Квазиклассические асимптотики для нелинейного уравнения Фоккера-Планка

А.В. Шаповалов, А.Ю. Трифонов

Методы современной математики для инженеров

Лекция

КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

А.В. Шаповалов, А.Ю. Трифонов

Методы современной математики для инженеров

Лекция

Системы со случайными воздействиями

1. Влияние случайных воздействий на систему описывается в формализме стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) в форме Ито, Стратоновича и др., а также в формализме уравнения Фоккера–Планка (УФП).
2. СДУ исследуются методами компьютерного моделирования. Аналитические методы применяются к УФП.
3. УФП описывает эволюцию плотности распределения вероятностей расположения броуновских частиц. В терминах теории броуновского движения описываются ряд явлений ряд явлений в термодинамике, химии, эволюционной биологии, экономике, имеющих стохастическую природу.

Нелинейные стохастические системы в формализме нелинейного УФП

Сложные нелинейные стохастические процессы описываются уравнением Фоккера–Планка с различными типами нелинейности:

- *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.*, Phys. Rev. (1930),

Нелинейные стохастические системы в формализме нелинейного УФП

Сложные нелинейные стохастические процессы описываются уравнением Фоккера–Планка с различными типами нелинейности:

- *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.*, Phys. Rev. (1930),
- *Shiino M.*, Phys. Rev. E.(1987), J. Math. Phys.(2001), (2002),

Нелинейные стохастические системы в формализме нелинейного УФП

Сложные нелинейные стохастические процессы описываются уравнением Фоккера–Планка с различными типами нелинейности:

- *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.*, Phys. Rev. (1930),
- *Shiino M.*, Phys. Rev. E.(1987), J. Math. Phys.(2001), (2002),
- *Kaniadakis G., et. al.* Phys. Rev. E. (1993),(1994), Physica A.(2001),

Нелинейные стохастические системы в формализме нелинейного УФП

Сложные нелинейные стохастические процессы описываются уравнением Фоккера–Планка с различными типами нелинейности:

- *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.*, Phys. Rev. (1930),
- *Shiino M.*, Phys. Rev. E.(1987), J. Math. Phys.(2001), (2002),
- *Kaniadakis G., et. al.* Phys. Rev. E. (1993),(1994), Physica A.(2001),
- *Drozdov A.N., Morillo M.* Phys. Rev. E. (1996),

Нелинейные стохастические системы в формализме нелинейного УФП

Сложные нелинейные стохастические процессы описываются уравнением Фоккера–Планка с различными типами нелинейности:

- *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.*, Phys. Rev. (1930),
- *Shiino M.*, Phys. Rev. E.(1987), J. Math. Phys.(2001), (2002),
- *Kaniadakis G., et. al.* Phys. Rev. E. (1993),(1994), Physica A.(2001),
- *Drozdov A.N., Morillo M.* Phys. Rev. E. (1996),
- *Frank T.D., Daffertshofer A.* Physica A. (2000), (2001), (2003),

Нелинейные стохастические системы в формализме нелинейного УФП

Сложные нелинейные стохастические процессы описываются уравнением Фоккера–Планка с различными типами нелинейности:

- *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.*, Phys. Rev. (1930),
- *Shiino M.*, Phys. Rev. E.(1987), J. Math. Phys.(2001), (2002),
- *Kaniadakis G., et. al.* Phys. Rev. E. (1993),(1994), Physica A.(2001),
- *Drozdov A.N., Morillo M.* Phys. Rev. E. (1996),
- *Frank T.D., Daffertshofer A.* Physica A. (2000), (2001), (2003),
- *Pedron I.T., Mendes R.S., Malacurne L.C., Lenzi E.K.* Phys. Rev. E. (2002),

Нелинейные стохастические системы в формализме нелинейного УФП

Сложные нелинейные стохастические процессы описываются уравнением Фоккера–Планка с различными типами нелинейности:

- *Uhlenbeck G.E., Ornstein L.S.*, Phys. Rev. (1930),
- *Shiino M.*, Phys. Rev. E.(1987), J. Math. Phys.(2001), (2002),
- *Kaniadakis G., et. al.* Phys. Rev. E. (1993),(1994), Physica A.(2001),
- *Drozdov A.N., Morillo M.* Phys. Rev. E. (1996),
- *Frank T.D., Daffertshofer A.* Physica A. (2000), (2001), (2003),
- *Pedron I.T., Mendes R.S., Malacurne L.C., Lenzi E.K.* Phys. Rev. E. (2002),
- *et. al.*

Эффекты, описываемые НУФП

- НУФП моделирует кооперативную динамику большого числа подсистем, взаимодействие которых описывается средним полем (*Drozdov A. N. and Morillo M.* Phys.Rev. E, (1996)).

Эффекты, описываемые НУФП

- НУФП моделирует кооперативную динамику большого числа подсистем, взаимодействие которых описывается средним полем (*Drozdov A. N. and Morillo M.* Phys.Rev. E, (1996)).
- Совместное воздействие термального шума и среднего поля приводит в термодинамическом пределе к НУФП для функции распределения, ассоциированной с параметром порядка (Desai R. and Zwanzig R. , J. Stat. Phys. (1978); Dawson D., J. Stat. Phys. (1983)).

Эффекты, описываемые НУФП

- НУФП моделирует кооперативную динамику большого числа подсистем, взаимодействие которых описывается средним полем (*Drozdov A. N. and Morillo M.* Phys.Rev. E, (1996)).
- Совместное воздействие термального шума и среднего поля приводит в термодинамическом пределе к НУФП для функции распределения, ассоциированной с параметром порядка (Desai R. and Zwanzig R. , J. Stat. Phys. (1978); Dawson D., J. Stat. Phys. (1983)).
- Макроскопические необратимые эффекты, например, релаксацию термодинамических систем далеких от равновесия и макроскопическую самоорганизацию иерархических биологических систем.

Эффекты, описываемые НУФП

- НУФП моделирует кооперативную динамику большого числа подсистем, взаимодействие которых описывается средним полем (*Drozdov A. N. and Morillo M.* Phys.Rev. E, (1996)).
- Совместное воздействие термального шума и среднего поля приводит в термодинамическом пределе к НУФП для функции распределения, ассоциированной с параметром порядка (Desai R. and Zwanzig R. , J. Stat. Phys. (1978); Dawson D., J. Stat. Phys. (1983)).
- Макроскопические необратимые эффекты, например, релаксацию термодинамических систем далеких от равновесия и макроскопическую самоорганизацию иерархических биологических систем.
- etc.

Квазиклассическое приближение

Квазиклассическое приближение в квантовой механике опирается на принцип соответствия: в пределе $\hbar \to 0$ квантовая динамика переходит в соответствующую классическую механику.
Форма квазиклассических решений определяется наличием малого параметра $\hbar$ при производных уравнения Шредингера.
В формализме квазиклассических асимптотик для нелинейного уравнения Фоккера–Планка малым является параметр диффузии D, $D \to 0$. Роль классической механики выполняет динамическая система Эйнштейна-Эренфеста.

Нелинейное УФП

Задача I: формулировка асимптотического метода решения задачи Коши на основе комплексного ростка Маслова для многомерного уравнения Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью

$$D\frac{\partial u(\vec{x},t)}{\partial t} = \langle \hat{\vec{\pi}}, T\hat{\vec{\pi}}\rangle u(\vec{x},t) + \langle \hat{\vec{\pi}}, \Big[V_{\vec{x}}(\vec{x},t)u(\vec{x},t) + \\ + \varkappa u(\vec{x},t) \int\limits_{\mathbb{R}^n} W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)u(\vec{y},t)d\vec{y} \Big]\rangle, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \qquad (1.1)$$

Здесь $t \in \mathbb{R}^1$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^{\intercal} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^{\intercal} \in \mathbb{R}^n$; $\langle .,. \rangle$ — скалярное произведение; $d\vec{x} = dx_1 \dots dx_n$; $u(\vec{x},t)$ — вещественная гладкая функция, убывающая при $|\vec{x}| \to \infty$; T — постоянная матрица диффузии.

$V(\vec{x},t)$, $W(\vec{x},\vec{y},t)$ — потенциалы, определяющие коэффициент дрейфа, растут при $|\vec{x}|, |\vec{y}| \to \infty$ не быстрее, чем полином,

$$V_{\vec{x}}(\vec{x},t) = \frac{\partial V(\vec{x},t)}{\partial \vec{x}}, \quad W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t) = \frac{\partial W_{\vec{x}}(\vec{x},\vec{y},t)}{\partial \vec{x}}, \quad \hat{\vec{\pi}} = D\frac{\partial}{\partial \vec{x}}, \quad (1.2)$$

D — малый параметр.

Замечание

Для решений НУФП (1.1) сохраняется интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(\vec{x},t)d\vec{x} = const$. *Будем полагать, что решения нормированы,* $\int\limits_{\mathbb{R}^n} u(\vec{x},t)d\vec{x} = 1$.

Одномерное уравнение Фоккера–Планка с нелокальной нелинейностью

$$-D\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + D^2\frac{\partial}{\partial x}B(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial}{\partial x}A(u,x,t)u(x,t) = 0,$$

$$A(f,x,t) = V_x(x,t) + \varkappa\int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_x(x,y,t)u(y,t). \qquad (1.3)$$

Класс функций $\mathcal{P}_t^D$

Класс траекторно-сосредоточенных функций (ТСФ)

$$\mathcal{P}_t^D = \mathcal{P}_t^D\big(\vec{X}(t,D), S(t,D)\big) =$$
$$= \left\{\Phi : \Phi(\vec{x},t,D) = \varphi\left(\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{D}}, t, D\right) \exp\left[\frac{1}{D}S(t,D)\right]\right\}. \quad (2.4)$$

Вещественная функция $\varphi(\vec{\eta},t,D)$ принадлежит пространству Шварца $\mathbb{S}$ по $\vec{\eta}\in\mathbb{R}^n$, гладкая по t и регулярно зависит от $\sqrt{D}$ при $D\to 0$, $\Delta\vec{x} = \vec{x} - \vec{X}(t,D)$. Вещественные функции $S(t,D)$ и $\vec{X}(t,D)$ регулярно зависят от $\sqrt{D}$ в окрестности $D=0$ и подлежат определению в процессе построения решения. Функции класса $\mathcal{P}_t^D$ параметризованы траекторией $\vec{x} = \vec{X}(t,D)\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}^1$, и вещественнозначной функцией $S(t,D)$. В пределе при $D\to 0$ функции этого класса *сосредоточены в окрестности точки, движущейся вдоль кривой* $\vec{x} = \vec{X}(t,0)$.

Оценки на классе функций $\mathcal{P}_t^D$

Теорема

На функциях класса $\mathcal{P}_t^D(\vec{X}(t,D), S(t,D))$ *справедливы асимптотические оценки*

$$\frac{\|\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}(t,D)\Phi\|}{\|\Phi\|} = O(D^{(k+l)/2}), \quad \frac{\|\,[D\partial_t + \langle\dot{\vec{X}}(t), \hat{\vec{\pi}}\rangle - \dot{S}(t)]\Phi\|}{\|\Phi\|} = \\ = O(D), \tag{2.5}$$

где $\|\ldots\|$ *— норма в пространстве* L_2*, а* $\hat{\Delta}_{\alpha,\beta}(t,D)$ *— оператор с вейлевским символом* $\Delta_{\alpha,\beta}(\vec{\tau},\vec{x},t,D) = \vec{\pi}^{\alpha}(\Delta\vec{x})^{\beta}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ *— мультииндексы.*

Классы $\left(\mathcal{P}_t^D\right)^*$ и $\mathcal{J}_t^D$

С классом $\mathcal{P}_t^D$ связан класс $\left(\mathcal{P}_t^D\right)^*$ функций вида

$$\left(\mathcal{P}_t^D\right)^* = \left\{\Omega : \Omega(\vec{x}, t, D) = \psi\left(\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{D}}, t, D\right) \exp\left[-\frac{1}{D} S(t, D)\right]\right\},$$

где $\psi\left(\vec{\eta}, t, D\right)$ — обобщенные функции медленного роста. Функции класса $\left(\mathcal{P}_t^D\right)^*$ сопряжены функциям класса $\mathcal{P}_t^D$.

Утверждение

Для функций $\Phi \in \mathcal{P}_t^D$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{D\to 0} \Phi(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x} - \vec{X}(t)). \tag{2.6}$$

Частный случай класса $\mathcal{P}_t^D$ — класс функций $\mathcal{J}_t^D$:

$$\begin{gathered} \mathcal{J}_t^D = \mathcal{J}_t^D\left(\vec{X}(t, D), S(t, D)\right) = \\ = \left\{\Phi : \Phi(\vec{x}, t, D) = \varphi\left(\frac{\Delta\vec{x}}{\sqrt{D}}, t\right) \exp\left[\frac{1}{D} S(t, D)\right]\right\}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

Решения типа $(k, 0)$ для НУФП в классе функций $(\mathcal{P}_t^D)$

Функции класса $(\mathcal{P}_t^D)$ локализованы в окрестности точки – $0-$ **мерного многообразия**, — движущейся вдоль фазовой кривой $\vec{x} = \vec{X}(t, D) \in \mathbb{R}^n$.

Определение

Квазиклассические асимптотические решения УФП, построенные в классе $(\mathcal{P}_t^D)$ с точностью $O(D^k)$ будем называть **квазиклассическими решениями типа $(k, 0)$**.

Схема метода