq t \leq T$ , – семейство неполномерных лагранжесвых многообразий.

Пусть функция  $\Phi(\vec{x}, t, \tau, \hbar) \in \mathbb{CS}_S(Z(t, \tau), \infty)$ , а  $N(\tau, \hbar)$  удовлетворяет уравнению

$$N(\tau, \hbar) \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{x} \int_{\Lambda_t^k} d\sigma' \Phi^*(\vec{x}, 0, \tau', \hbar) \Phi(\vec{x}, 0, \tau, \hbar) N(\tau', \hbar) = 1. \quad (34.9)$$

Тогда функция

$$\Psi(\vec{x}, t, \hbar) = \int_{\Lambda_t^k} d\sigma N(\tau, \hbar) \Phi(\vec{x}, t, \tau, \hbar) \quad (34.10)$$

есть квазиклассически сосредоточенное состояние класса  $\mathbb{CS}_S(\Lambda_t^k)$ .

**Доказательство.** 1. Выберем  $d\sigma = N d^k \tau$ . Тогда очевидно, что функция (34.10) удовлетворяет уравнению Шрёдингера (30.2).

2. Пусть функции  $|\nu, t, \tau\rangle$  принадлежат пространству  $\mathbb{CS}_S(Z(t, \tau), \infty)$ ,  $\nu \in \mathbb{Z}_+$ , и образуют в нем ортонормированный базис. Разложим функции

$$\Phi(\vec{x}, t, \tau, \hbar) \in \mathbb{CS}_S(Z(t, \tau), \infty) \text{ и } \Phi(\vec{x}, t, \tau', \hbar) \in \mathbb{CS}_S(Z(t, \tau'), \infty)$$

по базису  $|\nu, t, \tau\rangle$ . Поскольку  $|\nu, t, \tau\rangle$  – решения уравнения Шрёдингера, получим

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t, \tau, \hbar) &= \sum_{|\nu|=0}^{\infty} C_\nu(\tau, \hbar) |\nu, t, \tau\rangle, \\ \Phi(\vec{x}, t, \tau', \hbar) &= \sum_{|\nu|=0}^{\infty} \tilde{C}_\nu(\tau', \hbar) |\nu, t, \tau\rangle. \end{aligned} \quad (34.11)$$

Подставим (34.11) в условие нормировки

$$\begin{aligned} 1 = \langle \Psi | \Psi \rangle &= \int_{\Lambda_t^k} d\sigma \int_{\Lambda_t^k} d\sigma' \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{x} \Phi^*(\vec{x}, t, \tau', \hbar) \Phi(\vec{x}, t, \tau, \hbar) N(\tau, \hbar) N(\tau', \hbar) = \\ &= \int_{\Lambda_t^k} d\sigma \sum_{|\nu|=0}^{\infty} \int_{\Lambda_t^k} d\sigma' N(\tau, \hbar) N(\tau', \hbar) C_\nu(\tau, \hbar) \tilde{C}_\nu^*(\tau, \tau', \hbar). \end{aligned}$$

Будем определять функцию  $N(\tau, \hbar)$  из уравнения

$$\sum_{|\nu|=0}^{\infty} \int_{\Lambda_t^k} d\sigma' N(\tau, \hbar) N(\tau', \hbar) C_\nu(\tau, \hbar) \tilde{C}_\nu^*(\tau, \tau', \hbar) = 1. \quad (34.12)$$

Уравнение (34.12) с помощью (34.11) можно представить в эквивалентной форме (34.9).

3. Пусть символ оператора  $\hat{A}$  регулярно зависит от  $\hbar$ , тогда с учетом (34.11) запишем

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle &= \int_{\Lambda_t^k} d\sigma \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{x} \int_{\Lambda_t^k} d\sigma' N(\tau, \hbar) N(\tau', \hbar) \times \\ &\times \Phi^*(\vec{x}, t, \tau', \hbar) \hat{A}(t, \hbar) \Phi(\vec{x}, t, \tau, \hbar) = \\ &= \int_{\Lambda_t^k} d\sigma \int_{\Lambda_t^k} d\sigma' \sum_{\substack{|\nu|=0 \\ |\nu'|=0}}^{\infty} N(\tau, \hbar) N(\tau', \hbar) \tilde{C}_{\nu'}^*(\tau, \tau', \hbar) A_{\nu\nu'} C_\nu(\tau, \hbar). \end{aligned} \quad (34.13)$$

С учетом доказанного в разд. «Квазиклассическая сосредоточенность состояний и вывод классических уравнений движения из квантовой теории» части I соотношения

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \Phi' | \hat{A} | \Phi \rangle = A(Z(t), t, 0) \langle \Phi' | \Phi \rangle,$$

справедливого для любых функций  $\Phi, \Phi'$  из  $\mathbb{CS}_S(Z(t), N)$ , поскольку  $|\nu, t, \tau\rangle \in \mathbb{CS}_S(Z(t, \tau'))_\infty$  получим

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} A_{\nu\nu'}(t, \tau, \hbar) = A(Z(t, \tau), \tau, 0) \delta_{\nu\nu'}. \quad (34.14)$$

Тогда, перейдя в (34.13) к пределу  $\hbar \rightarrow 0$ , найдем, что

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \int_{\Lambda_t^k} A(Z(t, \tau), \tau, 0) d\sigma.$$

Таким образом, теорема доказана.

◇ Определение квазиклассически сосредоточенных состояний  $\mathbb{CS}_S(\Lambda_t^k)$  естественным образом переносится на случай уравнения Дирака. Теоремы 34.1 и 34.2 остаются справедливыми при замене  $\mathbb{CS}_S(\Lambda_t^k)$  на  $\mathbb{CS}_D(\Lambda_t^k)$ .

◇ Для доказательства существования состояний класса  $\mathbb{CS}_S(\Lambda_t^k)$  естественно использовать комплексный метод ВКБ-Маслова, который нужно применить к квазиклассическому квантованию  $\Lambda_t^k$ . Дословно повторяя рассуждение части I, можно доказать существование решений класса  $\mathbb{CS}_S^{(M)}(\Lambda_t^k)$ .



## 35. Комплексный росток на семействе двумерных лагранжевых многообразий

### 35.1. Комплексный росток

Пусть  $\Lambda^2(\omega)$  – компактное двумерное лагранжево многообразие, инвариантное относительно системы Гамильтона (30.2) и лежащее на поверхности энергетического уровня классической функции Гамильтона  $\lambda^{(+)}$  (31.3),  $\lambda^{(+)}|_{\Lambda^2(\omega)} = E_0$ . Пусть  $I$  – возрастающая подпоследовательность чисел  $\{1, 2, 3\}$ , а  $\bar{I}$  – упорядоченная подпоследовательность чисел, дополняющая  $I$  до  $\{1, 2, 3\}$ . Обозначим через  $\vec{y} = (q_I, p_{\bar{I}})$  упорядоченный набор фазовых координат  $(\vec{p}, \vec{q})$ , отвечающий набору  $(I, \bar{I})$ . Например, если  $I = \{2, 3\}$  и  $\bar{I} = \{1\}$ , то  $\vec{y} = (p_1, q_2, q_3)$ . Когда  $I = \{1, 2, 3\}$ ,  $\bar{I} = \{\emptyset\}$ , аналогично получим  $\vec{y} = \vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ . Обозначим через  $\Omega_I$  область в  $\Lambda^2(\omega)$ , которая однозначно и гладко проектируется на координатную плоскость  $(q_I, p_{\bar{I}})$ . Другими словами, в области (карте)  $\Omega_I$  выполняется следующее условие:

$$\text{rank} \left\| \frac{\partial y}{\partial \tau} \right\| \equiv \text{rank} \frac{\partial(q_I, p_{\bar{I}})}{\partial(\tau_1, \tau_2)} = 2. \quad (35.1)$$

Будем предполагать, что компактное многообразие  $\Lambda^2(\omega)$  удовлетворяет следующему условию: многообразие  $\Lambda^2(\omega)$  можно покрыть конечным набором областей  $\Omega_{I_N}$ , удовлетворяющих условию (35.1). Такой набор областей  $\{\Omega_{I_N}\}$  образует канонический атлас на  $\Lambda^2(\omega)$ .

Для заданного упорядоченного набора координат  $\vec{y} = (q_I, p_{\bar{I}})$  упорядоченный набор сопряженных импульсов будет иметь вид  $\vec{p}_y = (p_I, -q_{\bar{I}})$ . В частности, для рассмотренных ранее примеров получим  $\vec{p}_y = (-q_1, p_2, p_3)$  и  $\vec{p}_y = \vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ , соответственно. Преобразование координат  $(\vec{p}, \vec{q})$  в  $(\vec{p}_y, \vec{y})$  является каноническим и задается симплектической  $(6 \times 6)$ -матрицей

$$G_I = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}. \quad (35.2)$$

Здесь  $A$  и  $B$  –  $(3 \times 3)$  диагональные матрицы вида  $A_{a,b} = \delta_{aI} \delta_{ab}$ , а  $B_{a,b} = \delta_{a\bar{I}} \delta_{ab}$ , где

$$\delta_{a,I(\bar{I})} = \begin{cases} 1, & a \in I(\bar{I}), \\ 0, & a \notin I(\bar{I}), \end{cases} \quad a, b = 1, 2, 3.$$

Каноническое преобразование оставляет систему Гамильтона инвариантной, так что мы имеем

$$\dot{\vec{p}}_y = -\tilde{\lambda}_{\vec{y}}^{(+)}, \quad \dot{\vec{y}} = \tilde{\lambda}_{\vec{p}_y}^{(+)}, \quad (35.3)$$

где  $\tilde{\lambda}^{(+)} = \tilde{\lambda}^{(+)}(\vec{p}_y, \vec{y})$  – функция  $\tilde{\lambda}^{(+)}(\vec{p}, \vec{q})$  в координатах  $(\vec{p}_y, \vec{y})$ . (Здесь и далее в главе 5 точка означает производную по переменной  $\tau_1$ .)

Пусть шестикомпонентный вектор  $a(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{W}(\tau) \\ \vec{Z}(\tau) \end{pmatrix}$  является решением системы в вариациях

$$\dot{a} = \mathcal{H}_{\text{var}}(\tau)a, \quad \mathcal{H}_{\text{var}}(\tau) = \begin{pmatrix} -\lambda_{qp}^{(+)}(\tau) & -\lambda_{qq}^{(+)}(\tau) \\ \lambda_{pp}^{(+)}(\tau) & \lambda_{pq}^{(+)}(\tau) \end{pmatrix} \quad (35.4)$$

– линеаризации системы Гамильтона (35.3) – в окрестности  $\Lambda^2(\omega) = (\vec{p} = \vec{p}(\tau), \vec{q} = \vec{q}(\tau), \tau \in \mathbb{R}_\tau^2)$ . Под функциями типа  $\lambda_{pq}^{(+)}(\tau)$  понимается функция

$\lambda_{pq}^{(+)}(\vec{p}, \vec{q})|_{\vec{p}=\vec{P}(\tau), \vec{q}=\vec{Q}(\tau)}$ . Аналогичное рассмотрение канонической системы (35.3) приводит к системе в вариациях вида

$$\dot{\tilde{a}} = \tilde{\mathcal{H}}_{\text{var}}(\tau)\tilde{a}, \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\text{var}}(\tau) = \begin{pmatrix} -\tilde{\lambda}_{yp_y}^{(+)}(\tau) & -\tilde{\lambda}_{yy}^{(+)}(\tau) \\ \tilde{\lambda}_{p_y p_y}^{(+)}(\tau) & \tilde{\lambda}_{p_y y}^{(+)}(\tau) \end{pmatrix}. \quad (35.5)$$

Уравнения (35.4) и (35.5) определяют линейные гамильтоновы системы, и симплектическое преобразование  $\tilde{a}(\tau) = G_I a(\tau)$  будет для них каноническим. Следовательно, каждому решению  $a(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{W}(\tau) \\ \vec{Z}(\tau) \end{pmatrix}$  уравнения (35.4) соответствует решение  $\tilde{a}(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{W}(\tau) \\ \vec{Z}(\tau) \end{pmatrix}$  уравнения (35.5), где

$$\begin{aligned} \vec{W}(\tau) &= A\vec{Z}(\tau) - B\vec{W}(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{W}_I(\tau) \\ -\vec{Z}_I(\tau) \end{pmatrix}, \\ \vec{Z}(\tau) &= B\vec{Z}(\tau) + A\vec{W}(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{Z}_I(\tau) \\ \vec{W}_I(\tau) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (35.6)$$

Отметим также, что из симплектичности матрицы  $G_I$  следует, что для любых двух решений уравнения (35.5) справедливо

$$\{\tilde{a}_1(\tau), \tilde{a}_2(\tau)\} = \{a_1(\tau), a_2(\tau)\}, \quad \tilde{a}_k(\tau) = G_I a_k(\tau), \quad k = 1, 2, 3, \quad (35.7)$$

где фигурные скобки обозначают кососкалярное произведение векторов.

Определим комплексный росток на многообразии  $\Lambda^2(\omega)$ . Предполагается выполнение следующих условий: уравнение (35.4) допускает набор из трех гладких относительно  $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}_\tau^2$  и линейно независимых решений  $a_k(\tau)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , таких, что

1) первые два из них образуют базис на касательной в точке  $\tau \in \mathbb{R}_\tau^2$  плоскости к многообразию  $\Lambda^2$  и имеют вид

$$a_1(\tau) = \begin{pmatrix} \dot{\vec{P}}(\tau) \\ \dot{\vec{Q}}(\tau) \end{pmatrix}, \quad a_2(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{P}'(\tau) \\ \vec{Q}'(\tau) \end{pmatrix} \quad (35.8)$$

(здесь и ниже штрих обозначает производную по  $\tau_2$ );

2) решение  $a_3(\tau) = \begin{pmatrix} \vec{W}(\tau) \\ \vec{Z}(\tau) \end{pmatrix}$  – комплексная и ограниченная по отношению к переменной  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  вектор-функция, удовлетворяющая условию

$$\{a_3(\tau), a_3^*(\tau)\} = 2i; \quad (35.9)$$

3) все три решения попарно косоортогональны:

$$\{a_k(\tau), a_l(\tau)\} = 0, \quad k, l = \overline{1, 3}. \quad (35.10)$$

В каждой точке  $\tau$  комплексная плоскость  $r^3(\tau) \in \mathbb{C}^6$ , натянутая на векторы  $a_k(\tau)$ ,  $k = \overline{1, 3}$ , образует комплексный росток. В силу (35.10) эта плоскость – лагранжева, и векторы  $a_k(\tau)$  образуют базис на ней. Семейство плоскостей  $\{r^3(\tau), \tau \in \mathbb{R}_\tau^2\}$  определяет комплексный росток на инвариантном лагранжевом многообразии  $\Lambda^2(\omega)$ .

◇ Введенный выше вектор  $a_3(\tau)$  в общем случае не является однозначной функцией на  $\Lambda^2(\omega)$ , так что для различных  $\tau$  и  $\tau'$ , определяющих одну и ту же

точку на  $\Lambda^2(\omega)$ , мы, вообще говоря, имеем  $a_3(\tau) \neq a_3(\tau')$ . Тем не менее, допуская некоторую неточность, мы говорим, что  $\{r^3(\tau), \tau \in \mathbb{R}_\tau^2\}$  – комплексный росток на  $\Lambda^2(\omega)$ .

Необходимо отметить, что поскольку  $G_I$  – симплектическая матрица, то задаваемое ею преобразование отображает лагранжеву плоскость в самое себя и, следовательно, в определении комплексного ростка  $r^3(\Lambda^2(\omega))$  вместо  $a_k(\tau)$  решений уравнения (35.4), удовлетворяющих условиям (35.8)–(35.10), можно взять линейно независимые решения  $\tilde{a}_k(\tau) = G_I a_k(\tau)$  решения уравнения (35.5), которые образуют новый базис на ростке  $r^3(\Lambda^2(\omega))$ . Векторы  $\tilde{a}_1(\tau)$  и  $\tilde{a}_2(\tau)$ , касательные к многообразию  $\Lambda^2(\omega)$ , согласно (35.6), имеют вид

$$\tilde{a}_1(\tau) = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{P}}_y \\ \dot{\tilde{Y}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{a}_2(\tau) = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{P}}'_y \\ \dot{\tilde{Y}}' \end{pmatrix}. \quad (35.11)$$

Из условий (35.9), (35.10) и (35.7) следует, что

$$\{\tilde{a}_k(\tau), \tilde{a}_l(\tau)\} = 0, \quad \{\tilde{a}_3(\tau), \tilde{a}_3^*(\tau)\} = 2i, \quad k, l = \overline{1, 3}. \quad (35.12)$$

Здесь и в дальнейшем под комплексным ростком в области  $\Omega_I$  будем понимать набор векторов  $\tilde{a}_k(\tau)$ , определенных выше.

В этом разделе определен геометрический объект  $[\Lambda^2(\omega), r^3(\Lambda^2(\omega))]$  – лагранжево многообразие с комплексным ростком, которое играет ключевую роль в построении квазиклассических асимптотик с комплексными фазами [31].

### 35.2. Функции на семействе лагранжевых многообразий с комплексным ростком

Пусть  $\Omega_I \subset \Lambda^2(\omega)$  – некоторая карта с локальными координатами  $\vec{y} = (q_I, p_I)$ . Построим в области  $\Omega_I$  ( $3 \times 3$ ) матрицы, составленные из векторов комплексного ростка  $\tilde{a}_k(\tau)$

$$\tilde{B}(\tau) = (\dot{\tilde{P}}_y(\tau), \dot{\tilde{P}}'_y(\tau), \widetilde{W}(\tau)), \quad \tilde{C}(\tau) = (\dot{\tilde{Y}}(\tau), \dot{\tilde{Y}}'(\tau), \widetilde{Z}(\tau)). \quad (35.13)$$

Из условия (35.1) следует, что в карте  $\Omega_I$  матрица  $\tilde{C}(\tau)$  не вырождена. Поэтому можно определить симметричную матрицу  $\tilde{B}\tilde{C}^{-1}$  с положительно определенной мнимой частью,  $\text{Im } \tilde{B}(\tau)\tilde{C}^{-1}(\tau) \geq 0$ .

Определим набор функций  $\tau(y) = (\tau_1(y), \tau_2(y))$ , удовлетворяющих уравнению

$$\langle \dot{\tilde{Y}}(\tau), \partial_{\vec{y}}\tau_1 \rangle|_{\tau=\tau(y)} = 1, \quad \langle \dot{\tilde{Y}}'(\tau), \partial_{\vec{y}}\tau_2 \rangle|_{\tau=\tau(y)} = 0. \quad (35.14)$$

Локальное существование таких наборов следует из (35.1).

Через  $\Delta\vec{y}$  и  $\Delta\hat{p}_y$  обозначим операторы

$$\Delta y = y - Y(\tau), \quad \Delta\hat{p}_y = i\hbar\partial_y|_{\tau=\text{const}} - P_y(\tau). \quad (35.15)$$

В карте  $\Omega_I$ , по аналогии с частью I, введем комплексное действие (комплексную фазу)

$$\tilde{S}(y, \tau(y)) = \left[ (E - E_0)\tau_1 + \int_{\tau_0}^{\tau} \langle P(\tau), dQ(\tau) \rangle - \langle q_I(\tau), p_I(\tau) \rangle \right] +$$

$$+ \langle p_y(\tau), \Delta y \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta y, \tilde{B} \tilde{C}^{-1}(\tau) \Delta y \rangle \Big|_{\tau=\tau(y)}, \quad (35.16)$$

где  $E = E_0 + \hbar E_1 + O(\hbar^2)$ ,  $\lambda^{(+)}|_{\Lambda^2(\omega)} = E_0$ , а интегрирование в (35.16) производится вдоль произвольного пути на  $\Lambda^2(\omega)$ , который заканчивается в точке  $\tau \in \Omega_I$ .

Каждому вектору  $\tilde{a}_k(\tau)$  сопоставим операторы по правилу

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \langle \dot{\tilde{Y}}(\tau), \Delta \hat{p}_y \rangle - \langle \dot{\tilde{P}}_y(\tau), \Delta \vec{y} \rangle, \\ \hat{a}_2 &= \langle \tilde{Y}'(\tau), \Delta \hat{p}_y \rangle - \langle \tilde{P}'_y(\tau), \Delta \vec{y} \rangle, \\ \hat{a}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\langle \tilde{Z}(\tau), \Delta \hat{p}_y \rangle - \langle \tilde{W}(\tau), \Delta \vec{y} \rangle), \\ \hat{a}_3^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} (\langle \tilde{Z}^*(\tau), \Delta \hat{p}_y \rangle - \langle \tilde{W}^*(\tau), \Delta \vec{y} \rangle). \end{aligned} \quad (35.17)$$

Из (35.12) следуют коммутационные соотношения для операторов  $\hat{a}_k$

$$[\hat{a}_k(\tau), \hat{a}_l(\tau)] = 0, \quad [\hat{a}_3(\tau), \hat{a}_3^+(\tau)] = 1, \quad k, l = \overline{1, 3}. \quad (35.18)$$

Определим функцию  $\tilde{J}(\tau) = \det \tilde{C}(\tau)$ . Поскольку справедливо соотношение  $\tilde{J}(\tau) \neq 0$  в карте  $\Omega_I$ , можно определить функцию

$$|0, \tau(\vec{y})\rangle = \frac{1}{\sqrt{\tilde{J}(\tau(\vec{y}))}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \tilde{S}(\vec{y}, \tau(\vec{y})) \right]. \quad (35.19)$$

Используя оператор «рождения»  $\hat{a}_3^+$ , построим набор функций

$$|\nu, \tau(y)\rangle = \frac{1}{\sqrt{\nu!}} (\hat{a}_3^+)^{\nu} |0, \tau(y)\rangle. \quad (35.20)$$

Из соотношений (35.16) и (35.18) нетрудно получить

$$\hat{a}_k |\nu, \tau(y)\rangle = 0, \quad k = 1, 2. \quad (35.21)$$

Наконец, сопоставим функции Гамильтона  $\tilde{\lambda}^{(+)}(\vec{p}_y, \vec{y})$  упорядоченный по Вейлю квадратичный оператор в  $y$ -представлении

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_0^{(+)} &= E_0 + \hat{a}_1 + \frac{1}{2} [\langle \Delta \vec{y}, \tilde{\lambda}_{yy}^{(+)}(\tau) \Delta \vec{y} \rangle + \langle \Delta \vec{y}, \tilde{\lambda}_{yp_y}^{(+)}(\tau) \Delta \hat{p}_y \rangle + \\ &+ \langle \Delta \hat{p}_y, \tilde{\lambda}_{p_y p_y}^{(+)}(\tau) \Delta \vec{y} \rangle + \langle \Delta \hat{p}_y, \tilde{\lambda}_{p_y p_y}^{(+)}(\tau) \Delta \hat{p}_y \rangle] \Big|_{\tau=\tau(y)}. \end{aligned} \quad (35.22)$$

Тогда справедливо следующее утверждение: функции образуют набор точных решений уравнения Шрёдингера с гамильтонианом  $\hat{\lambda}_0^{(+)}$  (35.22) (см. часть I)

$$(-i\hbar \partial_{\tau_1} + \hat{\lambda}_0^{(+)} - E_0 - \hbar E_1) |\nu, \tau(y)\rangle = 0. \quad (35.23)$$

В дальнейшем мы покажем, что функции  $|\nu, \tau(y)\rangle$  образуют базис, необходимый для построения канонического оператора Маслова с комплексной фазой.

### 35.3. Семейство инвариантных лагранжевых торов (специальный случай)

Результаты двух предыдущих разделов проиллюстрируем на примере частично интегрируемой гамильтоновой системы с аксиальной симметрией, допускающей семейство инвариантных двумерных лагранжевых торов  $\Lambda^2(\omega)$ ,  $\omega = (E_0, I_0)$ .

Пусть функция Гамильтона в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_p^3 \times \mathbb{R}_q^3$  имеет вид

$$\lambda^{(+)}(p, q) = \lambda^{(+)}(p_1, p_2^2, p_\varphi, q_1, q_2^2). \quad (35.24)$$

Поскольку переменная  $q_3 = \varphi \pmod{2\pi}$  циклична, система Гамильтона (35.3) допускает два интеграла движения

$$p_\varphi = I_0, \quad \lambda^{(+)}(p_1, p_2^2, I_0, q_1, q_2^2) = E_0. \quad (35.25)$$

При заданных значениях энергии  $E_0$  и импульса  $I_0$  система уравнений (35.25) задает некоторую совместную поверхность  $M(E_0, I_0)$ . Пусть в некоторой области изменения параметров  $E_0$  и  $I_0$  поверхность  $M(E_0, I_0)$  – связная и компактная. Мы будем рассматривать ее пересечение с координатной плоскостью  $\mathcal{T} = \{(\vec{p}, \vec{q}) : p_2 = q_2 = 0\}$ . Тогда из уравнения (35.3) следует, что пересечение  $M(E_0, I_0)$  и  $\mathcal{T}$  будет инвариантным лагранжевым многообразием  $\Lambda^2(E_0, I_0) = M(E_0, I_0) \cap \mathcal{T}$  вида

$$\Lambda^2(E_0, I_0) = S^1(I_0) \times \Lambda^1(E_0, I_0), \quad (35.26)$$

где

$$\Lambda^1(E_0, I_0) = \{(\vec{p}, \vec{q}) : \lambda^{(+)}(p_1, 0, I_0, q_1, 0) = E_0\}, \quad (35.27)$$

$$S^1(I_0) = \{(p_\varphi, \varphi) : p_\varphi = I_0, \varphi \in [0, 2\pi]\}. \quad (35.28)$$

Из предположения, что  $M(E_0, I_0)$  – компактно, следует, что  $\Lambda^1(E_0, I_0)$  замкнуто. Отсюда следует, что  $\Lambda^2(E_0, I_0)$  (35.26) образует семейство инвариантных лагранжевых двумерных торов.

Замкнутый контур  $\Lambda^1(E_0, I_0)$  удовлетворяет системе канонических уравнений

$$\dot{p}_1 = -\overset{0}{\lambda}_{q_1}^{(+)}(p_1, q_1, I_0), \quad \dot{q}_1 = \overset{0}{\lambda}_{p_1}^{(+)}(p_1, q_1, I_0), \quad (35.29)$$

где  $\overset{0}{\lambda}^{(+)}(p_1, q_1, I_0) \equiv \lambda^{(+)}(p_1, 0, I_0, q_1, 0)$ . На фазовой плоскости  $(p_1, q_1)$  уравнение (35.29) описывает одномерное движение на уровне энергии  $E_0$ . Через  $\{P_1(\tau_1, \omega), Q_1(\tau_1, \omega), \omega = (E_0, I_0)\}$  обозначим периодические (по  $\tau_1$ ) решения уравнения (35.29) с периодом  $T_1$ :

$$T_1 = 2 \int_{R_-(\omega)}^{R_+(\omega)} \frac{dq_1}{\overset{0}{\lambda}_{p_1}^{(+)}(q_1, E_0, I_0)}, \quad (35.30)$$

где  $R_\pm(\omega)$  – корни уравнения  $\overset{0}{\lambda}_{p_1}^{(+)}(q_1, E_0, I_0) = 0$ .

Нетрудно получить выражение для угловой переменной  $\varphi$  через  $T_1$ -периодические функции  $p_1(\tau_1, \omega)$  и  $q_1(\tau_1, \omega)$

$$\varphi(\tau, \omega) = \int_{\overset{0}{\tau_1}}^{\tau_1} \overset{0}{\lambda}_{p_\varphi}^{(+)}(t, E_0, I_0) dt + \tau_2 = \beta_1 \tau_1 + \theta(\tau_1, \omega) + \tau_2, \quad (35.31)$$

где  $\tau_2 \pmod{2\pi}$ ,  $\beta_1 = T_1^{-1} \int_0^{T_1} \lambda_{p_\varphi}^{(+)}(t, E_0, I_0) dt$  и  $\theta(\tau_1, \omega)$  – периодическая функция

с периодом  $T_1$ . Через  $\tau_1^0$  обозначено «начальное» время для системы (35.29).

Найдем три вектора  $a_k(\tau)$ , образующих комплексный росток на семействе  $\Lambda^2(\omega)$  (35.26)–(35.28). Первые два из них образуют симплектический базис на касательной к многообразию  $\Lambda^2(\omega)$  плоскости и, согласно (35.8), имеют вид<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned} a_1(\tau_1) &= (\dot{p}_1(\tau_1), 0, 0, \dot{q}_1(\tau_1), 0, \dot{\varphi}(\tau_1))^T, \\ a_2(\tau_1) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T. \end{aligned} \quad (35.32)$$

Вектор  $a_3(\tau)$ , косоортогональный к векторам (35.32), будем искать в виде

$$a_3(\tau_1) = (0, W(\tau_1), 0, 0, Z(\tau_1), 0)^T. \quad (35.33)$$

Подставив (35.33) в (35.4), получим следующую систему уравнений для определения комплексных функций  $W(\tau_1)$   $Z(\tau_1)$ :

$$\begin{pmatrix} \dot{W} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_{q_2 q_2}^{(+)}(\tau_1) \\ \lambda_{p_2 p_2}^{(+)}(\tau_1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W \\ Z \end{pmatrix} \quad (35.34)$$

с условием нормировки

$$\text{Im}(W \cdot \overset{*}{Z}) = 1, \quad (35.35)$$

которое следует из (35.9). Уравнение (35.34) – линейная система Гамильтона с  $T_1$ -периодическими по переменной  $\tau_1$  коэффициентами.

Предположим, что система уравнений (35.34) допускает решение Флоке

$$\begin{pmatrix} W(\tau_1 + T_1) \\ Z(\tau_1 + T_1) \end{pmatrix} = \exp(i\Omega_1 T_1) \begin{pmatrix} W(\tau_1) \\ Z(\tau_1) \end{pmatrix}. \quad (35.36)$$

в силу предположения (35.35)  $\text{Im } \Omega_1 = 0$ , и, следовательно, будем рассматривать ограниченные по  $\tau_1 \in \mathbb{R}^1$  вектор-функции (35.33). Таким образом, векторы (35.32) вместе с вектором (35.33), удовлетворяющим уравнениям (35.35) и (35.36), образуют комплексный росток  $r^3(\Lambda^2(\omega))$ .

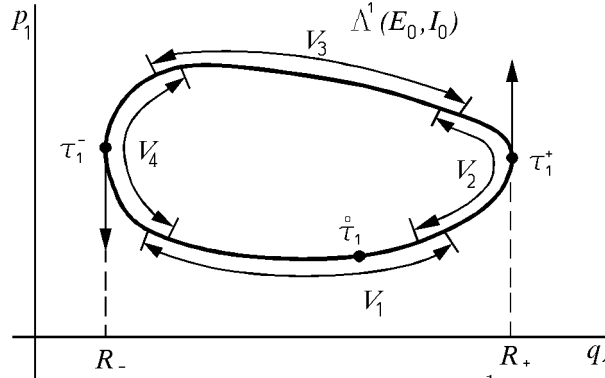
Необходимо отметить, что, согласно уравнению (35.36), величина  $\Omega_1$  определена с точностью до  $(2\pi/T_1)k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Следовательно, мы можем допустить, что  $\Omega_1$  выбрана таким образом, чтобы

$$\arg Z(\tau_1 + T_1) = \arg Z(\tau_1) + \Omega_1 T_1. \quad (35.37)$$

Теперь построим канонический атлас  $A(\Lambda^2)$  на многообразии (35.26) и отвечающий ему набор функций (35.31). Напомним, что точка  $Z(\tau) \in \Lambda^2(\omega)$  называется неособой, если в ней  $\text{rank} \left\| \frac{\partial \vec{q}}{\partial \tau} \right\| = 2$ . В противном случае точка  $Z(\tau) \in \Lambda^2(\omega)$  называется особой (или фокальной). Аналогично, если карта  $\Omega \in \Lambda^2(\omega)$  состоит только из неособых точек, такая карта называется неособой. В противном случае карта называется особой (фокальной).

В случае семейства  $\Lambda^2(\omega)$  вида (35.26)–(35.28) множество всех особых точек  $\Sigma(\omega) \subset \Lambda^2(\omega)$ , в которых ранг матрицы  $\left\| \frac{\partial \vec{q}_1}{\partial \tau} \right\| = \begin{pmatrix} \dot{q} & 0 & \dot{\varphi} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  меньше двух, имеет вид  $\Sigma(\omega) = \{Z(\tau) \in \Lambda^2(\omega), \tau = (\tau_1^{(-)}, \tau_2) \cup (\tau_1^{(+)}, \tau_2), \tau_2 \in [0, 2\pi]\}$ , где  $\tau^{(\pm)}$  – нули

<sup>11</sup>Там, где это не приводит к недоразумениям, мы будем опускать зависимость величин от параметров  $E_0, I_0$ .

Рис. 1. Канонический атлас на  $\Lambda^1(E_0, I_0)$ 

функции  $\dot{Q}_1(\tau^{\pm})$ , т.е.  $Q_1(\tau^{\pm}) = R_{\pm}$ . Проекция  $\pi_q(\Sigma)$  этих точек на конфигурационное пространство  $\mathbb{R}_q^3$  образует каустическую  $\pi_q(\Sigma) = S_+^1 \cup S_-^1$ , состоящую из двух окружностей  $S_{\pm}^1 = \{\vec{q} = (R_{\pm}, 0, \varphi), \varphi \in [0, 2\pi]\}$ . Замкнутая кривая  $\Lambda^1(\omega)$ , лежащая в координатной плоскости  $(p_1, q_1)$ , ориентирована против часовой стрелки. Для определенности будем предполагать, что  $\tau_1^0 < \tau_1^{(+)} < \tau_1^{(-)} < \tau_1^0 + T_1$ ,  $R_- < R_+$ . Покроем кривую  $\Lambda^1(\omega)$  четырьмя картами  $V_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , как показано на рис. 1. Тогда канонический атлас на  $\Lambda^2(\omega)$  можно выбрать из четырех карт вида  $\Omega_j = V_j \times \{\tau_2\}$ ,  $\tau_2 \in [0, 2\pi]$ . При таком выборе карты  $\Omega_1$  и  $\Omega_3$  – неособые, а карты  $\Omega_2$  и  $\Omega_4$  – особые. Упорядоченный набор координат фазового пространства  $\vec{y} = (q_I, p_{\bar{I}})$ , где  $I = (2, 3)$ , отвечает карте  $\Omega_j$ ,  $j = 2, 4$ , поскольку в этом случае  $\text{rank} \left\| \frac{\partial \vec{y}}{\partial \tau} \right\| = \text{rank} \begin{pmatrix} \dot{p}_1 & 0 & \dot{\varphi} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ .

Теперь мы дадим полное выражение для функций (35.20). Опуская простые, но громоздкие вычисления, приведем только конечный результат. Для функций  $|\nu, \tau^j(\vec{y})\rangle$ , соответствующих неособым картам  $\Omega_j$ ,  $j = 1, 3$ , получим

$$|\nu, \tau_1^j(q_1)\rangle = \left\{ \frac{\Xi_{\nu}(q_2, \tau_1)}{\sqrt{|\dot{q}_1(\tau_1)|}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1^0}^{\tau_1} p_1(t) dq_1(t) \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \frac{i}{\hbar} \left[ I_0 \varphi + (E - E_0) \tau_1 + \frac{1}{2} \text{Re} \frac{W(\tau_1)}{Z(\tau_1)} q_2^2 \right] \right\} \Big|_{\tau_1 = \tau_1^j(q_1)}, \quad (35.38)$$

где обозначено

$$\Xi_{\nu}(q_2, \tau_1) = \frac{1}{\sqrt{\nu!}} \left( \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^{\nu} \frac{e^{i\nu \arg Z(\tau_1)}}{\sqrt{-Z(\tau_1)}} e^{-q_2^2 / [2\hbar |Z(\tau_1)|^2]} H_{\nu} \left( \frac{q_2}{\sqrt{\hbar} |Z(\tau_1)|} \right), \quad (35.39)$$

$H_{\nu}(\xi)$  – полиномы Эрмита. Интеграл в (35.38) вычисляются вдоль контура  $\Lambda^1(E_0, I_0)$ , ориентированного против часовой стрелки с началом в точке  $\tau_1^0 \in U_1$  и концом в точке  $\tau_1 \in V_j$ ,  $j = 1, 3$ . Функции  $\tau_1^j(q)$  – решения уравнения  $q_1(\tau_1^j(q_1)) = q_1$  в неособой карте  $V_j$ . Для построения состояний (35.38) использовалась функция

$$\tau_2^j(q) = \varphi - \int_{\tau_1^0}^{\tau_1^j(q_1)} \lambda_{p_{\varphi}}^{(+)}(t) dt.$$

В случае особой карты  $\Omega_j$ ,  $j = 2, 4$ , соответствующие функции  $|\nu, \tau^j(\vec{y})\rangle$  имеют вид

$$|\nu, \tau_1^j(p_1)\rangle = \left\{ \frac{\Xi_\nu(q_2, \tau_1)}{\sqrt{|\dot{p}_1(\tau_1)|}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \int_{\tau_1^0}^{\tau_1} p_1(t) dq_1(t) - p_1 q_1(\tau_1) \right] \times \right. \\ \left. \times \exp \frac{i}{\hbar} \left[ I_0 \varphi + (E - E_0) \tau_1 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{W(\tau_1)}{Z(\tau_1)} q_2^2 \right] \right\} \Big|_{\tau_1 = \tau_1^j(p_1)}. \quad (35.40)$$

Здесь, как и в предыдущем случае, интегрирование происходит вдоль ориентированной кривой  $\Lambda^1(E_0, I_0)$  с началом в точке  $\tau_1^0 \in V_1$  и концом в точке  $\tau_1 \in V_j$ ,  $j = 2, 4$ . Функции  $\tau_1^j(q_1)$  удовлетворяют уравнению  $p_1(\tau_1^j(p_1)) = p_1$ , в качестве функции  $\tau_2^j(y)$  использовалась функция

$$\tau_2^j(y) = \varphi - \int_{\tau_1^0}^{\tau_1^j(p_1)} \lambda_{p_\varphi}^{(+)}(t) dt.$$

◇ При выводе соотношений (35.38) и (35.40) мы использовали тождество  $\varphi(\tau^j(y)) = \varphi$ , которое справедливо для всех определений функций  $\tau^j(y)$  и для всех карт  $\Omega_j$  (см. (35.31)). В координатном представлении в особой карте из (35.40) получим (см. разд. 6 части I)

$$|\nu, \tau_1^j(q_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{-2\pi i \hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip_1 q_1} |\nu, \tau_1^j(p_1)\rangle dp_1. \quad (35.41)$$

### 36. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака, отвечающие семейству инвариантных лагранжевых торов с комплексным ростком

Результаты, полученные в предыдущих разделах, позволяют построить квазиклассические спектральные серии  $[\overset{0}{\Psi}_{E_{N,l}}(\hbar), E_{N,l}(\hbar)]$  оператора Дирака, отвечающие семейству  $\Lambda^2(\omega)$  типа (35.26)–(35.28). Поскольку  $\Lambda^2(\omega)$  содержит фокальные точки, то для построения асимптотических решений в целом (включая каустики и область «тени») прежде всего необходимы асимптотические по модулю  $O(\hbar^{3/2})$  решения  $\Psi_E^j(\vec{q}, \hbar)$  уравнения (30.3) в каждой области  $\pi_q(\Omega_j)$  конфигурационного пространства  $\mathbb{R}_q^3$ . Раздел 36.1 посвящен решению этой проблемы. Ниже мы ограничим наше рассмотрение главными членами  $\overset{0}{\Psi}_E^j(\vec{q}, \hbar)$  локальных асимптотик  $\Psi_E^j(\vec{q}, \hbar)$ , из которых в разд. 36.2 спивается многозначная функция  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  (определенная во всем конфигурационном пространстве  $\mathbb{R}^3$ ). В результате удастся построить канонический оператор с комплексной фазой на семействе  $\Lambda^2(\omega)$ . Для того чтобы канонический оператор определял однозначную функцию  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$ , необходимо наложить дополнительные условия, которые приводят к квазиклассическим условиям квантования семейства  $\Lambda^2(\omega)$  и



обсуждаются в разд. 36.3. Построенные таким образом серии асимптотических собственных функций  $\overset{0}{\Psi}_{E_N, l}(\vec{q}, \hbar)$  удовлетворяют условию (34.2) и при  $\hbar \rightarrow 0$  локализованы в области «света»  $\pi_q(\Lambda^2(\omega))$ .

### 36.1. Локальные асимптотики оператора Дирака

Напомним некоторые факты из теории упорядоченных по Вейлю  $\hbar^{-1}$ -псевдодифференциальных операторов. Пусть  $\hat{L} = L(-i\hbar\partial_{\vec{q}}, \vec{q}, \hbar)$  – упорядоченный по Вейлю  $\hbar^{-1}$ -псевдодифференциальный оператор с символом  $L(\vec{p}, \vec{q}, \hbar)$ . Действие оператора на функцию  $\varphi(\vec{q})$  задается формулой

$$\hat{L}\varphi(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int \int d\vec{\xi} d\vec{p} e^{i\langle \vec{p}, (\vec{q}-\vec{\xi}) \rangle / \hbar} L\left(\vec{p}, \frac{\vec{q} + \vec{\xi}}{2}, \hbar\right) \varphi(\vec{\xi}), \quad (36.1)$$

где  $n$  – размерность вектора  $\vec{q}$ . Введем прямое и обратное  $\hbar^{-1}$ -преобразования Фурье по переменным  $q_{\bar{I}}$

$$F_{\hbar, q_{\bar{I}} \rightarrow p_{\bar{I}}} \varphi(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi i \hbar)^{k/2}} \int dq_{\bar{I}} e^{-i\langle p_{\bar{I}}, q_{\bar{I}} \rangle / \hbar} \varphi(\vec{q}) = \tilde{\varphi}(q_I, p_{\bar{I}}), \quad (36.2)$$

$$F_{\hbar, p_{\bar{I}} \rightarrow q_{\bar{I}}}^{-1} \tilde{\varphi}(q_I, p_{\bar{I}}) = \frac{1}{(-2\pi i \hbar)^{k/2}} \int dp_{\bar{I}} e^{i\langle p_{\bar{I}}, q_{\bar{I}} \rangle / \hbar} \tilde{\varphi}(q_I, p_{\bar{I}}) = \varphi(\vec{q}), \quad (36.3)$$

где  $k$  – количество компонент в наборе  $\bar{I}$ . Тогда действие упорядоченного по Вейлю оператора  $\hat{\tilde{L}} = \tilde{L}(-i\hbar\partial_{\vec{y}}, \vec{y}, \hbar)$  в смещенном  $y$ -представлении, где  $\vec{y} = (q_I, p_{\bar{I}})$ , задается формулой

$$\hat{\tilde{L}}(-i\hbar\partial_{\vec{y}}, \vec{y}, \hbar) = F_{\hbar, q_{\bar{I}} \rightarrow p_{\bar{I}}} L(-i\hbar\partial_{\vec{q}}, \vec{q}, \hbar) F_{\hbar, p_{\bar{I}} \rightarrow q_{\bar{I}}}^{-1}. \quad (36.4)$$

Непосредственно из уравнений (36.1)–(36.4) нетрудно показать, что оператор  $\hat{\tilde{L}}$  в  $y$ -представлении может быть получен из оператора  $\hat{L}$  в  $q$ -представлении формальной заменой  $-i\hbar\partial_{q_{\bar{I}}} \rightarrow p_{\bar{I}}$ ,  $q_{\bar{I}} \rightarrow i\hbar\partial_{p_{\bar{I}}}$ , т.е.

$$\tilde{L}(-i\hbar\partial_{\vec{y}}, \vec{y}, \hbar) = L(-i\hbar\partial_{q_I}, p_{\bar{I}}, q_I, i\hbar\partial_{p_{\bar{I}}}). \quad (36.5)$$

Переход в смешанное  $y$ -представление позволяет построить новый класс асимптотических решений уравнения (30.1) в виде  $\hbar^{-1}$ -преобразования Фурье по части переменных

$$\Psi_E^{(I)}(\vec{q}, \hbar) = F_{\hbar, p_{\bar{I}} \rightarrow q_{\bar{I}}}^{-1} \tilde{\Psi}_E(\vec{y}, \hbar), \quad (36.6)$$

где функции  $\tilde{\Psi}_E(\vec{y}, \hbar)$  – асимптотические ( $\text{mod } O(\hbar^{3/2})$ ) решения уравнения (30.1) в  $y$ -представлении

$$[\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_D(-i\hbar\partial_{\vec{y}}, \vec{y}, \hbar) - E] \tilde{\Psi}(\vec{y}, \hbar) = O(\hbar^{3/2}). \quad (36.7)$$

Позднее мы покажем, что функции  $\Psi_E^{(I)}(\vec{q}, \hbar)$  (5.6) описывают локальную асимптотику уравнения (30.1) в области проекции карты  $\Omega_I \subset \Lambda^2(\omega)$  на конфигурационное пространство. Упорядоченный по Вейлю оператор  $\hat{\tilde{\mathcal{H}}}_D$  в (36.7) получается из оператора  $\hat{\mathcal{H}}_D$  по правилу (36.5). Детально проанализируем оператор  $\hat{\mathcal{H}}_D$ .

Обозначим евклидовы и криволинейные координаты конфигурационного пространства  $\mathbb{R}_x^3$  через  $\vec{x} = (x^{\bar{a}})$  и  $\vec{q} = (q^a)$ ,  $\bar{a}, a = 1, 2, 3$ , соответственно. Обозначим

через  $\vec{e}_a = (e_a^{\bar{a}}, \bar{a} = 1, 2, 3)$  вектор с компонентами  $e_a^{\bar{a}} = \partial x^{\bar{a}} / \partial q^a$ . Тогда упорядоченный по Вейлю оператор Дирака  $\hat{\mathcal{H}}_D$  в  $q$ -представлении можно записать в виде

$$\hat{\mathcal{H}}_D = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hbar \hat{\mathcal{H}}_1, \quad (36.8)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = -\frac{c}{2} \alpha^{\bar{a}} (e_a^{\bar{a}} \hat{\mathcal{P}}_a + \hat{\mathcal{P}}_a e_a^{\bar{a}}) + \rho_3 m c^2 + e \Phi, \quad (36.9)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \frac{ic}{2} \alpha^{\bar{a}} e_{\bar{a}, a}^a, \quad (36.10)$$

где  $\rho_3$  и  $\vec{\alpha} = (\alpha^{\bar{a}})$  – матрицы Дирака в стандартном представлении,  $\hat{\mathcal{P}}_a = i\hbar \frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{e}{c} \mathcal{A}_a$ ,  $e = -e_0$  – заряд электрона,  $(\Phi, \mathcal{A}_a)$  – потенциалы внешнего электромагнитного поля.

Главный символ оператора (36.8) представляет собой эрмитову матрицу вида

$$\overset{0}{\mathcal{H}}(\vec{p}, \vec{q}) = c \langle \vec{\alpha}, \vec{\mathcal{P}} \rangle + \rho_3 m c^2 + e \Phi, \quad (36.11)$$

где  $\vec{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}_{\bar{a}})$  и  $\mathcal{P}_{\bar{a}} = e_a^{\bar{a}}(p_a + e \mathcal{A}_a / c)$ . Матрица (36.11), как уже отмечалось выше, имеет два двукратно вырожденных собственных значения

$$\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{q}) = e \Phi \pm \varepsilon, \quad \varepsilon = \sqrt{c^2 \vec{\mathcal{P}}^2 + m^2 c^4}. \quad (36.12)$$

Как и для плоского пространства (см. главу 1), из собственных векторов, отвечающих собственным значениям (36.12), составим  $4 \times 2$ -матрицы  $\Pi_{\pm}(\vec{p}, \vec{q})$  и вычислим их в точках решений  $\vec{P}(\tau)$ ,  $\vec{Q}(\tau)$  системы Гамильтона (35.3):

$$\begin{aligned} \Pi_+(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} 1 + \gamma^{-1} \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \end{pmatrix}, \\ \Pi_-(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \\ -(1 + \gamma^{-1}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (36.13)$$

где  $\gamma = \varepsilon / m c^2$ ,  $\vec{\beta} = \vec{Q} / c = \vec{e}_a \dot{Q}^a / c$ . Матрицы (36.13) удовлетворяют условиям ортонормированности и полноты (см. приложение Б)

$$\overset{\pm}{\Pi}_{\xi'} \Pi_{\xi} = \delta_{\xi' \xi}, \quad \sum_{\xi} \Pi_{\xi} \overset{\pm}{\Pi}_{\xi} = 1, \quad \xi = \pm 1. \quad (36.14)$$

В дальнейшем нам потребуются следующие свойства матриц  $\Pi_{\pm}$  (см. приложение Б):

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{a} \rangle \Pi_{\pm} = \pm \Pi_{\pm} \langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle + \Pi_{\mp} \langle \vec{d}, \vec{a} \rangle, \quad (36.15)$$

$$\vec{d} = \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} - \vec{\sigma},$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau_k} \Pi_{\pm} = \frac{i}{2} \Pi_{\pm} \left\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \frac{\vec{\beta}_{, \tau_k}}{1 + \gamma^{-1}} \right\rangle \mp \frac{1}{2} \Pi_{\mp} \left\langle \vec{\sigma}, \left( \frac{\vec{\beta} \gamma \langle \vec{\beta}, \vec{\beta}_{, \tau_k} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \vec{\beta}_{, \tau_k} \right) \right\rangle, \quad (36.16)$$

где  $\vec{a}$  – произвольный трехкомпонентный вектор.

Перейдем к построению асимптотического решения уравнения (36.7). Решение уравнения будем искать в классе функций

$$\tilde{\Psi}_E(\vec{y}, \hbar) = \tilde{\Psi}_E(\vec{y}, \tau_1(\vec{y}), \tau_2(\vec{y}), \hbar) \quad (36.17)$$

в виде асимптотического разложения по степеням  $\hbar$

$$\tilde{\Psi}_E(\vec{y}, \hbar) = \sum_{n=0}^2 \hbar^{n/2} [\Pi_+(\tau) \tilde{J}_E^{(+)}(\vec{y}, \hbar) + \Pi_-(\tau) \tilde{J}_E^{(-)}(\vec{y}, \hbar)], \quad (36.18)$$

где функции  $\tau_1(\vec{y})$  и  $\tau_2(\vec{y})$  были определены в (35.14). Обозначим через  $\Upsilon_{\hbar}^{\tilde{s}}$  класс квадратично интегрируемых скалярных функций

$$\Upsilon_{\hbar}^{\tilde{s}} = \left\{ N_0(\hbar) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \tilde{S}(\vec{y}, \tau) \right] \sum_{|\kappa|=0}^N C_{\kappa}(\tau) \left( \frac{\Delta \vec{y}}{\sqrt{\hbar}} \right)^{\kappa}, \quad N = \overline{0, \infty} \right\}, \quad (36.19)$$

где  $\tilde{S}(\vec{y}, \tau)$  определена в (35.16). Как и на классе траекторно сосредоточенных функций  $\mathcal{P}_{\hbar}^t$ , на классе  $\Upsilon_{\hbar}^{\tilde{s}}$  справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{y} &= \hat{O}(\hbar^{1/2}), & \Delta \hat{p}_y &= \hat{O}(\hbar^{1/2}), \\ (-i\hbar \partial_{\tau_k} + \hat{a}_k) &= \hat{O}(\hbar), & k &= 1, 2. \end{aligned} \quad (36.20)$$

Предположим, что двухкомпонентный спинор  $\tilde{J}_E^{(\pm)}$  в (36.18) может быть представлен в виде

$$\tilde{J}_E^{(\pm)}(\vec{y}, \hbar) = v(\tau) \varphi(\vec{y}, \tau),$$

где  $\varphi(\vec{y}, \tau) \in \Upsilon_{\hbar}^{\tilde{s}}$ , а спинор  $v(\tau)$  подлежит определению.

Обозначим через  $\Delta \hat{p}_y$  оператор  $\Delta \hat{p}_y = -i\hbar \partial_y - P_y(\tau)$ . В классе функций (36.17)–(36.19) действие оператора  $\Delta \hat{p}_y$  можно представить в виде

$$\Delta \hat{p}_y = \Delta \hat{p}_y + \sum_{k=1}^2 (\partial_{\vec{y}} \tau_k) (-i\hbar \partial_{\tau_k} + \hat{a}_k) - \sum_{k=1}^2 (\partial_{\vec{y}} \tau_k) \hat{a}_k, \quad (36.21)$$

который позволяет дать асимптотическую оценку оператора  $\Delta \hat{p}_y$ . Разложим оператор  $\hat{\mathcal{H}}_D$  в окрестности многообразия  $\Lambda^2(\omega) = \{(\vec{p}, \vec{q}) : \vec{p} = \vec{p}(\tau), \vec{q} = \vec{q}(\tau)\}$  в ряд Тейлора по операторам  $\Delta \hat{p}_y$  и  $\Delta y$  до второго порядка включительно. Тогда уравнение (36.7) будет эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\left[ -i\hbar \sum_{k=1}^2 \langle \hat{\mathcal{H}}_{\vec{p}_y}^0(\tau), \partial_y \tau_k \rangle \frac{\partial}{\partial \tau_k} + \hat{\mathcal{H}}(\tau) + \hat{\Delta} \hat{\mathcal{H}}(\tau) - E \right] \tilde{\Psi}_E(\vec{y}, \hbar) = O(\hbar^{3/2}), \quad (36.22)$$

$$\hat{a}_k \tilde{\Psi}_E(\vec{y}, \hbar) = O(\hbar), \quad k = 1, 2. \quad (36.23)$$

Здесь и ниже  $\hat{\delta}^k \lambda^{(+)}(\tau)$  обозначает  $k$ -й член в разложении упорядоченного по Вейлю оператора  $\hat{L} = \hat{L}(-i\hbar \partial_{\vec{y}}, \vec{y}, \hbar)$  в ряд Тейлора по операторам  $\Delta \hat{p}_y$  и  $\Delta y$ . Спектральный параметр  $E$  представлен в виде

$$E = E_0 + \hbar E_1 + O(\hbar^2), \quad (36.24)$$

где  $E_0 = \lambda^{(+)}|_{\Lambda^2(\omega)}$ . Подставим (36.18) и (36.24) в уравнение (36.22) и рассмотрим выражения, пропорциональные  $\Pi_-(\tau)$ . Приравняв слагаемые при одинаковых степенях  $\sqrt{\hbar}$ , получим

$$\begin{aligned} \tilde{J}_E^{(-)} &= 0, & \tilde{J}_E^{(-)} &= \frac{1}{2\varepsilon} \hat{Q}_1 \tilde{J}_E^{(+)}, \\ \tilde{J}_E^{(-)} &= \frac{1}{2\varepsilon} (\hat{Q}_1 \tilde{J}_E^{(+)} + \hat{Q}_2 \tilde{J}_E^{(+)}), \end{aligned} \quad (36.25)$$

где обозначено

$$\hbar^{1/2}\widehat{Q}_1 = -\overset{+}{\Pi}_- \sum_{k=1}^2 \langle \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_y}(\tau), \partial_y \tau_k \rangle \overset{+}{\Pi}_+ \hat{a}_k + c \langle \vec{d}, \hat{\delta}^1 \vec{P} \rangle, \quad (36.26)$$

$$\begin{aligned} \hbar \widehat{Q}_2 &= \frac{\hbar^{1/2}}{2\varepsilon} \left( -\overset{+}{\Pi}_- \sum_{k=1}^2 \langle \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_y}(\tau), \partial_y \tau_k \rangle \overset{+}{\Pi}_+ \hat{a}_k - \right. \\ &\quad \left. - c \langle \vec{\beta}, \hat{\delta}^1 \vec{P} \rangle + e \hat{\delta}^1 \Phi \right) \widehat{Q}_1 + \overset{+}{\Pi}_- \sum_{k=1}^2 \langle \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_y}(\tau), \partial_y \tau_k \rangle \times \\ &\quad \times (-i\hbar \partial_{\tau_k} + \hat{a}_k) \overset{+}{\Pi}_+ + \frac{c}{2} \langle \vec{d}, \hat{\delta}^2 \vec{P} \rangle + \hbar \overset{+}{\Pi}_- \mathcal{H}_1(\tau) \overset{+}{\Pi}_+. \end{aligned} \quad (36.27)$$

Из (36.23) следует необходимость условия

$$\hat{a}_k \overset{0}{\widetilde{J}}_E^{(+)}(y, \hbar) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (36.28)$$

Аналогично из (36.25)–(36.27) для выражений, пропорциональных  $\overset{+}{\Pi}_+(\tau)$  в (1.10), получим уравнение для спинора  $\overset{0}{\widetilde{J}}_E^{(+)}(y, \hbar)$

$$\begin{aligned} &\left[ -i\hbar \overset{+}{\Pi}_+ \sum_{k=1}^2 \langle \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_y}(\tau), \partial_y \tau_k \rangle \frac{\partial}{\partial \tau_k} \overset{+}{\Pi}_+ + \frac{c}{2} \langle \vec{\beta}, \hat{\delta}^2 \vec{P} \rangle + \frac{e}{2} \hat{\delta}^2 \Phi + \hbar \overset{+}{\Pi}_+ \mathcal{H}_1(\tau) \overset{+}{\Pi}_+ - \hbar E_1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c}{2\varepsilon} \left( -\overset{+}{\Pi}_+ \sum_{k=1}^2 \langle \overset{0}{\mathcal{H}}_{p_y}(\tau), \partial_y \tau_k \rangle \overset{+}{\Pi}_- \hat{a}_k + c \langle \vec{d}, \hat{\delta}^1 \vec{P} \rangle \right) \langle \vec{d}, \hat{\delta}^1 \vec{P} \rangle \right] \overset{0}{\widetilde{J}}_E^{(+)}(y, \hbar) = 0. \end{aligned} \quad (36.29)$$

Последнее выражение с учетом (35.14) принимает вид уравнения типа Паули

$$\left[ (-i\hbar \partial_{\tau_1} + \hat{\lambda}_0^{(+)} - E) - i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau_1} \ln (g(\tau))^{1/4} + \hbar \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}} \rangle \right] \overset{0}{\widetilde{J}}_E^{(+)}(y, \hbar) = 0, \quad (36.30)$$

где оператор  $\hat{\lambda}_0^{(+)}$  определен в (35.22);  $g = \det(\eta_{ab})$ ;  $\eta_{ab} = \langle \vec{e}_a, \vec{e}_b \rangle$  – декартова матрица в  $\mathbb{R}^3$  в криволинейных координатах  $(q_a)$ ;  $\vec{\mathcal{B}}(\tau)$  – вектор «поляризации»

$$\vec{\mathcal{B}}(\tau) = \frac{e_0 c}{2\varepsilon} \left( \vec{H}(\tau) - \frac{\vec{\beta} \times \vec{E}(\tau)}{1 + \gamma^{-1}} \right). \quad (36.31)$$

Здесь  $\vec{E}(\tau)$  и  $\vec{H}(\tau)$  – электрическая и магнитная компоненты внешнего электромагнитного поля.

Решение уравнения (36.30) будем искать в виде

$$\overset{0}{\widetilde{J}}_E^{(+)}(y, \hbar) = (g(\tau))^{-1/4} |\nu, \tau(y)\rangle v(\tau), \quad (36.32)$$

где  $v(\tau)$  – двухкомпонентный спинор, подлежащий определению. С учетом (35.23) получим следующее уравнение на спинор  $v(\tau)$ :

$$\left( -i \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}} \rangle \right) v(\tau) = 0. \quad (36.33)$$

Отметим, что справедливость (36.28) следует из (36.32) и (35.21), и с учетом (36.25) справедливо (36.23). Таким образом, задача построения асимптотических решений  $\tilde{\Psi}_E(y, \hbar)$  уравнения (36.7) сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (36.33) по переменной  $\tau_1$  (переменная  $\tau_2$  играет роль параметра).

Приведем явный вид функции (36.18):

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_E(\vec{y}, \hbar) = & \left[ \Pi_+(\tau) + \frac{1}{2\varepsilon} \Pi_-(\tau) (\hbar^{1/2} \hat{Q}_1 + \hbar \hat{Q}_2) \right] \tilde{J}_E^{(+)}(y, \hbar) + \\ & + \hbar^{1/2} \left[ \Pi_+(\tau) + \frac{\hbar^{1/2}}{2\varepsilon} \Pi_-(\tau) \right] \tilde{J}_E^{(+)}(y, \hbar) + \hbar \Pi_+(\tau) \tilde{J}_E^{(+)}(y, \hbar). \end{aligned} \quad (36.34)$$

Таким образом, решение (36.34) содержит два произвольных спинора  $\tilde{J}_E^{(+)}(\vec{y}, \hbar)$ ,  $n = 1, 2$ , которые определяются из последующих ( $\text{mod } O(\hbar^{5/2})$ ) приближений. Согласно (36.32), главный член асимптотики в (36.34) имеет вид

$$\tilde{\Psi}_E(\vec{y}, \hbar) = \left\{ (g(\tau))^{-1/4} \Pi_+(\tau) v(\tau) | \nu, \tau \right\} \Big|_{\tau=\tau(y)}. \quad (36.35)$$

В заключение заметим, что, хотя в случае скалярных уравнений (например, Шрёдингера или Клейна–Гордона) асимптотическое решение ( $\text{mod } O(\hbar^{3/2})$ ) совпадает с главным членом асимптотики, в случае уравнения Дирака функции (36.35) и (36.34) существенно различаются. Это является характерной чертой матричных уравнений [16] и значительно усложняет процедуру получения локальной асимптотики ( $\text{mod } O(\hbar^{3/2})$ ) уравнения (36.7), равномерной во всем конфигурационном пространстве  $\mathbb{R}_q^3$ . Тем не менее, как мы покажем в дальнейшем, для получения квазиклассических условий квантования существенна конструкция только главного члена асимптотики (36.34).

### 36.2. Канонический оператор Маслова на семействе лагранжевых многообразий с комплексным ростком, отвечающий оператору Дирака во внешнем аксиально симметричном электромагнитном поле

Согласно общей теории комплексного ростка Маслова [31, 33], для построения равномерных квазиклассических асимптотик (определенных во всем конфигурационном пространстве) необходимо построить специальный оператор, который в случае неполномерных лагранжевых многообразий известен как канонический оператор с комплексной фазой.

Мы ограничим наше рассмотрение специальным классом инвариантных лагранжевых многообразий  $\Lambda^2(\omega)$ , построенных в разд. 32. В этом случае процедура построения канонического оператора существенно упрощается и сводится к построению рассмотренной ранее в части I конструкции канонического оператора с вещественной фазой на замкнутой кривой  $\Lambda^1(E_0, I_0)$  [14, 30].

Определим разбиение единицы, отвечающее атласу  $\{V_j\}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , покрывающему замкнутый контур  $\Lambda^1(\omega)$ ,  $\omega = (E_0, I_0)$ , т.е. набор бесконечно дифференцируемых функций  $e_j(\tau_1)$ , таких что

$$\text{supp } e_j(\tau_1) \subset V_j, \quad \sum_{j=1}^4 e_j(\tau_1) = 1$$

для всех  $\tau_1$ .

Рассмотрим две произвольные пересекающиеся карты  $V_{j_1}$  и  $V_{j_2}$  из канонического атласа  $A(\Lambda^1(\omega))$ . Пусть для определенности карта  $V_{j_1}$  – особая, а карта  $V_{j_2}$  – неособая. Индексом пересечения двух канонических карт  $(V_{j_1}, V_{j_2})$  называется число

$$\gamma(V_{j_1}, V_{j_2}) = \left( \text{inertex} \frac{\dot{q}_1}{\dot{p}_1}(\tau_1) \right) \Big|_{\tau_1 \in V_{j_1} \cap V_{j_2}}, \quad (36.36)$$

где дополнительно предполагается, что  $\gamma(V_{j_1}, V_{j_2}) = -\gamma(V_{j_2}, V_{j_1})$ . Обозначим через  $l(\overset{\circ}{\tau}_1, \tau_1)$  ориентированный против часовой стрелки путь в  $\Lambda^1(\omega)$ , по которому происходит интегрирование в (35.38) и (35.40). Пусть  $V_1, \dots, V_j$  – цепочка карт, упорядоченная порядком прохождения кривой  $l(\overset{\circ}{\tau}_1, \tau_1)$ , причем  $\overset{\circ}{\tau}_1 \in V_1$ ,  $\tau_1 \in V_j$ . Тогда величина, равная

$$\gamma_j[l(\overset{\circ}{\tau}_1, \tau_1)] = \gamma(V_1, V_2) + \dots + \gamma(V_{j-1}, V_j), \quad (36.37)$$

называется индексом Маслова кривой  $l(\overset{\circ}{\tau}_1, \tau_1)$ .

Обозначим через  $\mathcal{F}(\tau) \equiv \tilde{\mathcal{F}}(\varphi(\tau), \tau_1): \mathbb{R}_\tau^2 \rightarrow \mathbb{C}^4$  гладкую ограниченную вектор-функцию, где  $\varphi(\tau)$  определено в (35.31). Тогда, как отмечено в замечании 10, получим

$$\mathcal{F}(\tau)|_{\tau=\tau^j(y)} = \tilde{\mathcal{F}}(\varphi, \tau_1)|_{\tau_1=\tau_1^j(y)}.$$

Рассмотрим локальный предканонический оператор  $K_{\Lambda^2(\omega)}(\Omega_j)$ , который действует на функцию  $\mathcal{F}(\tau)$  по правилу:

1) в случае неособой карты  $\Omega_{j_2}$ ,  $j_2 = 1, 3$ ,

$$\left( K_{\Lambda^2(\omega)}(\Omega_{j_2}[\mathcal{F}(\tau)]) \right)(\vec{q}) = \left[ \exp \left( \frac{i\pi}{2} \gamma_{j_2}[l(\overset{\circ}{\tau}_1, \tau_1)] \right) |\nu, \tau_1\rangle \tilde{\mathcal{F}}(\varphi, \tau_1) \right] \Big|_{\tau_1=\tau_1^{j_2}(q_1)}; \quad (36.38)$$

2) в случае особой карты  $\Omega_{j_1}$ ,  $j_1 = 2, 4$ ,

$$\begin{aligned} \left( K_{\Lambda^2(\omega)}(\Omega_{j_1}[\mathcal{F}(\tau)]) \right)(\vec{q}) &= \frac{1}{\sqrt{-2\pi i \hbar}} \int dp_1 \times \\ &\times \left[ \exp \left( \frac{i\pi}{2} \gamma_{j_1}[l(\overset{\circ}{\tau}_1, \tau_1)] \right) \exp \left( \frac{i}{\hbar} p_1 q_2 \right) |\nu, \tau_1\rangle \tilde{\mathcal{F}}(\varphi, \tau_1) \right] \Big|_{\tau_1=\tau_1^{j_1}(p_1)}, \end{aligned} \quad (36.39)$$

где функции  $|\nu, \tau_1^{j_2}(q_1)\rangle$  и  $|\nu, \tau_1^{j_1}(p_1)\rangle$  определены в (35.38) и (35.40), соответственно. Введенный таким образом предканонический оператор обладает важным свойством: для любой пары карт  $\Omega_{j_1}$  и  $\Omega_{j_2}$  в области их пересечения справедливо равенство

$$\begin{aligned} \left( K_{\Lambda^2(\omega)}(\Omega_{j_2}[\mathcal{F}(\tau)]) \right)(\vec{q}) &= \left( K_{\Lambda^2(\omega)}(\Omega_{j_1}[\mathcal{F}(\tau)]) \right)(\vec{q}) + O(\hbar); \\ \vec{q} &\in \pi_q \Omega_{j_1} \cap \pi_q \Omega_{j_2}. \end{aligned} \quad (36.40)$$

Доказательство этого утверждения основано на методе стационарной фазы и приведено в Приложении Ж.

С помощью оператора  $K_{\Lambda^2(\omega)}(\Omega_j)$  и разбиения единицы, отвечающего атласу  $A(\Lambda^2(\omega))$ , построим канонический оператор  $K_{\Lambda^2(\omega)}$ , действующий на функцию  $\mathcal{F}(\tau)$  по правилу

$$\left( K_{\Lambda^2(\omega)}[\mathcal{F}(\tau)] \right)(\vec{q}) = \sum_j \left( K_{\Lambda^2(\omega)}(\Omega_j[e_j(\tau_1)\mathcal{F}(\tau)]) \right)(\vec{q}). \quad (36.41)$$

Оператор  $K_{\Lambda^2(\omega)}$  называется каноническим оператором на семействе лагранжевых многообразий с комплексным ростком  $[\Lambda^2(\omega), r^3(\Lambda^2(\omega))]$ . С помощью соотношения (36.40) можно с точностью до  $O(\hbar)$  показать, что канонический оператор не зависит, во-первых, от выбора разбиения единицы, отвечающего фиксированному атласу  $A(\Lambda^2(\omega))$ , и, во-вторых, от выбора канонического атласа  $A(\Lambda^2(\omega))$ .

Для удобства обозначим через  $\Phi_\nu(\tau_1, q_2, \varphi)$  набор функций

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(\tau_1, q_2, \varphi) = & \left( \exp \frac{i}{\hbar} \left[ I_0 \varphi + (E - E_0) \tau_1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{W(\tau_1)}{Z(\tau_1)} q_2^2 \right] \right) \Xi_\nu(q_2, \tau_1) \tilde{\mathcal{F}}(\varphi, \tau_1), \end{aligned} \quad (36.42)$$

где  $\Xi_\nu(q_2, \tau_1)$  определено в (35.39). Тогда соотношение (36.41) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left( K_{\Lambda^2(\omega)}[\mathcal{F}(\tau)] \right) (\vec{q}) & \equiv \left( K_{\Lambda^1(\omega)}[\Phi(\tau_1, q_2, \varphi)] \right) (\vec{q}) = \\ & = \sum_j \left( K_{\Lambda^1(\omega)}(V_j)[\Phi(\tau_1, q_2, \varphi)] \right) (\vec{q}) = \\ & = \sum_{j_2} \left[ \frac{e^{i\pi\gamma_{j_2}/2} e_{j_2}(\tau_1)}{\sqrt{|\dot{q}_1(\tau_1)|}} \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1}^{\tau_1} p_1(t) dq_1(t) \right) \Phi_\nu(\tau_1, q_2, \varphi) \right] \Big|_{\tau_1 = \tau_1^{j_2}(q_1)} + \\ & \quad + \sum_{j_1} \frac{1}{\sqrt{-2\pi i \hbar}} \int dp_1 \left\{ \frac{e^{i\pi\gamma_{j_1}/2} e_{j_1}(\tau_1)}{\sqrt{|\dot{p}_1(\tau_1)|}} \times \right. \\ & \quad \left. \times \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \left( \int_{\tau_1}^{\tau_1} p_1(t) dq_1(t) + p_1 \Delta q_1 \right) \right] \Phi_\nu(\tau_1, q_2, \varphi) \right\} \Big|_{\tau_1 = \tau_1^{j_1}(p_1)}. \end{aligned} \quad (36.43)$$

◇ Необходимо отметить, что в (36.43) параметр  $\tau_1$  выбирается в интервале  $\tau_1^0 \leq \tau_1 \leq \tau_1^0 + T_1$ . В результате получаем следующее ограничение на выбор функций  $\tau_1^{j_2}(q_1)$  и  $\tau_1^{j_1}(p_1)$ :  $\tau_1^0 \leq \tau_1^{j_1}(p_1) \leq \tau_1^0 + T_1$ ,  $\tau_1^0 \leq \tau_1^{j_2}(q_1) \leq \tau_1^0 + T_1$ .

Отметим, что в соотношении (36.43) в явном виде присутствует конструкция канонического оператора с вещественной фазой  $K_{\Lambda^1(\omega)}$  на семействе замкнутых кривых  $\Lambda^1(\omega)$  (см., например, разд. 6 части I). Это происходит благодаря специальному классу инвариантных лагранжевых торов  $\Lambda^2(\omega)$ .

Если мы воспользуемся тем свойством  $\delta$ -функции, что  $\delta(x - X(t)) = \delta(t - t(x))/|\dot{X}(t(x))|$ , где функции  $t(x)$  определяются уравнением (35.14), а также соотношениями

$$\arg \dot{Q}_1(\tau_1) = \pi\gamma_{j_2}[l(\tau_1^0, \tau_1)], \quad (36.44)$$

$$\arg \dot{P}_1(\tau_1) = \pi\gamma_{j_1}[l(\tau_1^0, \tau_1)], \quad (36.45)$$

то нетрудно получить следующее эквивалентное представление для  $K_{\Lambda^2(\omega)}$  (36.43):

$$\left( K_{\Lambda^2(\omega)}[\mathcal{F}(\tau)] \right) (\vec{q}) = \int_{\tau_1^0}^{\tau_1^0 + T_1} d\tau_1 \Psi(q, \tau_1, \hbar) \equiv \int_{\tau_1^0}^{\tau_1^0 + T_1} d\tau_1 \left\{ (e_1(\tau_1) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + e_3(\tau_1) \sqrt{\dot{Q}_1(\tau_1)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{\tau_1}^{\tau_1} P_1(t) dQ_1(t)\right) \delta(q_1 - Q_1(\tau_1)) + \\
& + \frac{e_2(\tau_1) + e_4(\tau_1)}{\sqrt{-2\pi i \hbar}} \sqrt{\dot{P}_1(\tau_1)} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left[ \int_{\tau_1}^{\tau_1} p_1(t) dQ_1(t) + \right. \right. \\
& \left. \left. + P_1(\tau_1)(q_1 - Q_1(\tau_1)) \right] \right) \left. \right\} \Phi_\nu(\tau_1, q_2, \varphi). \tag{36.46}
\end{aligned}$$

Рассмотрим действие канонического оператора  $K_{\Lambda^2(\omega)}$  (5.46) на функцию  $\mathcal{F}(\tau) = (g(\tau_1))^{-1/4} \Pi_+(\tau) v(\tau)$ , где  $\Pi_+(\tau)$  и  $v(\tau)$  определены в (36.13) и (36.33), соответственно. В результате получим

$$\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar) = \left( K_{\Lambda^2(\omega)} \left[ \frac{\Pi_+(\tau) v(\tau)}{(g(\tau_1))^{1/4}} \right] \right) (\vec{q}, \hbar) = \int_{\tau_1}^{\tau_1 + T_1} d\tau_1 \overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \tau_1, \hbar). \tag{36.47}$$

Тогда функция  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  (36.47) обладает следующими свойствами:

1. Функция  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  локализована в окрестности классически допустимой области движения, т.е. в области проекции  $\Lambda^2(\omega)$  на конфигурационное пространство  $\mathbb{R}_q^3$ . В частности, она экспоненциально убывает по переменной  $q_2$  и имеет (при  $\nu = 0$ ) форму гауссова волнового пакета с центром в точке  $q_2 = 0$ . Асимптотическое поведение функции  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  возле каустики и в области тени описано в Приложении 3.

2. Если точка  $q \in \pi_q(\Lambda^2(\omega))$  (область «света»), то функция  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  ведет себя следующим образом:

а) если  $\vec{q} = \{(q_1(\tau_1), q_2, \varphi), \tau_1 \in \text{supp } e_{j_2}, \tau_1 \notin \text{supp } e_{j_1}\}$ , то функция  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  является суперпозицией функций (36.38) и, согласно (36.6) и (36.35), описывает главный член локального асимптотического решения уравнения Дирака в области проекции неособых карт  $\Omega_{j_2}$  на конфигурационное пространство;

б) если  $\vec{q} = \{(q_1(\tau_1), q_2, \varphi), \tau_1 \in \text{supp } e_{j_1}, \tau_1 \notin \text{supp } e_{j_2}\}$ , то функция  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  является суперпозицией функций (36.39) и описывает главный член локального асимптотического решения в области проекции  $\pi_q(\Omega_{j_1})$  фокальной карты  $\Omega_{j_2}$  на конфигурационное пространство  $\mathbb{R}_q^3$ ;

в) если  $\vec{q} \in \pi_q(\Omega_{j_1}) \cap \pi_q(\Omega_{j_2})$ , то функция  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  содержит, с одной стороны, оба типа функций (36.38) и (36.39). Однако, согласно (36.40), они совпадают друг с другом (с точностью до  $O(\hbar)$ ) в области пересечения карт  $\Omega_{j_1}$  и  $\Omega_{j_2}$ . С учетом соотношения  $\sum_{j=1}^4 e_j(\tau_1) = 1$  для всех  $\tau_1$  канонический оператор  $K_{\Lambda^2(\omega)}$  дает корректный способ вычисления локальной асимптотики.

◇ Из предположения, что переменная  $\varphi$  является циклической для функции Гамильтона (36.12) и (35.31) следует независимость детерминанта  $g = \det(\eta_{ab})$  от параметра  $\tau_2$  в соотношении (36.47).



### 36.3. Квазиклассические условия квантования семейства $[\Lambda^2(\omega), r^3(\Lambda^2(\omega))]$

Формула (36.47) дает локальное асимптотическое решение уравнения Дирака, которое (с точностью до  $O(\hbar)$ ) не зависит от выбора канонического атласа  $A(\Lambda^2(\omega))$  на  $\Lambda^2(\omega)$ , от выбора представления в области пересечения карт и от разбиения единицы. Однако, как можно заметить из (36.46), оно зависит от выбора начальной точки  $\overset{0}{\tau}_1$  на замкнутом контуре  $\Lambda^1(\omega)$ . Естественно потребовать, чтобы конструкция не зависела от выбора «начального времени»  $\overset{0}{\tau}_1$ . Это условие будет выполнено автоматически, если функция  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \tau_1, \hbar)$  будет  $T_1$ -периодической по  $\tau_1$ :

$$\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \tau_1 + T_1, \hbar) = \overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \tau_1, \hbar). \quad (36.48)$$

Кроме того, функция  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \tau_1, \hbar)$  должна удовлетворять условию  $2\pi$ -периодичности по отношению к переменной  $\varphi \pmod{2\pi}$

$$\overset{0}{\Psi}_E(q_1, q_2, \varphi + 2\pi, \tau_1, \hbar) = \overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \tau_1, \hbar). \quad (36.49)$$

В силу условий (36.48) и (36.49) канонический оператор  $K_{\Lambda^2(\omega)}$  определяет однозначную функцию  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$ . Из условий (4.3.1) и (36.49) следуют квазиклассические условия квантования параметрического по  $\omega = (E_0, I_0)$  семейства  $[\Lambda^2(\omega), r^3(\Lambda^2(\omega))]$ .

Прежде чем обсуждать эти условия квантования, сделаем следующие замечания.

Как следует из соотношений (35.31) и (36.31), зависимость вектора поляризации  $\vec{B}(\tau)$  от  $\tau_1$  и  $\tau_2$  такова, что  $\vec{B}(\tau) = \vec{B}(\varphi(\tau), \tau_1)$ . Кроме того, выполняются условия  $2\pi$ - и  $T_1$ -периодичности  $\vec{B}(\varphi(\tau) + 2\pi, \tau_1) = \vec{B}(\varphi(\tau), \tau_1)$ ,  $\vec{B}(\varphi(\tau), \tau_1 + T_1) = \vec{B}(\varphi(\tau), \tau_1)$ . Следовательно, вектор  $\vec{B}(\varphi, \tau_1)$  – двояко периодическая функция по переменным  $\varphi$  и  $\tau_1$ . Мы будем предполагать, что уравнение (36.33) допускает набор из двух линейно независимых решений Флоке  $v_\zeta(\tau) = \tilde{v}_\zeta(\varphi(\tau), \tau_1)$ ,  $\zeta = \pm 1$ , таких, что<sup>12</sup>

$$\tilde{v}_\zeta(\varphi(\tau) + 2\pi, \tau_1) = \tilde{v}_\zeta(\varphi(\tau), \tau_1); \quad (36.50)$$

$$\tilde{v}_\zeta(\varphi(\tau), \tau_1 + T_1) = e^{i\omega_\zeta^s T_1} v_\zeta(\varphi(\tau), \tau_1), \quad \text{Im } \omega_\zeta^s = 0; \quad (36.51)$$

$$\overset{+}{v}_{\zeta'} v_\zeta = \delta_{\zeta\zeta'}, \quad \sum_{\zeta} v_\zeta \overset{+}{v}_\zeta = 1. \quad (36.52)$$

◇ Все сказанное для вектора  $\vec{B}(\tau)$  остается справедливым для матрицы  $\Pi_+(\tau) = \tilde{\Pi}_+(\varphi(\tau), \tau_1)$ .

Найдем приращение фазы функций  $\sqrt{\dot{Q}_1(\tau_1)}$  и  $\sqrt{\dot{P}_1(\tau_1)}$  за время обхода контура  $\Lambda^1(\omega)$  против часовой стрелки. Согласно уравнению (36.37), мы имеем  $\gamma_j[l(\overset{0}{\tau}_1, \tau_1 + T_1)] = \gamma_j[l(\overset{0}{\tau}_1, \tau_1)] + \gamma[\Lambda^1(\omega)]$ . В нашем случае  $\gamma[\Lambda^1(\omega)] = 2$  и из соотношений (36.44), (36.45) следует

$$\sqrt{\dot{Q}_1(\tau_1 + T_1)} = e^{i\pi} \sqrt{\dot{Q}_1(\tau_1)}, \quad \sqrt{\dot{P}_1(\tau_1 + T_1)} = e^{i\pi} \sqrt{\dot{P}_1(\tau_1)}. \quad (36.53)$$

<sup>12</sup>Вопрос существования таких решений обсуждается в [38].

Теперь нетрудно получить условия, при которых соотношения (36.48) и (36.49) будут выполнены. Из явного вида функций  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \tau_1, \hbar)$  и (36.50) следует, что соотношение (36.49) приводит к квантованию интеграла движения  $I_0$ :

$$I_0 = \hbar l, \quad l = \overline{\pm 1, \pm \infty}. \quad (36.54)$$

С помощью (35.37), (36.51) и (36.53) соотношение (36.48) приводит к условию

$$\begin{aligned} \int_0^{T_1} P_1(t, E_0, I_0) \dot{Q}_1(t, E_0, I_0) dt + \hbar T_1 \left\{ E_1 - \Omega_1 \left( \nu + \frac{1}{2} \right) - \omega_\zeta^s \right\} = \\ = 2\pi \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right) + O(\hbar^2), \end{aligned} \quad (36.55)$$

где  $n = \overline{\pm 1, \pm \infty}$ ;  $\nu = \overline{0, \infty}$ ;  $\zeta = \pm 1$ . Условие (36.55), очевидно, будет выполнено, если параметры  $E_0$  и  $E_1$  определяются соотношениями

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{T_1} P_1(t, E_0, I_0) \dot{Q}_1(t, E_0, I_0) dt = \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (36.56)$$

$$E_1 = \Omega_1 \left( \nu + \frac{1}{2} \right) + \omega_\zeta^s. \quad (36.57)$$

Из (36.56) и (36.57) совместно с (36.51) можно получить с точностью до  $O(\hbar^2)$  спектральную последовательность энергетических уровней

$$E_{N,l}(\hbar) = E_{n,l,\nu,\zeta}(\hbar) = E_{n,l}^{(0)}(\hbar) + E_{n,l,\nu,\zeta}^{(1)} + O(\hbar^2). \quad (36.58)$$

где квантовые числа  $l = l(\hbar)$  и  $n = n(\hbar)$  должны удовлетворять условиям

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \hbar l(\hbar) = I_0^{\text{cl}}, \quad \lim_{\hbar \rightarrow 0} \hbar n = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Lambda^1(E_0^{\text{cl}}, I_0^{\text{cl}})} p_1 dq_1.$$

В этом случае серия собственных значений (36.58) в пределе  $\hbar \rightarrow 0$  соответствует релятивистскому электрону, движущемуся по классической траектории, заматающей инвариантный тор  $\Lambda^2(E_0^{\text{cl}}, I_0^{\text{cl}})$  с заданными значениями энергии  $E_0^{\text{cl}}$  и момента  $I_0^{\text{cl}}$ .

Можно показать, что в разложении по  $\hbar$  с точностью до  $O(\hbar^2)$  условия квантования (36.56) и (36.57) эквивалентны условию квантования типа Бора–Зоммерфельда [152]:

$$\frac{1}{2\pi \hbar} \oint_{\Lambda^1(E, I = \hbar l(\hbar))} P_1(t, E, I) dQ_1(t, E, I) = \frac{T_1}{2\pi} \left\{ \Omega_1 \left( \nu + \frac{1}{2} \right) + \omega_\zeta^s \right\} + \left( n(\hbar) + \frac{1}{2} \right) \quad (36.59)$$

для спектрального параметра  $E$ , где  $E = E_0 + \hbar E_1 + O(\hbar^2)$ . Уравнение (36.59) представляет основной результат, полученный в этом разделе.

Особо отметим присутствие пополюцелой добавки в условиях квантования (36.59). Она появляется благодаря нетривиальному равенству  $\gamma[\Lambda^1(\omega)] = \text{ind } \Lambda^1(\omega)$ , где  $\text{ind } \Lambda^1(\omega)$  – индекс Маслова замкнутого контура  $\Lambda^1(\omega)$ . Хорошо известно, что условия квантования для семейства полномерных инвариантных

торов  $\Lambda^n$  содержат индекс Маслова ориентированных контуров, образующих базис на многообразии  $\Lambda^n$  [15, 16]<sup>13</sup>. Однако, в отличие от полномерного случая, индекс Маслова может быть формально исключен из условий квантования семейства неполномерных торов  $\Lambda^k$ ,  $k < n$ . Рассмотрим пример, подтверждающий это утверждение. В уравнении (36.59) переобозначим характеристический показатель Флоке  $\Omega_1$  и главное квантовое число:  $\Omega_1 = \tilde{\Omega}_1 - 2\pi/T_1$ ,  $n(\hbar) = \tilde{n}(\hbar) + \nu$ . Тогда условие (36.59) примет вид

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Lambda^1} p_1 dq_1 = \frac{T_1}{2\pi} \left\{ \tilde{\Omega}_1 \left( \nu + \frac{1}{2} \right) + \omega_\zeta^s \right\} + \tilde{n}(\hbar), \quad (36.60)$$

где, в отличие от (35.37), характеристические показатели Флоке нормированы условием

$$\arg z(\tau_1 + T_1) = \arg z(\tau_1) + \tilde{\Omega}_1 T_1 - 2\pi. \quad (36.61)$$

Пусть условия (36.54) и (36.55) выполнены. Тогда при каждом фиксированном  $\hbar$  семейство инвариантных лагранжевых торов  $\Lambda^2(\omega)$  с комплексным ростком  $r^3(\Lambda^2(\omega))$  квантуется, т.е. появляется дискретный набор геометрических объектов  $[\Lambda^2(\omega_{n,l}), r^3(\Lambda^2(\omega_{n,l}))]$ , где  $\omega_{n,l} = (E_{n,l}^0(\hbar), \hbar l(\hbar))$ . На каждом из них определен канонический оператор  $K_{\Lambda^2(\omega_{n,l})}$  с комплексной фазой. С его помощью строится набор собственных функций  $\overset{0}{\Psi}_{E_{N,l}}(\vec{q}, \hbar) = \overset{0}{\Psi}_{E_{n,l}, \nu, \zeta}(\vec{q}, \hbar)$ , отвечающий набору собственных значений (36.58). Таким образом, получена квазиклассическая спектральная серия  $[\overset{0}{\Psi}_{E_{N,l}}(\vec{q}, \hbar), E_{N,l}(\hbar)]$  оператора Дирака, отвечающая семейству  $[\Lambda^2(\omega_{n,l}), r^3(\Lambda^2(\omega_{n,l}))]$ .

Мы уже отмечали, что каждая функция  $\overset{0}{\Psi}_{E_{n,l}, \nu, \zeta}(\vec{q}, \hbar)$  локализована в окрестности проекции  $\Lambda^2(\omega_{n,l})$  на конфигурационное пространство. Кроме того, необходимо отметить, что при подходящем выборе нормировочной константы  $N_0$  они удовлетворяют условию (30.5) и, следовательно, образуют ортонормированный набор состояний. Опуская несущественные детали, приведем доказательство этого факта.

Нетрудно показать, что функции  $\Xi_\nu(q_2, \tau_1)$  (35.39) удовлетворяют нормировочному условию

$$\int dq_2 \Xi_{\nu'}^*(q_2, \tau_1) \Xi_\nu(q_2, \tau_1) = \delta_{\nu\nu'} (\pi\hbar)^{1/2} \quad (36.62)$$

и образуют полный набор состояний. Последнее следует из полноты и ортонормированности функций Эрмита  $u_\nu(\zeta) = c_\nu \exp(-\zeta^2/2) H_\nu(\zeta)$ . Используя метод стационарной фазы и соотношения (36.52) и (36.62), можно получить

$$\begin{aligned} \langle \overset{0}{\Psi}_{E_{N',l'}} | \overset{0}{\Psi}_{E_{N,l}} \rangle_D = N_0^2 & \left[ 2\pi \sqrt{\pi\hbar} \delta_{ll'} \delta_{\nu\nu'} \delta_{\zeta\zeta'} \int_0^T d\tau_1 \{ (e_1 + e_3)^2 + \right. \\ & \left. + (e_2 + e_4)^2 + 2(e_1 + e_3)(e_2 + e_4) \} e^{i\Delta E \tau_1 / \hbar} + O(\hbar) \right]. \quad (36.63) \end{aligned}$$

Поскольку  $\sum_{j=1}^4 e_j(\tau_1) = 1$ , выражение в фигурных скобках равно единице. Кроме

<sup>13</sup>Смотри также [147–151], где дается интерпретация индекса Маслова.

того, когда  $l = l'$ ,  $\nu = \nu'$ ,  $\zeta = \zeta'$ , мы получим

$$\Delta E = \frac{\partial E_{n,l}^{(0)}(\hbar)}{\partial(\hbar n(\hbar))}(n - n') + O(\hbar^2). \quad (36.64)$$

Но из (36.56) следует  $\partial E_{n,l}^{(0)}(\hbar)/\partial(\hbar n(\hbar)) = 2\pi/T_1^{14}$ .

Таким образом, соотношение (36.63) принимает вид

$$\langle \overset{\circ}{\Psi}_{E_{N',l'}} | \overset{\circ}{\Psi}_{E_{N,l}} \rangle_D = N_0^2 \left[ 2T_1 \pi \sqrt{\pi \hbar} \delta_{NN'} \delta_{ll'} + O(\hbar) \right]. \quad (36.65)$$

Полагая здесь  $N_0 = [2T_1 \pi^{3/2} \hbar^{1/2}]^{-1/2}$ , получим (30.5).

### 37. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака в полях специальных конфигураций

В этом разделе мы рассмотрим два примера трехмерных релятивистских систем, допускающих семейства двумерных инвариантных торов. Первый связан с полностью интегрируемым движением в кулоновском поле. Хотя спектральная проблема для оператора Дирака в кулоновском поле решается точно, на этом примере сравнением квантовых чисел можно выделить часть точного спектра, которая соответствует движению электрона вдоль двумерных лагранжевых торов.

Во втором примере рассматривается случай частично интегрируемой системы, которая описывает движение электрона в аксиально симметричном магнитном поле. Эта система допускает семейство двумерных инвариантных торов, окружающих замкнутые стабильные периодические окружности.

Заметим, что квазиклассические спектральные серии, отвечающие неполномерным лагранжевым торам, для операторов Шрёдингера, Паули и Клейна–Гордона в полях специальных конфигураций получены в [33, 139, 153–155].

#### 37.1. Квантование инвариантных лагранжевых торов в кулоновском поле

Гамильтониан в кулоновском поле с потенциалом  $\Phi = Ze_0/\rho$ , имеет вид

$$\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{q}) = -\frac{Ze_0^2}{\rho} + c \sqrt{p_\rho^2 + \frac{p_\theta^2}{\rho^2} + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2 \sin^2 \theta} + m^2 c^2} = -\frac{Ze_0^2}{\rho} + \varepsilon. \quad (37.1)$$

Хорошо известно, что при условии

$$A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0, \quad B^2 > AC, \quad (37.2)$$

где

$$A = m^2 c^2 - \frac{E_0^2}{c^2}, \quad B = \frac{Ze_0^2 E}{c^2}, \quad C = I_0^2 - \frac{Z^2 e_0^4}{c^2}, \quad I_0 = p_\varphi, \quad (37.3)$$

система Гамильтона (30.2) допускает семейство инвариантных двумерных торов. Они лежат в координатной плоскости  $\mathcal{T} = \{(\vec{p}, \vec{q}) : p_\theta = 0, \theta = \pi/2\}$  и имеют вид (35.26)–(35.28), где

$$\Lambda^1(E_0, I_0) = \left\{ (p_\rho, \rho) : -\frac{Ze_0^2}{\rho} + c \sqrt{p_\rho^2 + \frac{I_0^2}{\rho^2} + m^2 c^2} = E_0 \right\}. \quad (37.4)$$

<sup>14</sup>Доказательство этого соотношения приведено, например, в [156].

Проекция  $\Lambda^2(\omega)$  на конфигурационное пространство, определяющая классически допустимую область движения, лежит в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ) и образует кольцо, ограниченное двумя циклами каустик

$$S_{\pm}^1(E_0, I_0) = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : \rho = R_{\pm}(E_0, I_0), \theta = \frac{\pi}{2}, \varphi \in [0, 2\pi] \right\}, \quad (37.5)$$

где  $R_{\pm}$  – классические точки поворота ( $\dot{\rho}(R_{\pm}) = 0$ ):

$$R_{\pm} = \frac{B}{A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}. \quad (37.6)$$

Далее полезно выразить энергию  $E_0$  в терминах адиабатических инвариантов, которые в нашем случае имеют вид

$$I_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{\varphi} d\varphi = I_0, \quad I_{\rho} = \frac{1}{\pi} \int_{R_-}^{R_+} p_{\rho} d\rho = \frac{B}{\sqrt{A}} - \sqrt{C}. \quad (37.7)$$

Тогда получим

$$E_0(I_{\rho}, I_{\varphi}) = mc^2 \left[ 1 + \frac{Z^2 e_0^4}{c^2 (I_{\rho} + \sqrt{I_{\varphi}^2 - Z^2 e_0^4 / c^2})^2} \right]^{-1/2}. \quad (37.8)$$

Продифференцировав (37.8) по  $I_{\rho}$  и  $I_{\varphi}$ , получим выражения для радиальной и орбитальной частот, соответственно,

$$\omega_{\rho} = \frac{\partial E_0}{\partial I_{\rho}} = \frac{A^{3/2}}{Z e_0^2 m^2}, \quad (37.9)$$

$$\omega_{\varphi} = \frac{\partial E_0}{\partial I_{\varphi}} = \frac{I_0 \omega_{\rho}}{\sqrt{C}}. \quad (37.10)$$

Согласно условиям квантования (36.54) и (36.56), мы должны положить адиабатические инварианты (37.7) равными

$$I_{\varphi} = \hbar l(\hbar), \quad I_{\rho} = \hbar \left( n(\hbar) + \frac{1}{2} \right). \quad (37.11)$$

С помощью (37.8) получим следующее выражение для  $E^{(0)}$

$$\begin{aligned} E_{n,l}^{(0)}(\hbar) &= E_0 \left[ \hbar \left( n(\hbar) + \frac{1}{2} \right), \hbar l(\hbar) \right] = \\ &= mc^2 \left[ 1 + \frac{Z^2 e_0^4}{c^2 \left( \hbar \left( n(\hbar) + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\hbar^2 l^2(\hbar) - Z^2 e_0^4 / c^2} \right)^2} \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (37.12)$$

Вычислим теперь энергетическую поправку  $E_{n,l,\nu,\zeta}^1(\hbar)$ , определенную в (36.57). В нашем случае редуцированная система в вариациях (35.34) имеет вид

$$\left\{ \frac{d}{d\tau_1} - \frac{c^2}{\varepsilon \rho^2(\tau_1)} \begin{pmatrix} 0 & -I_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} W(\tau_1) \\ Z(\tau_1) \end{pmatrix} = 0. \quad (37.13)$$

Решения Флоке  $Z(\tau_1)$  уравнения (37.13) можно представить в форме

$$Z(\tau_1) = \frac{\exp(i\alpha)}{\sqrt{I_0}} \exp\left(iI_0 \int_{\tau_1}^{\tau_1} \frac{c^2}{\varepsilon\rho^2(\tau_1)} d\tau_1\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (37.14)$$

Для характеристического показателя Флоке, определенного в (35.36) и (35.37), получим

$$\Omega_1 = \frac{I_0}{T_1} \int_0^{T_1} \frac{c^2}{\varepsilon\rho^2(\tau_1)} d\tau_1 = \omega_\varphi. \quad (37.15)$$

Здесь  $T_1$  – период вращения вдоль замкнутого контура  $\Lambda^1(E_0, I_0)$ , равный

$$T_1 = \frac{2}{c^2} \int_{R_-}^{R_+} d\rho \frac{\varepsilon}{\sqrt{-A + 2B/\rho - C/\rho^2}} = \frac{2\pi}{\omega_\rho}. \quad (37.16)$$

Теперь определим частоту  $\omega_\zeta^s$ ,  $\zeta = \pm 1$ , описывающую взаимодействие электронного спина с внешним полем. В кулоновском поле вектор поляризации (36.31) равен

$$\vec{\mathcal{B}}(\tau_1) = (0, 0, \mathcal{B}(\tau_1)), \quad \text{где} \quad \mathcal{B}(\tau_1) = \frac{Ze_0^2 c^2 I_0}{2\varepsilon^2(1 + \gamma^{-1})\rho^3(\tau_1)}.$$

В этом случае уравнение (36.33) допускает следующий набор решений Флоке:

$$v_\zeta(\tau_1) = \exp\left\{-i\zeta \int_{\tau_1}^{\tau_1} \mathcal{B}(\tau_1) d\tau_1\right\} u_\zeta, \quad \zeta = \pm 1, \quad (37.17)$$

где  $u_+ = (10)^\top$ ,  $u_- = (01)^\top$ . Из (37.17) получим выражение для характеристического показателя Флоке

$$\omega_\zeta^s = \frac{\zeta}{T_1} \int_0^{T_1} \mathcal{B}(\tau_1) d\tau_1 = \frac{\zeta}{2} \omega_\rho \left(-1 + \frac{I_0}{\sqrt{C}}\right). \quad (37.18)$$

После подстановки (37.15) и (37.18) в (36.57) получим

$$E_{n,l,\nu,\zeta}^{(1)}(\hbar) = \omega_\varphi \left\{ \nu + \frac{1}{2}(1 + \zeta) \right\} - \frac{\zeta}{2} \omega_\rho.$$

Используя (36.58) и (37.12), мы получим следующее выражение (с точностью до  $O(\hbar^2)$ ) для квазиклассического энергетического спектра

$$\begin{aligned} E_{n,l,\nu,\zeta}(\hbar) &= E_0 \left[ \hbar \left\{ n(\hbar) + \frac{1-\zeta}{2} \right\}, \hbar \left\{ l(\hbar) + \nu + \frac{1+\zeta}{2} \right\} \right] + O(\hbar^2) = \\ &= mc^2 \left[ 1 + \frac{Z^2 e_0^4 / c^2}{\left( \hbar \left\{ n(\hbar) + \frac{1-\zeta}{2} \right\} + \sqrt{\hbar^2 \left\{ l(\hbar) + \nu + \frac{1+\zeta}{2} \right\}^2 - \frac{Z^2 e_0^4}{c^2}} \right)^2} \right]^{-1/2} + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (37.19)$$

Полученная формула позволяет установить соответствие между квантовыми числами точного и квазиклассического спектров. Пусть  $n_\rho$  и  $n_l$  обозначают, соответственно, радиальное и орбитальное квантовые числа, используемые в точной формуле для спектра водородоподобного атома. Тогда, положив  $n_\rho \sim 1/\hbar$   $n_l \sim 1/\hbar$ , мы получим

$$n_\rho = n + \frac{1}{2}(1 - \zeta), \quad n_l = l + \nu. \quad (37.20)$$

Таким образом, показано, что в кулоновском поле высоковозбужденная область спектра по орбитальному  $n_l$  и радиальному  $n_\rho$  квантовым числам отвечает при  $\hbar \rightarrow 0$  движению релятивистского электрона вдоль квантованных двумерных лагранжевых торов. Отметим, что, хотя выражение (37.19) было получено в предположении больших  $n(\hbar) \sim 1/\hbar$ , тем не менее, полагая формально  $\hbar n(\hbar) = O(\hbar)$  (т.е. рассматривая малые  $n$ ), мы получим квазиклассические спектральные серии (37.24), отвечающие движению электрона вдоль замкнутой кривой (см. также [156]).

### 37.2. Асимптотические серии собственных значений оператора Дирака в аксиально симметричном магнитном поле с мягкой фокусировкой, отвечающие движению электрона вдоль двумерных лагранжевых торов, окружающих устойчивую орбиту

Рассмотрим движение релятивистского электрона в неоднородном магнитном поле, потенциал которого в цилиндрических координатах  $\vec{q} = (\rho, \varphi, z)$  имеет вид

$$\Phi = \mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}_z = 0, \quad \mathcal{A}_\varphi = \frac{b\rho^{2-q}}{2-q} \left[ 1 + \frac{q(2-q)}{2} \frac{z^2}{\rho^2} \right], \quad (37.21)$$

где  $q$  – параметр фокусировки,  $0 < q < 1$ , а  $b = \text{const}$ . Классический гамильтониан в поле (37.21) имеет вид

$$\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{q}) = c\sqrt{p_\rho^2 + \rho^{-2} \left( p_\varphi - \frac{e_0}{c} \mathcal{A}_\varphi \right)^2 + p_z^2 + m^2 c^2}, \quad (37.22)$$

и, как следует из (30.2), в области фазового пространства  $\mathcal{T} = \{(\vec{p}, \vec{q}) : p_z = z = 0\}$  определяет семейство инвариантных двумерных лагранжевых торов, описываемых системой канонических уравнений

$$\dot{\rho} = \frac{c^2}{E_0} p_\rho, \quad \dot{p}_\rho = \frac{\mathcal{P}_\varphi}{\rho} \left( \frac{c^2 \mathcal{P}_\varphi}{E_0 \rho^2} + \frac{e_0 c}{E_0} H(\rho) \right), \quad (37.23)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{c^2 \mathcal{P}_\varphi}{E_0 \rho^2}, \quad p_\varphi = I \quad (37.24)$$

с начальными условиями  $\rho(0) = \rho_0$ ,  $p_\rho(0) = p_{\rho 0}$ ,  $\varphi(0) = \tau_2 \pmod{2\pi}$ . Здесь  $\mathcal{P}_\varphi = I - (e_0/c)[\rho^{2-q}/(2-q)]$  и  $H(\rho) = b/\rho^q$  – амплитуда магнитного поля в точке  $\rho$ . Уравнения (37.23) и (37.24) интегрируются в квадратурах, если использовать интеграл энергии  $E_0^2/c^2 = m^2 c^2 + p_\rho^2 + \rho^{-2} \mathcal{P}_\varphi^2$ . В результате получим

$$p_\rho(\tau_1) = \sqrt{\frac{E_0^2}{c^2} - m^2 c^2 - \frac{\mathcal{P}_\varphi^2(\tau_1)}{\rho^2(\tau_1)}}, \quad \varphi(\tau) = \frac{c^2}{E_0} \int_0^{\tau_1} \frac{\mathcal{P}_\varphi(t)}{\rho^2(t)} dt + \tau_2, \quad (37.25)$$

где функция  $\rho(\tau_1)$  полностью определяется соотношением

$$\tau_1 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{E_0}{c^2} \frac{d\rho}{p_\rho(\rho)}.$$

Период  $T_1$  функции  $\rho(\tau_1)$  равен

$$T_1 = 2 \int_{R_-(E_0, I_0)}^{R_+(E_0, I_0)} \frac{E_0}{c^2} \frac{d\rho}{p_\rho(\rho)},$$

где  $R_\pm(E_0, I_0)$  – корни уравнения  $p_\rho(\rho) = 0$  при заданных значениях  $E_0$  и  $I_0$ .

В общем случае система в вариациях (35.34), отвечающая семейству лагранжевых торов (37.23) и (37.24), не интегрируется. Мы ограничим наше рассмотрение лагранжевыми торами, окружающими замкнутую орбиту системы (37.23) и (37.24) и лежащими в малой окрестности последних. В этом случае все вычисления можно провести в явном виде.

Из (37.23) и (37.24) следует, что траекторию электрона в плоскости  $xu$  можно описать уравнениями

$$\ddot{\rho} + \frac{1}{\rho}(\dot{\rho}^2 - c^2\beta^2) = \frac{e_0c}{E_0} H(\rho) \sqrt{c^2\beta^2 - \dot{\rho}^2}, \quad (37.26)$$

$$\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 = c^2\beta^2, \quad (37.27)$$

где  $c\beta$  – скорость движения электрона. Введем следующие обозначения:

$$\omega_0 = -\frac{e_0c}{E_0} H(\rho), \quad \varepsilon = \frac{1}{R} \sqrt{(\rho_0 - R)^2 + \frac{\dot{\rho}_0^2}{\omega_\Delta^2}}, \quad (37.28)$$

где  $\omega_\Delta = \sqrt{1-q}\omega_0$ ,  $\dot{\rho}_0 = \dot{\rho}(0) = c^2 p_{\rho 0} / E_0$ . Здесь  $\omega_0$  – частота вращения электрона по равномерной окружности  $l_R$ , радиус которой будет определен ниже. Постоянная  $\varepsilon$  характеризует отклонение траектории (37.26), (37.27) от  $l_R$  и ниже будет рассматриваться как безразмерный параметр разложения.

Решение уравнения (37.26) будем искать в виде разложения по параметру  $\varepsilon$ :

$$\rho(\tau_1) = R + \varepsilon\rho_1(\tau_1) + \varepsilon^2\rho_2(\tau_1) + O(\varepsilon^3). \quad (37.29)$$

Подставив (37.29) в (37.26), мы получим с точностью до  $O(\varepsilon^3)$

$$c\beta = \omega_0 R, \quad (37.30)$$

$$\rho(\tau_1) = R \left\{ 1 + \varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \left[ -\frac{3+q}{6} \cos^2 \theta + \frac{2q+3}{6} + A \sin \theta + B \cos \theta \right] \right\}. \quad (37.31)$$

Здесь  $\theta = \omega_\Delta \tau_1 - \alpha$ , угол  $\alpha$  определяется соотношением

$$\alpha = \arccos \left( \frac{\rho_0 - R}{\sqrt{(\rho_0 - R)^2 + \dot{\rho}_0^2 / \omega_\Delta^2}} \right), \quad (37.32)$$

$A$  и  $B$  – константы интегрирования, которые определяются из начальных условий и в нашем случае равны



$$\begin{aligned} A &= -\sin \alpha \left( \frac{3+q}{6} \cos^2 \alpha + \frac{2q+3}{6} \right), \\ B &= -\cos \alpha \left( \frac{3+q}{6} \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (37.33)$$

Для определения классической энергии  $E_0$  мы воспользуемся соотношениями (37.27), (37.28) и (37.30). В результате получим

$$E_0 = \sqrt{m^2 c^4 + e_0^2 H^2(R) R^2}. \quad (37.34)$$

Из уравнений (37.27), (37.30) и (37.31) следует выражение для функции  $\dot{\varphi}(\tau_1)$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(\tau_1) &= \omega_0 \left\{ 1 - \varepsilon \cos \theta + \varepsilon^2 \left[ \left( 2 - \frac{q}{3} \right) \cos^2 \theta - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( 1 - \frac{q}{6} \right) - A \sin \theta - B \cos \theta \right] \right\} + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (37.35)$$

Подставим в первое уравнение (37.24) угловой момент равным  $I = I_0 + I_1$ , где  $I_1 = O(\varepsilon^2)$ , и воспользуемся уравнением (37.30). Тогда

$$R(I_0) = \left( -\frac{e_0 b}{c I_0} \frac{1-q}{2-q} \right)^{1/(q-2)}, \quad (37.36)$$

$$\frac{c^2 I_1}{E_0 R^2} = -\omega_0 \frac{1-q}{2} \varepsilon^2. \quad (37.37)$$

Теперь рассмотрим выражение для главного члена энергетического спектра. Подставив (37.31) в (36.56), получим с точностью до  $O(\varepsilon^2)$  следующее условие:

$$\frac{1}{2} \frac{E_0}{c^2} \sqrt{1 - q \omega_0 \varepsilon^2} R^2 = \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (37.38)$$

Сравнив (37.37) и (37.38), получим

$$I_1 = -\hbar \sqrt{1-q} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (37.39)$$

Из (36.54) и (37.39) следует, что  $I_0$  квантуется следующим образом:

$$I_0(n, l) = \hbar l + \hbar \sqrt{1-q} \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (37.40)$$

С другой стороны, из (37.36) и (37.40) мы получим правило квантования радиуса  $R(n, l)$  равновесной окружности  $l_R$ . В результате имеем

$$E_{n,l}^{(0)}(\hbar) = \sqrt{m^2 c^4 + e_0^2 H^2(R(n, l)) R^2(n, l)}, \quad (37.41)$$

где целые параметры  $l = l(\hbar)$  и  $n = n(\hbar)$  удовлетворяют условию  $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \hbar l(\hbar) = I$ ,

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} E_{n,l}^{(0)}(\hbar) = E_0.$$

В качестве второго шага нашего рассмотрения мы должны вычислить показатель Флоке  $\Omega_1$  (см. (35.36), (35.37)). С этой целью рассмотрим уравнение (35.34) для вектора  $\chi(\tau_1) = \begin{pmatrix} W(\tau_1) \\ Z(\tau_1) \end{pmatrix}$ . В нашем случае

$$\dot{\chi}(\tau_1) = G(\tau_1) \chi(\tau_1), \quad (37.42)$$

где

$$G(\tau_1) = \begin{pmatrix} 0 & e_0 q \dot{\varphi}(\tau_1) H(\rho(\tau_1)) / c \\ c^2 / E_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Разложим матрицу  $G(\tau_1)$  в ряд по  $\varepsilon$  с точностью до  $\varepsilon^2$  включительно. Для нахождения решений Флоке уравнения (37.42) с точностью до  $O(\varepsilon^3)$  применим теорию возмущений. В результате с помощью простых, но громоздких вычислений получим

$$\Omega_1 = \sqrt{q} \omega_0 \left[ 1 + \frac{q(1-q)(2-q)}{4(1-5q)} \varepsilon^2 \right] + O(\varepsilon^3). \quad (37.43)$$

Для определения  $\omega_\zeta^s$  необходимо рассмотреть уравнение (36.33). В аксиально симметричном магнитном поле с потенциалом (37.21) вектор поляризации (36.31) равен

$$\vec{B}(\tau_1) = \left( 0, 0, -\frac{e_0 c}{2E_0} H(\rho(\tau_1)) \right),$$

и уравнение (36.33) – линейная гамильтонова система с  $T_1$ -периодическими коэффициентами. Решение Флоке этой системы имеют характеристические показатели Флоке

$$\omega_\zeta^s = -\frac{\zeta}{T_1} \int_0^{T_1} \frac{e_0 c}{2E_0} H(\rho(\tau_1)) d\tau_1. \quad (37.44)$$

Из (37.44) имеем с точностью до  $O(\varepsilon^3)$

$$\omega_\zeta^s = \frac{\zeta}{2} \omega_0 + O(\varepsilon^3), \quad \zeta = \pm 1. \quad (37.45)$$

Просуммировав результаты, полученные выше, и используя соотношение  $\omega_0 = \partial E_0 / \partial I_0$  (которое следует из (37.34) и (37.36)), получим следующее выражение для квазиклассического спектра энергий:

$$\begin{aligned} E_{n,l+\zeta/2,\nu}(\hbar) = & \left\{ m^2 c^4 + e_0^2 H^2 \left[ R \left( n, l + \frac{\zeta}{2} \right) \right] R^2 \left( n, l + \frac{\zeta}{2} \right) - \right. \\ & \left. - 2e_0 c H \left[ R \left( n, l + \frac{\zeta}{2} \right) \right] \hbar \sqrt{q} \left( \nu + \frac{1}{2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{c^2}{R^2 \left( n, l + \zeta/2 \right)} \frac{q \sqrt{q(1-q)(2-q)}}{1-5q} \hbar^2 \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \right\}^{1/2} + O(\varepsilon^3) + O(\hbar^2), \end{aligned} \quad (37.46)$$

где  $R(n, l + \zeta/2) \equiv R(I_0(n, l + \zeta/2))$ . Аналогично предыдущему примеру, положим в (37.46) формально  $\hbar(n(\hbar)) = O(\hbar)$  и получим серию энергетических уровней, отвечающую движению электрона вдоль равновесной окружности [156].

## ГЛАВА 6

## Квазиклассически сосредоточенные состояния и фаза Берри уравнения Дирака

### 38. Адиабатическая фаза Берри для волновой функции Дирака

Рассмотрим случай, когда оператор Дирака  $\hat{\mathcal{H}}_D(R(t))$  (31.1) зависит от  $N$  медленно меняющихся  $T$ -периодических функций времени  $(R_1(t), \dots, R_N(t)) = R(t)$ .

Поставим задачу Коши

$$[-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}(R(t))]\Psi_D(\vec{x}, t, \hbar) = O(\hbar^{3/2}), \quad (38.1)$$

удовлетворяющую начальному условию

$$\Psi_D(\vec{x}, t, \hbar)|_{t=t_0} = \Psi_{E_\nu, \zeta(R_0)}(\vec{x}, R_0, \hbar), \quad (38.2)$$

где в правой части (38.2) выбрана одна из асимптотических собственных функций мгновенного гамильтониана  $\hat{\mathcal{H}}_D(R_0) = \hat{\mathcal{H}}_D(R(t_0))$ , определенная равенством (31.13).

Решение этой задачи выражается через следующие объекты:

1) фазовую траекторию  $z = Z(t) = (\vec{P}(t), \vec{X}(t))$  – решение системы Гамильтона

$$\dot{z} = J\mathcal{H}_z(z, R(t)), \quad z|_{t=t_0} = \Lambda^0(R_0) = (\vec{P}(R_0), \vec{X}(R_0))^T; \quad (38.3)$$

2) функции  $|\nu, t\rangle$  – асимптотическое решение задачи Коши

$$\begin{aligned} [-i\hbar\partial_t + \hat{\lambda}(R(t))]| \nu, t \rangle &= O(\hbar^{3/2}), \\ | \nu, t \rangle |_{t=t_0} &= | \nu, R_0 \rangle, \quad \hat{\lambda}(R_0)| \nu, R_0 \rangle = E_\nu(R_0)| \nu, R_0 \rangle; \end{aligned} \quad (38.4)$$

3) спиноры  $v_\zeta(t)$  – решение задачи Коши для спинового уравнения

$$\left[ -i\frac{d}{dt} + \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}(t) \rangle \right] v_\zeta(t) = 0, \quad v_\zeta(t)|_{t=t_0} = v_\zeta(R_0), \quad (38.5)$$

где начальный спинор  $v_\zeta(R_0)$  определен в (31.8), а  $\vec{\mathcal{B}}(t)$  – вектор «поляризации»

$$\vec{\mathcal{B}}(t) = \frac{e_0 c}{2\varepsilon(t)} \left[ \vec{H}(\vec{x}, R(t)) - \frac{\vec{\beta}(t) \times \vec{E}(\vec{x}, R(t))}{1 + \gamma^{-1}(t)} \right] \Big|_{\vec{x}=\vec{X}(t)}, \quad (38.6)$$

$\vec{E}(\vec{x}, R(t))$  и  $\vec{H}(\vec{x}, R(t))$  – электрическая и магнитная компоненты электромагнитного поля,  $\vec{\beta}(t) = \dot{\vec{X}}(t)/c$ ;

4) операторы  $\hat{Q}_1(t)$  и  $\hat{Q}_2(t)$ , определенные формулами

$$\begin{aligned} \hat{Q}_1(t) &= \frac{c}{\sqrt{\hbar}} \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \hat{\delta}^1 \vec{P}(t) \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \hat{\delta}^1 \vec{P}(t) \rangle \right), \\ \hat{Q}_2(t) &= \frac{i}{2} \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\gamma \langle \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{\beta}} \rangle \right) + \end{aligned} \quad (38.7)$$

$$+\frac{c}{2\hbar}\left[\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\frac{\langle\vec{\beta},\hat{\delta}^2\vec{P}(t)\rangle}{1+\gamma^{-1}}-\langle\vec{\sigma},\hat{\delta}^2\vec{P}(t)\rangle\right]-\frac{c}{\sqrt{\hbar\varepsilon(t)}}\langle\vec{\beta},\hat{\delta}^1\vec{P}(t)\rangle\hat{Q}_1(t). \quad (38.8)$$

Здесь  $\hat{\delta}^k\vec{P}(t)$ ,  $k=1,2$ , означает  $k$ -ый член разложения оператора  $\hat{P}$  в ряд Тейлора по операторам  $\Delta\hat{p}=\hat{p}-\vec{P}(t)$  и  $\Delta\vec{x}=\vec{x}-\vec{X}(t)$ .

Тогда, как следует из результатов, полученных в гл. I, функция

$$\Psi_{D\nu,\zeta}(\vec{x},t,\hbar)=\left[\Pi_+(t)+\frac{1}{2\varepsilon(t)}\Pi_-(t)\sum_{k=1}^2\hbar^{k/2}\hat{Q}_k(t)\right]\mathcal{U}_\zeta(t)|\nu,t\rangle \quad (38.9)$$

является асимптотическим по  $(\text{mod } O(\hbar^{3/2}))$  решением задачи Коши (38.2) для уравнения (38.1).

Получим теперь асимптотическое разложение состояния (38.9) по формальному параметру  $T^{-1}$  (с точностью до  $O(T^{-1})$ ) при адиабатическом изменении вектора  $R(t)$ . Так же как и в скалярном случае (см. главу 5 части I), будем предполагать, что оператор Дирака  $\hat{H}_D(R(t))$  имеет невырожденный квазиклассический спектр энергий (31.11) при каждом фиксированном значении  $t$ .

Используя асимптотические формулы (I.36.10), нетрудно проверить, что выражение, стоящее в квадратных скобках в (38.9), с точностью до  $O(T^{-1})$  совпадает с соответствующим выражением формулы (31.13). Поскольку формула, описывающая адиабатическую эволюцию состояния  $|\nu,t\rangle$ , была получена нами ранее (см. (I.36.38)), то задача построения адиабатического приближения для функции Дирака (38.9) сводится к определению асимптотических по  $T^{-1}$  решений уравнения (38.5) для спинора  $\mathcal{U}_\zeta(t)$ .

Решение уравнения (38.5) в адиабатическом приближении дано в Приложении Л. Приведем конечный результат (с точностью до  $O(T^{-1})$ )

$$\mathcal{U}_\zeta(t)=\mathcal{U}_\zeta(R(t))\exp\left[-i\int_{t_0}^tdt\Omega_\zeta(R(t))+i\int_{t_0}^tdt\Omega_\zeta^1(R(t))\right]+O(T^{-1}), \quad (38.10)$$

где

$$\Omega_\zeta^1(R(t))=\mathcal{U}_\zeta^+(R(t))\left(i\frac{d}{dt}-\langle\vec{\sigma},\vec{B}^1(R(t))\rangle\right)\mathcal{U}_\zeta(R(t)) \quad (38.11)$$

и

$$\begin{aligned} \vec{B}^1(R(t))&=\frac{e_0}{2mc}\left[-\frac{1}{c}\frac{d\vec{X}_0(R(t))}{dt}\times\vec{E}(R(t))+\right. \\ &\left.+\sum_{k=1}^3\frac{1}{\Omega_k(R(t))}\text{Re}\left(\langle\partial_z\vec{H}(R(t)),a_k(R(t))\rangle\left\{a_k^*(R(t)),\frac{d}{dt}\overset{\circ}{Z}(R(t))\right\}\right)\right]. \end{aligned} \quad (38.12)$$

Согласно полученным формулам (I.36.38) и (38.10), волновая функция Дирака (38.9) примет (с точностью до  $O(T^{-1})$ ) следующий вид [146]:

$$\begin{aligned} \Psi_{D\nu,\zeta}(\vec{x},t,\hbar)&=\Psi_{E\nu,\zeta}(R(t))(\vec{x},R(t),\hbar)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^tdtE_{\nu,\zeta}(R(t))+\right. \\ &\left.+\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t\langle\vec{P}_0(R(t)),\dot{\vec{X}}_0(R(t))\rangle dt+i\sum_{k=1}^3\int_{t_0}^tdt\Omega_k^1(R(t))\left(\nu_k+\frac{1}{2}\right)+\right. \end{aligned}$$

$$+i \int_{t_0}^t dt \Omega_{\zeta}^1(R(t)) \Big] + O(T^{-1}), \quad (38.13)$$

где  $E_{\nu, \zeta}(R(t))$  – квазиклассические уровни энергии (31.11) мгновенного гамильтониана  $\hat{\mathcal{H}}_D(R(t))$ , отвечающие собственной функции  $\Psi_{E_{\nu, \zeta}(R(t))}(\vec{x}, \hbar)$  (31.13). Обозначив

$$\gamma_{\zeta}(C) = \oint_C^+ \mathcal{U}_{\zeta}(R) \mathcal{T}_{\zeta}^{(i)}(R) dR_i, \quad (38.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\zeta}^{(i)}(R) = & i \frac{\partial v_{\zeta}(R)}{\partial R_i} + \frac{e_0}{2mc} \left\langle \vec{\sigma}, \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}_0(R)}{\partial R_i} \times \vec{E}(R) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\Omega_k(R)} \operatorname{Re} \left( \langle \partial_z \vec{H}(R), a_k(R) \rangle \left\{ a_k^*(R), \frac{\partial \dot{Z}(R)}{\partial R_i} \right\} \right) \right] \right\rangle v_{\zeta}(R), \end{aligned} \quad (38.15)$$

из формул (38.15) и

$$\Psi_{\nu}(T) = \exp(i\gamma_{\nu}(C)) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt E_{\nu}(R(t)) \right] \Phi_{\nu}(R(0)), \quad (38.16)$$

для фазы Берри получим

$$\gamma_D(C) = \gamma_{\nu}(C) + \gamma_{\zeta}(C). \quad (38.17)$$

Таким образом, в квазиклассическом траекторно-когерентном приближении в течение адиабатической эволюции волновой функции  $\Psi_{D\nu}$  вдоль замкнутого контура  $C$  в пространстве параметров фаза Берри состоит из двух частей. Одна из них – фаза  $\gamma_{\nu}(C)$  (I.36.40) – индуцируется в процессе адиабатического движения вдоль замкнутой кривой  $C$  нульмерного лагранжева многообразия с комплексным ростком (т.е. геометрического объекта  $[\Lambda^0(R), r^3(\Lambda^0(R))]$ ) и определяется скалярной частью волновой функции Дирака, т.е. функцией  $|\nu, R\rangle$ . Вторая часть фазы –  $\gamma_{\zeta}(C)$  – обусловлена адиабатическим переносом вектора спина (спинора  $v_{\zeta}(R)$ ) вдоль замкнутого контура  $C$  и определяется спинорной частью функции Дирака.

### 39. Фаза Берри для релятивистской заряженной частицы со спином во внешнем периодическом электромагнитном поле

Пусть электромагнитное поле задано потенциалами вида

$$A_0(t) = \frac{\mu(t)}{2} (\vec{r})^2, \quad \vec{A}(t) = \frac{1}{2} \vec{H}(t) \times \vec{r}, \quad (39.1)$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, а  $\mu(t) < 0$ ,  $\vec{H}(t)$  – набор произвольных  $T$ -периодических функций, определяющих адиабатическую эволюцию квантовой системы. Мгновенное состояние квантовой системы характеризуется набором параметров  $R = (\mu, \vec{H})$ .

Для потенциала (39.1) магнитная компонента поля совпадает с вектором  $\vec{H}(t)$ , а электрическая равна  $\vec{E}(t) = -\dot{\vec{H}}(t)/2c - \mu(t)\vec{r}$ . Классическое движение электрона в этом случае описывается системой уравнений

$$\dot{\vec{r}} = \frac{c^2}{\varepsilon(t)}\vec{\mathcal{P}}, \quad \dot{\vec{p}} = -e\mu(t)\vec{r} + \frac{ec}{2\varepsilon(t)}\vec{\mathcal{P}} \times \dot{\vec{H}}(t), \quad (39.2)$$

где  $\vec{\mathcal{P}} = \vec{p} - (e/c)\vec{A}(t)$  – кинетический импульс,  $\varepsilon(t) = \sqrt{c^2\vec{\mathcal{P}}^2 + m^2c^4}$ , а  $e = -e_o$  – заряд электрона. Как видно из (39.2), возможна лишь единственная точка покоя  $\Lambda^0 = (\vec{p}_0 = 0, \vec{r}_0 = 0)$ . Систему уравнений (31.5) для определения собственных векторов  $a(R) = \begin{pmatrix} \vec{W}(R) \\ \vec{Z}(R) \end{pmatrix}$  матрицы  $\mathcal{H}_{\text{var}}(R)$  в точке  $\Lambda^0$  можно представить в виде

$$\frac{e}{2mc}\vec{W} \times \vec{H} - \left( e\mu + \frac{e^2}{4mc^2}\vec{H}^2 \right)\vec{Z} + \frac{e^2}{4mc^2}\langle \vec{H}, \vec{Z} \rangle = i\Omega\vec{W}, \quad (39.3)$$

$$\vec{W} = im\Omega\vec{Z} + \frac{e}{2c}\vec{H} \times \vec{Z}. \quad (39.4)$$

Подставив (39.4) в (39.3), получим уравнение на  $\vec{Z}$ :

$$\frac{ie\Omega}{c}\vec{H} \times \vec{Z} = (\Omega^2 - e\mu/m)\vec{Z}. \quad (39.5)$$

В пространстве параметров  $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$  перейдем к сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$H_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad H_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad H_3 = r \cos \theta.$$

Тогда решение уравнения (31.5) можно представить в виде

$$a_0(R) = \begin{pmatrix} i\sqrt{m\Omega_1(R)}\vec{n}_r(R) \\ 1 \\ \sqrt{m\Omega_1(R)}\vec{n}_r(R) \end{pmatrix}, \quad \Omega_1(R) = \sqrt{e\mu/m}; \quad (39.6)$$

$$a_\eta(R) = \begin{pmatrix} i \\ 2N(R)[\vec{n}_\theta(R) - i(-1)^{1+\eta}\vec{n}_\varphi(R)] \\ N(R)[\vec{n}_\theta(R) - i(-1)^{1+\eta}\vec{n}_\varphi(R)] \end{pmatrix}, \quad \eta = 1, 2; \quad (39.7)$$

$$\Omega_\eta = -(-1)^{1+\eta}\frac{er}{2mc} + \sqrt{\frac{e\mu}{m} + \frac{e^2r^2}{4m^2c^2}},$$

где  $N(R) = [e\mu/m + e^2r^2/(4m^2c^2)]^{-1/4}$ , а  $(\vec{n}_r, \vec{n}_\theta, \vec{n}_\varphi)$  – орты сферической системы координат. Тогда для фазы Берри  $\gamma_\nu(C)$  (I.36.40), индуцированной адиабатическим движением комплексного ростка, следует

$$\begin{aligned} \gamma_\nu(C) &= - \sum_{\eta=1}^2 (-1)^{1+\eta} \left( \nu_\eta + \frac{1}{2} \right) \int_{\Sigma(\partial\Sigma=C)} \langle d\vec{n}_\theta(R) \wedge d\vec{n}_\varphi(R) \rangle = \\ &= (\nu_2 - \nu_1) \int_{\Sigma(\partial\Sigma=C)} \frac{H_1 dH_2 \wedge dH_3 - H_2 dH_1 \wedge dH_3 + H_3 dH_1 \wedge dH_2}{|\vec{H}|^3}. \end{aligned} \quad (39.8)$$

Найдем спиновую часть фазы Берри  $\gamma_\zeta(C)$  в поле (39.1). Собственные векторы матрицы  $\langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}(R) \rangle$ , где в нашем случае  $\vec{\mathcal{B}}(R) = (e_0/2mc)\vec{H}$ , согласно (31.8), имеют вид

$$v_\zeta(R) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta \sqrt{1 + \zeta \cos \theta(R)} \exp(-i\varphi(R)/2) \\ \sqrt{1 - \zeta \cos \theta(R)} \exp(i\varphi(R)/2) \end{pmatrix}, \quad \zeta = \pm 1. \quad (39.9)$$

Тогда для фазы Берри  $\gamma_\zeta(C)$  по формуле (38.15) получим выражение

$$\gamma_\zeta(C) = -\frac{\zeta}{2} \int_C \frac{H_3 H_1 dH_2 - H_2 dH_1}{H (H_1^2 + H_2^2)},$$

которое по теореме Стокса можно записать в виде

$$\gamma_\zeta(C) = -\frac{\zeta}{2} \int_{\Sigma(\partial\Sigma=C)} \frac{H_1 dH_2 \wedge dH_3 - H_2 dH_1 \wedge dH_3 + H_3 dH_1 \wedge dH_2}{|\vec{H}|^3}. \quad (39.10)$$

Таким образом, из (39.8) и (39.10) следует, что полная фаза Берри дираковского электрона равна

$$\gamma_D(C) = \gamma_\nu(C) + \gamma_\zeta(C) = (\nu_2 - \nu_1 - \zeta/2) \int_{\Sigma(\partial\Sigma=C)} d\vec{\Sigma} \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|^3}. \quad (39.11)$$

Интеграл, стоящий в правой части (39.11), есть интеграл Гаусса, равный телесному углу  $\Omega(C)$ , под которым кривая  $C$  видна из начала координат. Поэтому окончательно имеем

$$\gamma_D(C) = \gamma_\nu(C) + \gamma_\zeta(C) = \left( \nu_2 - \nu_1 - \frac{\zeta}{2} \right) \Omega(C) \quad (39.12)$$

(см. также [157], где была получена фаза Берри в поле (39.1) для спинового уравнения (38.5)). В заключение мы хотим обратить внимание на то, что величина  $\gamma_D(C)$  отлична от нуля лишь при условии, что все компоненты магнитного поля  $\vec{H}(t)$  не равны нулю. Определяющим является и тот факт, что  $\mu(t) \neq 0$ , поскольку в противном случае, как следует из (39.6), исходное предположение о невырожденности спектра нарушается.

## Приложения

### Приложение А. Квазиклассическое траекторно-когерентное представление для уравнения Шрёдингера

Известно, что физические результаты квантовой теории не зависят от выбора представления её основных динамических переменных. Удачный выбор того или иного представления зачастую позволяет упростить решаемую проблему или полностью её решить. Для решения проблемы предельного перехода из квантовой механики в классическую построено [41] новое квазиклассическое траекторно-когерентное (ТК) представление по  $\text{mod } \hat{O}(\sqrt{\hbar})$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ . В этом представлении квантовые средние для произвольной наблюдаемой  $\hat{A}_\hbar(t)$ , имеющей классический аналог  $\hat{A}_\hbar(t) = A(\hat{p}, \hat{x}, t)$ , в пределе при  $\hbar \rightarrow 0$  переходят в классическую наблюдаемую  $A(\vec{p}, \vec{x}, t)$ , сдвинутую по траекториям соответствующей гамильтоновой системы  $\dot{z} = J\mathcal{H}_z(z, t)$ , где  $\mathcal{H}(z, t)$  – главный символ гамильтониана. В конкретных задачах важным, с точки зрения прикладных целей, является выяснение характера стремления квантово-механических средних к своему классическому пределу, т.е. получение соответствующих асимптотических разложений с любой степенью точности по  $\hbar$ ,  $\hbar \rightarrow 0$ . Для решения этой задачи построим квазиклассическое траекторно-когерентное представление для уравнения Шрёдингера

$$\{-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}(t)\}\Psi = 0, \quad \hat{\mathcal{H}}(t) = \mathcal{H}(\hat{z}, t, \hbar), \quad (\text{A.1})$$

с точностью до  $\hat{O}(\hbar^{(N+1)/2})$ ,  $N = \overline{1, \infty}$ .

Определим гильбертово пространство  $L_\hbar^t$  функций, зависящих от  $\vec{x}$  и  $\hbar$ , в котором за скалярное произведение двух функций  $\varphi_1(\vec{x}, t, \hbar)$  и  $\varphi_2(\vec{x}, t, \hbar)$  примем

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle_{L_\hbar^t} = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_1^*(\vec{x}, t, \hbar) \varphi_2(\vec{x}, t, \hbar) \rho_\hbar^{z_0}(\vec{x}, t) d^3x, \quad (\text{A.2})$$

где нормированная плотность меры  $\rho_\hbar^{z_0}(\vec{x}, t)$  равна

$$\rho_\hbar^{z_0}(\vec{x}, t) = \frac{N_\hbar^2}{|J(t, z_0)|} \exp\left\{\frac{2}{\hbar} \text{Im } S(\vec{x}, t)\right\}. \quad (\text{A.3})$$

Здесь комплексное действие  $S(\vec{x}, t)$  и нормировочный множитель  $N_\hbar$  определены в (I.11.5). Пространство  $L_\hbar^t$  (A.2) естественно считать пространством состояний квантовой системы (A.1), локализованных при  $\hbar \rightarrow 0$  в окрестности положения  $Z(t, z_0)$  классической частицы на фазовой траектории, поскольку  $\rho_\hbar^{z_0}(\vec{x}, t) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \delta(\vec{x} - \vec{X}(t))$  и в  $p$ -представлении:  $\hat{F}_{x \rightarrow p}^\hbar \rho_\hbar^{z_0}(\vec{x}, t) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \delta(\vec{p} - \vec{P}(t))$ , где  $\hat{F}_{x \rightarrow p}^\hbar$  –  $\hbar^{-1}$ -преобразование Фурье [16]. Зависимость меры от малого параметра приводит к тому, что гладкие функции  $\varphi(\vec{x}, t)$  можно аппроксимировать с заданной точностью по  $\hbar \rightarrow 0$  частичными суммами ряда Тейлора по степеням  $\Delta\vec{x}$ :

$$\varphi(\vec{x}, t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} d^k \varphi(t) + R_N(\vec{x}, t),$$

где  $d^k \varphi(t)$  –  $k$ -ый член разложения  $\varphi(\vec{X}(t, z_0) + \Delta\vec{x}, t)$  в ряд Тейлора по степеням  $\Delta\vec{x}$ , а для  $R_N(\vec{x}, t)$  справедлива оценка  $\|R_N(\vec{x}, t)\|_{L_\hbar^t} = O(\hbar^{(N+1)/2})$ . Она следует



из того, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho_{\hbar}^{z_0}(\vec{x}, t) \langle \vec{a}, \Delta \vec{x} \rangle^{N+1} d\vec{x} = O(\hbar^{(N+1)/2})$$

для любого постоянного вектора  $\vec{a}$  (сравни с (I.8.9)). С другой стороны, пространство  $L_{\hbar}^t$  содержит в качестве своих элементов функции  $\phi(\vec{x}, t, \hbar)$ , зависящие от  $\hbar \rightarrow 0$  сингулярно и имеющие в норме  $L_{\hbar}^t$  порядок  $O(1)$  при  $\hbar \rightarrow 0$ . Например,

$$\varphi(\vec{x}, t, \hbar) = \left( \frac{\langle \vec{a}(t), \Delta \vec{x} \rangle}{\sqrt{\hbar}} \right)^k.$$

Обозначим через  $\mathfrak{P}_{\hbar}$  множество полиномов по степеням  $\hbar^{-1/2} \Delta \vec{x}$  с коэффициентами, зависящими от  $t$ . Множество  $\mathfrak{P}_{\hbar}$  всюду плотно в  $L_{\hbar}^t$  и является естественной областью определения дифференциальных операторов, действующих в  $L_{\hbar}^t$ . Через  $\hat{O}(\hbar^{\alpha})$  будем обозначать оператор  $\hat{F}(\hbar) : L_{\hbar}^t \rightarrow L_{\hbar}^t$ , для которого на множестве  $\mathfrak{P}_{\hbar}$  выполняется оценка  $\|\hat{F}(\hbar)\phi\|_{L_{\hbar}^t} = O(\hbar^{\alpha})$  при  $\hbar \rightarrow 0$  равномерно по  $t = [0, T]$ . Заметим, что в указанном смысле операторы

$$\sqrt{\hbar} \nabla, \quad \langle \Delta \vec{x}, \nabla \rangle, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \dot{X}(t, z_0), \nabla \rangle \quad (\text{A.4})$$

имеют порядок  $\hat{O}(1)$  при  $\hbar \rightarrow 0$ .

Определим оператор  $\hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar) : L_{\hbar}^t \rightarrow L_2(\mathbb{R}_x^n)$ , задающий по  $\text{mod } \hat{O}(\hbar^{(N+1)/2})$  переход к квазиклассическому ТК-представлению формулой

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)\phi &= \sum_{n=0}^N \left[ -\frac{i}{\hbar} \hat{\mathcal{K}}_1(t) \right]^n \hat{\mathcal{K}}_S^{(0)}(t, \hbar)\phi, \\ \hat{\mathcal{K}}_S^{(0)}(t, \hbar) &= \frac{N_{\hbar}}{\sqrt{J(t, z_0)}} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(\vec{x}, t) \right], \\ \hat{\mathcal{K}}_1(t)\varphi(t) &= \sum_{|\nu|=0}^{\infty} |\nu, t\rangle \int_0^t d\tau \langle \tau, \nu | \hat{\mathcal{H}}_1(\tau) | \varphi(\tau) \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

где функции  $|\nu, t\rangle$ ,  $S(\vec{x}, t)$ ,  $J(\vec{x}, t)$  и постоянная  $N_{\hbar}$  определены в (I.11.5), а оператор  $\hat{\mathcal{H}}_1$  — в (I.16.4).

Оператор  $\hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)$  с точностью до  $O(\hbar^{(N+1)/2})$  унитарно отображает пространство  $L_{\hbar}^t$  на  $L_2$  в том смысле, что

$$\langle \hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)\varphi_1 | \hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)\varphi_2 \rangle_{L_2} = \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle_{L_{\hbar}^t} + O(\hbar^{(N+1)/2}). \quad (\text{A.6})$$

Уравнение Шрёдингера (A.1) в квазиклассическом ТК-представлении, задаваемом оператором  $\hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)$  (A.5), имеет вид

$$[\hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)]^{-1} \{ -i\hbar \partial_t + \hat{\mathcal{H}} \} \hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)\varphi = \hat{\pi}_0 \varphi + O(\hbar^{(N+3)/2}), \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{\pi}_0 = (-i\hbar) \left\{ \frac{d}{dt} + \langle \Delta \vec{x}, [\mathcal{H}_{xp}(t) + Q(t)\mathcal{H}_{pp}(t)] \nabla \rangle - \frac{-i\hbar}{2} \langle \nabla, \mathcal{H}_{pp}(t) \nabla \rangle \right\}, \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle \dot{X}(t, z_0), \nabla \rangle,$$

а  $Q(t)$  определена в (I.10.16). Таким образом, с точностью до функций, имеющих порядок  $O(\hbar^{(N+3)/2})$ ,  $N = \overline{0, \infty}$ , по норме пространства  $L_{\hbar}^t$ , уравнение Шрёдингера в квазиклассическом ТК-представлении эквивалентно уравнению

$$\hat{\pi}_0 \varphi = 0, \quad \varphi \in L_{\hbar}^t. \quad (\text{A.9})$$

Уравнение (A.9) легко интегрируется, если заметить, что оператор  $\hat{\pi}_0$  допускает полный набор динамических симметрий. Нетрудно проверить, что операторы

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_j^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar \operatorname{Im} b_j}} (\langle \vec{Z}_j^*(t), \hat{p} \rangle - \langle (\vec{W}_j^* - Q(t)\vec{Z}_j^*(t)), \Delta \vec{x} \rangle), \\ \hat{\Lambda}_j &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar \operatorname{Im} b_j}} \langle \vec{Z}_j(t), \hat{p} \rangle, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

(векторы  $\vec{W}(t)$  и  $\vec{Z}(t)$  определены в (I.10.1)) коммутируют с оператором  $\hat{\pi}_0$  и удовлетворяют бозевским коммутационным соотношениям:

$$[\hat{\Lambda}_k, \hat{\Lambda}_j^+] = \delta_{kj}, \quad [\hat{\Lambda}_k, \hat{\Lambda}_j] = [\hat{\Lambda}_k^+, \hat{\Lambda}_j^+] = 0.$$

Следовательно, функции  $H_{\nu} = |H_{\nu}\rangle = \prod_{j=1}^n (\nu_j!)^{-1/2} (\hat{\Lambda}_j^+)^{\nu_j} 1$  (I.13.7) образуют в  $L_{\hbar}^t$  полный ортонормированный набор решений уравнения (A.9). Действуя на функции  $|H_{\nu}\rangle$  оператором  $\hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)$ , получим высшие приближения для квазиклассических ТКС (I.16.11) уравнения Шрёдингера.

Из соотношений (A.7), (A.10) следует, что операторы

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_j^{(N)} &= \hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar) \hat{\Lambda}_j [\hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)]^{-1}; \\ [\hat{\Lambda}_j^+]^{(N)} &= \hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar) \hat{\Lambda}_j^+ [\hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)]^{-1}, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

являются приближенными симметриями уравнения Шрёдингера

$$[\{-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}\}, \hat{\Lambda}_j^{(N)}] = [\{-i\hbar\partial_t + \hat{\mathcal{H}}\}, [\hat{\Lambda}_j^+]^{(N)}] = \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2})$$

и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [[\hat{\Lambda}_j^+]^{(N)}, [\hat{\Lambda}_k^+]^{(N)}] &= [\hat{\Lambda}_j^{(N)}, \hat{\Lambda}_k^{(N)}] = \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}), \\ [\hat{\Lambda}_j^{(N)}, [\hat{\Lambda}_k^+]^{(N)}] &= \delta_{jk} + \hat{O}(\hbar^{(N+3)/2}). \end{aligned}$$

Вычислим в явном виде оператор  $\hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)$  для  $N = 2$ . Из (A.5) для нерелятивистской функции Гамильтона

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + e\Phi, \quad \vec{p} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{\mathcal{A}},$$

получим

$$\hat{\mathcal{K}}_S^{(2)}(t, \hbar) = \hat{\mathcal{K}}_S^{(0)}(t, \hbar) [1 - i\sqrt{\hbar}\hat{\pi}_1 - i\hbar\hat{\pi}_2 - \hbar\hat{\pi}_1^2], \quad (\text{A.11})$$

где

$$\hbar^{j/2} \hat{\pi}_j \varphi(t) = \frac{1}{(j+2)!} \sum_{|\nu|=0}^{\infty} |H_{\nu}\rangle \int_0^t d\tau \langle H_{\nu} | \frac{1}{\hbar} \hat{D}^{j+2} \mathcal{H}(\tau) | \varphi(\tau) \rangle; \quad j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \hat{D}^3 \mathcal{H}(t) &= -\frac{e}{4mc} (\langle \hat{\mathcal{P}}'_1, d^2 \vec{\mathcal{A}} \rangle + \langle d^2 \vec{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{P}}'_1 \rangle) + \frac{e}{3!} (d^3 \Phi - \langle \vec{\beta}, d^3 \vec{\mathcal{A}} \rangle), \quad (\text{A.12}) \\ \frac{1}{4!} \hat{D}^4 \mathcal{H}(t) &= \frac{e}{4!} (d^4 \Phi - \langle \vec{\beta}, d^4 \vec{\mathcal{A}} \rangle) + \frac{e^2}{8mc^2} \langle d^2 \vec{\mathcal{A}}, d^2 \vec{\mathcal{A}} \rangle - \frac{e}{2mc} \frac{1}{3!} (\langle \hat{\mathcal{P}}'_1, d^3 \vec{\mathcal{A}} \rangle + \langle d^3 \vec{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{P}}'_1 \rangle), \\ \hat{\mathcal{P}}'_1 &= -i\hbar \nabla + Q(t) \Delta \vec{x} - \frac{e}{c} d \vec{\mathcal{A}}(t), \quad \vec{\beta} = \frac{1}{c} \dot{\vec{X}}(t, z_0), \end{aligned}$$

а через  $d^k \mathcal{A}(t)$  обозначается функция

$$d^k \mathcal{A}(t) = (\langle \Delta \vec{x}, \partial / \partial y \rangle)^k A(\vec{y}, t)|_{\vec{y}=\vec{x}(t, z_0)}.$$

Отметим, что в силу самосопряженности операторов  $\hat{\mathcal{P}}'_1$  и  $\Delta \vec{x}$  в  $L^t_{\hbar}$  формулы (A.12) определяют самосопряженные в  $L^t_{\hbar}$  операторы  $\hat{D}^j \mathcal{H}(t)$ ,  $j = 3, 4$ . Отсюда следует, в частности, унитарность оператора  $\hat{\mathcal{K}}_S^{(N)}(t, \hbar)$  при  $N = 2$  (с точностью до  $\hat{O}(\hbar^{3/2})$ ):

$$\begin{aligned} \langle (\hat{\mathcal{K}}_S^{(2)}(t, \hbar) H_{\nu'}) | (\hat{\mathcal{K}}_S^{(2)}(t, \hbar) H_{\nu}) \rangle_{L^t} &= \langle H_{\nu'} | (\hat{\mathcal{K}}_S^{(2)}(t, \hbar))^+ \hat{\mathcal{K}}_S^{(2)}(t, \hbar) | H_{\nu} \rangle_{L^t} = \\ &= \langle H_{\nu'} | [1 - i\sqrt{\hbar}(\hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+) - i\hbar(\hat{\pi}_2 - \hat{\pi}_2^+) + \hbar(\hat{\pi}_1^+ \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^2 - (\hat{\pi}_1^+)^2)] | H_{\nu} \rangle + O(\hbar^{3/2}) = \\ &= \delta_{\nu\nu'} + O(\hbar^{3/2}). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Используя (A.11) для произвольного оператора  $\hat{A}_{\hbar}(t) = A(\vec{p}, \vec{x}, t)$ , имеющего классический аналог  $A(\vec{p}, \vec{x}, t)$ , найдем его явный вид (с точностью до  $\hat{O}(\hbar^{3/2})$ ) в ТК-представлении

$$\begin{aligned} \hat{A}'_{\hbar} &= (\hat{\mathcal{K}}_S^{(2)}(t, \hbar))^{-1} \hat{A}_{\hbar}(t) \hat{\mathcal{K}}_S^{(2)}(t, \hbar) + \hat{O}(\hbar^{3/2}) = \\ &= A(t) + \hat{D}^1 A(t) + \frac{1}{2} \hat{D}^2 A(t) - i\sqrt{\hbar} [(\hat{D}^1 A(t)) \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_1^+ \hat{D}^1 A(t)] + \hat{O}(\hbar^{3/2}), \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

где, аналогично (I.16.5), через  $\hat{D}^j A(t)$  обозначен оператор вида

$$\begin{aligned} \hat{D}^j A(t) &= \left( \left\langle \Delta \hat{p}', \frac{\partial}{\partial \vec{z}} \right\rangle + \left\langle \Delta \vec{x}, \frac{\partial}{\partial \vec{y}} \right\rangle \right)^j A(\vec{z}, \vec{y}, t) \Big|_{\substack{\vec{z}=\vec{P}(t, z_0) \\ \vec{y}=\vec{X}(t, z_0)}}, \quad (\text{A.15}) \\ \Delta \hat{p}' &= -i\hbar \nabla + Q(t) \Delta \vec{x}, \end{aligned}$$

а функция  $A(t)$  есть классическая наблюдаемая  $A(\vec{p}, \vec{x}, t)$ , отвечающая оператору  $\hat{A}_{\hbar}(t)$  и вычисленная в точке  $z = Z(t, z_0)$  на фазовой траектории,  $A(t) = A(\vec{P}(t, z_0), \vec{X}(t, z_0), t)$ .

## Приложение Б. Свойства матриц $\Pi_{\pm}(t)$ и матрицы $\lambda_{pp}^{(+)}(t)$

**Свойство 1.** *Справедливо соотношение*

$$[\lambda_{pp}^{(+)}(t)]^{1/2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(t)}} \left\| \frac{\beta_i \beta_j}{1 + \gamma^{-1}} - \delta_{ij} \right\|_{3 \times 3}, \quad (\text{B.1})$$

$$[\lambda_{pp}^{(+)}(t)]^{-1/2} = -\frac{\sqrt{\varepsilon(t)}}{c} \left\| \delta_{ij} + \frac{\gamma \beta_i \beta_j}{1 + \gamma^{-1}} \right\|_{3 \times 3}, \quad (\text{B.2})$$

$$[\lambda_{pp}^{(+)}(t)]^{-1} = \frac{\varepsilon(t)}{c^2} \|\delta_{jk} + \gamma^2 \beta_j \beta_k\|_{3 \times 3}, \quad (\text{Б.3})$$

где

$$\vec{\beta} = \frac{1}{c} \dot{X}(t, z_0), \quad \gamma^{-1} = (1 - \vec{\beta}^2)^{1/2}, \quad \lambda_{pp}^{(+)} = \frac{c^2}{\varepsilon} \|\delta_{ij} - \beta_i \beta_j\|.$$

**Доказательство.** Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{i=1}^3 \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(t)}} \left( \frac{\beta_i \beta_j}{1 + \gamma^{-1}} - \delta_{ij} \right) \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(t)}} \left( \frac{\beta_i \beta_k}{1 + \gamma^{-1}} - \delta_{ik} \right) = \\ & = \frac{c^2}{\varepsilon(t)} \left[ \frac{\beta_j \beta_k}{1 + \gamma^{-1}} \left( \frac{\vec{\beta}^2}{1 + \gamma^{-1}} - 2 \right) + \delta_{jk} \right] = \\ & = \frac{c^2}{\varepsilon(t)} (\delta_{jk} - \beta_j \beta_k) = \lambda_{p_j p_k}^{(+)}(t), \quad \beta^2 = 1 - \gamma^{-2}. \\ 2) \quad & \sum_{i=1}^3 \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(t)}} \left( \frac{\beta_j \beta_i}{1 + \gamma^{-1}} - \delta_{ij} \right) \left( -\frac{\sqrt{\varepsilon(t)}}{c} \right) \left( \delta_{ik} + \frac{\gamma \beta_i \beta_k}{1 + \gamma^{-1}} \right) = \\ & = - \left[ \frac{\beta_j \beta_k}{1 + \gamma^{-1}} \left( \frac{\gamma \vec{\beta}^2}{1 + \gamma^{-1}} - \gamma + 1 \right) - \delta_{jk} \right] = \delta_{jk}. \\ 3) \quad & \sum_{i=1}^3 \frac{c^2}{\varepsilon(t)} (\delta_{ij} - \beta_i \beta_j) \frac{\varepsilon(t)}{c^2} (\delta_{ik} + \gamma^2 \beta_i \beta_k) = \\ & = \delta_{jk} + \beta_j \beta_k (\gamma^2 - 1 - \gamma^2 \vec{\beta}^2) = \delta_{jk}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 2.** Справедливо соотношение

$$\mathcal{H}_0(t) \Pi_{\pm}(t) = \lambda^{(\pm)}(t) \Pi_{\pm}(t), \quad (\text{Б.4})$$

где  $\mathcal{H}_0(t)$ ,  $\lambda^{(\pm)}(t)$  и  $\Pi_{\pm}(t)$  определены в (1.2), (1.9) и (1.10), соответственно.

**Доказательство.** С учетом соотношения  $\dot{\vec{\beta}} = c\vec{\mathcal{P}}/\varepsilon$  получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(t) \Pi_+(t) &= \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2 + 2\gamma^{-1}}} \begin{pmatrix} e\Phi + m_0 c^2 & c \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \\ c \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle & e\Phi - m_0 c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon + m_0 c^2 \\ c \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon \sqrt{2 + 2\gamma^{-1}}} \begin{pmatrix} (e\Phi + m_0 c^2)(\varepsilon + m_0 c^2) + c^2 \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle^2 \\ c \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle (\varepsilon + m_0 c^2 + e\Phi - m_0 c^2) \end{pmatrix} = (\varepsilon + e\Phi) \Pi_+(t). \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что  $c^2 \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle^2 = c^2 \vec{\mathcal{P}}^2 = \varepsilon^2 - m_0^2 c^4$ . Аналогично доказывается соотношение (Б.4) для нижнего индекса.

**Свойство 3.** Справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \rho_1 \langle \vec{\Sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \Pi_{\pm}(t) &= \langle \vec{\alpha}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \Pi_{\pm}(t) = \pm \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \Pi_{\pm}(t) + \Pi_{\mp}(t) \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \right) = \\ &= \pm \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \Pi_{\pm}(t) + \frac{\sqrt{\varepsilon(t)}}{c} \Pi_{\mp}(t) \langle \vec{\sigma}, (\lambda_{pp}^{(+)}(t))^{1/2} \vec{\mathcal{P}} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\alpha}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \Pi_+(t) &= \frac{1}{\sqrt{2+2\gamma^{-1}}} \begin{pmatrix} \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle (1+\gamma^{-1}) \end{pmatrix}; \\
\langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle &= \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle + i \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\beta} \rangle = \\
&= [1 + (1 + \gamma^{-1}) - (1 + \gamma^{-1})] \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle - i \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\beta} \rangle = \\
&= (1 + \gamma^{-1}) \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle + [(1 - \gamma^{-1}) \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle] = \\
&= \left| (1 - \gamma^{-1}) = \frac{\vec{\beta}^2}{1 + \gamma^{-1}} = \frac{1}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle^2 \right| = \\
&= (1 + \gamma^{-1}) [\langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle] + \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \right]; \\
(1 + \gamma^{-1}) \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle &= (1 + \gamma^{-1}) \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle - \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle = \\
&= \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle [\langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle] - (1 + \gamma^{-1}) \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \right].
\end{aligned}$$

В результате приходим к первому равенству в (Б.5) для верхних индексов. Аналогично

$$\begin{aligned}
\langle \vec{\alpha}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \Pi_- &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} -\langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle (1+\gamma^{-1}) \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \end{pmatrix}; \\
-\langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle (1+\gamma^{-1}) &= \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \langle \vec{\beta}, \vec{\sigma} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle - (1+\gamma^{-1}) \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle = \\
&= \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle [-\langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle] + (1+\gamma^{-1}) \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle}{1+\gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \right]; \\
\langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle &= (1+\gamma^{-1}) \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle + (1+\gamma^{-1}) \langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle = \\
&= (-1 - \gamma^{-1}) [-\langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle] + \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{\mathcal{P}} \rangle}{1+\gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle \right],
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Второе равенство в (Б.5) непосредственно следует из (Б.1).

**Замечание 1.** Если в матрицах  $\Pi_{\pm}(t) = \Pi_{\pm}(\vec{p}, \vec{x}, t) \Big|_{\substack{\vec{p}=\vec{p}(t) \\ \vec{x}=\vec{X}(t)}}$  векторы  $\vec{X}(t)$  и  $\vec{P}(t)$  не являются решениями классической системы Гамильтона, то в полученных выражениях надо положить  $\vec{\beta} = c\vec{P}/\varepsilon$ .

**Свойство 4.** Справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}_{\pm}(t) &= \Pi_{\pm}(t) \left[ \frac{i}{2} \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1+\gamma^{-1}} \right] \mp \frac{1}{2} \Pi_{\mp}(t) \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\gamma \langle \vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}} \rangle}{1+\gamma^{-1}} + \langle \vec{\sigma}, \dot{\vec{\beta}} \rangle \right] = \\
&= \frac{i}{2(1+\gamma^{-1})} \Pi_{\pm}(t) \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \rangle \pm \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon(t)}} \Pi_{\pm}(t) \langle \vec{\sigma}, (\lambda_{pp}^{(+)}(t))^{-1/2} \dot{\vec{\beta}} \rangle. \quad (\text{Б.6})
\end{aligned}$$

**Доказательство.** Последнее равенство в (Б.6) непосредственно следует из (Б.2). Рассмотрим

$$1) \quad \frac{d}{dt} \Pi_+(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \sqrt{1+\gamma^{-1}} \\ \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^{-1}}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\sqrt{1+\gamma^{-1}} &= \frac{1}{2}\frac{d\gamma^{-1}/dt}{\sqrt{1+\gamma^{-1}}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^{-1}}}\frac{d\gamma^{-1}}{dt}\left(\frac{\vec{\beta}^2}{1+\gamma^{-1}}+\gamma^{-1}\right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma^{-1}}}\left[i\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\rangle + \frac{\vec{\beta}^2}{1+\gamma^{-1}}\frac{d\gamma^{-1}}{dt} + \gamma^{-1}\frac{d\gamma^{-1}}{dt} - i\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\rangle\right] = \\
&= \left|\frac{d\gamma^{-1}}{dt} = -\gamma\langle\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}\rangle\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^{-1}}}\left\{(1+\gamma^{-1})\left[\frac{i}{2}\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\rangle}{(1+\gamma^{-1})}\right] - \right. \\
&\quad \left. -\frac{1}{2}\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\left[\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\frac{\gamma\langle\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}\rangle}{1+\gamma^{-1}} - \langle\vec{\sigma},\dot{\vec{\beta}}\rangle\right]\right\}; \\
\frac{d}{dt}\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle}{\sqrt{1+\gamma^{-1}}} &= \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma^{-1}}}\left\{2\langle\vec{\sigma},\dot{\vec{\beta}}\rangle - \frac{1}{1+\gamma^{-1}}\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\frac{d\gamma^{-1}}{dt}\right\} = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma^{-1}}}\left\{\langle\vec{\sigma},\dot{\vec{\beta}}\rangle\left(\frac{\vec{\beta}^2}{1+\gamma^{-1}}+(1+\gamma^{-1})\right)\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\left(\frac{\gamma^{-1}}{1+\gamma^{-1}}-1\right)\right\} = \\
&= \left|\vec{\beta}^2\langle\vec{\sigma},\dot{\vec{\beta}}\rangle - \langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\langle\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}\rangle = -\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\times(\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}})\rangle = i\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\rangle\right| = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma^{-1}}}\left\{i\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\rangle}{1+\gamma^{-1}} + (1+\gamma^{-1})\langle\vec{\sigma},\dot{\vec{\beta}}\rangle - \langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\frac{d\gamma^{-1}}{dt}\right\} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^{-1}}}\left\{\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\left[\frac{i}{2}\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\rangle}{1+\gamma^{-1}}\right] + \frac{1}{2}(1+\gamma^{-1})\left[\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\frac{\gamma\langle\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}\rangle}{1+\gamma^{-1}} + \langle\vec{\sigma},\dot{\vec{\beta}}\rangle\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Аналогично

$$2) \frac{d}{dt}\Pi_{-}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle}{\sqrt{1+\gamma^{-1}}} \\ -\frac{d}{dt}\sqrt{1+\gamma^{-1}} \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle}{\sqrt{1+\gamma^{-1}}} &= \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma^{-1}}}\left\{\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\left[i\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\rangle}{1+\gamma^{-1}}\right] + \right. \\
&\quad \left. + (1+\gamma^{-1})\left[\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\frac{\gamma\langle\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}\rangle}{1+\gamma^{-1}} + \langle\vec{\sigma},\dot{\vec{\beta}}\rangle\right]\right\}; \\
-\frac{d}{dt}\sqrt{1+\gamma^{-1}} &= \frac{1}{2\sqrt{1+\gamma^{-1}}}\left\{-(1+\gamma^{-1})\left[i\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\times\dot{\vec{\beta}}\rangle}{1+\gamma^{-1}}\right] + \right. \\
&\quad \left. + \langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\left[\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\frac{\gamma\langle\vec{\beta},\dot{\vec{\beta}}\rangle}{1+\gamma^{-1}} - \langle\vec{\sigma},\dot{\vec{\beta}}\rangle\right]\right\},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 5.** Справедливо соотношение

$$\begin{aligned}
\rho_3\langle\vec{\Sigma},\vec{H}\rangle\Pi_{\pm}(t) &= \mp\Pi_{\pm}(t)\left[\langle\vec{\sigma},\vec{\beta}\rangle\frac{\langle\vec{\beta},\vec{H}\rangle}{1+\gamma^{-1}} - \langle\vec{\sigma},\vec{H}\rangle\right] + \Pi_{\mp}(t)\langle\vec{\beta},\vec{H}\rangle = \\
&= \mp\frac{\sqrt{\varepsilon(t)}}{c}\Pi_{\pm}(t)\langle\vec{\sigma},(\lambda_{pp}^{+}(t))^{-1/2}\vec{H}\rangle + \Pi_{\mp}(t)\langle\vec{\beta},\vec{H}\rangle. \quad (\text{Б.7})
\end{aligned}$$

**Доказательство.** Последнее равенство в (Б.7) непосредственно следует из (Б.1). Аналогично свойству 3 получим

$$1) \quad \rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle \Pi_+(t) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} \langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle (1+\gamma^{-1}) \\ -\langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle (1+\gamma^{-1}) &= -(1+\gamma^{-1}) \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{H} \rangle}{1+\gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle \right] + \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\beta}, \vec{H} \rangle; \\ -\langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle &= -\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{H} \rangle}{1+\gamma^{-1}} - \langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle \right] - (1+\gamma^{-1}) \langle \vec{\beta}, \vec{H} \rangle; \end{aligned}$$

$$2) \quad \rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle \Pi_-(t) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} \langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \\ (1+\gamma^{-1}) \langle \vec{\sigma}, \vec{H} \rangle \end{pmatrix}.$$

Дальнейшее доказательство совпадает с доказательством свойства 3.

**Свойство 6.** *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} \rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle \Pi_{\pm}(t) &= \Pi_{\pm}(t) (-\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E} \rangle) \mp i \Pi_{\mp}(t) \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle}{1+\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle \right] = \\ &= -\Pi_{\pm}(t) \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E} \rangle \pm i \gamma^{-1} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(t)}} \Pi_{\mp}(t) \langle \vec{\sigma}, (\lambda_{pp}^{(+)}(t))^{-1/2} \vec{E} \rangle. \quad (\text{Б.8}) \end{aligned}$$

**Доказательство.** Последнее равенство в (Б.8) следует из (Б.2). Рассмотрим соотношения

$$1) \quad \rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle \Pi_+(t) = \frac{i}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} -\langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle (1+\gamma^{-1}) \end{pmatrix};$$

$$2) \quad \rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle \Pi_-(t) = \frac{i}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} -\langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle (1+\gamma^{-1}) \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} -i \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle &= -i \langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle + \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \times \vec{\beta} \rangle = \\ &= -i(1+\gamma^{-1}) \langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle + i \gamma^{-1} (\langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle + i \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E} \rangle) + (1+\gamma^{-1}) \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \times \vec{\beta} \rangle = \\ &= (1+\gamma^{-1}) [-\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E} \rangle] - i \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \left[ \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle}{1+\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle \right]; \end{aligned}$$

$$i \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle (1+\gamma^{-1}) = i \left\{ \frac{1+\gamma^{-1}}{\gamma} + \vec{\beta}^2 \right\} \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle =$$

$$= -i (\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle \vec{\beta}^2) + i \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle + \frac{1+\gamma^{-1}}{\gamma} \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle =$$

$$= \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle [-\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{E} \rangle] + i(1+\gamma^{-1}) \left[ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle}{1+\gamma^{-1}} + \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle \right],$$

что и требовалось доказать.

**Свойство 7.** *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} \langle \vec{\Sigma}, \vec{S} \rangle \Pi_{\pm}(t) &= \Pi_{\pm}(t) \left[ \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{S} \rangle + \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{S} \rangle}{1+\gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \right] \pm \Pi_{\mp}(t) [i \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{S} \rangle] = \\ &= -\frac{c \gamma^{-1}}{\sqrt{\varepsilon(t)}} \Pi_{\pm}(t) \langle \vec{\sigma}, (\lambda_{pp}^{(+)}(t))^{-1/2} \vec{S} \rangle \pm i \Pi_{\mp}(t) \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{S} \rangle. \quad (\text{Б.9}) \end{aligned}$$

**Доказательство.** Поскольку

$$\begin{aligned}\langle \vec{\Sigma}, \vec{S} \rangle \Pi_+(t) &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} \langle \vec{\sigma}, \vec{S} \rangle (1+\gamma^{-1}) \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{S} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \end{pmatrix}; \\ \langle \vec{\Sigma}, \vec{S} \rangle \Pi_-(t) &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} -\langle \vec{\sigma}, \vec{S} \rangle \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \\ \langle \vec{\sigma}, \vec{S} \rangle (1+\gamma^{-1}) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

то дальнейшее доказательство совпадает с доказательством свойства 6.

**Свойство 8.** *Справедливо соотношение*

$$\rho_3 \Pi_{\pm}(t) = \pm \gamma^{-1} \Pi_{\pm}(t) + \Pi_{\mp}(t) \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle. \quad (\text{Б.10})$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}1) \quad \rho_3 \Pi_+(t) &= \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} 1+\gamma^{-1} \\ -\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \end{pmatrix}; \\ (1+\gamma^{-1}) &= \gamma^{-1}(1+\gamma^{-1}) + \beta^2 = (1+\gamma^{-1})\gamma^{-1} + (\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle)^2; \\ -\langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle &= \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle - (1+\gamma^{-1}) \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

$$2) \quad \rho_3 \Pi_-(t) = \frac{1}{\sqrt{2(1+\gamma^{-1})}} \begin{pmatrix} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \\ 1+\gamma^{-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство аналогично предыдущему.

**Свойство 9.** *Справедливо соотношение*

$$\rho_2 \Pi_{\pm}(t) = \mp i \Pi_{\mp}(t). \quad (\text{Б.11})$$

**Доказательство** непосредственно следует из определения матриц  $\Pi_{\pm}(t)$ .

**Свойство 10.** *Справедливо соотношение*

$$\rho_1 \Pi_{\pm}(t) = \pm \Pi_{\pm}(t) \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle - \gamma^{-1} \Pi_{\mp}(t). \quad (\text{Б.12})$$

**Доказательство.** Домножим левую и правую части соотношения (Б.10) на  $i\rho_2$  и правую часть получившегося выражения преобразуем, согласно (Б.11). В результате получим (Б.12).

**Свойство 11.** *Для матриц  $\Pi_{\pm}(t)$  справедливы соотношения ортонормированности и полноты*

$$\Pi_{\pm}^{\Gamma}(t) \Pi_{\pm}(t) = \mathbb{I}_{2 \times 2}, \quad \Pi_{\pm}^{\Gamma}(t) \Pi_{\mp}(t) = \mathbb{0}_{2 \times 2}; \quad (\text{Б.13})$$

$$\Pi_+(t) \Pi_+^{\Gamma}(t) + \Pi_-(t) \Pi_-^{\Gamma}(t) = \mathbb{I}_{4 \times 4}. \quad (\text{Б.14})$$



**Доказательство.** Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\begin{aligned}
\Pi_{\pm}^{\Gamma}(t)\Pi_{\pm}(t) &= \frac{1}{2(1+\gamma^{-1})}[(1+\gamma^{-1})^2 + (\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle)^2] = \\
&= \frac{1}{2(1+\gamma^{-1})}(1+2\gamma^{-1}+\gamma^{-2}+\vec{\beta}^2)\mathbb{I}_{2\times 2} = \mathbb{I}_{2\times 2}; \\
\Pi_{\pm}^{\Gamma}(t)\Pi_{\mp}(t) &= \frac{\pm 1}{2(1+\gamma^{-1})}[\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle(1+\gamma^{-1}) - (1+\gamma^{-1})\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle] = 0; \\
\Pi_{+}(t)\Pi_{+}^{\Gamma}(t) + \Pi_{-}(t)\Pi_{-}^{\Gamma}(t) &= \frac{1}{2(1+\gamma^{-1})} \times \\
&\times \left\{ \begin{pmatrix} (1+\gamma^{-1})^2 & \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle(1+\gamma^{-1}) \\ \langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle(1+\gamma^{-1}) & \vec{\beta}^2 \end{pmatrix} + \right. \\
&+ \left. \begin{pmatrix} \vec{\beta}^2 & -\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle(1+\gamma^{-1}) \\ -\langle\vec{\sigma}, \vec{\beta}\rangle(1+\gamma^{-1}) & (1+\gamma^{-1})^2 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{I}_{4\times 4},
\end{aligned}$$

что и следовало доказать.

## Приложение В. Уравнения Гейзенберга для оператора поляризации $\hat{S}_{\mu}$

Запишем уравнения Гейзенберга для оператора поляризации

$$\frac{d}{dt}\langle\Psi|\hat{S}_{\mu}|\Psi\rangle_D = \langle\Psi|\frac{\partial\hat{S}_{\mu}}{\partial t}|\Psi\rangle_D + \frac{i}{\hbar}\langle\Psi|[\hat{\mathcal{H}}_D, \hat{S}_{\mu}]|\Psi\rangle_D; \quad (\text{B.1})$$

где

$$\hat{S}_{\mu} = (\hat{S}_0, \hat{S}), \quad \hat{S}_0 = \frac{1}{m_0c}\langle\vec{\Sigma}, \hat{\vec{P}}\rangle, \quad \hat{S} = \rho_3\vec{\Sigma} + \frac{1}{m_0c}\rho_1\hat{\vec{P}}, \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}}_D &= \hat{\mathcal{H}}_0 - i\hbar\hat{\mathcal{H}}_1, \quad \hat{\mathcal{H}}_0 = c\langle\vec{\alpha}, \hat{\vec{P}}\rangle + \rho_3m_0c^2 + e\Phi, \\
\hat{\mathcal{H}}_1 &= \frac{ie_0(g-2)}{4m_0c}[\rho_3\langle\vec{\Sigma}, \vec{H}\rangle + \rho_2\langle\vec{\Sigma}, \vec{E}\rangle].
\end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

**Лемма В.1.** *Справедливо соотношение*

$$\frac{\partial\hat{S}_0}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{S}_0]_- = \frac{e}{m_0c}\langle\vec{\Sigma}, \vec{E}\rangle. \quad (\text{B.4})$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\frac{\partial\hat{S}_0}{\partial t} = -\frac{e}{m_0c^2}\langle\vec{\Sigma}, \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\rangle.$$

$$[\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{S}_0]_- = \frac{ie\hbar}{m_0c}\langle\vec{\Sigma}, \nabla\Phi\rangle.$$

С учетом соотношения  $\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$  лемма доказана.

**Лемма В.2.** *Справедливо соотношение*

$$\frac{\partial \hat{\vec{S}}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{\vec{S}}]_- = \frac{e}{m_0 c} (\rho_1 \vec{E} + \vec{H} \times \vec{\Sigma}). \quad (\text{B.5})$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\vec{S}}}{\partial t} &= -\frac{e}{m_0 c^2} \rho_1 \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \\ [\hat{\mathcal{H}}_0, \rho_3 \vec{\Sigma}]_- &= c \{ (i\rho_2) (\hat{\vec{P}} - i\vec{\Sigma} \times \hat{\vec{P}} - i\rho_2 (\hat{\vec{P}} + i\vec{\Sigma} \times \hat{\vec{P}})) \} = -2ic\rho_2 \hat{\vec{P}}, \\ \frac{1}{m_0 c} [\hat{\mathcal{H}}_0, \rho_1 \hat{\vec{P}}] &= 2ic\rho_2 \hat{\vec{P}} + \frac{i\hbar e}{m_0 c} \rho_1 \nabla \Phi + \frac{1}{m_0} [\langle \vec{\Sigma}, \hat{\vec{P}} \rangle, \hat{\vec{P}}]_-. \end{aligned}$$

С учетом соотношения

$$[\hat{\mathcal{P}}_k, \hat{\mathcal{P}}_l] = \frac{i\hbar e}{c} (A_{l,k} - A_{k,l}) = \frac{i\hbar e}{c} \varepsilon_{lkj} H_j,$$

где  $\varepsilon_{lkj}$  — абсолютно антисимметричный тензор, лемма доказана.

**Лемма В.3.** *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{S}_0]_- &= -\frac{e_0(g-2)}{2(m_0 c)^2} \left\{ \rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \times \hat{\vec{P}} \rangle + \rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \times \hat{\vec{P}} \rangle + \right. \\ &\left. + \frac{\hbar}{2} (\rho_3 \operatorname{div} \vec{H} + \rho_2 \operatorname{div} \vec{E} + i\rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \operatorname{rot} \vec{H} \rangle + i\rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \operatorname{rot} \vec{E} \rangle) \right\}. \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{S}_0]_- &= \frac{ie_0(g-2)}{2m_0 c} \frac{1}{m_0 c} \left\{ \rho_3 [\langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle \langle \vec{\Sigma}, \hat{\vec{P}} \rangle]_- + \rho_2 [\langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle \langle \vec{\Sigma}, \hat{\vec{P}} \rangle]_- \right\}, \\ [\langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle, \langle \vec{\Sigma}, \hat{\vec{P}} \rangle]_- &= [\langle \vec{H}, \hat{\vec{P}} \rangle]_- + i \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \times \hat{\vec{P}} \rangle - i \langle \vec{\Sigma}, \hat{\vec{P}} \times \vec{H} \rangle = \\ &= 2i \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \times \hat{\vec{P}} \rangle + i\hbar \operatorname{div} \vec{H} - \hbar \langle \vec{\Sigma}, \operatorname{rot} \vec{H} \rangle, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Лемма В.4.** *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{S}] &= \frac{e_0(g-2)}{2(m_0 c)^2} \left\{ (m_0 c) (-\vec{\Sigma} \times \vec{H} - \vec{E} \rho_1) + \rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle \hat{\vec{P}} - \rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle \hat{\vec{P}} - \right. \\ &\left. - \frac{i\hbar}{2} \operatorname{grad} (\rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle + \rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle) \right\}. \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

**Доказательство.** Действительно,

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{H}}_1, \rho_3 \vec{\Sigma}]_- &= \frac{ie_0(g-2)}{2m_0 c} \left\{ [\langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle, \vec{\Sigma}]_- + i\rho_1 [\langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle, \vec{\Sigma}]_+ \right\} = \\ &= \frac{e_0(g-2)}{2m_0 c} \{ -\vec{\Sigma} \times \vec{H} - \vec{E} \cdot \rho_1 \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[ \hat{\mathcal{H}}_1, \frac{1}{m_0 c} \rho_1 \hat{\mathcal{P}} \right]_- &= \frac{i e_0 (g-2)}{2 m_0 c} \left\{ i \rho_2 [\langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle, \hat{\mathcal{P}}]_+ - i \rho_3 [\langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle, \hat{\mathcal{P}}]_+ \right\} = \\ &= \frac{e_0 (g-2)}{(m_0 c)^2} \left\{ \rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle \hat{\mathcal{P}} - \rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle \hat{\mathcal{P}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i \hbar}{2} \text{grad}(\rho_3 \langle \vec{\Sigma}, \vec{E} \rangle - \rho_2 \langle \vec{\Sigma}, \vec{H} \rangle) \right\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Лемма В.5.** *Справедливо соотношение*

$$\Pi_+^\Gamma(t) \left\{ \frac{\partial \hat{S}_0}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{S}_0]_- \right\} \Pi_+(t) = \frac{e}{m_0 c \gamma} \left\{ \langle \vec{\sigma}, \vec{E} \rangle + \gamma \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \right\}. \quad (\text{B.8})$$

**Доказательство** непосредственно следует из (Б.9).

**Лемма В.6.** *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} \Pi_+^\Gamma(t) \left\{ \frac{\partial \hat{S}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}_0, \hat{S}]_- \right\} \Pi_+(t) &= \frac{e}{m_0 c} \left\{ \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \vec{E} + \right. \\ &\quad \left. + \gamma^{-1} \vec{H} \times \vec{\sigma} + \frac{1}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \vec{H} \times \vec{\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

**Доказательство** непосредственно следует из (Б.12) и (Б.9).

**Лемма В.7.** *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} \Pi_+^\Gamma(t) [\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{S}_0]_- \Pi_+(t) &= -\frac{e_0 (g-2)}{(m_0 c)^2} \left\{ \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{1}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\beta}, \vec{H} \times \hat{\mathcal{P}} \rangle - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \langle \vec{\sigma}, \vec{H} \times \hat{\mathcal{P}} \rangle \right) - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times (\vec{E} \times \hat{\mathcal{P}}) \rangle \right\} + O(\hbar). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

**Доказательство** непосредственно следует из (Б.7) и (Б.8).

**Лемма В.8.** *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} \Pi_+^\Gamma(t) [\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{S}]_- \Pi_+(t) &= \frac{e_0 (g-2)}{(m_0 c)^2} \times \\ &\times \left\{ -m_0 c \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \vec{E} - \gamma^{-1} \vec{H} \times \vec{\sigma} - \frac{1}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \vec{H} \times \vec{\beta} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} - \langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \times \vec{H} \rangle \right) \hat{\mathcal{P}} \right\} + O(\hbar). \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

**Доказательство** непосредственно следует из (Б.7), (Б.7) и (Б.8).

**Лемма В.9.** *Справедливы соотношения*

$$\Pi_+^\Gamma(t) \hat{S}_0 \Pi_+(t) = \frac{1}{m_0 c} \left( \gamma^{-1} \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{P}} \rangle + \frac{\langle \vec{\beta}, \hat{\mathcal{P}} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \right), \quad (\text{B.12})$$

$$\Pi_+^\Gamma(t) \hat{S} \Pi_+(t) = \vec{\sigma} - \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} + \frac{1}{m_0 c} \hat{\mathcal{P}} \langle \vec{\sigma}, \vec{\beta} \rangle. \quad (\text{B.13})$$

Доказательство непосредственно следует из (Б.9), (Б.7) и (Б.12).

**Лемма В.10.** Вектор

$$\vec{a} = \vec{\zeta} + \frac{\gamma\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{\zeta}, \vec{\beta} \rangle$$

удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\vec{a}} = & \frac{ge}{2m_0c\gamma} (\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \vec{E} + \vec{H} \times \vec{a}) + \frac{e(g-2)\gamma}{2m_0c} \vec{\beta} (\langle \vec{a}, \vec{E} \rangle + \\ & + \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle + \langle \vec{\beta}, \vec{a} \times \vec{H} \rangle). \end{aligned} \quad (\text{В.14})$$

**Доказательство.** Выразим вектор  $\vec{\zeta}$  через  $\vec{a}$  и получим

$$\vec{\zeta} = \vec{a} - \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \quad (\text{В.15})$$

(см. (Б.1) и (Б.2)). Усредняя выражение (В.9) по  $J^{(1)}$ , перейдя к пределу  $\hbar \rightarrow 0$  и подставив соотношение (В.15) в полученное выражение, найдем

$$\begin{aligned} \frac{e}{m_0c} \left\{ \gamma^{-1} \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \vec{E} + \gamma^{-1} \vec{H} \times \left( \vec{a} - \frac{\vec{\beta}}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \right) + \frac{1}{1 + \gamma^{-1}} \gamma^{-1} \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \vec{H} \times \vec{\beta} \right\} = \\ = \frac{e}{m_0c\gamma} \{ \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \vec{E} + \vec{H} \times \vec{a} \}. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуем выражение (В.11):

$$\begin{aligned} \frac{e(g-2)}{(m_0c)^2} \left\{ -m_0c (\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \vec{E} + \vec{H} \times \vec{a}) \gamma^{-1} - \right. \\ \left. - \gamma m_0c \vec{\beta} \left( \gamma^{-1} \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} + \langle \vec{a}, \vec{E} \rangle + \frac{\langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle}{1 + \gamma^{-1}} \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{H} \rangle \right) \right\} = \\ = \frac{e(g-2)}{2m_0c} \{ \gamma^{-1} (\langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \vec{E} + \vec{H} \times \vec{a}) + \gamma \vec{\beta} (\langle \vec{a}, \vec{E} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{\beta} \rangle \langle \vec{\beta}, \vec{E} \rangle - \langle \vec{a}, \vec{\beta} \times \vec{H} \rangle) \}. \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в (1.32), получим (В.14), что и требовалось доказать.

## Приложение Г. Функция Лагранжа векторного поля $V_\mu$

Мы исходим из функции Лагранжа векторного поля  $V^\mu$ , которая в общей теории относительности имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{GR}} = -\frac{1}{2} W_{\mu\nu} \overset{*}{W}{}^{\mu\nu} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} V_\mu \overset{*}{V}{}^\mu + \frac{ie(g-1)}{c\hbar} F_{\mu\nu} V^\mu \overset{*}{V}{}^\nu. \quad (\text{Г.1})$$

Здесь  $W_{\mu\nu} = D_\mu V_\nu - D_\nu V_\mu$ ,  $D_\mu = \nabla_\mu - \frac{ie}{c\hbar} \mathcal{A}_\mu$  – удлиненная ковариантная производная,  $\mathcal{A}_\mu$  – потенциал внешнего электромагнитного поля,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$  – тензор напряженности электромагнитного поля,  $m$  и  $e$  – соответственно, масса и заряд векторной частицы. Последнее слагаемое в (Г.1) описывает взаимодействие электромагнитного поля с аномальным магнитным моментом векторной частицы.

Минимальное взаимодействие векторного поля  $V^\mu$  с кручением пространства-времени вводится посредством обобщения функции Лагранжа (Г.1) на случай пространства Римана–Картана заменой  $\nabla_\mu \rightarrow \tilde{\nabla}_\mu$  (условие метричности считается выполненным), где действие оператора  $\tilde{\nabla}_\mu$  на векторное поле  $V^\mu$  определяется как

$$\tilde{\nabla}_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \tilde{\Gamma}_{\mu\rho}{}^\nu V^\rho. \quad (\text{Г.2})$$

Здесь  $\tilde{\Gamma}_{\mu\rho}{}^\nu = \Gamma_{\mu\nu}{}^\rho - \mathcal{K}_{\mu\nu}{}^\rho$  – аффинная связность, где  $\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho$  – символы Кристоффеля, а тензор конторсии  $\mathcal{K}_{\mu\nu}{}^\rho$  определен выражением

$$\mathcal{K}_{\mu\nu}{}^\rho = -S_{\mu\nu}{}^\rho - S^\rho{}_{\mu\nu} - S^\rho{}_{\nu\mu}, \quad (\text{Г.3})$$

в котором тензор кручения  $S^\rho{}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}_{[\mu\nu]}{}^\rho$ . Тогда исходный лагранжиан можно разделить на две части, одна из которых не содержит полей кручения и совпадает с  $\mathcal{L}_{\text{GR}}$  (Г.1). В итоге

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{GR}} + \mathcal{L}_{\text{VS}}, \quad (\text{Г.4})$$

где  $\mathcal{L}_{\text{VS}}$  имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{VS}} = -2S_{\mu\nu}{}^\rho S^{\mu\nu\sigma} V_\rho{}^* V_\sigma{}^* + S^{\mu\nu\sigma} (W_{\mu\nu}{}^* V_\sigma{}^* + W_{\mu\nu}{}^* V_\sigma). \quad (\text{Г.5})$$

Варьируя действие, соответствующее функции Лагранжа (Г.4), по полю  $V^\mu$ , получаем уравнения движения (9.1). Напомним, что входящие в (Г.4) поля  $S_{\mu\nu}{}^\rho$  и  $F_{\mu\nu}$  считаются внешними.

## Приложение Д. Уравнение движения спина

Уравнение движения спина векторной частицы было получено в главе 2 (см. также [43]) отличным от рассмотренного выше способом: путем усреднения при  $\hbar \rightarrow 0$  гейзенберговского уравнения движения на оператор спина по главному члену ТКС-асимптотики. Мы покажем здесь, что спиновое уравнение (15.10) также может быть получено этим способом. Для этого прежде всего следует определить оператор спина векторной частицы. Наиболее разумным представляется следующий выбор:

$$(\hat{T}^\mu)^{\alpha\beta} = -\frac{i}{mc} e^{\mu\alpha\beta\sigma} \hat{\Pi}_\sigma. \quad (\text{Д.1})$$

В свою очередь, псевдовектор спина  $a^\mu$  определим как квантово-механическое среднее оператора (Д.1) в состоянии  $V^\mu$  (13.6) с точностью до  $O(\hbar^{1/2})$ , т.е.

$$a^\mu(s) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \hat{T}^\mu \rangle + O(\hbar^{1/2}). \quad (\text{Д.2})$$

Отсюда получаем выражение

$$a^\mu = i e^{\mu\alpha\beta\sigma} \overset{*}{u}_\alpha{}^0 \overset{0}{u}_\beta \dot{q}_\sigma, \quad (\text{Д.3})$$

которое совпадает с (14.6). Далее следует воспользоваться тем фактом, что на классе квазиклассически сосредоточенных состояний эволюция квантово-механического среднего для произвольного оператора  $\hat{Q}$  описывается уравнением

$$\frac{D}{ds} \langle \hat{Q} \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{\mathcal{H}}_P, \hat{Q}]_- \rangle + O(\hbar^{1/2}). \quad (\text{Д.4})$$

Здесь  $\hat{\mathcal{H}}_P$  – оператор Прока, определяемый как  $(\hat{\mathcal{H}}_P)_\sigma^\alpha = \hbar^2 \hat{\mathcal{H}}_\sigma^\alpha$ . Справедливость уравнения (Д.4) доказана в во второй главе (см. также [43]). Теперь нетрудно получить уравнение, которому удовлетворяет псевдовектор спина  $a^\mu$ , если вместо оператора  $\hat{Q}$  в (Д.4) подставить оператор (Д.1). В итоге после несложных вычислений получим в точности уравнение (14.10).

## Приложение Е. Псевдовектор кручения

Основные положения теории взаимодействия материальных полей кручения и, в частности, включение спинорных полей в геометрию Римана–Картана можно почерпнуть из классических работ Хеля [158, 159]. Приведем ниже необходимые факты, используемые в настоящей главе.

Пространство Римана–Картана представляет собой многообразие с метрикой  $g_{\mu\nu}$  и связностью  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$ , удовлетворяющее условию метричности. Тензор кручения определяется как антисимметричная часть  $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha}$

$$S_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}(\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} - \tilde{\Gamma}_{\nu\mu}^{\alpha}). \quad (\text{E.1})$$

Из условия метричности следует

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - K_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad (\text{E.2})$$

где  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  – связность Кристоффеля для метрики  $g_{\mu\nu}$ , а тензор конторсии  $K_{\mu\nu}^{\alpha}$  определяется выражением

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}^{\alpha} &= -S_{\mu\nu}^{\alpha} + S_{\nu}^{\alpha}{}_{\mu} - S^{\alpha}{}_{\mu\nu}, \\ K_{\mu\nu\alpha} &= g_{\alpha\beta}K_{\mu\nu}^{\beta}, \quad K_{\mu\nu\alpha} = -K_{\mu\alpha\nu}. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

В свою очередь, для псевдовектора кручения имеем

$$S_{\mu} = \frac{1}{3!}e_{\mu\nu\alpha\beta}S^{\nu\alpha\beta}. \quad (\text{E.4})$$

Аналогичным образом вводится псевдовектор конторсии  $K_{\mu}$ . Нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$K_{\mu} = -S_{\mu}. \quad (\text{E.5})$$

Минимальное взаимодействие массивного спинорного поля  $\phi$  с метрикой и кручением вводится функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}i(\bar{\phi}\gamma^{\mu}\tilde{D}_{\mu}\phi - \tilde{D}_{\mu}\bar{\phi}\gamma^{\mu}\phi) - \frac{mc}{\hbar}\bar{\phi}\phi, \quad (\text{E.6})$$

где оператор ковариантной производной  $\tilde{D}_{\mu}$  действует по правилу

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mu}\phi &= \left(\nabla_{\mu} + \frac{ie}{c\hbar}A_{\mu}\right)\phi - \Gamma_{\mu}\phi + \frac{1}{4}K_{\mu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}\phi, \\ \tilde{D}_{\mu}\bar{\phi} &= \left(\nabla_{\mu} + \frac{ie}{c\hbar}A_{\mu}\right)\bar{\phi} + \bar{\phi}\Gamma_{\mu} - \frac{1}{4}\bar{\phi}K_{\mu\alpha\beta}\gamma^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Подставив (E.7) в (E.6), мы стандартным образом приходим к уравнению Дирака для спинорного поля  $\phi$  в форме (9.5).

## Приложение Ж. Свойства предканонического оператора в области пересечения карт

Для доказательства соотношения (36.40) воспользуемся методом стационарной фазы. Рассмотрим быстроосциллирующий интеграл вида

$$I(\hbar^{-1}) = \int \varphi(\omega, x) \exp\left[\frac{i}{\hbar}S(\omega, x)\right] dx, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (\text{Ж.1})$$

где  $\omega$  – параметр. Пусть функция  $S(\omega, x)$  допускает только одну невырожденную критическую точку  $x_0 = x_0(\omega)$ , т.е.  $S_x(x_0, \omega) = 0$ ,  $S_{xx}(x_0, \omega) \neq 0$ . Тогда при  $\hbar \rightarrow 0$  справедливо следующее асимптотическое разложение интеграла (Ж.1) [160]:

$$I(\hbar^{-1}) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{|S_{xx}(x_0)|}} \varphi(\omega, x) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(\omega, x_0) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} S_{xx}(x_0) \right] + O(\hbar). \quad (\text{Ж.2})$$

Рассмотрим интеграл в правой части выражения (36.38) и выделим быстроосциллирующую часть экспоненты. Поскольку  $\Delta q_2 = q_2 - q_2(\tau) = q_2 = O(\sqrt{\hbar})$  и справедливо соотношение  $p_1(\tau_1^j(p_1)) = p_1$ , то (36.38) можно представить в виде

$$(K(\Omega_{j_1})[\mathcal{F}])(\vec{q}) = \frac{\exp(i\pi\gamma_{j_1}/2)}{\sqrt{-2\pi i\hbar}} \int dp_1 \exp \left[ \frac{i}{\hbar} S(p_1, \vec{q}) \right] \frac{f(\tau_1^{j_1}(p_1), \vec{q})}{\sqrt{|\dot{P}_1(\tau_1^{j_1}(p_1))|}}, \quad (\text{Ж.3})$$

где

$$S(p_1, \vec{q}) = p_1 q_1 + \int_{\tau_1^0}^{\tau_1^{j_1}(p_1)} dt P_1(t) \dot{Q}_1(t) - P_1 Q_1(\tau_1^{j_1}(p_1)) + I_0 \varphi.$$

Таким образом, координаты  $q_1$  и  $\varphi$  в (Ж.3) играют роль параметров. Стационарные точки определяются из условия  $S_{p_1}(p_1, \vec{q}) = 0$ . Отсюда получим  $q_1 = Q_1(\tau_1^{j_1}(p_1))$ . В области пересечения карт  $V_{j_1}$  и  $V_{j_2}$  это уравнение имеет единственное решение  $p_1 = P_1(q_1)$ , которое определяет требуемую стационарную точку. Можно показать, что в области пересечения карт  $V_{j_1} \cap V_{j_2}$  для функций  $\tau_1^{j_1}(p_1)$  и  $\tau_1^{j_2}(q_1)$  справедливо соотношение  $\tau_1^{j_1}(p_1) \stackrel{p_1=P_1(q_1)}{=} \tau_1^{j_2}(q_1)$ . Следовательно, в стационарной точке

$$S(P_1(q_1), \vec{q}) = \int_{\tau_1^0}^{\tau_1^{j_2}(q_1)} P_1(t) dQ_1(t) + I_0 \varphi, \quad (\text{Ж.4})$$

$$S_{p_1 p_1}(P_1(q_1), \vec{q}) = -\frac{\dot{Q}_1}{\dot{P}_1}(\tau_1^{j_2}(q_1)). \quad (\text{Ж.5})$$

Применим (Ж.2) к интегралу (Ж.3). С учетом (Ж.4) и (Ж.5) получим

$$\begin{aligned} (K(\Omega_{j_1})[\mathcal{F}])(\vec{q}) &= \frac{\exp(i\pi\gamma_{j_1}/2)}{\sqrt{|\dot{Q}_1(\tau_1^{j_2}(q_1))|}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left( \int_{\tau_1^0}^{\tau_1^{j_2}(q_1)} P_1(t) dq_1 + I_0 \varphi \right) \right\} \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i\pi}{4} \left[ 1 - \operatorname{sign} \frac{\dot{Q}_1}{\dot{P}_1}(\tau_1^{j_2}(q_1)) \right] \right\} f(\tau_1^{j_2}(q_1), q) + O(\hbar) = \\ &= \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} \left( \gamma_{j_1} - \gamma_{j_2} + \operatorname{inindex} \frac{\dot{Q}_1}{\dot{P}_1} \right) \right\} (K(\Omega_{j_2})[\mathcal{F}]) + O(\hbar), \end{aligned} \quad (\text{Ж.6})$$

где, по определению,  $\operatorname{inindex} \dot{Q}_1/\dot{P}_1 = -(\operatorname{sign} \dot{Q}_1/\dot{P}_1 - 1)/2$ . Прямым вычислением нетрудно получить следующее соотношение:

$$\gamma_{j_2}[l(\tau_1^0, \tau_1)] = \gamma_{j_1}[l(\tau_1^0, \tau_1)] + \operatorname{inindex} \frac{\dot{Q}_1}{\dot{P}_1}(\tau_1), \quad (\text{Ж.7})$$

$$\tau_1 \in V_{j_1} \cap V_{j_2}.$$

Из (Ж.7) и (Ж.6) немедленно следует соотношение (36.40).

### Приложение 3. Поведение волновой функции в окрестности каустики

Представляет интерес рассмотреть поведение волновой функции  $\overset{0}{\Psi}_E(q, \hbar)$  при  $\hbar \rightarrow 0$  в малой окрестности каустики  $\pi_q(\Sigma) \in \mathbb{R}_q^s$ , образованной в нашем случае точками  $\{q_1(\tau_1^\pm) = R_\pm, q_2 = 0, \varphi \in [0, 2\pi]\}$ , где  $\dot{q}_1(\tau_1^\pm) = 0$ . Выберем разбиение единицы таким образом, что

$$\begin{aligned} \text{supp } e_2(\tau_1, \varepsilon) &= [\tau_1^+ - \varepsilon, \tau_1^+ + \varepsilon], \\ \text{supp } e_4(\tau_1, \varepsilon) &= [\tau_1^- - \varepsilon, \tau_1^- + \varepsilon] \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр  $O(\hbar^{1/6})$ . Для удобства обозначим  $e_\zeta = (e_2, e_4)$ ,  $\tau_1^\zeta = (\tau_1^+, \tau_1^-)$ . Тогда функция  $\overset{0}{\Psi}_E(q, t)$  при  $\hbar \rightarrow 0$  имеет вид (предполагаем, что условие (36.48) выполнено)

$$\begin{aligned} \overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar) &= \int_0^{\tau_1} d\tau_1 (e_1(\tau_1, \varepsilon) + e_3(\tau_1, \varepsilon)) \sqrt{\dot{q}_1(\tau_1)} \times \\ &\times \left( \exp \frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau_1} P_1(t) dQ_1(t) \right) \delta(q_1 - Q_1(\tau_1)) \Phi_\nu(\tau_1, q_2, \varphi) + \\ &+ \sum_{\zeta} \int_{\tau_1^{\zeta-\varepsilon}}^{\tau_1^{\zeta+\varepsilon}} d\tau_1 \frac{e_\zeta(\tau_1, \varepsilon)}{\sqrt{-2\pi i \hbar}} \sqrt{\dot{P}_1(\tau_1)} \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \int_0^{\tau_1} P_1(t) dQ_1(t) + \right. \right. \\ &\left. \left. + P(\tau_1)(q_1 - Q_1(\tau_1)) \right] \right\} \Phi_\nu(\tau_1, q_2, \varphi) \equiv J_0 + \sum_{\zeta} J_\zeta. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Проанализируем поведение асимптотики при  $\hbar \rightarrow 0$ . Введем новые переменные  $u = (\tau_1 - \tau_1^\zeta)/\varepsilon^1$  и получим

$$\begin{aligned} J_\zeta &= \varepsilon^2 \int_{-1/\varepsilon}^{1/\varepsilon} du \frac{e_\zeta(\tau_1^\zeta + \varepsilon^2 u)}{\sqrt{-2\pi i \hbar}} \sqrt{\dot{p}_1(\tau_1^\zeta + \varepsilon^2 u)} \Phi_\nu(\tau_1^\zeta + \varepsilon^2 u, q_2, \varphi) \times \\ &\times \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \int_0^{\tau_1^\zeta + \varepsilon^2 u} P_1(t) dQ_1(t) + P_1(\tau_1^\zeta + \varepsilon^2 u)(q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta + \varepsilon^2 u)) \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рассмотрим область конфигурационного пространства, содержащую каустику и состоящую из точек

$$V_\delta^\zeta[\pi_q(\Sigma)] = \{(\vec{q}) : q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta) = O(\hbar^{2/3}), q_2 = O(\hbar^{1/2}), \varphi \in [0, 2\pi]\}. \quad (3.4)$$

Разложим (3.3) в ряд по параметру  $\varepsilon^2 = O(\hbar^{1/3})$ . Тогда в точках (3.4) получим

$$J_\zeta = \varepsilon^2 e_\zeta(\tau_1^\zeta) \sqrt{\dot{P}_1(\tau_1^\zeta)} \Phi_\nu(\tau_1^\zeta, q_2, \varphi) \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \int_0^{\tau_1^\zeta} P_1(t) dQ_1(t) + P_1(\tau_1^\zeta)(q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta)) \right] \times$$



$$\times \frac{1}{\sqrt{-2\pi i \hbar}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} du \exp i \left[ u \dot{P}_1(\tau_1^\zeta) \frac{q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta)}{\hbar^{2/3}} - \frac{u^3}{6} \dot{P}_1(\tau_1^\zeta) \ddot{Q}_1(\tau_1^\zeta) \right] + O(\hbar^{1/3}) \right\}. \quad (3.5)$$

Воспользуемся интегральным представлением функции Эйри

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \exp i(\xi x + \xi^3/3)$$

и тождеством  $e_\zeta(\tau_1^\zeta) = 1$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} J_\zeta &= \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\hbar}} \frac{\sqrt{2\pi} \exp(i\pi/4)}{(-\dot{P}_1(\tau_1^\zeta) \ddot{Q}_1(\tau_1^\zeta)/2)^{1/3}} \sqrt{\dot{P}_1(\tau_1^\zeta)} \Phi_\nu(\tau_1^\zeta, q_2, \varphi) \times \\ &\times \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \int_0^{\tau_1^\zeta} P_1(t) dQ_1(t) + P_1(\tau_1^\zeta) (q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta)) \right] \right\} \times \\ &\times \left\{ \text{Ai} \left[ Z_\zeta \frac{q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta)}{\hbar^{2/3}} \right] + O(\hbar^{1/3}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где  $Z_\zeta = \dot{P}_1(\tau_1^\zeta)/(-\dot{P}_1(\tau_1^\zeta) \ddot{Q}_1(\tau_1^\zeta)/2)^{1/3}$ . Таким образом, в окрестности каустики  $V_\delta^\zeta[\pi_q(\Sigma)]$  главный член асимптотики (3.6) имеет порядок  $O(\hbar^{-1/6})$ , что говорит о существенном росте амплитуды решения  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  в этих точках при  $\hbar \rightarrow 0$ .

Рассмотрим в конфигурационном пространстве область тени, образованную точками

$$W_\delta^\zeta = \{(q) : [q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta)] = O(\hbar^\alpha), \quad q_2 = O(\hbar^{1/2}), \quad \varphi \in [0, 2\pi]\}, \quad (3.7)$$

где  $\alpha < 1/2$  и  $q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta) \neq 0$ . Мы покажем, что в области  $W_\delta^\zeta$  функция  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  является асимптотическим нулем. Аналогично предыдущему случаю, с помощью интеграла  $J_\zeta$  рассмотрим поведение функции  $\overset{0}{\Psi}_E(\vec{q}, \hbar)$  в точках (3.7). После замены переменных  $u = (\tau_1 - \tau_1^\zeta)/\varepsilon^3$  получим

$$J_\zeta = \mu(\hbar) \int_{-1/\varepsilon^2}^{1/\varepsilon^2} du \left[ \exp \frac{i}{\hbar} \varepsilon^3 u \dot{P}_1(\tau_1^\zeta) (q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta)) \right] \tilde{\Phi}_\nu(u, q_2, \varphi, \hbar), \quad (3.8)$$

где

$$\mu(\hbar) = \frac{\varepsilon^3}{\sqrt{-2\pi i \hbar}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \int_0^{\tau_1^\zeta} P_1(t) dQ_1(t) + P_1(\tau_1^\zeta) (q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta)) \right] = O(1) \quad (3.9)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_\nu(u, q_2, \varphi, \hbar) &= e_\zeta(\tau_1^\zeta + \varepsilon^3 u) \sqrt{\dot{P}_1(\tau_1^\zeta + \varepsilon^3 u)} \times \\ &\times \Phi_\nu(\tau_1^\zeta + \varepsilon^3 u, q_2, \varphi) \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \int_{\tau_1^\zeta}^{\tau_1^\zeta + \varepsilon^3 u} P_1(t) dQ_1(t) + \right. \end{aligned}$$

$$+ [P_1(\tau_1^\zeta + \varepsilon^3 u) - P_1(\tau_1^\zeta) - \dot{P}_1(\tau_1^\zeta) \varepsilon^3 u] (q_1 - Q_1(\tau_1^\zeta)) + p_1(\tau_1^\zeta + \varepsilon^3 u) [Q_1(\tau_1^\zeta) - Q_1(\tau_1^\zeta + \varepsilon^3 u)] \}. \quad (3.10)$$

Разложив функцию (3.10) в асимптотический ряд по  $\varepsilon^3$ , мы получим, что главный член разложения имеет порядок  $O(1)$ . В силу условия  $\tilde{\Phi}_\nu|_{u=\pm\varepsilon^{-2}} = 0$  (которое немедленно следует из (3.1)) и ограниченности функций  $\tilde{\Phi}_\nu$ , пределы интегрирования в (3.8) можно заменить на  $\pm\infty$ . Поскольку в области (3.7) интеграл (3.8) не имеет критических точек, а функция (3.10) регулярна по отношению к переменным  $u$ , то, согласно теории асимптотических оценок быстроосциллирующих интегралов [160], получим

$$J_\zeta = O(\hbar^\infty). \quad (3.11)$$

## Приложение И. Конструкция семейства $[\Lambda^1(I), r^n(I)]$ для классических систем с одной циклической переменной

Рассмотрим часто встречающийся в приложениях случай, когда функция Гамильтона допускает циклическую угловую переменную  $\varphi \pmod{2\pi}$ . В этом случае всегда можно выделить специальное семейство замкнутых фазовых траекторий  $\Lambda^1(I)$ , отвечающих движению классической системы по равновесной окружности. Опишем кратко их конструкцию (см. также [33]).

Обозначим через  $I$  канонически сопряженный импульс к переменной  $\varphi$ . Зафиксируем числовой интервал  $\Omega_I \ni I$  и потребуем выполнения условия

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I}(\vec{p}, I, \vec{q}) = 0. \quad (И.1)$$

Введем на редуцированном фазовом пространстве  $\mathbb{R}_p^{n-1} \times \mathbb{R}_q^{n-1}$  однопараметрическое по  $I$  семейство функций Гамильтона

$$\tilde{\mathcal{H}}_I(p, q) = \mathcal{H}(\vec{p}, I, \vec{q}), \quad I \in \Omega_I. \quad (И.2)$$

Обозначим через  $\tilde{r}_0(I) = (\vec{p}_0(I), \vec{q}_0(I))$  критическую точку функции  $\tilde{\mathcal{H}}_I(\vec{p}, \vec{q})$ :

$$\nabla_p \tilde{\mathcal{H}}_I|_{\tilde{r}_0(I)} = \nabla_q \tilde{\mathcal{H}}_I|_{\tilde{r}_0(I)} = 0. \quad (И.3)$$

Тогда нетрудно убедиться, что при каждом фиксированном значении параметра  $I \in \Omega_I$  кривая

$$\Lambda^1(I) = \{p_0(I), I, q_0(I), \varphi = \omega_0(I)\tau\}, \quad (И.4)$$

где  $\omega_0(I) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I}(p_0(I), I, q_0(I))$ , является замкнутой траекторией исходной гамильтоновой системы, лежащей на уровне энергии  $E_0(I) = \lambda^{(+)}|_{\Lambda^1(I)}$ . В конфигурационном пространстве  $\mathbb{R}_q^n$  траектория (И.4) отвечает движению по замкнутой равновесной окружности с периодом  $T(I) = 2\pi/\omega_0(I)$ .

Построение комплексного ростка  $r^n(I)$  на семействе  $\Lambda^1(I)$  существенно упрощается, поскольку в этом случае матрица  $\mathcal{H}_{\text{var}}|_{\Lambda^1(I)} \equiv W(I)$  постоянна и процедура построения решений Флоке, удовлетворяющих условиям существования ростка, сводится к решению задачи на собственные векторы и собственные значения для матрицы  $W(I)$ :

$$W(I)f_k = i\omega_k(I)f_k, \quad \text{Im } \omega_k = 0. \quad (И.5)$$

Тогда требуемые решения Флоке системы в вариациях с матрицей  $W(I)$  имеют вид

$$a_k(\tau, I) = f_k \exp[i\omega_k(I)\tau]. \quad (И.6)$$

## Приложение К. Решения Флоке спинового уравнения

Здесь будут представлены формулы для решений Флоке системы

$$\begin{aligned} i\dot{u}_\zeta + \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}(z(t)) \rangle u_\zeta = 0, \quad u_\zeta(t+T) = \exp(i\Omega_\zeta t) u_\zeta(t), \\ \text{Im } \Omega_\zeta = 0, \quad \zeta = \pm 1, \end{aligned} \quad (\text{K.1})$$

используемые при построении спектральных серий оператора Дирака.

**Предложение.** Все мультипликаторы системы (K.1) по абсолютной величине равны единице.

**Доказательство.** Пусть  $v_\zeta$  – некоторые решения Флоке системы (K.1) с мультипликатором  $\lambda_\zeta$ , тогда

$$v_\zeta(\tau+T) = \lambda_\zeta v_\zeta(\tau). \quad (\text{K.2})$$

Отсюда следует

$$\overset{+}{v}_\zeta(\tau+T)v_\zeta(\tau+T) = |\lambda_\zeta|^2 \overset{+}{v}_\zeta(\tau)v_\zeta(\tau). \quad (\text{K.3})$$

Заметим далее, что для любых двух решений системы (K.1)  $v_1(\tau)$  и  $v_2(\tau)$  величина  $\overset{+}{v}_1(\tau)v_2(\tau)$  сохраняется. Отсюда следует

$$\overset{+}{v}_\zeta(\tau+T)v_\zeta(\tau+T) = \overset{+}{v}_\zeta(\tau)v_\zeta(\tau). \quad (\text{K.4})$$

Сравнивая (K.3) и (K.4) при условии  $\overset{+}{v}_\zeta v_\zeta \neq 0$ , получаем доказательство утверждения.

Рассмотрим теперь два частных случая, когда вопрос существования решений Флоке, удовлетворяющих условиям (K.1), решается достаточно конструктивно.

**Случай 1.**  $\vec{\mathcal{B}}(\tau) = \vec{\mathcal{B}} = \text{const}$ . В этом случае матрица монодромии системы (K.1) есть  $G(T) = \exp[-i\langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}} \rangle T]$  и задача построения мультипликаторов  $\lambda_\zeta = \exp[-i\omega_\zeta^s T]$  сводится к решению уравнения

$$\langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}} \rangle f_\zeta = \omega_\zeta^s f_\zeta. \quad (\text{K.5})$$

Введем единичный вектор  $\vec{n} = \vec{\mathcal{B}}/|\vec{\mathcal{B}}| = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$ . Тогда уравнение (K.5) допускает общее решение вида

$$\omega_\zeta^s = \zeta|\vec{\mathcal{B}}|, \quad f_\zeta = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \zeta\sqrt{1+\zeta \cos\theta} \exp(-i\varphi/2) \\ \sqrt{1-\zeta \cos\theta} \exp(i\varphi/2) \end{pmatrix}, \quad \alpha = \text{const}, \quad \zeta = \pm 1, \quad (\text{K.6})$$

а постоянные спиноры  $f_k$  образуют полную и ортонормированную систему

$$\overset{+}{f}_{\zeta'} f_\zeta = \delta_{\zeta'\zeta}, \quad \sum_\zeta \overset{+}{f}_\zeta f_\zeta = 1. \quad (\text{K.7})$$

В итоге получаем следующий набор решений Флоке:

$$v_\zeta(\tau) = e^{-i\zeta|\vec{\mathcal{B}}|\tau} f_\zeta, \quad \zeta = \pm 1. \quad (\text{K.8})$$

**Случай 2.**  $\vec{\mathcal{B}}(\tau) = (-\mathcal{B}_\perp \sin(\omega_0\tau), -\mathcal{B}_\perp \cos(\omega_0\tau), \mathcal{B}_3)$ , где  $\omega_0 = 2\pi/T(E_0)$ . В этом случае уравнение (K.1) с помощью унитарного преобразования  $v(\tau) = S\tilde{v}(\tau)$ ,  $S = \exp(-i\omega_0\tau\sigma_3/2)$  приводится к виду

$$\left( -i\frac{d}{d\tau} + \langle \vec{\sigma}, \vec{\tilde{\mathcal{B}}} \rangle \right) \tilde{v}(\tau) = 0, \quad (\text{K.9})$$

где  $\vec{\tilde{\mathcal{B}}} = (0, \mathcal{B}_\perp, \mathcal{B}_3 - \omega_0/2)$ , и, таким образом, к рассмотренному выше случаю 1. В результате можно получить следующий набор решений Флоке:

$$v_\zeta(\tau) = e^{-i(\sigma_3 \omega_0/2 + \zeta |\vec{\tilde{\mathcal{B}}})\tau} \tilde{f}_\zeta, \quad (\text{K.10})$$

с характеристическими показателями

$$\omega_\zeta^s = \zeta \left( \frac{\omega_0}{2} + |\vec{\tilde{\mathcal{B}}}| \right), \quad \zeta = \pm 1. \quad (\text{K.11})$$

Здесь спиноры  $\tilde{f}_s$  определяются единичным вектором  $\vec{n} = \vec{\tilde{\mathcal{B}}}/|\vec{\tilde{\mathcal{B}}}|$  по формуле (K.6).

### Приложение Л. Решения задачи Коши для спинового уравнения в адиабатическом приближении

Найдем приближенные по  $\text{mod } O(T^{-2})$  решения задачи Коши (38.5). Иными словами, требуется определить функцию  $v_\zeta(t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\left( -i \frac{d}{dt} + \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}(t) \rangle \right) v_\zeta(t) = O(T^{-2}) \quad (\text{Л.1})$$

с начальными данными (38.5). Для решения этой задачи воспользуемся методом, применявшимся нами ранее в разд. 3б части I.

На классической траектории  $\vec{x} = \vec{X}_0(\tilde{R}(s)) + T^{-1} \vec{X}_1(s, \theta) + O(T^{-2})$  (см. формулы (I.36.8) и (I.36.16)), описывающей адиабатическое движение классической системы с функцией Гамильтона  $\lambda^{(+)}(\vec{p}, \vec{x}, R(t))$ , вектор поляризации  $\vec{\mathcal{B}}(t)$  (38.6) допускает следующее разложение по параметру  $T^{-1}$ :

$$\vec{\mathcal{B}}(t) = \vec{\mathcal{B}}(\tilde{R}(s)) + T^{-1} \vec{\mathcal{B}}^1(s, \theta) + O(T^{-2}), \quad (\text{Л.2})$$

где

$$\vec{\mathcal{B}}(\tilde{R}(s)) = \frac{e_0}{2mc} \vec{H}(\tilde{R}(s)), \quad (\text{Л.3})$$

$$\vec{\mathcal{B}}^1(s, \theta) = \frac{e_0}{2mc} \left[ -\frac{1}{c} \frac{d\vec{X}_0(\tilde{R}(s))}{dt} \times \vec{E}(\tilde{R}(s)) + \langle \vec{H}, \vec{x}(\tilde{R}(s)) \rangle, \vec{X}_1(s, \theta) \right]. \quad (\text{Л.4})$$

Решение уравнения (Л.1) ищем в виде асимптотического ряда

$$v_\zeta(t) = v_\zeta^0(s, \theta_\zeta) + T^{-1} v_\zeta^1(s, \Xi) + O(T^{-2}), \quad (\text{Л.5})$$

где  $\Xi = (\theta, \theta_+, \theta_-)$  – набор быстрых переменных, включающий кроме старых переменных  $\theta$  две новые:  $\theta_\zeta = T\Phi_\zeta(s)$ ,  $\zeta = \pm 1$ , – отвечающие спиновым степеням свободы электрона. Подставив формулы (Л.2) и (Л.5) в (Л.1) и приравняв слагаемые, стоящие при одинаковых степенях  $1/T$ , получим уравнение для определения функций  $v_\zeta^0$  и  $v_\zeta^1$ :

$$-i\Phi'_\zeta(s) \frac{\partial v_\zeta^0}{\partial \theta_\zeta} + \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}(\tilde{R}(s)) \rangle v_\zeta^0 = 0, \quad (\text{Л.6})$$

$$-i\Phi'(s) \frac{\partial v_\zeta^1}{\partial \Xi} + \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}(\tilde{R}(s)) \rangle v_\zeta^1 = i \frac{\partial v_\zeta^0}{\partial s} - \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}^1(\tilde{R}(s)) \rangle v_\zeta^0. \quad (\text{Л.7})$$

Из первого уравнения с учетом условия периодичности по быстрым переменным  $\Xi$  получим в нулевом приближении

$$\Phi_\zeta(s) = \int_{s_0}^s ds \Omega_\zeta(\tilde{R}(s)) \quad (\text{Л.8})$$

и

$$\overset{\circ}{v}_\zeta(s, \theta_\zeta) = v_\zeta(\tilde{R}(s)) \exp[-i(\theta_\zeta + \mathcal{M}_\zeta(s))], \quad (\text{Л.9})$$

где величины  $v_\zeta(\tilde{R}(s))$  и  $\Omega_\zeta(\tilde{R}(s))$  определены в (31.8). В выражение (Л.9) вошли также произвольные вещественные функции  $\mathcal{M}_\zeta(s)$ , определяемые из последующих приближений и удовлетворяющие начальному условию  $\mathcal{M}_\zeta(s_0) = 0$ ,  $\zeta = \pm 1$ .

Рассмотрим теперь уравнение (Л.7), решение которого будем искать в виде разложения по собственным векторам  $v_\zeta(\tilde{R}(s))$ ,  $\zeta = \pm 1$ :

$$\overset{1}{v}_\zeta(s, \Xi) = \sum_{\eta} b_\zeta^\eta(s, \Xi) v_\eta(\tilde{R}(s)) e^{-i(\theta_\eta + \mathcal{M}_\eta(s))}. \quad (\text{Л.10})$$

Подставив (Л.9) в (Л.7) и умножив слева на спинор  $\overset{\dagger}{v}_{\zeta'}$  ( $\tilde{R}(s)$ ), с учетом (Л.8) и (Л.9) получим

$$-i\Omega \frac{\partial b_\zeta^{\zeta'}}{\partial \Xi} + (\Omega_{\zeta'} - \Omega_\zeta) b_\zeta^{\zeta'} = \frac{d\mathcal{M}_\zeta(s)}{ds} \delta_{\zeta\zeta'} + i \overset{\dagger}{v}_{\zeta'} \frac{dv_\zeta}{ds} - \overset{\dagger}{v}_{\zeta'} \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}^1(s, \theta) \rangle v_\zeta. \quad (\text{Л.11})$$

Выделив в векторе  $\vec{\mathcal{B}}^1(s, \theta)$  (Л.4) явную зависимость от переменных  $\theta$ , перепишем его в виде

$$\vec{\mathcal{B}}^1(s, \theta) = \vec{\mathcal{B}}_0^1(\tilde{R}(s)) + \sum_{k=1}^3 (\vec{\mathcal{B}}_k^1(s) e^{i\theta_k} + \overset{*}{\vec{\mathcal{B}}}_k^1(s) e^{-i\theta_k}).$$

Решение уравнения (Л.11) разобьем на два этапа:

1. Пусть в уравнении (Л.11)  $\zeta = \zeta'$ . Требование ограниченности решения по переменным  $\Xi$  приводит к определению функций  $\mathcal{M}_\zeta(s)$

$$\mathcal{M}_\zeta(s) = - \int_{s_0}^s ds \Omega_\zeta^1(\tilde{R}(s)), \quad (\text{Л.12})$$

подынтегральное выражение которого совпадает с (38.11). С учетом (Л.12) решение уравнения (Л.11) имеет вид

$$b_\zeta^{\zeta'}(s, \Xi) = b_\zeta(s) - \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\Omega_k} \left( \overset{\dagger}{v}_\zeta \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}_k^1(s) \rangle v_\zeta e^{i\theta_k} - \overset{\dagger}{v}_{\zeta'} \langle \vec{\sigma}, \overset{*}{\vec{\mathcal{B}}}_k^1(s) \rangle v_\zeta e^{-i\theta_k} \right) \quad (\text{Л.13})$$

и определено с точностью до функций  $b_\zeta(s)$ , удовлетворяющих в начальный момент времени условию  $b_\zeta^{\zeta'}(s, \Xi)|_{s=s_0} = 0$ .

2. Пусть в уравнении (Л.11)  $\zeta' = -\zeta$ . В этом случае, накладывая дополнительное условие  $2\pi$ -периодичности коэффициентов  $b_\zeta^{-\zeta}$  по всем переменным  $\Xi$ , получаем

$$b_\zeta^{-\zeta}(s, \Xi) = \tilde{b}_\zeta(s) e^{2i\theta_\zeta} - \sum_{k=1}^3 \left\{ \frac{\overset{\dagger}{v}_\zeta \langle \vec{\sigma}, \vec{\mathcal{B}}_k^1(s) \rangle v_\zeta}{\Omega_k - 2\Omega_\zeta} e^{i\theta_k} - \frac{\overset{\dagger}{v}_\zeta \langle \vec{\sigma}, \overset{*}{\vec{\mathcal{B}}}_k^1(s) \rangle v_\zeta}{\Omega_k + 2\Omega_\zeta} e^{-i\theta_k} \right\} +$$

$$+\frac{1}{2\omega_\zeta} \overset{+}{v}_{-\zeta} \left[ -i \frac{d}{ds} + \langle \vec{\sigma}, \vec{B}^1(\tilde{R}(s)) \rangle \right] v_\zeta. \quad (\text{Л.14})$$

Здесь  $\tilde{b}_\zeta(s)$  – постоянные интегрирования, удовлетворяющие начальному условию  $b_\zeta^-(s, \Xi)|_{s=s_0} = 0$ . При выводе (Л.14) существенно использовалось предположение о невырожденности квазиклассического спектра (31.11) оператора  $\hat{\mathcal{H}}_D(R(t))$ .

Справедливость формул (38.10) и (38.11) очевидным образом вытекает из приведенных здесь конструкций.

## Список литературы

1. Швебер С. *Введение в квантовую теорию поля*. — М.: Иностран. лит-ра, 1963. — 844 с.
2. Давыдов А.С. *Квантовая механика*. — М.: Наука, 1973. — 703 с.
3. Klein O. Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac // *Zeitsch. Phys.* — 1929. — Bd. 53, H. 3/4. — S. 157-165.
4. Nikolsky K. Das Oszillatorproblem nach der Diracschen Theorie // *Zeitsch. Phys.* — 1930. — Bd. 62, H. 9/10. — S. 677-681.
5. Schrödinger E. Sitzungsberichte Preuss. — Akad. Wiss., 1930. (Рус. пер.: Шрёдингер Э. О свободном движении в релятивистской квантовой механике // *Избр. тр. по квантовой механике*. — М.: Наука, 1976. — С. 218-228).
6. Schwinger J. The quantum correction in the radiation by energetic accelerated electrons // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* — 1954. Vol. 40, No 2. — P. 132-136.
7. Гитман Д.М., Фрадкин Е.С., Шварцман Ш.М. *Квантовая электродинамика с нестабильным вакуумом*. — М.: Наука, 1991. — 296 с.
8. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики. Асимптотические методы*. — Томск: Изд-во ТПУ, 2004. — 166 с.
9. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: I. High order corrections to multidimensional time-dependent equations of Schrödinger type // *Ann. of Phys. (NY)*. — 1996. — Vol. 246, No. 2. — P. 231-280.
10. Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. Квазиклассически сосредоточенные состояния уравнения Шрёдингера // *Лекционные заметки по теоретической и математической физике*. — Т. 1, ч. 1. — Казань, 1996. — С. 15-136.
11. Ehrenfest P. Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quanten Mechanik // *Zeits. f. Phys.* — 1927. — Bd. 45. — S. 455-457. (Русск. пер.: Эренфест П. Замечание о приближенной справедливости классической механики в рамках квантовой механики // *Относительность. Кванты. Статистика*. — М.: Наука, 1972. — С. 82-84.)
12. Багров В.Г., Белов В.В., Рогова А.М. Квазиклассически сосредоточенные состояния в квантовой механике // *Теор. матем. физика*. — 1992. — Т. 90, № 1. — С. 84-94.
13. Bagrov V.G., Belov V.V., Rogova A.M., Trifonov A.Yu. The quasiclassical localization of the states and obtaining of classical equations of motion from quantum theory // *Modern Phys. Lett. B.* — 1993. — Vol. 7, No 26. — P. 1667-1675.
14. Маслов В.П. *Теория возмущения и асимптотические методы*. — М.: Изд-во МГУ, 1965. — 549 с.
15. Маслов В.П. Метод ВКБ в многомерном случае // Дж. Хёдинг. *Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)*. — М.: Мир, 1965. — С. 177-237.
16. Маслов В.П., Федорюк М.В. *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*. — М.: Наука, 1976. — 296 с.
17. Маслов В.П. *Асимптотические методы и теория возмущения*. — М.: Наука, 1988. — 312 с.
18. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах диффракции коротких волн*. — М.: Наука, 1972. — 465 с.

19. Бабич В.М., Лазуткин В.Ф. О собственных функциях, сосредоточенных в окрестности замкнутой геодезической // Проблемы мат. физики. Вып. 2. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1967. — С. 15-25.
20. Бабич В.М. Собственные функции, сосредоточенные вблизи геодезических // Математические вопросы теории распространения волн: Записки науч. семина. ЛОМИ. Т. 9. — Л., 1968. — С. 15-63.
21. Ralston J.V. On the construction of quasimodes associated with stable periodic orbits // Commun. Math. Phys. — 1976. — Vol. 51. — P. 219-242.
22. Colin de Verdiere Y. Quasi-modes sur les varietes Riemanniennes // Invent. Math. — 1977. — Vol. 43, No 1. — P. 15-52.
23. Guillemin V., Weinstein A. Eigenvalues associated with closed geodesics // Bull. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 82, No 1. — P. 92-94.
24. Berry M.V., Tabor M. Closed orbits and the regular bound spectrum // Proc. R. Soc. Lond. A. — 1976. — Vol. 349. — P. 101-123.
25. Gutzwiller M.C. Periodic orbits and classical quantization condition // J. Math. Phys. — 1971. — Vol. 12, No 3. — P. 343-356.
26. Muller-Kirsten J.W., Wiedemann A. Quantization of systems with many degrees of freedom by the method of collective coordinates: Quantum mechanics around a classical periodic orbit // J. Math. Phys. — 1985. — Vol. 26, No 7. — P. 1680-1694.
27. Gaspard P., Alonso D.  $\hbar$ -expansion for the periodic-orbit quantization of hyperbolic systems // Phys. Rev. A. — 1993. — Vol. 47, No 5. — P. 3468-3471.
28. Voros A. The WKB-Maslov method for non-separable systems // Symplectic Geometry and Mathematical Physics: Proc. C.N.R.S. Symp. — Aix-en Provence, 1974.
29. Voros A. Semiclassical approximation // Ann. Inst. Henri Poincaré. — 1976. — Vol. 24A. — P. 31-90.
30. Маслов В.П. *Операторные методы*. — М.: Наука, 1973. — 544 с.; Maslov V.P. *Operational Methods*. — Moscow: Mir, 1976. — 503 p.
31. Маслов В.П. *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях*. — М.: Наука, 1977. — 384 с.; Maslov V.P. *The Complex WKB Method for Nonlinear Equations*. I. *Linear Theory*. — Basel, Boston, Berlin: Birkhauser Verlag, 1994. — 304 p.
32. Белов В.В., Доброхотов С.Ю. Канонический оператор Маслова на изотропных многообразиях с комплексным ростком и его приложение к спектральным задачам // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 298, № 5. — С. 1037-1042.
33. Белов В.В., Доброхотов С.Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // Теор. матем. физика. — 1988. Т. 92, № 2. — С. 215-254.
34. Доброхотов С.Ю., Маслов В.П. Некоторые приложения теории комплексного ростка к теории уравнений с малым параметром // Совр. пробл. матем. — 1975. — Т. 5. — С. 145-207.
35. Крахнов А.Д. Асимптотика собственных значений псевдодифференциальных операторов и инвариантные торы // Усп. мат. наук. — 1976. — Т. 31, № 3. — С. 217-218.
36. Воробьев Ю.М. Комплексный росток Маслова, порожденный линейной связностью // Мат. заметки. — 1990. — Т. 48, № 6. — С. 29.
37. Валиньо Б., Доброхотов С.Ю., Нехорошев Н.Н. Комплексный росток в системах с одной циклической переменной // Усп. мат. наук. — 1984. — Т. 39, № 3. — С. 233-234.



38. Eialiasson L.H. Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation // Commun. Math. Phys. — 1992. — Vol. 146. — P. 447-482.
39. Паули В. *Релятивистская теория элементарных частиц*. — М.: Иностр. лит-ра, 1947. — 84 с.
40. Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. Высшие приближения для квазиклассических траекторно-когерентных состояний оператора Шрёдингера и Дирака в произвольном электромагнитном поле. — Томск, 1989. — 42 с. (Препринт / Томский научн. центр СО АН СССР; № 5).
41. Белов В.В., Маслов В.П. Квазиклассические траекторно-когерентные состояния оператора Дирака с аномальным взаимодействием Паули // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 305, № 3. — С. 574-577.
42. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. Quasi-classical trajectory-coherent approximation for the Dirac equation with an external electromagnetic field in Riemann-Cartan space: II. Construction of TCS and equation for spin // Class. Quantum Grav. — 1991. — Vol. 8. — P. 1833-1846.
43. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. The complex WKB-Maslov method for the Dirac equation in a torsion field: I. Construction of trajectory-coherent states and the equation for spin // Class. Quantum Grav. — 1991. — Vol. 8. — P. 1349-1359.
44. V.G. Bagrov, V.V. Belov, A.Yu. Trifonov Semiclassical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics: II. High order corrections to the Dirac operators in external electromagnetic field. — Preprint. Jun 1998. e-Print Archive: quant-ph/9806017. — 27 pp.
45. Bargmann V., Wigner B. Group theoretical discussion of relativistic wave equations // Proc. Nat. Acad. Sci USA. — 1948. — Vol. 34, No 5. — P. 211-223.
46. Bargmann V., Michel L., Telegdy V.L. Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field // Phys. Rev. Lett. — 1959. — Vol. 2, No 10. — P. 435-436.
47. Bagrov V.G., Belov V.V., Ternov I.M. Quasiclassical trajectory-coherent states of a particle in arbitrary electromagnetic field // J. Math. Phys. — 1983. — Vol. 24, No 12. — P. 2855-2859.
48. Pauli W. Zur Quantenmechanik des magnetischen Electrons // Zeits. Phys. — 1927. — Bd. 43. — S. 601-623.
49. Френкель Я.И. Электродинамика вращающегося электрона // Собр. избранных трудов. Т. 2. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1958. — С. 460-476.
50. Багров В.Г., Белов В.В. Квазиклассические траекторно-когерентные состояния бесспиновой релятивистской частицы в произвольном электромагнитном поле // Изв. вузов. Физика. — 1982. — Т. 25, № 4. — С. 48-50.
51. Белов В.В., Болтовский Д.В., Трифонов А.Ю. Квазиклассические траекторно-когерентные состояния релятивистского уравнения типа Шрёдингера и уравнения Клейна-Гордона. — Томск, 1991. — 15 с. (Препринт / Томский научн. центр СО АН СССР; № 12).
52. Соколов А.А., Тернов И.М. *Релятивистский электрон*. — М.: Наука, 1983. — 304 с.
53. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. — М.: Наука, 1960. — 400 с.
54. Багров В.Г., Гитман Д.М., Тернов И.М., Халилов В.Р., Шаповалов В.Н. *Точные решения релятивистских волновых уравнений*. — Новосибирск: Наука, 1982. — 144 с.
55. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. *Квантовая электродинамика*. — М.: Наука, 1969. — 624 с.

56. Байер В.Н., Катков В.М., Фадин С.В. *Излучение релятивистских электронов*. — М.: Атомиздат, 1973. — 374 с.
57. Fradkin D.M., Good R.H. Electron polarization operators // *Rev. Mod. Phys.* — 1961. — Vol 33, No 2. — P. 343-352.
58. Додонов В.В., Курмышев Е.В., Манько В.И. Коррелированные когерентные состояния // *Тр. ФИАН*. — 1986. — Т. 176. — С. 128-150.
59. Багров В.Г., Бордовицын В.А. Классическая теория спина // *Изв. вузов. Физика*. — 1980. — № 2. — С. 67-76.
60. Тернов И.М., Бордовицын В.А. О современной интерпретации классической теории спина Я.И. Френкеля // *Успехи физ. наук*. — 1980. — Т. 132, вып. 2. — С. 345-352.
61. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Элементы современной математической физики*. — Томск: Изд-во ТПУ, 2004. — 182 с.
62. Arodz H., Ruigrok Th.W. On a classical limit of the Dirac equation with an external electromagnetic field. Part I: Proper-time evolution and classical equation of motion // *Acta Phys. Pol.* — 1988. — Bd. 19, No 2. — P. 99-140.
63. Белов В.В., Болтовский Д.В. Высшие приближения для квазиклассических траекторно-когерентных состояний оператора Клейна–Гордона в произвольном электромагнитном поле. — Томск, 1989. — 21 с. (Препринт / ТНЦ СО АН СССР; № 23).
64. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu. Theory of spontaneous radiation by electrons in a trajectory-coherent approximation // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1993. — Vol. 26, No 22. — P. 6431-6449.
65. Багров В.Г., Бухбиндер И.Л., Гитман Д.М. Когерентные состояния релятивистской частицы в поле плоской электромагнитной волны. — *Ред. журн. «Изв. вузов. Физика»*. — Томск, 1976. — 18 с. Деп. в ВИНТИ 25.03.76. № 924-76 Деп.
66. Johnson J.E. Position Operators and Proper Time in Relativistic Quantum Mechanics // *Phys. Rev.* — 1969. — Vol. 181, No 5. — P. 1755-1764.
67. Heisenberg W. Über der anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik // *Zs. f. Phys.* — 1927. — Bd. 43. — S. 172-198.
68. Kennard E.H. Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen // *Zs. f. Phys.* — 1927. — Bd. 44. — S. 326-352.
69. Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikro- zur Makromechanik // *Naturwissenschaften*. — 1926. — Bd. 14, H. 28. — S. 664-668. (Рус. пер.: Шрёдингер Э. Непрерывный переход от микро- к макромеханике // *Избр. тр. по квантовой механике*. — М.: Наука, 1976. — С. 51-55).
70. Малкин М.А., Манько В.И. *Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем*. — М.: Наука, 1979. — 320 с.
71. Shaarawi A.M., Besieris I.M., Ziolkowsky R.W. A novel approach to the synthesis of nondispersive wave packet solutions to the Klein–Gordon and Dirac equations // *J. Math. Phys.* — 1990. — Vol. 31, No 10. — P. 2511-2519.
72. Гриб А.А., Мамаев С.Г., Мостепаненко В.М. *Вакуумные квантовые эффекты в сильных полях*. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 288 с.
73. Биррелл Н., Девис П. *Квантованные поля в искривленном пространстве-времени*. — М.: Мир, 1984. — 360 с.
74. Бухбиндер И.Л., Гитман Д.М., Фрадкин Е.С. Квантовая электродинамика в искривленном пространстве // *Тр. ФИАН*. — 1990. — Т. 201. — С. 33-73.
75. Buchbinder I.L., Fradkin E.S., Gitman D.M. Quantum electrodynamics in curved space-time // *Fortschr. der Physik*. — 1981. — Bd. 29, No 5. — S. 187-218.

76. Buchbinder I.L., Odintsov S.D. Shapiro I.L. Renormalization group approach to quantum field theory in curved space-time // *Rivista del Nuovo Cim.* – 1989. – Vol. 12, No 10. – P. 1-112.
77. Penrose R. Conformal treatment of infinity // *Relativity, Groups and Topology.* Ed. by B.S. De Witt, C. De Witt. – N-Y: Gordon and Breach, 1964.
78. Chernikov N.A., Tagirov E.A. Quantum theory of scalar field in de Sitter space-time // *Ann. Inst. Henri Poincaré.* – 1968. – Vol. 94. – P. 109.
79. Гальцов Д.В., Померанцева Ж.В., Чижов Ж.А. Поведение массивных векторных частиц в поле Шварцшильда // *Изв. вузов. Физика.* – 1984. – Т. 27, № 8. – С. 81–85.
80. Olsen H.A., Osland P. On the existence of bound states for a massive spin-one particle and a magnetic monopole // *Phys. Rev. D.* – 1990. – Vol. 42, N 2. – P. 665-689.
81. Olsen H.A., Osland P. Bound states for a massive spin-one particle and a magnetic monopole // *Ibid.* – 1990. – Vol. 42, N 2. – P. 690-700.
82. Seitz M. Proca field in a space time with curvature and torsion // *Class. Quant. Grav.* – 1986. – Vol. 3, N 6. – P. 1265-1273.
83. Spinosa R. Proca field in a space time with torsion // *Class. Quant. Grav.* – 1987. – Vol. 4, N 2. – P. 473-484.
84. Audretsch J. Trajectories and spin motion of massive spin-1/2 particles in gravitational field // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1981. – Vol. 14, No 2. – P. 411-422.
85. Audretsch J. Dirac electron in space-time with torsion: Spinor propagation, spin precession and nongeodesic orbits // *Phys. Rev.* – 1981. – Vol. 24, N 6. – P. 1470-.
86. Hehl F.W. On the kinematics of the torsion of space-time // *Found Phys.* – 1985. – Vol. 15, No 4. – P. 451-471.
87. Rumpf H. Supersymmetry of the photon // *J. Phys. A: Math. Gen.* – 1987. – Vol. 20, N 13. – P. 4285-4307.
88. Горбацевич А.К. *Квантовая механика в общей теории относительности.* – Минск: Из-во «Университетское», 1985.
89. Kuchař K. Gravitation, geometry, and nonrelativistic quantum theory // *Phys. Rev. D.* – 1980. – Vol. 22, No 6. – P. 1285.
90. Тагиров Э.А. Квантовая механика в римановом пространстве-времени. I. Общековариантное уравнение Шрёдингера с релятивистскими поправками // *Теор. матем. физика.* – 1990. – Т. 84, № 3. – С. 419- 430.
91. Тагиров Э.А. Квантовая механика в римановом пространстве-времени. II. Операторы наблюдаемых // *Теор. матем. физика.* – 1992. – Т. 90, № 3. – С. 412-423.
92. Cristea O. Spin systems in weak gravi-magnetic fields. I. The general covariant Dirac theory // *Rev. Roum. Phys.* – 1989. – Vol. 34, No 3. – P. 251-257.
93. Ogawa N., Fujii K., Kobushukin A. Quantum mechanics in Riemannian manifold // *Prog. Theor. Phys.* – 1990. – Vol. 83, No 5. – P. 894-905.
94. Audretsch J., Schäfer G. Quantum mechanics of electromagnetically bounded spin-1/2 particles in an expanding Universe: Part. I. Influence of the expansion // *Gen. Rel. Grav.* – 1978. – Vol. 9, No 3. – P. 243-255.
95. Audretsch J., Schäfer G. Quantum mechanics of electromagnetically bounded spin-1/2 particles in an expanding Universe: Part. II. Energy spectrum of the hydrogen atom // *Gen. Rel. Grav.* – 1978. – Vol. 9, No 6. – P. 489-500.
96. Кобушкин А.П., Огава Н., Фудзии К., Чепилко Н.М. Квантовая механика на римановом многообразии // *Ядерн. физика.* – 1990. – Т. 52, вып. 3(9).

- С. 772-778.
97. Cocke W.J., Lloyd-Hart M. Fermion wave-mechanical operators in curved space-time // Phys. Rev. D. — 1990. — Vol. 42, No 6. — P. 1982-1987.
  98. Cognola G. et al. Lagrangian formulation of a spinning test particle in a curved space-time with torsion // Phys. Rev. D. — 1982. — Vol. 25, No 12. — P. 3109-3116.
  99. Хриплович И.Б. Частица с внутренним моментом в гравитационном поле // Журн. эспер. теор. физики. — 1989. — Т. 96, вып. 2(8). — С. 385-390.
  100. Holten J.W., van, Rietdijk R.H. Simmetries and motions in manifolds / NIKHEF, Preprint H/92-08; Rietdijk R.H., Holten J.W., van. Spinning particles in Scharzschild space-time / NIKHEF, Preprint H/92-09; Gibbons G.W., Rietdijk R.H., Holten J.W., van. SUSY in the sky / NIKHEF, Preprint H/93-04.
  101. Brown R.W., Shvartsman Sh.M. Classical limit of GED: Deriving and solving generalized Lorents–BMT equations / CWRUTH, Preprint 92-08.
  102. Fradkin E.S., Gitman D.M., Shvartsman Sh.M. Path integral for relativistic particle theory / CERN, Preprint 10-90-134.
  103. Fradkin E.S., Shvartsman Sh.M. Effective action of relativistic spinning particle in a graitational field with torsion / ITP, Preprint 91-18.
  104. Shvartsman Sh.M. On the lagrangian of a relativistic spinning particle // Modern Phys. Lett. A. — 1990. — Vol. 5, No 12. — P. 943-947.
  105. Papapetrou A. Spinning test-particles in general relativity. Part I // Proc. Roy. Soc. A. — 1951. — Vol. 209. — P. 248-258.
  106. Papapetrou A., Corinaldesi E. Spinning test-particles in general relativity. Part II // Proc. Roy. Soc. A. — 1951. — Vol. 209. — P. 259-268.
  107. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. Quasi-classical trajectory-coherent approximation in quantum mechanics of a charged particle in a curved space-time // Class. Quantum Grav. — 1991. — Vol. 8. — P. 515-527.
  108. Bagrov V.G., Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. Quantum mechanics of charged spin-1 particle in curved space-time with torsion: quasiclassical analysis of the Proca equation based on the Maslov complex sprout method // Class. Quantum Grav. — 1992. — Vol. 9. — P. 533-543.
  109. Buldurev V.S., Nomofilov V.E. Asymptotic solution of an elliptic equation system on a Riemannian manifold concentrated in the vicinity of a phase trajectory // J. Phys. A: Math. Gen. — 1981. — Vol. 14, No 7. — P. 1577-1585.
  110. Nyborg P. Approximate relativistic equation of motion for an extended charged particle in a inhomogeneous external electromagnetic fields // Nuovo Cim. — 1964. — Vol. 31, No 6. — P. 1209-1228; eratum // Ibid. — Vol. 32, No 4. — P. 1131.
  111. Девитт Б.С. *Динамическая теория групп и полей*. — М.: Наука, 1987. — 288 с.
  112. Rumpf H. Quasiclassical limit of the Dirac equation and the equivalence principle in the Riemann–Cartan geometry // Cosmology and Gravitation. Spin, Torsion, Rotation and Supergravity: Proc. Erice School. — NY: Plenum Press, 1979. — P. 93-104.
  113. Wong S.K. Fields and particle equation for the classical Yang–Mills field and particles with isotopic spin // Nuovo Cim. A. — 1970. — Vol. 65, No 4. — P. 689-694.
  114. Багров В.Г., Вшивцев А.С., Кетов С.В. *Дополнительные главы матема-*

- тической физики (калибровочные поля)*. — Томск: Изд-во ТГУ, 1990. — 144 с.
115. Карасев М.В., Маслов В.П. *Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование*. — М.: Наука, 1991. — С. 368.
116. Чижов Г.А., Дорофеев О.Ф. Излучение когерентного осциллятора // Вестн. МГУ. Физика, астрономия. — 1982. — Т. 23, № 2. — С. 12-16.
117. Бобров А.А., Дорофеев О.Ф., Чижов Г.А. Синхротронное излучение электрона в когерентном состоянии // Теор. матем. физика. — 1984. — Т. 61, № 2. — С. 293-300.
118. Додонов В.В., Манько В.И., Манько О.В. Коррелированные когерентные состояния и излучение квантовых систем // Тр. Физ. ин-та АН СССР. — 1988. — Т. 192. — С. 204-220.
119. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике*. — М.: Наука, 1976. — 280 с.
120. Belov V.V., Boltovskiy D.V., Trifonov A.Yu. Theory of spontaneous radiation by bosons in quasi-classical trajectory-coherent approximation // Int. J. Mod. Phys. B. — 1994. — Vol. 8, No 18. — P. 2503-2524.
121. Болотовский Б.М. Путь формирования излучения и его роль в излучении движущихся зарядов // Тр. ФИАН. — Т. 140. — С. 95-139.
122. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. *Квантовая электродинамика*. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — 312 с.
123. Левитан Б.М. Почти периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953. — 396 с.
124. Базылев В.А., Жеваго Н.К. *Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях*. — М.: Наука, 1987. — 272 с.
125. Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. Квазиклассическое траекторно-когерентное представление в квантовой теории излучения электрона. — Томск, 1989. — 38 с. (Препринт / Томский научн. центр СО АН СССР; № 27).
126. Белов В.В., Болтовский Д.В., Трифонов А.Ю. Метод квазиклассических траекторно-когерентных состояний в задаче о спонтанном излучении бозона в произвольном внешнем электромагнитном поле. — Томск, 1991. — 30 с. (Препринт / Томский научн. центр СО АН СССР; № 14).
127. Багров В.Г., Белов В.В., Маслов В.П. Метод квазиклассических траекторно-когерентных состояний в задаче о спонтанном излучении электрона // Докл. АН СССР. — 1989. — Т. 308, № 1. — С. 88-91.
128. Белов В.В., Холомай Б.В. Спиновые эффекты при движении электронов в аксиально-симметричном электромагнитном поле // Изв. вузов. Физика. — 1990. — Т. 33, № 9. — С. 91-96.
129. Bagrov V.G., Ternov I.M., Kholomai B.V. Radiative spin self-polarization of an electron under axial channeling // Rad. Eff. Lett. — 1984. — Vol. 85, No 1. — P. 7-11.
130. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Питаевский П.С. *Квантовая электродинамика*. — М.: Наука, 1998. — 624 с.
131. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Излучение релятивистских частиц в монокристаллах // Усп. физ. наук. — 1982. — Т. 137, № 4. — С. 561-604.
132. Ахиезер А.И., Ласкин Н.В., Шульга Н.Ф. Об эффекте отдачи при излучении релятивистских частиц // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 303, № 1. — С. 78-82.
133. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. О классическом пределе формул квантовой теории излучения // Там же. — 1990. — Т. 312, № 5. — С. 1102-1105.

134. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Квазиклассическая теория излучения частиц высоких энергий во внешнем поле и проблема граничных условий // Журн. эксперим. теор. физики. — 1991. — Т. 100, вып. 3. — С. 791-802.
135. Eckhardt В. Quantum mechanics of classically non-integrable systems // Phys. Rep. — 1988. — Vol. 163. — P. 205-297.
136. Байер В.Н., Катков В.М., Страховенко В.М. *Электромагнитные процессы при высоких энергиях в ориентированных монокристаллах*. — Новосибирск: Наука, 1989. — 340 с.
137. Фрёман Н., Фрёман П. *ВКБ-приближение*. — М.: Мир, 1967. — 186 с.
138. Хёдинг Дж. *Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ)*. — М.: Мир, 1965. — 238 с.
139. Белов В.В., Доброхотов С.Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова в спектральных квантовых задачах, соответствующих частично интегрируемым гамильтоновым системам. — М., 1988. — 80 с. (Препринт / Мат. ин-т АН СССР).
140. Лере Ж. *Лагранжес анализ и квантовая механика*. — М.: Мир, 1981. — 264 с.
141. Littlejohn R.G., Flynn W.G. Geometric phase using in the asymptotic theory of coupled wave equation // Phys. Rev. A. — 1991. — Vol. 44, No 9. — P.5239-5255.
142. Littlejohn R.G., Flynn W.G. Semiclassical theory of spin-orbit coupling // Phys. Rev. A. — 1992. — Vol. 45, No 11. — P. 7697-7717.
143. Карасев М.В. Новые асимптотики и аномалии для задачи квантования адиабатических инвариантов // Функц. анализ и его приложения. — 1990. — Т. 24, № 2. — С. 104-114.
144. Карасев М.В., Маслов В.П. Псевдодифференциальные операторы и канонический оператор в общих симплектических многообразиях // Изв. АН СССР. Серия матем. — 1983. — Т. 47, № 5. — С. 999-1029.
145. Карасев М.В., Маслов В.П. Асимптотическое и геометрическое квантование // Усп. мат. наук. — 1984. — Т. 39, вып. 6(240). — С. 115-173.
146. Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. Maslov's complex germ method and Berry's phase // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Vol. 27, No 18. — P. 6267-6286.
147. Арнольд В.И. *Математические методы классической механики*. — М.: Наука, 1989. — 472 с.
148. Littlejohn R.G., Robbins J.M. New way to compute Maslov indices // Phys. Rev. A. — 1987. — Vol. 36, No 6. — P. 2953-2961.
149. Creagh S.C., Robbins J.M., Littlejohn R.G. Geometrical properties of Maslov indices in the semiclassical trace formula for the density of states // Phys. Rev. A. — 1990. — Vol. 42, No 4. — P. 1907-1922.
150. Reuter M. Maslov index in Chern-Simon quantum mechanics // Phys. Rev. D. — 1990. — Vol. 42, No 8. — P. 2763-2778.
151. Robbins J.M. Maslov indices in The Gutzwiller trace formula // Nonlinearity. — 1991. — Vol. 4. — P. 343-363.
152. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. Quasiclassical spectral series of the Dirac operators corresponding to quantized two-dimensional Lagrangian tori // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Vol. 27, No 15. — P. 5273-5306.
153. Belov V.V., Olivé V.M., Volkova J.L. The Zeeman effect for the “anisotropic hydrogen atom” in quasiclassical approximation. I. The Schrödinger operator. — Mexico, 1993. — 25 p. — (Report / CINVESTAV, No 128).
154. Belov V.V., Olivé V.M., Volkova J.L. The Zeeman effect for the “anisotropic

- hydrogen atom” in quasiclassical approximation. II. The Pauli operator with spin-orbital interaction. — Mexico, 1993. — 16 p. — (Report / CINVESTAV, No 129).
155. Belov V.V., Olivé V.M. The Zeeman effect for the “anisotropic hydrogen atom” in quasiclassical approximation. III. Approximation of quasiclassical spectral series for strong and weak magnetic fields (Schrödinger and Pauli operators). — Mexico, 1993. — 37 p. — (Report / CINVESTAV, No 137).
  156. Bagrov V.G., Belov V.V., Trifonov A.Yu., Yevseyevich A.A. Quantization of closed orbits in Dirac theory by Maslov’s complex germ method // J. Phys. A: Math. Gen. — 1994. — Vol. 27, No 3. — P. 1021-1043.
  157. Biswas S.N., Soni S.K. Quantal phase of Berry and its relation to Hannay’s angle in classical mechanics // Proc. Indian Nath. Sci. Acad. — 1990. — Vol. 57A, No 1. — P. 1-44.
  158. Hehl F.W. Spin and torsion in general relativity. I. Foundations // Gen. Rel. Gravit. — 1973. — Vol. 4, No 4. — P. 333-349.
  159. Hehl F.W., Heyde P., Kerlick Q.D., Nester J.M. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects // Rev. Mod. Phys. — 1976. — Vol. 48, No 3. — P. 393-416.
  160. Федорюк М.В. *Асимптотика: Интегралы и ряды*. — М.: Наука, 1987. — 544 с.

## Содержание

Введение	3
Глава 1. Квазиклассически сосредоточенные состояния релятивистских волновых уравнений	8
1. Теорема о квазиклассически сосредоточенных состояниях уравнения Дирака	9
2. Переход к двухкомпонентной теории	14
3. Квазиклассическое траекторно-когерентное представление уравнения Дирака с аномальным взаимодействием Паули	19
4. Релятивистский аналог уравнения Паули	22
5. Квазиклассически сосредоточенные состояния уравнения Клейна–Гордона	27
6. Квазиклассические ТКС уравнения Клейна–Гордона и релятивистский аналог уравнения Шрёдингера в классе положительно-частотных квазиклассически сосредоточенных состояний	29
7. Квазиклассические ТКС бесспиновой релятивистской частицы в произвольном электромагнитном поле	33
8. Нерасплывающиеся квазиклассические волновые пакеты для аксиально-симметричных квантовых систем	36
Глава 2. Квазиклассически сосредоточенные состояния релятивистских волновых уравнений в искривленном пространстве-времени	43
9. О приближении Эренфеста для квантово-механических уравнений в римановом пространстве	43
10. Квазиклассически сосредоточенные состояния заряженной частицы в искривленном пространстве-времени	47
11. Конструкция квазиклассических ТКС для уравнения Клейна–Гордона	50
12. Уравнение Клейна–Гордона в кривом пространстве. Основные свойства квазиклассических ТКС $\Psi_\nu$	58
13. Траекторно-когерентные состояния уравнения Прока	62
14. Гильбертова структура на множестве квазиклассических ТКС уравнения Прока	66
15. Уравнение движения спина векторной частицы	68
16. Квазиклассическая асимптотика ядра Швингера–Де Витта	70
17. Вспомогательные факты из теории комплексного роста	72
18. Конструкция квазиклассических ТКС для уравнения Дирака	76
19. Уравнение движения спина электрона во внешних гравитационном и магнитном полях	80
20. Квантово-механическая интерпретация общековариантного уравнения Дирака	83
Глава 3. Квазиклассически сосредоточенные состояния уравнений квантовой механики в калибровочных полях	86
21. Вводные замечания	86
22. Конструкция квазиклассических траекторно-когерентных состояний во внешнем калибровочном поле с группой симметрии $SU(2)$	87
22.1. Оператор Шрёдингера	87
22.2. Оператор Дирака	91
22.3. Пример. Постоянное хромагнитное поле	94



23. Классические уравнения движения $\text{mod } \hbar^{3/2}$ неабелевой частицы с изоспином $1/2$ во внешнем калибровочном поле	97
23.1. Нерелятивистский случай . . . . .	97
23.2. Релятивистский случай . . . . .	99
Глава 4. Теория спонтанного излучения в квазиклассическом траекторно-когерентном приближении	101
24. Спектрально-угловое распределение энергии спонтанного излучения бозона	102
25. Спектрально-угловое распределение энергии спонтанного излучения электрона	108
26. Ультрарелятивистское приближение	112
27. Нерелятивистское приближение	115
28. Приосевое приближение при квазипериодическом движении	117
29. Излучение заряженной частицы в электромагнитных полях специального вида	120
29.1. Мощность спонтанного излучения нерелятивистского гармонического осциллятора в траекторно-когерентном состоянии . . . . .	120
29.2. Мощность спонтанного излучения нерелятивистской частицы, движущейся в постоянном и однородном магнитном поле и находящейся в начальный момент времени в траекторно-когерентном состоянии . . . . .	121
29.3. Мощность спонтанного излучения нерелятивистской частицы в аксиально-симметричном магнитном поле, находящейся в начальный момент времени в траекторно-когерентном состоянии . . . . .	123
29.4. Вероятность излучения с переворотом спина (в нерелятивистском приближении) для электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле . . . . .	124
29.5. Вероятность излучения с переворотом спина (в нерелятивистском приближении) для электрона, движущегося в произвольном фокусирующем аксиально-симметричном электрическом поле . . . . .	125
29.6. Излучение релятивистской заряженной частицы, находящейся в начальный момент времени в траекторно-когерентном состоянии, в отсутствие внешнего поля . . . . .	126
29.7. Мощность спонтанного излучения релятивистского гармонического осциллятора, находящегося в траекторно-когерентном состоянии и движущегося равномерно и прямолинейно . . . . .	128
Глава 5. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака	131
30. Вводные замечания	131
31. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака, отвечающие точке покоя системы Гамильтона	134
32. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака, отвечающие семейству замкнутых фазовых траекторий $\Lambda^1(E_0)$	136
32.1. Постановка задачи . . . . .	137
32.2. Стационарные ТКС оператора Дирака $\hat{\mathcal{H}}_D$ . . . . .	138
32.3. Условие квантования замкнутых орбит . . . . .	141
32.4. Замечания . . . . .	143
33. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака в электромагнитном поле с аксиальной симметрией	143
33.1. Спектральные серии релятивистского электрона, движущегося в аксиально-симметричном магнитном поле с мягкой фокусировкой	144
33.2. Спектральные серии электрона в классе аксиально-симметричных фокусирующих электрических полей . . . . .	145

33.3. Спектральные серии релятивистского электрона, движущегося по экваториальным орбитам в кулоновском поле . . . . .	147
34. Состояния, квазиклассически сосредоточенные на многообразии $\Lambda_t^k$	148
35. Комплексный росток на семействе двумерных лагранжевых многообразий	152
35.1. Комплексный росток . . . . .	152
35.2. Функции на семействе лагранжевых многообразий с комплексным ростком . . . . .	154
35.3. Семейство инвариантных лагранжевых торов (специальный случай) . . . . .	156
36. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака, отвечающие семейству инвариантных лагранжевых торов с комплексным ростком	159
36.1. Локальные асимптотики оператора Дирака . . . . .	160
36.2. Канонический оператор Маслова на семействе лагранжевых многообразий с комплексным ростком, отвечающий оператору Дирака во внешнем аксиально симметричном электромагнитном поле .	164
36.3. Квазиклассические условия квантования семейства $[\Lambda^2(\omega), r^3(\Lambda^2(\omega))]$	168
37. Квазиклассические спектральные серии оператора Дирака в полях специальных конфигураций	171
37.1. Квантование инвариантных лагранжевых торов в кулоновском поле	171
37.2. Асимптотические серии собственных значений оператора Дирака в аксиально симметричном магнитном поле с мягкой фокусировкой, отвечающие движению электрона вдоль двумерных лагранжевых торов, окружающих устойчивую орбиту . . . . .	174
Глава 6. Квазиклассически сосредоточенные состояния и фаза Берри уравнения Дирака	178
38. Адиабатическая фаза Берри для волновой функции Дирака	178
39. Фаза Берри для релятивистской заряженной частицы со спином во внешнем периодическом электромагнитном поле	180
Приложения	183
Приложение А. Квазиклассическое траекторно-когерентное представление для уравнения Шрёдингера	183
Приложение Б. Свойства матриц $\Pi_{\pm}(t)$ и матрицы $\lambda_{pp}^{(+)}(t)$	186
Приложение В. Уравнения Гейзенберга для оператора поляризации $\hat{S}_{\mu}$	192
Приложение Г. Функция Лагранжа векторного поля $V_{\mu}$	195
Приложение Д. Уравнение движения спина (2)	196
Приложение Е. Псевдовектор кручения	197
Приложение Ж. Свойства предканонического оператора в области пересечения карт	197
Приложение З. Поведение волновой функции в окрестности каустики	199
Приложение И. Конструкция семейства $[\Lambda^1(I), r^n(I)]$ для классических систем с одной циклической переменной	201
Приложение К. Решения Флоке спинового уравнения	202
Приложение Л. Решения задачи Коши для спинового уравнения в адиабатическом приближении	203
Список литературы	206
Глава 1. Canonical operator method for the one-dimensional Schrödinger equation	222
1. The semiclassical approximation in a Cauchy problem	222
2. Construction of semiclassical asymptotic solutions for the nonstationary one-dimensional Schrödinger equation	227

*Багров Владислав Гавриилъвич,  
Белов Владимир Владимирович,  
Трифонов Андрей Юрьевич*

## **МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

### **Асимптотические методы в релятивистской квантовой механике**

Учебное пособие

Технический редактор *В.Н. Романенко*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике  
в издательской системе  $\text{T}_{\text{E}}\text{X} - \text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$   
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Подписано к печати 12.12.2006.  
Формат 60×84/8. Бумага офсетная.  
Печать RISO. Усл. печ. л. *12,09*. Уч.-изд. л. *10,95*.  
Тираж 100 экз. Заказ № *15*. Цена свободная.  
Издательство ТПУ. 634050, г. Томск, проспект Ленина, 30

**В.Г. Багров, В.В. Белов, А.Ю. Трифонов**

## **МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

**Асимптотические методы  
в релятивистской квантовой механике**