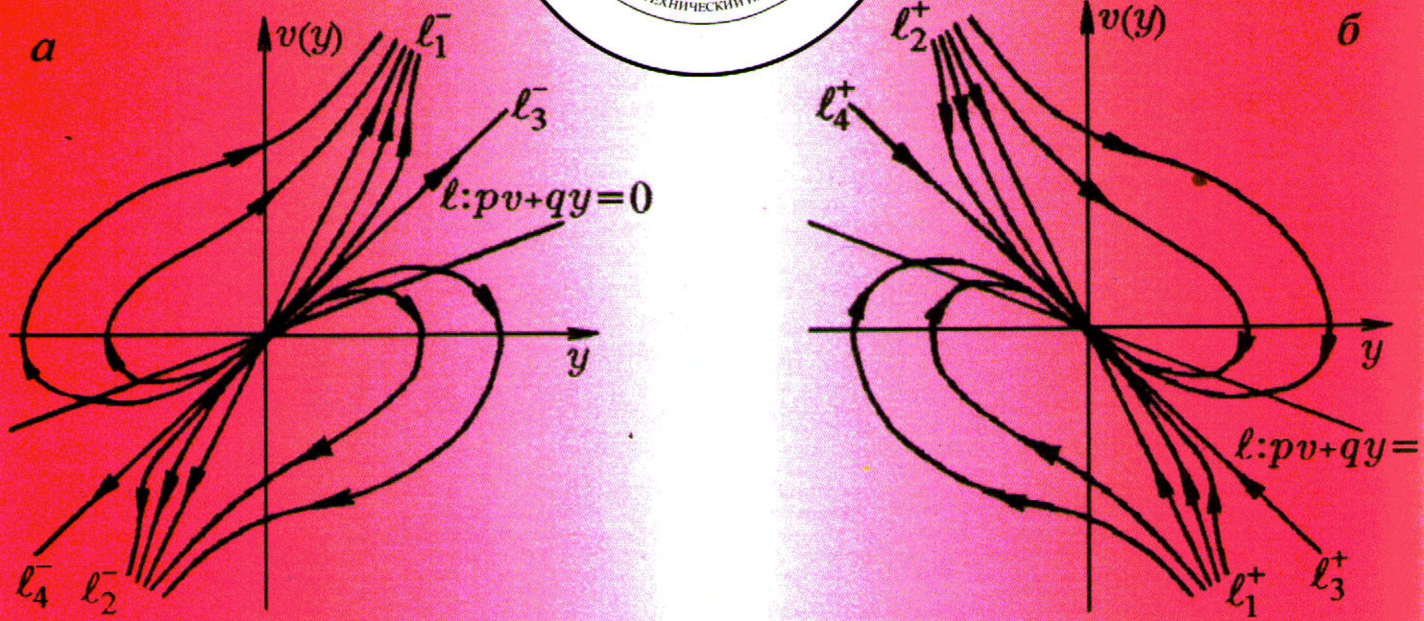


В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ УНИВЕРСИТЕТОВ

часть V

Дифференциальные уравнения

Министерство образования и науки
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж,
А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов**

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

для технических университетов

Часть V. Дифференциальные уравнения

3-е издание, исправленное

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2014

УДК 581
ББК 22.1я73
В937

Задорожный В.Н.

В937 Высшая математика для технических университетов. Часть V. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / В.Н. Задорожный, В.Ф. Зальмеж, А.Ю. Трифонов, А.В. Шаповалов; Томский политехнический университет. – 3-е изд. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2014. – 392 с.

Настоящее пособие представляет собой изложение пятой части курса «Высшая математика» и содержит материал по разделу «Дифференциальные уравнения». Оно содержит теоретический материал в объёме, предусмотренном ныне действующей программой курса высшей математики для инженерно-физических и физических специальностей университетов. Теоретический курс дополнен индивидуальными заданиями для самостоятельного решения по каждому разделу.

Предлагаемое пособие может быть полезно студентам старших курсов, магистрантам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической и математической физики.

Пособие предназначено для студентов физических, инженерно-физических специальностей и студентов, обучающихся в системе элитного технического образования.

УДК 581
ББК 22.1я73

Работа частично поддержана Государственным заданием ВУЗам «Наука», регистрационный номер 1.676.2014/К.

Рецензенты
Доктор физико-математических наук, профессор ТГПУ
Осетрин К.Е.
Доктор физико-математических наук, профессор ТГУ
Багров В.Г.

Содержание

Введение 6

Глава 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка 7

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение и его порядок. Решение дифференциального уравнения 7
   - 1.1. Основные понятия и определения . . . 7
   - 1.2. Начальные условия. Задача Коши . . . 8
   - 1.3. Дифференциальные уравнения первого порядка. Метод изоклин . 9
   - 1.4. Теорема существования и единственности (формулировка) 10
   - 1.5. Приближённый метод Эйлера . . . 13
   - 1.6. Теорема Коши (доказательство) . . . 13
   - 1.7. Теорема существования и единственности. Метод сжимающих отображений . . . 18
2. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним 19
   - 2.1. Уравнения с разделяющимися переменными . . . 19
   - 2.2. Автономные уравнения . . . 23
   - 2.3. Однородное уравнение первого порядка . . . 29
3. Линейные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним 36
4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 50
5. Уравнения, не разрешённые относительно производной 56
6. Интегрирование с помощью параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро 60
7. Неполные уравнения 70

Глава 2. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков 76

8. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков 76
9. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка 77
   - 9.1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ . . . 78
   - 9.2. Уравнения, не содержащие явно искомую функцию и её младшие производные . . . 78
   - 9.3. Уравнения, не содержащие явно независимую переменную 80
   - 9.4. Уравнения, однородные относительно неизвестной функции и её производных . . . 81
   - 9.5. Уравнения в полных производных . . . 82

Глава 3. Линейные дифференциальные уравнения 83

10. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков 83
11. Свойства решений линейных уравнений 84
12. Линейно зависимые и независимые системы функций. Определители Вронского и Грама 87
13. Фундаментальные системы функций и общее решение линейных однородных уравнений 101
14. Замена переменных в линейных уравнениях. Формула Абеля 109
15. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка. Метод Лагранжа 129

Глава 4. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами 140

16. Основные определения и свойства 140
17. Общее решение линейного стационарного однородного уравнения 142
18. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 151
19. Классификация фазовых портретов уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами 162

20. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами 179
20.1. Методы Лагранжа и Коши 179
20.2. Метод неопределённых коэффициентов 184
21. Уравнения Лагранжа, Эйлера и Чебышева 190
Глава 5. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений 195
22. Общие понятия и определения 195
23. Задача Коши. Теорема существования и единственности 197
24. Метод исключения для решения нормальной системы дифференциальных уравнений 199
25. Метод интегрируемых комбинаций 201
26. Системы линейных дифференциальных уравнений 203
26.1. Свойства производных и интегралов от матриц 203
26.2. Свойства решений однородных систем дифференциальных уравнений 204
26.3. Свойства решений систем неоднородных дифференциальных уравнений 209
27. Методы Лагранжа и Коши 210
Глава 6. Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 214
28. Общие замечания 214
29. Операторный (символический) метод 215
30. Метод исключения 217
31. Метод Эйлера 227
31.1. Случай действительных различных корней 228
31.2. Случай кратных корней, алгебраическая и геометрическая кратность которых совпадают 230
31.3. Случай кратных корней, геометрическая кратность которых меньше алгебраической 232
31.4. Случай комплексных корней 242
31.5. Общий случай 249
32. Метод неопределённых коэффициентов 254
33. Матричный метод 263
34. Метод Даламбера 285
35. Примеры решений системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 288
36. Неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 302
37. Системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами 310
Глава 7. Приложения дифференциальных уравнений 315
38. Приложение дифференциальных уравнений к физическим задачам 315
39. Дифференциальные уравнения в классической механике 319
40. Дифференциальные уравнения в экономических моделях 324
40.1. Равновесная цена в модели Вальраса 325
40.2. Модель Р. Сóлоу 326
40.3. Модель управления ресурсами 327
40.4. Модель деловых циклов Калдора 327
40.5. Упрощённая модель делового цикла Кейнса 328
40.6. Динамический выбор вида транспорта 329
40.7. Модель Гудвина 330

41. Дифференциальные уравнения в моделях роста биологических популяций 331
41.1. Модель Мальтуса 332
41.2. Логистическая модель Ферхюльста 332
41.3. Вольтерровская модель типа «хищник–жертва» 333
41.4. Модель Моно непрерывного культивирования микроорганизмов . 333
Приложение А. Линейные пространства 336
А1. Линейные операторы 336
А1.1. Основные понятия и определения 336
А1.2. Действия над линейными операторами 338
А2. Метрические и нормированные пространства 339
А2.1. Определения и примеры 339
А2.2. Сходимость в метрическом пространстве 341
А2.3. Открытые и замкнутые множества 343
А2.4. Полные метрические пространства 344
А2.5. Пополнение метрических пространств 345
А3. Сжимающие отображения 345
Задания для самоконтроля 347
Теоретические вопросы 347
Индивидуальные задания 351
Список литературы 391

Введение

Математическое моделирование разнообразных естественно-научных, технических, экономических и других процессов или явлений составляет неотъемлемую часть научного анализа и предполагает представление моделируемой системы в виде некоторого вполне определённого набора величин (параметров) и установление соотношений между ними в соответствии с физическими, химическими и другими законами, управляющими поведением системы. Математическая форма таких соотношений часто выражается в виде систем уравнений. В зависимости от вида параметров, представляющих систему, модели могут быть детерминистическими или стохастическими, дискретными или непрерывными, с сосредоточенными или с распределёнными параметрами. Детерминистические системы описываются определёнными (не случайными) параметрами, в стохастических системах часть параметров являются случайными величинами. Дискретные и непрерывные системы описываются дискретно или непрерывно изменяющимися параметрами, соответственно. Параметры распределённых систем различны в различных частях системы. Например, если система занимает некоторую область в пространстве, то её параметры распределены по этой области и являются функциями, определёнными на этом пространстве. Математические модели непрерывных детерминистических систем с сосредоточенными параметрами, как правило, формулируются в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих параметры системы как функции одной независимой переменной. Если моделируется эволюция такой системы, то роль независимой переменной играет время.

При решении многих геометрических, физических, технических и экономических задач приходится отыскивать неизвестную функцию, описывающую рассматриваемые явления или процессы, по заданному соотношению между этой неизвестной функцией, её производными и независимыми переменными. Такое соотношение называется дифференциальным уравнением, а отыскание функции, удовлетворяющей уравнению, называется решением, или интегрированием, данного уравнения.

Курс обыкновенных дифференциальных уравнений составляет непременную часть базового университетского математического образования физико-математических, инженерно-физических, инженерно-экономических и других естественно-научных и инженерных специальностей.

Перейдём к основным положениям и понятиям теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

ГЛАВА 1

Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

1. Обыкновенное дифференциальное уравнение и его порядок. Решение дифференциального уравнения

1.1. Основные понятия и определения

⧫ *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, которое содержит кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных ещё и производные неизвестных функций или их дифференциалы.

⧫ Дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*, если неизвестная функция является функцией одной независимой переменной.

Общий вид этого уравнения

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1.1)$$

где $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ — неизвестная функция и её производные до n-го порядка включительно, вычисленные в точке x. Например, уравнение

$$y' = -\frac{x}{y}$$

является обыкновенным дифференциальным уравнением.

◊ Если в уравнение входят частные производные неизвестных функций по нескольким независимым переменным, то уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных.

Таковым является, например, уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

⧫ *Порядком дифференциального уравнения* называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

⧫ *Степенью дифференциального уравнения*, алгебраического относительно старшей производной, называется степень этой старшей производной после того, как уравнение освобождено от дробей и корней.

Например,

$$y' = -\frac{x}{y},$$
$$(x^2 + y^2)dx + 2xy\,dy = 0$$

– обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка;

$$y'' + y' = 0$$

– обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка первой степени;

$$(y''')^2 + xy'y'' - \Big(x + \frac{1}{2}\Big)(y')^4 = 0$$

– обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка второй степени;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

– дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка.

Итак, мы будем изучать обыкновенные дифференциальные уравнения вида (1.1).

♦ *Решением дифференциального уравнения* (1.1) называется всякая функция $y = \varphi(x)$, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество.

Например, решением уравнения

$$y'' + y = 0$$

будет функция $y = \cos x$, так как $y'' = -\cos x$ и подстановка этой функции в уравнение обращает его в тождество

$$-\cos x + \cos x \equiv 0.$$

♦ График решения дифференциального уравнения (т.е. график функции $y = \varphi(x)$) называется его *интегральной кривой.*

♦ Решение дифференциального уравнения, заданное неявно соотношением $F(x, y) = 0$, называется *интегралом этого уравнения* и неявным образом определяет интегральную кривую.

Проинтегрировать дифференциальное уравнение значит найти все функции y, удовлетворяющие этому уравнению.

1.2. Начальные условия. Задача Коши

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1.1).

♦ Задача о нахождении среди всех решений такого решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.1), что функция $\varphi(x)$ вместе с $(n-1)$ последовательными производными принимает заданные значения $y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ при заданном значении x_0 независимой переменной x, т.е.

$$\begin{array}{l} y\big|_{x=x_0} = y_0; \\ y'\big|_{x=x_0} = y_0'; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots; \\ y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \end{array} \tag{1.2}$$

называется *задачей Коши.* Числа $x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}$ в совокупности называются *начальными данными*, а условия (1.2) — *начальными условиями*, или *условиями Коши.*

Процедура нахождения решения данного дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям (1.2), называется *решением задачи Коши.* Несколько позже мы сформулируем теорему, которая определяет условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнений первого порядка и уравнений n-го порядка.

Прежде всего рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка.

1.3. Дифференциальные уравнения первого порядка. Метод изоклин

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, содержащее независимую переменную, неизвестную функцию и её производную

$$F(x, y, y') = 0. \tag{1.3}$$

Если уравнение (1.3) разрешить относительно производной y', то получится уравнение

$$y' = f(x, y). \tag{1.4}$$

Оно называется дифференциальным уравнением первого порядка, разрешённым относительно производной.

Прежде чем перейти к изучению этого уравнения, уточним некоторые общие понятия, сформулированные выше. Для этого через $D \subseteq \mathbb{R}^2$ обозначим область определения функции $f(x, y)$ действительных переменных (x, y).

♦ *Решением дифференциального уравнения* (1.4) называется такая функция $y = \varphi(x)$, определённая в области $E \subseteq \mathbb{R}$, подстановка которой в уравнение (1.4) обращает его в тождество во всех точках области E. Само множество E называется областью определения решения $\varphi(x)$.

Для того чтобы подстановка решения $y = \varphi(x)$ в уравнение (1.4) была возможна, необходимо выполнение условия $(x, \varphi(x)) \in D$ при любом $x \in E$. Это означает, что область D может ограничивать (иногда существенно) как область определения решения, так и область изменения его значений.

♦ *Непродолжимым решением уравнения* (1.4) называется решение с максимальной областью определения решения E.

Выясним теперь геометрический смысл дифференциального уравнения первого порядка (1.3).

Пусть x и y — декартовы (прямоугольные) координаты точек плоскости, а $y = \varphi(x)$ — решение данного уравнения. График этого решения — интегральная кривая уравнения (1.4) — есть непрерывная кривая, в каждой точке которой имеется касательная. Угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке (x, y) есть y', т.е. функция $f(x, y)$.

Таким образом, уравнение $y' = f(x, y)$ задаёт связь между координатами точки и угловым коэффициентом касательной к интегральной кривой в этой точке. В каждой точке (x, y) области D дифференциальное уравнение (1.4) определяет значение y', т.е. направление касательной к той интегральной кривой, которая проходит через эту точку (если такая кривая существует).

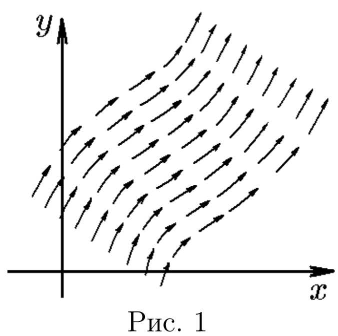


Рис. 1

Построив в окрестности каждой точки отрезок (см. рис. 1), направленный к оси Ox под углом, тангенс которого равен $f(x, y)$, получим так называемое поле направлений.

Поле направлений можно охарактеризовать с помощью изоклин.

♦ *Изоклиной* дифференциального уравнения (1.4) наклона $k = \operatorname{tg} \alpha$ называется геометрическое место точек, в которых выполняется условие

$$y'(x) = k, \tag{1.5}$$

где k — некоторая постоянная.

При различных значениях тангенса угла наклона k можно получить различные изоклины. Как следует из (1.4), уравнение изоклины, соответствующей значению k, будет иметь вид

$$f(x, y) = k. \tag{1.6}$$

Построив семейство изоклин, можно качественно определить расположение интегральных кривых на плоскости (x, y). Рис. 1 наглядно иллюстрирует эту процедуру (см. пример 1.1).

Информацию, вытекающую из характера семейства изоклин, можно дополнить информацией о выпуклости и вогнутости интегральных кривых. Для этого необходимо уравнение (1.4) продифференцировать по x:

$$y'' = \frac{df(x,y)}{dx} = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)y' = f'_x(x,y) + f'_y(x,y)f(x,y). \tag{1.7}$$

Тогда в области, где $y'' > 0$, интегральные кривые будут вогнутыми, а в области, где $y'' < 0$, выпуклыми. Эти области будет разделять кривая $y'' = 0$, являющаяся множеством точек перегиба (см. пример 1.2).

1.4. Теорема существования и единственности (формулировка)

Итак, в геометрической интерпретации решить уравнение $y' = f(x, y)$ значит найти кривую, касательная к которой в каждой её точке совпадала бы с направлением поля в этой точке.

Таких кривых будет не одна, а целое семейство. Чтобы выделить определённую кривую, нужно задать точку (x_0, y_0), через которую должна проходить интегральная кривая.

Пару чисел x_0, y_0 называют начальными условиями и обозначают

$$y\big|_{x=x_0} = y_0. \tag{1.8}$$

Всегда ли существует решение задачи Коши, и если существует, то будет ли единственным? Ответ на этот вопрос даёт теорема существования и единственности.

Теорема 1.1 (Коши). *Пусть даны дифференциальное уравнение*

$$y' = f(x, y) \tag{1.9}$$

и начальные условия $y|_{x=x_0} = y_0$. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области D изменения переменных x и y и имеет в этой области непрерывную или ограниченную по модулю частную производную по y, т.е. $f'_y(x, y)$, то, какова бы ни была внутренняя точка (x_0, y_0) этой области, существует и притом единственное решение $y = \varphi(x)$ данного уравнения, принимающее при $x = x_0$ заданное значение $\varphi(x_0) = y_0$.

Доказательство для более общей формулировки приведём позже.

Геометрически это означает, что через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) области D проходит и притом только одна интегральная кривая уравнения $y' = f(x, y)$.

♦ Функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от одной произвольной постоянной C, называется *общим решением* уравнения $y' = f(x, y)$ в некоторой области, если при любом значении C удовлетворяет этому уравнению.

♦ Решение уравнения $y' = f(x, y)$, которое получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при вполне определённом значении постоянной C, называется *частным решением*.

Частное решение можно найти из общего, используя начальные условия $y|_{x=x_0} = y_0$. Для этого надо в общее решение $y = \varphi(x, C)$ подставить x_0, y_0 и найти C, а затем найденное значение C подставить в общее решение. Полученная функция и будет частным решением данного уравнения.

Например, частное решение

$$y = \frac{x^2}{2} + 1$$

дифференциального уравнения $y' - x = 0$ есть частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=2} = 3$.

⧫ Общее решение $y = \varphi(x, x_0, y_0)$, в котором роль произвольной постоянной играет начальное значение (1.8), называется *общим решением в форме Коши*.

⧫ Уравнение $F(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение уравнения (1.9), называется *общим интегралом* этого уравнения.

⧫ Отличная от тождественного нуля функция $F(x, y)$, сохраняющая своё значение на решениях уравнения (1.3), называется *первым интегралом* этого уравнения.

◊ Наряду с общим решением дифференциального уравнения (1.4) могут существовать и так называемые особые решения, возникающие вследствие нарушения непрерывности производной $f'_y(x, y)$ или самой функции $f(x, y)$. В этом случае через заданную точку (x, y) может проходить более одной интегральной кривой. В силу этого особое решение невозможно получить из семейства интегральных кривых, составляющих общее решение, ни при каких C.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является отыскание всех решений данного уравнения.

⧫ Проинтегрировать обыкновенное дифференциальное уравнение в квадратурах значит получить формулу, дающую (в явной, неявной или параметрической форме) выражение для того или иного решения этого уравнения через элементарные функции, функции, входящие в уравнение, и интегралы от них.

◊ При этом вовсе не предполагается, что эти интегралы можно выразить через элементарные функции.

◊ Проинтегрировать в квадратурах можно лишь небольшой класс уравнений.

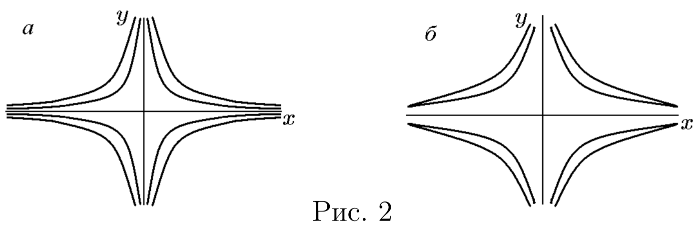


Рис. 2

В связи с этим оказывается полезным ввести понятие качественной эквивалентности решений дифференциальных уравнений. Так, например, если в соответствии с методом изоклин построить интегральные кривые двух уравнений: $y' = y/x$ (рис. 2,*а*) и $y' = y \operatorname{cth} x$ (рис. 2,*б*), то между ними можно заметить большое сходство. Каждая интегральная кривая на рис. 2,*а* имеет соответствующую ей интегральную кривую на рис. 2,*б*. Обе кривые имею одну форму (интервалы монотонности, выпуклости и т.д.) и одни и те же асимптоты, но они не идентичны. Для обозначения такого соответствия интегральных кривых используют термин «качественная эквивалентность» решений. Наличие качественной эквивалентности позволяет в определённых условиях заменять решение одного уравнения решением другого (с более простой функцией $f(x, y)$ или интегрируемым в квадратурах).

Пример 1.1. Методом изоклин построить решение дифференциального уравнения (задачи Коши)

$$y' = 2x \tag{1.10}$$

с начальным условием $y(x)|_{x=0} = 0$.

Решение. Здесь требуется графически решить задачу Коши, т.е. построить интегральную кривую, проходящую через начало координат $O(0,0)$. Так как правая часть дифференциального уравнения (1.10) удовлетворяет условиям теоремы Коши на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, то через заданную точку будет проходить только одна интегральная кривая, для построения которой мы должны использовать метод изоклин. Изоклинами уравнения (1.10) являются параллельные прямые $2x = k$. Выбрав $k \in \mathbb{Z}$, получим семейство изоклин (рис. 3)

$$x = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \pm\frac{5}{2}, \pm 3, \ldots$$

Для удобства построения искомой интегральной кривой между двумя соседними изоклинами проведём вспомогательные прямые, параллельные им и равноудалённые от них (на рис. 3 эти прямые изображены штриховыми линиями).

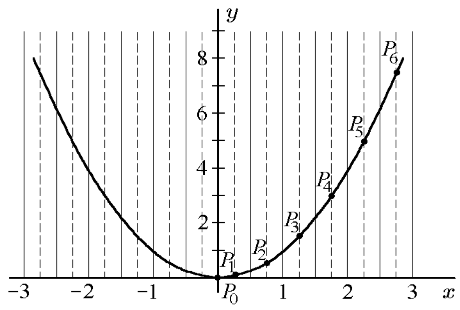


Рис. 3

Далее из начала координат под углом $\alpha_0 = \operatorname{arctg} 0 = 0$, который задаётся изоклиной $x = 0$, проведём прямую до пересечения с вспомогательной прямой и эту точку пересечения обозначим через P_1. В результате получим отрезок P_0P_1 (рис. 3). Теперь из точки P_1 под углом $\alpha_1 = \operatorname{arctg} 0,5 \approx 27°$, который задаётся изоклиной $x = 1/2$, проведём прямую до пересечения со следующей вспомогательной прямой и точку их пересечения обозначим через P_2. Получим ломаную линию $P_0P_1P_2$. Далее таким же образом продолжим ломаную отрезками P_2P_3 под углом $\alpha_2 = \operatorname{arctg} 1 = 45°$, P_3P_4 под углом $\alpha_3 = \operatorname{arctg} 3/2 \approx 56°$, P_4P_5 под углом $\alpha_4 = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°$, P_5P_6 под углом $\alpha_5 = \operatorname{arctg} 5/2 \approx 68°$ и т.д. В результате получим ломаную линию $P_0P_1 \ldots P_n$. Аналогичное построение проделаем для $x < 0$. Нетрудно заметить, что полученная ломаная линия является аппроксимацией интегральной кривой $y = x^2$. Прямой подстановкой убеждаемся, что общим решением уравнения (1.10) является $y = x^2 + C$. Из этого семейства только одна интегральная кривая $y = x^2$ (при $C = 0$) проходит через начало координат.

Пример 1.2. Методом изоклин определить качественное поведение интегральных кривых уравнения

$$y' = 3y^{2/3}. \tag{1.11}$$

Решение. Согласно определению, выражение для изоклин есть $3y^{2/3} = k$. Разрешив его относительно y: $y = \pm\sqrt{(k/3)^3}$, получим семейство изоклин, представляющих собой прямые, параллельные оси Ox и расположенные симметрично относительно неё. Поле направлений, задаваемых этими изоклинами, и соответствующие им интегральные кривые изображены на рис. 4. При их построении было учтено, что из (1.11) следует, что $y'' = 2y^{-1/3}y'$ или $y'' = 2y^{-1/3}3y^{2/3} = 6y^{1/3}$. Это означает, что интегральные кривые в области $y > 0$ (верхней полуплоскости) вогнуты, а в области $y < 0$ (нижней полуплоскости) выпуклы. Прямая $y = 0$ является геометрическим местом точек перегиба.

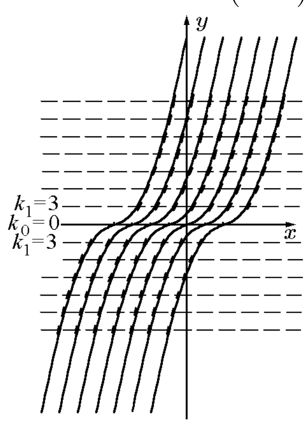


Рис. 4

Далее непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция

$$y = (x - C)^3 \tag{1.12}$$

является общим решением уравнения (1.11) для всех $x \in \mathbb{R}$. Такой же проверкой можно убедиться, что и функция

$$y(x) \equiv 0 \tag{1.13}$$

является решением уравнения (1.11). Но это означает, что через каждую точку $\{y = 0, x = C\}$ будут проходить две интегральные кривые, определяемые соотношениями (1.12) и (1.13). Решение (1.13) представляет собой пример особого решения, которое, очевидно, невозможно получить из (1.12) ни при каких C. Существование особого решения (1.13) связано с тем, что для уравнения (1.11) нарушено одно из условий теоремы Коши: производная от правой части уравнения $(3y^{2/3})'_y = 2/y^{1/3}$ на прямой $y = 0$ терпит разрыв.

1.5. Приближённый метод Эйлера

В качестве иллюстрации утверждения теоремы 1.1 рассмотрим приближённый метод Эйлера, который вытекает из метода изоклин.

В методе Эйлера приближённого интегрирования уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

искомая интегральная кривая, проходящая через точку (x_0, y_0), заменяется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков (рис. 5).

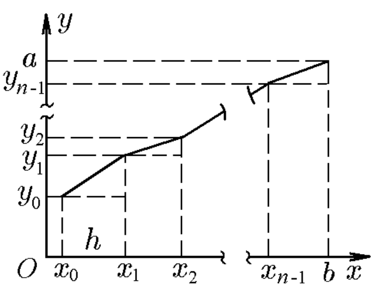


Рис. 5. Ломаная Эйлера

Построим приближённую интегральную кривую на отрезке $[x_0, b]$. Для этого разделим отрезок на n равных частей точками $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ с шагом $h = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \ldots, n-1$. Приближённые значения искомого решения в точках x_i обозначим через y_i и определим их рекуррентным выражением

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i, \tag{1.15}$$

где $y'_i = f(x_i, y_i)$. Более подробно

$$y_1 = y_0 + hy'_0, \quad y_2 = y_1 + hy'_1, \quad \ldots, \quad y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}.$$

Обозначим через $g_n(x)$ функцию

$$g_n = \begin{cases} y_0 + xy'_0, & x \in [x_0, x_1[; \\ y_j + xy'_j, & x \in [x_j, x_{j+1}[; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots; \\ y_{n-1} + xy'_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, b]. \end{cases} \tag{1.16}$$

График функции $y = g_n(x)$ называется *ломаной Эйлера* (см. рис. 5), i-е звено которой при $x_i \leq x \leq x_{i+1}$, есть отрезок, соединяющий точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}).

Естественно ожидать, что при $h \to 0$, $n \to \infty$ ломаные Эйлера $y = g_n(x)$ приближаются к искомому точному решению $y = \bar{y}(x)$.

1.6. Теорема Коши (доказательство)

Рассмотрим доказательство теоремы Коши 1.1 на основе идей, использованных в методе Эйлера. Переформулируем теорему 1.1 для функций $f(x, y)$, удовлетворяющих не условию ограниченности частных производных, а условию Липшица.

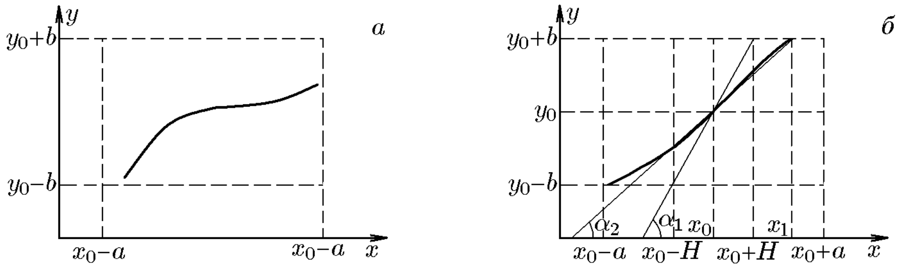


Рис. 6

Теорема 1.2 (Коши и Пеано о существовании и единственности решения). *Если функция $f(x,y)$ равномерно непрерывна в прямоугольнике (см. рис. 6,б)*

$$D = \{(x,y) \mid \ x \in [x_0-a, x_0+a], y \in [y_0-b, y_0+b]\}$$

и удовлетворяет в D условию Липшица

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|, \tag{1.17}$$

где N — постоянная, то существует единственное решение $y = \bar{y}(x)$ уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1.18}$$

при

$$x \in [x_0 - H, x_0 + H], \tag{1.19}$$

удовлетворяющее условию $y_0 = \bar{y}(x_0)$. Здесь

$$0 < H < \min\Big(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\Big), \qquad M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|. \tag{1.20}$$

Поясним условия теоремы. Соотношения (1.19), (1.20) задают пределы изменения аргумента x, при которых интегральная кривая $\bar{y}(x)$ гарантированно будет оставаться в области D. Интегральная кривая может выйти из области D через её горизонтальные или вертикальные границы.

Пусть кривая $y = \bar{y}(x)$ пересекает верхнюю горизонтальную границу при $x = x_1$, $x_0 < x_1 < x_0 + a$ (рис. 6,б). Изменение угла α касательной к кривой $\bar{y}(x)$ ограничено неравенством $-M < \operatorname{tg}\alpha < M$. Так как $\operatorname{tg}\tilde{\alpha} = b/(x_1 - x_0) \leqslant \operatorname{tg}\alpha_1 = b/H = M$, то, очевидно, при $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + H$ кривая $\bar{y}(x)$ не выйдет за пределы области D, в которой выполняются условия теоремы.

$\Diamond$ Условие Липшица можно заменить более сильным, но легко проверяемым условием существования ограниченной по модулю частной производной $f_y(x,y)$ в области D (см. теорему 1.1). Если

$$|f_y(x,y)| \leqslant N \tag{1.21}$$

в области D, то в соответствии с теоремой о конечном приращении получим

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = f_y(x,\xi)|y_1 - y_2|. \tag{1.22}$$

Здесь ξ — некоторое число, лежащее между y_1 и y_2 ($y_1 \leq \xi \leq y_2$), и, следовательно, $(x,\xi) \in D$. Поэтому $|f_y(x,\xi)| \leqslant N$, и мы получаем условие Липшица

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant N|y_1 - y_2|.$$

Пример 1.3. Показать, что функция $f(x,y) = xy^2$ удовлетворяет условию Липшица в квадрате $[0,1] \times [0,1]$.

Решение. Для функции $f(x,y) = xy^2$ в области $x \in [0,1]$, $y \in [0,1]$ имеем

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |x(y_1^2 - y_2^2)| = |x(y_1 + y_2)|\,|y_1 - y_2| \leqslant 2|y_1 - y_2|.$$

Условие Липшица выполняется. Получим это условие с помощью теоремы о конечном приращении (1.22). Так как $f_y(x,y) = 2xy$, то $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = 2x\xi|y_1 - y_2| \leqslant 2|y_1 - y_2|$.

Пример 1.4. Показать, что функция $f(x, y) = |y|$ удовлетворяет условию Липшица в квадрате $\mathbb{R}^2$.

Решение. Для функции $f(x, y) = |y|$ при любом фиксированном x справедливо неравенство
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |\,|y_1| - |y_2|\,| \leqslant |y_1 - y_2|.$$
Условие Липшица выполняется, но функция $f(x, y)$ не имеет производной при $y = 0$. Следовательно, условие (1.21) является более сильным, чем условие Липшица (1.17).

Перейдём к доказательству теоремы существования и единственности.

$\Diamond$ Мы докажем существование решения на отрезке $[x_0, x_0 + H]$, аналогично доказывается существование решения на отрезке $[x_0 - H, x_0]$.

Доказательство теоремы 1.2. Левую и правую части дифференциального уравнения (1.14) проинтегрируем в пределах от x_0 до x. С учётом начального условия
$$y(x_0) = x_0 \tag{1.23}$$
получим эквивалентное интегральное уравнение
$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.24}$$
Действительно, продифференцировав уравнение (1.24) по переменной x, получим уравнение (1.14). Подставив в (1.24) значение $x = x_0$, получим (1.23). Построим ломанную Эйлера $y = g_n(x)$, проходящую через точку (x_0, y_0) с шагом $h_n = H/n$ на отрезке $x \in [x_0, x_0 + H]$, где n — целое положительное число.

Ломаная Эйлера не может выйти из области D при $x \in [x_0, x_0 + H]$, так как угловые коэффициенты её звеньев по модулю меньше M.

Докажем, что последовательность $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно по x к некоторой функции $\bar{y}(x)$. По определению ломаной Эйлера $y = g_n$, производная на каждом отрезке разбиения $x_i \leqslant x < x_{i+1}$, $i = \overline{0, n-1}$, постоянна: $g'_i(x) = f(x_i, y_i)$, $x \in [x_i, x_{i+1}[$.

Запишем
$$g'_n(x) = f(x, g_n(x)) + [f(x_i, y_i) - f(x, g_n(x))], \quad x_i \leqslant x < x_{i+1}, \tag{1.25}$$
и обозначим
$$\eta_n(x) = f(x_i, y_i) - f(x, g_n(x)), \quad x_i \leq x < x_{i+1}. \tag{1.26}$$
На промежутке $[x_i, x_{i+1}[$ справедливы неравенства
$$|x - x_i| < h_n = \frac{H}{n}, \quad |g_n(x) - y_i| < Mh_n,$$
так как $g'_n(x)$ не превосходит M в области D. Заметим также, что $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$. В силу равномерной непрерывности $f(x, y)$ в D последовательность $\eta_n(x)$ равномерно сходится к нулю в D. Тогда можно выбрать такую монотонную последовательность $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$, что $\zeta_n > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = 0$, и
$$|\eta_n(x)| < \zeta_n. \tag{1.27}$$
Следовательно, $|\eta_k(x)| < \zeta_n$ при $k > n$.

Проинтегрировав (1.25), получим
$$g_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, g_n(t))dt + \int\limits_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt. \tag{1.28}$$
Заменим n на $n + m$:
$$g_{n+m}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, g_{n+m}(t))dt + \int\limits_{x_0}^{x} \eta_{n+m}(t)dt.$$

Отсюда

$$|g_n(x) - g_{n+m}(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |f(t, g_n(t)) - f(t, g_{n+m}(t))|dt + \int\limits_{x_0}^{x} |\eta_n(t)|dt + \int\limits_{x_0}^{x} |\eta_{n+m}(t)|dt,$$

при $x_0 \le x \le x_0 + H$.

Примем во внимание условие Липшица и неравенство (1.27), получим

$$|g_{n+m}(x) - g_n(x)| \leqslant N \int\limits_{x_0}^{x} |g_{n+m}(t) - g_n(t)|dt + (\zeta_{n+m} + \zeta_n)H.$$

Следовательно,

$$\max_{x\in[x_0,x_0+H]} |g_{n+m}(x) - g_n(x)| \leqslant N \max \int\limits_{x_0}^{x} |g_{n+m}(t) - g_n(t)|dt + (\zeta_{n+m} + \zeta_n)H,$$

откуда

$$\max_{x\in[x_0,x_0+H]} |g_{n+m}(x) - g_n(x)| \leqslant \frac{(\zeta_{n+m} + \zeta_n)H}{1 - NH} \leqslant \frac{2\zeta_n H}{1 - NH}. \tag{1.29}$$

Здесь мы воспользовались монотонностью последовательности ζ_n: $\zeta_{n+m} < \zeta_n$, т.е. $\zeta_{n+m} + \zeta_n \leqslant 2\zeta_n$. Подчеркнем, что данное условие имеет смысл при

$$NH < 1. \tag{1.30}$$

Величину $2\zeta_n H/(1 - NH)$ можно сделать меньше любого $\varepsilon > 0$ при достаточно большом номере $n > N(\varepsilon)$ в силу $\lim\limits_{n\to\infty} \zeta_n = 0$.

В результате мы получим

$$\max_{x\in[x_0,x_0+H]} |g_{n+m}(x) - g_n(x)| < \varepsilon$$

при $n > N(\varepsilon)$, то есть последовательность непрерывных функций $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $\bar{y}(x)$ при $x \in [x_0, x_0 + H]$.

Докажем, что функция $\bar{y}(x)$ является решением уравнения (1.24). Перейдём в соотношении (1.28) к пределу:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t, g_n(t))dt + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt,$$

получим

$$\bar{y}(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f(t, g_n(t))dt + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt. \tag{1.31}$$

Покажем, что последовательность $f(x, g_n(x))$ равномерно по x сходится к $f(x, \bar{y}(x))$. Действительно,

$$|f(x, \bar{y}(x)) - f(x, g_n(x))| \leqslant N|\bar{y}(x) - g_n(x)| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$, если $|\bar{y}(x) - g_n(x)| < \delta(\varepsilon)$, при соответствующем выборе $\delta(\varepsilon)$. Но последнее неравенство выполняется при $n > N_1(\delta(\varepsilon))$, а номер N_1 не зависит от x.

Это и означает равномерную сходимость $f(x, g_n(x))$ и $f(x, \bar{y}(x))$.

Равномерная сходимость $f(x, g_n(x))$ к $f(x, \bar{y}(x))$ позволяет (см. часть III) перейти к пределу под знаком интеграла в (1.31). В результате получим

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} f(t, y_n(t))dt + \int\limits_{x_0}^{x} \lim_{n\to\infty} \eta_n(t)dt = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, \bar{y}(t))dt.$$

Предел подынтегральных функций во втором интеграле равен нулю. Утверждение доказано.

Завершая доказательство теоремы 1.2, докажем единственность решения уравнения (1.24). Допустим существование двух решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$, имеющих различные значения в области $[x_0, x_0 + H]$, т.е.

$$\max_{x\in[x_0,x_0+H]} |y_1(x) - y_2(x)| \neq 0.$$

Подстановка $y_1(x)$, $y_2(x)$ в (1.24) приводит к тождествам по переменной x:

$$y_1(x) \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt,$$

$$y_2(x) \equiv y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt.$$

Отсюда найдём

$$\max_{x\in[x_0,x_0+H]} |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant \max_{x\in[x_0,x_0+H]} \left|\int\limits_{x_0}^{x} [f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))]dt\right|.$$

С учётом условия Липшица получим

$$\max_{x\in[x_0,x_0+H]} |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant N \max_{x\in[x_0,x_0+H]} \int\limits_{x_0}^{x} |y_1(t) - y_2(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant N \max_{x\in[x_0,x_0+H]} |y_1(x) - y_2(x)| \max_{x\in[x_0,x_0+H]} \left|\int\limits_{x_0}^{x} dt\right| =$$

$$= NH \max_{x\in[x_0,x_0+H]} |y_1(x) - y_2(x)|,$$

т.е.

$$\max_{x\in[x_0,x_0+H]} |y_1(x) - y_2(x)| \leqslant NH \max_{x\in[x_0,x_0+H]} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

В силу неравенства нулю $\max\limits_{x_0,x_0+H} |y_1(x) - y_2(x)|$ имеем

$$NH \geqslant 1.$$

Последнее неравенство противоречит условию (1.30). Полученное противоречие можно устранить лишь при $\max\limits_{x\in[x_0,x_0+H]} |y_1(x) - y_2(x)| = 0$, то есть, если $y_1(x) = y_2(x)$ при $x \in [x_0, x_0 + H]$. Теорема доказана.

$\Diamond$ Теорема доказана для некоторой области значений аргумента $x_0 \leq x \leq x_0 + H$. В приложениях представляет интерес возможность продолжить решение на максимально широкую область изменения переменной x.

$\Diamond$ Чтобы продолжить решение, построенное при доказательстве теоремы в области $[x_0, x_0+H]$, следует выбрать в качестве начальной точки $(x_0+H, y(x_0+H))$ и повторить рассуждение теоремы. Решение будет продолжено на отрезок длиной H_1, на котором выполняется условия теоремы. Продолжая этот процесс, можно распространить решение на всю полуось $[x_0, \infty[$ или на всю ось $]-\infty, +\infty[$, если продолжать решение и в сторону меньших значений x, если не возникнут нарушения условий теоремы. Однако интегральная кривая может оказаться непродолжаемой при приближении к точке, в которой нарушаются условия теоремы.

Пример 1.5. Решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(0) = 1.$$

Продолжить решение на максимально возможную область (прямоугольник $|x| < 1$, $0 < y < 1$).

Решение. Нетрудно убедиться, что общий интеграл уравнения имеет вид $x^2+y^2 = C^2$. С учётом начального условия найдём $y^2 + x^2 = 1$, откуда $y = \sqrt{1-x^2} \geq 0$. Решение от точки $(0, 1)$ может быть продолжено только до точек $(-1, 0)$, $(1, 0)$. В этих точках правая часть уравнения $f(x, y) = -x/y$ терпит разрыв.

1.7. Теорема существования и единственности. Метод сжимающих отображений

Докажем теперь теорему 1.2 для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешённых относительно производной, методом сжимающих отображений.

Теорема 1.3 (Коши). *Пусть в дифференциальном уравнении*

$$y' = f(x, y) \tag{1.32}$$

функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике $\mathbb{D}$: $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$ и удовлетворяет в этом прямоугольнике условию Липшица

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leqslant N|y - z|,$$

где N — некоторая постоянная.

Тогда на некотором промежутке $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ существует единственное решение уравнения (1.32)*, удовлетворяющее условию*

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{1.33}$$

Здесь $h < a$, $0 < h < b/M$; $h < 1/N$, $M = \max\limits_{(x,y)\in\mathbb{D}} |f(x, y)|$.

Доказательство. Рассмотрим пространство $\widetilde{C}[x_0-h, x_0+h]$ функций $y = y(x)$, непрерывных на промежутке $[x_0 - h, x_0 + h]$ и таких, что $|y(x) - y_0| \leqslant Mh < b$. Определим расстояние ρ между двумя функциями $y = y(x)$ и $z = z(x)$ из этого пространства соотношением

$$\rho(y, z) = \max_{[x_0-h,x_0+h]} |y(x) - z(x)|. \tag{1.34}$$

Нетрудно проверить, что функция $\rho(y, z)$ (1.34) является метрикой этого пространства (см. Приложение A). Пространство $\widetilde{C}[x_0 - h, x_0 + h]$ полно, так как оно является замкнутым подпространством полного пространства непрерывных функций, определённых на $[t_0 - h, t_0 + h]$ (см. Приложение A).

Проинтегрируем уравнение (1.32) в пределах от x_0 до $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$ с учётом начального условия (1.33):

$$y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.35}$$

В результате определён оператор $\widehat{A}$, который ставит в соответствие непрерывной функции $y(x)$ функцию $u(x)$ по правилу

$$u(x) = \widehat{A}y = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.36}$$

Таким образом, задача о решении уравнения (1.35) сводится к задаче о нахождении стационарных точек оператора $\widehat{A}$.

Покажем, что оператор $\widehat{A}$ для некоторого $h > 0$ является сжимающим, т.е. для любых функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$ существует такое $\alpha \in [0, 1[$, что

$$\rho(\widehat{A}y, \widehat{A}z) \leqslant \alpha\rho(y, z).$$

Рассмотрим расстояние между этими функциями:

$$\rho(\widehat{A}y,\widehat{A}z)=\max_{[x_0-h,x_0+h]}\left|\int\limits_{x_0}^{x}[f(t,y(t))-f(t,z(t))]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{[x_0-h,x_0+h]}\int\limits_{x_0}^{x}\bigl|f(t,y(t))-f(t,z(t))\bigr|dt\leqslant N\max_{[x_0-h,x_0+h]}\int\limits_{x_0}^{x}\bigl|y(t)-z(t)\bigr|dt\leqslant$$

$$\leqslant N\max_{[x_0-h,x_0+h]}\bigl|y(x)-z(x)\bigr|\max_{[x_0-h,x_0+h]}\left|\int\limits_{x_0}^{x}dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant Nh\max_{[x_0-h,x_0+h]}\bigl|y(x)-z(x)\bigr|=Nh\rho(y,z).$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\max_{[x_0-h,x_0+h]}|x-x_0|\leqslant h.$$

Таким образом,

$$\rho(\widehat{A}y,\widehat{A}u)\leqslant\alpha\rho(y,u),$$

где $\alpha=Nh$. Выберем $h<1/N$, тогда $\alpha<1$ и, следовательно, оператор $\widehat{A}$ — сжимающий.

Но сжимающий оператор имеет единственную стационарную точку. Таким образом, существует и притом единственное решение уравнения (1.35), а значит, и задачи Коши (1.32), (1.33), что и требовалось доказать.

2. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно записать в виде

$$y'=\varphi(x)\psi(y),\tag{2.1}$$

т.е. правая часть есть произведение двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от y, или

$$M_1(x)M_2(y)dx+N_1(x)N_2(y)dy=0,\tag{2.2}$$

т.е. коэффициенты при dx и dy есть произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от y.

Вынеся в (2.2) общий множитель $M_2(y)N_1(x)$, получим

$$M_2(y)N_1(x)\Bigl[\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy\Bigr]=0.\tag{2.3}$$

Произведение равно нулю, если

$$M_2(y)=0\quad\text{или}\quad N_1(x)=0,\quad\text{или}\quad\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=0.\tag{2.4}$$

Выражение в квадратных скобках в (2.4) есть полный дифференциал функции

$$U(x,y)=\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy,$$

а так как он равен нулю, то эти функции равны константе, т.е.

$$\int\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy=C, \tag{2.5}$$

где C — произвольная постоянная. Правая часть выражения (2.5) является первым интегралом данного уравнения.

При делении на $M_2(y)N_1(x)$ могли быть потеряны решения, обращающие в нуль функции $M_2(y)$ и $N_1(x)$. Соотношения

$$M_2(y)=0,\qquad N_1(x)=0 \tag{2.6}$$

определяют такие решения.

Эти решения могут входить в общее, а могут оказаться особыми, не вытекающими из (2.5) ни при каких C. Поэтому для получения всех решений уравнения (2.2) к семейству интегральных кривых (2.5) следует присоединить решения уравнений (2.6).

♦ Уравнение (2.4) называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Пример 2.1. Найти общее решение уравнения

$$xy\,dx+\sqrt{1-x^2}dy=0.$$

Решение. Разделим переменные:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{y}=0.$$

Проинтегрировав, найдём

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{dy}{y}=\ln C;$$
$$-\sqrt{1-x^2}+\ln|y|=\ln C$$

или

$$y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}.$$

◊ Уравнение

$$y'=f(ax+by+c)\quad(b\neq0) \tag{2.7}$$

приводится к виду (2.1) с помощью замены $z=ax+by+c$. Тогда

$$\frac{dz}{dx}=a+b\frac{dy}{dx}\to\frac{dz}{dx}=a+bf(z)$$

или

$$\frac{dz}{a+bf(z)}=dx.$$

◊ Кроме уравнения (2.7) можно указать и другие классы уравнений, которые заменой $z=ax+by+c$ сводятся к уравнению с разделяющимися переменными, например

$$y'=\frac{1}{b}\Big[\frac{f(ax+by+c)}{\varphi(x)}-a\Big],\quad b\neq0, \tag{2.8}$$

и т.д.

Действительно, преобразовав (2.8) к виду

$$(a + by') = \frac{f(ax + by + c)}{\varphi(x)}, \tag{2.9}$$

имеем

$$z' = \frac{f(z)}{\varphi(x)}$$

или в разделённых переменных

$$\frac{dz}{f(z)} = \frac{dx}{\varphi(x)}.$$

Пример 2.2. Найти частное решение уравнения

$$(2x + 1)dy + y^2\, dx = 0,$$

если $y|_{x=0} = 2$.

Решение. Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{dx}{2x + 1}.$$

Проинтегрировав, получим

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\int \frac{dx}{2x + 1} + C;$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{2}\ln|2x + 1| + C$$

или

$$\frac{2}{y} = \ln|2x + 1| - 2C.$$

Отсюда

$$y = \frac{2}{\ln|2x + 1| - 2C}.$$

Это и есть общее решение данного уравнения. Воспользовавшись начальными условиями $x = 0$, $y = 2$, определим постоянную C:

$$1 = \ln 1 - 2C$$

или $-2C = 1$, т.е. $C = -1/2$. Тогда искомое частное решение будет иметь вид

$$y = \frac{2}{\ln|2x + 1| + 1}.$$

Пример 2.3. Решить задачу Коши

$$y' = (4x + y + 1)^2, \quad y(0) = -1.$$

Решение. Это уравнение относится к типу (2.7) и заменой $z = 4x + y + 1$, $z' = 4 + y'$ приводится к виду

$$z' - 4 = z^2.$$

Разделив переменные:

$$\frac{dz}{z^2 + 4} = dx$$

и проинтегрировав, найдём

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{2} = x + C,$$

где C — произвольная постоянная. Возвратившись к исходным переменным, запишем

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4x+y+1}{2} = x + C.$$

Подставив сюда начальные условия, получим $C = 0$. Таким образом,

$$\operatorname{arctg}\frac{4x+y+1}{2} = 2x$$

или

$$y = 2\operatorname{tg}2x - 4x - 1.$$

Пример 2.4. Найти общее решение уравнения

$$(x+1)y' + \frac{y}{x+y} + x = 0.$$

Решение. Это уравнение с помощью тождественных преобразований можно записать как

$$(x+1)y' + \frac{y+x-x}{x+y} + (x+1) - 1 = 0$$

или

$$(x+1)(y'+1) + 1 - \frac{x}{x+y} - 1 = 0,$$

т.е.

$$\frac{x+1}{x}(y'+1) = \frac{1}{y+x}.$$

Это уравнение относится к типу (2.9) и заменой $z = y+x$, $z' = y'+1$ приводится к виду

$$\frac{x+1}{x}z' = \frac{1}{z}.$$

Разделив переменные:

$$z\,dz = \frac{x}{x+1}dx$$

и проинтегрировав:

$$\int z\,dz = \int \frac{x}{x+1}dx,$$

найдём

$$\frac{z^2}{2} = x - \ln|x+1| + C.$$

Возвратившись к исходным переменным, запишем

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 = x - \ln|x+1| + C.$$

Пример 2.5. Найти общее решение уравнения

$$2x^2y' = \operatorname{tg}(y-x) + 2x^2.$$

Решение. Это уравнение легко сводится к виду

$$2x^2(y'-1) = \operatorname{tg}(y-x),$$

совпадающему с видом (2.9). Заменой $z = y - x$, $z' = y' - 1$ получим

$$2x^2z' = \operatorname{tg}z.$$

Разделив переменные:

$$\frac{\cos z}{\sin z}dz = \frac{dx}{2x^2}$$

и проинтегрировав:

$$\int \frac{\cos z}{\sin z}dz = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2},$$

найдём

$$\ln|\sin z| = -\frac{1}{2x} + C$$

или

$$\ln|\sin(y-x)| = -\frac{1}{2x} + C.$$

2.2. Автономные уравнения

Рассмотрим частный случай уравнений с разделяющимися переменными (2.1), когда функция $\varphi(x) \equiv 1$.

♦ Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными вида

$$y'(x) = \psi(y) \tag{2.10}$$

называются *автономными*.

♢ Если в уравнении (2.1) положить $\psi(y) \equiv 1$, то его тоже можно рассматривать как автономное относительно функции $x(y)$:

$$\frac{dx}{dy} = x' = \frac{1}{\varphi(x)} = \overline{\psi}(x).$$

Теорема 2.1. *Если $y(x)$ — решение автономного уравнения* (2.10) *с областью определения E и областью изменения G, то функция $g(x) = y(x + C)$ с произвольной постоянной C также является решением этого уравнения с той же областью значений G в области определения $(x + C) \in E$.*

Доказательство. Так как функция $y(x)$ является решением автономного уравнения, то её подстановка в уравнение (2.10) обращает его в тождество

$$y'(x) \equiv \psi(y).$$

Продифференцировав функцию $g(x)$ по x, найдём

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{dg(x+C)}{d(x+C)}\frac{d(x+C)}{dx} = \frac{dy(x+C)}{d(x+C)} \equiv \psi(y(x+C)) = \psi(g)$$

или

$$g'(x) \equiv \psi(g),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 2.1.1. *Если функция $\psi(y)$ удовлетворяет условиям теоремы Коши, то общее решение $y(x, C)$ автономного уравнения можно построить по любому его частному решению $y(x)$ по правилу*

$$y(x, C) = y(x + C). \tag{2.11}$$

В геометрической интерпретации доказанная теорема и следствие означают, что любые две интегральные кривые уравнения (2.10) получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси Ox. Причём, если область изменения G представляет собой сумму множеств: $G = \sum\limits_{i=1}^{n} G_i$, то вся область изменения $G \times E$ разделяется на полосы $G_i \times E$, в которых все интегральные кривые получаются из одной посредством её сдвига вдоль оси Ox.

Пример 2.6. Построить семейство интегральных кривых, представляющих общее решение уравнения

$$y'(x) = y(x). \tag{2.12}$$

Решение. Очевидно, что решениями уравнения являются функции

$$\begin{aligned} &1)\ \ y = e^x, \quad E = \mathbb{R}, \quad G_1 =]0, \infty[; \\ &2)\ \ y = 0, \quad E = \mathbb{R}, \quad G_2 = \{0\}; \\ &3)\ \ y = -e^x, \quad E = \mathbb{R}, \quad G_3 =]-\infty, 0[, \end{aligned} \tag{2.13}$$

и поскольку уравнение (2.12) — автономное, то все интегральные кривые в верхней полуплоскости $y > 0$ (полоса $G_1 \times \mathbb{R}$) получаются сдвигом кривой $y = e^x$, а

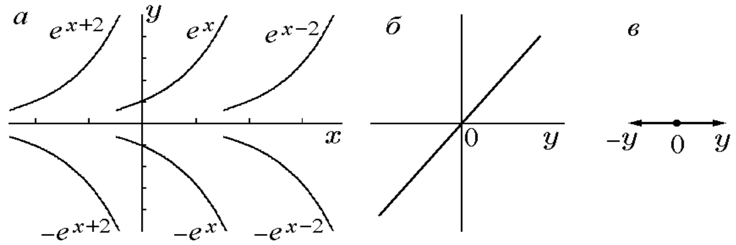


Рис. 7

в нижней полуплоскости $y < 0$ (полоса $G_3 \times \mathbb{R}$) сдвигом кривой $y = -e^x$ (рис. 7,*а*).

Аналогичный результат можно получить, разделив переменные в уравнении (2.12):

$$\frac{dy}{y} = dx.$$

Отсюда, положив C произвольной постоянной, имеем общее решение в виде $y = Ce^x$, из которого, в свою очередь, следуют частные решения (2.13).

Для семейства интегральных кривых, получаемых одна из другой посредством сдвига, достаточно определить качественное поведение отдельного решения. Так, например, решение уравнения (2.12) можно описать, исходя из качественного поведения решений (2.13): в полосе $y < 0$ решения уравнения монотонно убывают, а в полосе $y > 0$ монотонно возрастают; решение $y(x) = 0$ разделяет эти полосы.

В общем случае, как следует из (2.10), поведение решения этого уравнения полностью определяется поведением функции $\psi(y)$. Очевидно, что для полос, где $\psi(y) > 0$, решения $y(x)$ будут возрастающими, а для полос, где $\psi(y) < 0$, — убывающими. В тех случаях, когда $\psi(y_i) = 0$, решением уравнения будут постоянные $y(x) = y_i$. В геометрической интерпретации прямые $y = y_i$ будут разделять либо полосы возрастания и убывания решений, либо полосы их выпуклости и вогнутости.

Исходя из этого, для исследования качественного поведения решения уравнения (2.10) удобнее вместо плоскости xOy (т.е. графиков $y(x)$ — интегральных кривых) использовать плоскость $yO\psi$ (т.е. график функции $\psi = \psi(y)$). Так, например, график $\psi(y) = \psi$ на рис. 7,*б* достаточно наглядно характеризует качественное поведение решения уравнения (2.12) из примера 2.6.

♦ Плоскость (y, ψ), представляющая график функции $\psi = \psi(y)$ уравнения (2.10), называется *фазовой плоскостью* этого уравнения, ось Oy называется *фазовой осью*, а её точки — *фазовыми точками*. Сам график функции $\psi = \psi(y)$ называется *фазовым портретом дифференциального уравнения*.

Согласно введённому определению, рис. 7,*б* представляет фазовый портрет уравнения (2.12) из примера 2.6.

♦ Фазовые точки y_i, для которых $\psi(y_i) = 0$, называются *стационарными* (или *неподвижными*) точками уравнения (2.10). Стационарные точки y_i на фазовой оси соответствуют интегральным прямым $y(x) = y_i$, называемым *стационарными решениями*.

Если решение $y(x)$ нестационарное, то оно должно быть либо возрастающим, либо убывающим. Исходя из этого, понятие стационарной точки позволяет упростить графическое изображение фазового портрета дифференциального уравнения. Рис. 7,*в* наглядно иллюстрирует возможность такого упрощения: достаточно на фазовой оси изобразить стационарную точку и стрелками указать характер поведения решения до стационарной точки и после неё. Стрелка $\to$ обозначает возрастание решения, а стрелка $\leftarrow$, соответственно, её убывание.

Рис. 8

Такое абстрактное изображение фазового портрета дифференциального уравнения позволяет достаточно просто описать характер изменения решений в окрестности стационарной точки и тем самым классифицировать эти точки. Действительно, возможно существование четырех типов стационарных точек, изображённых на рис. 8.

♦ Стационарная точка, при переходе через которую (слева направо) решение меняется с возрастающего на убывающее, называется *аттрактором* — *притягивающей* (рис. 8,*а*).

♦ Стационарная точка, при переходе через которую решение меняется с убывающего на возрастающее, называется *репеллером* — *отталкивающей* (рис. 8,*б*).

♦ Стационарная точка, при переходе через которую поведение решения не меняется, называется *шунтом*. Шунты различаются между собой принадлежностью к возрастающему или убывающему решению (рис. 8,*в*,*г*).

Исходя из такой классификации, можно сформулировать критерий качественной эквивалентности автономных уравнений с одной стационарной точкой: различные дифференциальные уравнения с одной стационарной точкой считаются качественно эквивалентными, если они имеют один и тот же фазовый портрет.

Пример 2.7. Исследовать уравнения

$$\text{а)}\ \ y' = y, \quad \text{б)}\ \ y' = (y-1)^2, \quad \text{в)}\ \ y' = (y-2)^3$$

на качественную эквивалентность.

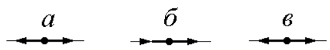


Рис. 9

Решение. Все три уравнения имеют по одной стационарной точке. Фазовые портреты уравнений изображены на рис. 9 под соответствующими литерами. Из них следует, что фазовые портреты уравнений а) и в) со стационарной точкой, являющейся репеллером, одинаковы, т.е. эти уравнения качественно эквивалентны. Уравнение б) не является качественно эквивалентным уравнениям а) и в), поскольку их фазовые портреты различаются, а фазовая точка этого уравнения — шунт.

Пример 2.8. Уравнения

$$\text{а)}\ \ y' = 2(y^2-4), \quad \text{б)}\ \ y' = (y-1)(y-3), \quad \text{в)}\ \ y' = -(y-1)(y-3)$$

исследовать на качественную эквивалентность.

Решение. Все уравнения имеют по две стационарных точки, одна из которых — аттрактор, а другая — репеллер. Уравнения а) и б) имеют один фазовый портрет, в котором репеллер следует за аттрактором (рис. 10,*а*,*б*), и, следовательно, эти уравнения качественно эквивалентны. Уравнение в) не является качественно эквивалентным уравнениям а) и б), поскольку в его фазовом портрете репеллер и аттрактор расположены в обратном порядке (рис. 10,*в*).

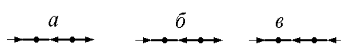


Рис. 10

Пример 2.9. Дифференциальные уравнения

$$
\begin{aligned}
&1)\ \ y' = e^y, \quad 2)\ \ y' = (1-y)^2, \quad 3)\ \ y' = \operatorname{ch}^{-2} y, \quad 4)\ \ y' = \operatorname{ch} y - 1,\\
&5)\ \ y' = \cos y - 1, \quad 6)\ \ y' = \operatorname{sh}^2 y, \quad 7)\ \ (y')^2 = \sin y,\\
&8)\ \ y' = \sin x \cos x
\end{aligned}
$$

распределить на группы качественно эквивалентных.

Решение. Начнем с уравнений, не имеющих стационарных точек. Таковы уравнения 1) и 3). Они образуют первую группу качественно эквивалентных уравнений, поскольку их фазовые портреты одинаковы (рис. 11,*а*). Уравнения 2), 4) и 6) имеют по одной стационарной точке. Достаточно просто установить, что эти точки являются шунтами на возрастающих решениях (рис. 11,*б*). Таким образом, уравнения 2), 4) и 6) с одинаковыми фазовыми портретами образуют вторую группу качественно эквивалентных уравнений. У оставшихся уравнений 5), 7) и 8) стационарных точек бесконечное множество. Для уравнения 5) эти точки являются шунтами на убывающих решениях (рис. 11,*в*), а для уравнений 7) и 8) представляют собой чередующиеся аттракторы и репеллеры (рис. 11,*г*). Таким образом, уравнения 7) и 8), имея одинаковые фазовые портреты, образуют третью группу качественно эквивалентных уравнений. И, наконец, в четвёртую группу входит единственное уравнение 5).

Рис. 11

В приложениях дифференциальных уравнений (2.10) переменная x зачастую имеет смысл времени. В этих случаях величина $y(x)$ задаёт состояние системы, описываемой этим уравнением, в момент времени x. Фазовая плоскость позволяет изобразить состояние системы в любой момент времени x точкой $y(x)$ на фазовой прямой. С увеличением времени фазовая точка $y(x)$ движется по фазовой прямой со скоростью $y'(x) = \psi(x)$, отображая изменение состояния этой системы, т.е. её динамику. При этом фазовый портрет отражает динамику лишь качественно, поскольку фиксирует только направление скорости. Тем не менее, такая качественная информация оказывается полезной при построении различных динамических моделей. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2.10. Составить уравнение, моделирующее рост популяции некоторого биологического вида, если окружающая среда обеспечивает жизнедеятельность популяции численностью $y_{\text{р}}$.

Решение. Известно (см. также пример 38.1), что рост численности изолированной популяции в среде, обладающей неограниченными ресурсами, описывается уравнением

$$y'(x) = \alpha y(x), \quad \alpha > 0, \quad y > 0. \tag{2.14}$$

Если через y_0 обозначить первоначальную численность популяции, то решением уравнения (2.14) является функция

$$y(x) = y_0 e^{\alpha x}. \tag{2.15}$$

Эта функция достаточно хорошо описывает неограниченный рост, например, некоторых микроорганизмов, для поддержания жизнедеятельности которых окружающая среда обладает практически неограниченными ресурсами. В тех случаях, когда окружающая среда имеет ограниченные ресурсы и может поддерживать численность популяции на уровне $y_{\text{р}}$, уравнение (2.14) должно быть

Рис. 12

изменено. Для определения характера этого изменения построим фазовый портрет уравнения (2.14) (рис. 12,*а*).

Фазовый портрет уравнения имеет одну стационарную точку $y = 0$, являющуюся репеллером, поэтому в области $y > 0$ функция $y(x)$ неограниченно возрастает, моделируя неограниченный рост численности популяции. В нашей модели этот рост должен быть остановлен на уровне $y_\text{р}$. С математической точки зрения, это можно сделать, например, введением в уравнение (2.14) аттрактора в фазовой точке $y = y_\text{р}$. В результате фазовый портрет, изображённый на рис. 12,*а*, преобразуется к фазовому портрету, изображённому на рис. 12,*б*. Такой фазовый портрет будет соответствовать динамической модели, в которой популяции численностью меньше $y_\text{р}$ будут расти, а численностью больше $y_\text{р}$ уменьшаться, достигая равновесного состояния при численности $y_\text{р}$.

Одним из дифференциальных уравнений, имеющих фазовый портрет, соответствующий изображённому на рис. 12,*б*, является уравнение

$$y'(x) = \alpha y(x)\Big[1 - \frac{y(x)}{y_\text{р}}\Big]. \tag{2.16}$$

Уравнение (2.16) предпочтительно тем, что при равновесной численности популяции $y_\text{р}$, стремящейся к ∞, оно переходит в уравнение (2.14). При этом оно является уравнением с разделяющимися переменными и может быть решено в квадратурах. Отметим, что при некоторых дополнительных требованиях к модели уравнение (2.16) можно заменить некоторым качественно эквивалентным ему уравнением, удовлетворяющим этим требованиям (см. разд. 29).

Как уже отмечалось, в динамической интерпретации уравнение $y' = \psi(y)$ задаёт скорость движения каждой фазовой точки y или, как говорят, скорость потока фазовых точек на фазовой прямой. Если это уравнение удовлетворяет условиям теоремы Коши, то его решение $y = y(x)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, будет определять закон перемещения (эволюции) фазовой точки $y(x)$, которая в момент времени x_0 занимала положение y_0, т.е. её прошлое, если $x < x_0$, или будущее, если $x > x_0$, положения.

♦ Функция $\hat{g}_x$, которая отображает фазовую точку y_0 в фазовую точку $y(x) = \hat{g}_x(y_0)$, получаемую из точки y_0 её перемещением по интегральной кривой уравнения (2.10), проходящей через неё, за время x, называется *оператором эволюции* этого уравнения.

Пример 2.11. Найти оператор эволюции уравнения

$$y'(x) = \alpha y(x). \tag{2.17}$$

Решение. С этим уравнением мы уже неоднократно встречались, и его решение можно записать в виде

$$y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}, \tag{2.18}$$

и оно должно удовлетворять начальному условию $y\big|_{x=x_0} = y_0$. Эту формулу можно записать в иной форме:

$$y(x) = \hat{g}_{x-x_0}(y_0) = e^{\alpha(x-x_0)}y_0, \tag{2.19}$$

согласно которой состояние $y(x)$ может быть найдено как результат действия оператора

$$\hat{g}_{x-x_0} = e^{\alpha(x-x_0)} \tag{2.20}$$

на начальное состояние y_0. В силу простоты исходного уравнения этот оператор является всего лишь оператором умножения, однако запись в виде (2.19) наглядно иллюстрирует происхождение и смысл термина «оператор эволюции».

Непосредственно из формулы (2.19) следует, что оператор эволюции $\hat{g}_x$ обладает следующим свойством:

$$\hat{g}_{x_1+x_2}(y_0) = \hat{g}_{x_1}(\hat{g}_{x_2}(y_0)) = \hat{g}_{x_2}(\hat{g}_{x_1}(y_0)), \tag{2.21}$$

но тогда

$$\hat{g}_x(\hat{g}_{-x}(y_0)) = \hat{g}_{-x}(\hat{g}_x(y_0)) = \hat{g}_0(y_0) = y_0 \tag{2.22}$$

и, следовательно,

$$\hat{g}_x^{-1} = \hat{g}_{-x}, \tag{2.23}$$

что, впрочем, следует и непосредственно из (2.20).

Если от частного примера (2.17) перейти к произвольному автономному уравнению (2.10), то и в этом случае в силу теоремы 2.1 решение уравнения с начальным условием $y(x_0) = y_0$ можно записать в виде

$$y(x) = \hat{g}_{x-x_0}(y_0), \tag{2.24}$$

где $\hat{g}_{x-x_0}$ — оператор эволюции, удовлетворяющий условиям (2.21)–(2.23).

Следует отметить, что нахождение оператора эволюции из (2.24) связано с не меньшими трудностями, чем нахождение решения уравнения (2.10).

Пример 2.12. Найти оператор эволюции уравнения (2.16) из примера 2.10, положив начальным условием равенство $y(0) = y_0$. Провести анализ эволюции модели.

Решение. Согласно условию задачи, требуется найти оператор эволюции уравнения

$$y'(x) = \alpha y(x)\Big[1 - \frac{y(x)}{y_\text{р}}\Big]. \tag{2.25}$$

Разделив переменные, имеем

$$y\Big(1 - \frac{y}{y_\text{р}}\Big)\Big[\frac{dy}{1 - y/y_\text{р}} - \alpha\, dx\Big] = 0.$$

Это уравнение, как и следовало ожидать (см. пример 2.10), имеет две стационарные точки: $y(x) = 0$ и $y(x) = y_\text{р}$, вне которых решение уравнения можно записать как

$$\int \frac{dy}{y(1 - y/y_\text{р})} = \int \Big(\frac{1}{y} + \frac{1}{y_\text{р} - y}\Big)dy = \alpha \int dx$$

или

$$\ln\Big|\frac{y}{y_\text{р} - y}\Big| = \alpha x + \ln|C|,$$

где C — произвольная постоянная.

Отсюда

$$\frac{y}{y_\text{р} - y} = Ce^{\alpha x}$$

и, соответственно,

$$y(x) = \frac{y_\text{р} Ce^{\alpha x}}{Ce^{\alpha x} + 1}. \tag{2.26}$$

Положив в (2.26), согласно начальному условию, $x = 0$, $y = y_0$, найдём уравнение для определения постоянной C:

$$y_0 = \frac{y_\text{р} C}{C + 1},$$

откуда
$$C = \frac{y_0}{y_\text{p} - y_0}.$$
С учётом этого из (2.26) имеем
$$y(x) = \hat{g}_x(y_0) = \frac{y_0 e^{\alpha x}}{y_0(e^{\alpha x} - 1)/y_\text{p} + 1}. \tag{2.27}$$

Выражение (2.27) для оператора эволюции получено в предположении, что $y_0 \neq 0$ и $y_0 \neq y_\text{p}$. Однако подстановка в (2.27) этих начальных значений даёт
$$y(x) = \hat{g}_x(0) = 0$$
и
$$y(x) = \hat{g}_x(y_\text{p}) = y_\text{p}$$
для всех x.

Таким образом, оператор (2.27) описывает эволюцию всех фазовых точек, включая и стационарные. Нетрудно убедиться, что полученный оператор удовлетворяет основному свойству оператора эволюции:
$$y(x) = \hat{g}_{x_1+x_2}(y_0) = \hat{g}_{x_1}(\hat{g}_{x_2}(y_0)) = \hat{g}_{x_2}(\hat{g}_{x_1}(y_0)) = \frac{y_0 e^{\alpha(x_1+x_2)}}{y_0[e^{\alpha(x_1+x_2)} - 1]/y_\text{p} + 1}.$$

Перейдём теперь к анализу полученного решения. В тривиальном случае $y_0 = 0$ рост численности популяции, естественно, отсутствует, так как $y_0 = 0$ является стационарной точкой.

Если $y_0 \neq 0$ и $y_0 < y_\text{p}$, то, согласно (2.27), начинается рост численности популяции к своему равновесному значению y_p, которое может обеспечить окружающая среда. Если же $y_0 \neq 0$ и $y_0 > y_\text{p}$, то, напротив, по закону (2.27) происходит снижение численности популяции к тому же равновесному значению y_p.

Рассмотренный выше пример характеризует не только эффективность использования оператора эволюции, но и делает первый шаг к таком понятию, как устойчивость решения дифференциального уравнения. Действительно, как следует из решения (2.27), даже незначительное отклонение y_0 от значения $y_0 = 0$ вызывает возрастание $y(x)$, т.е. движение фазовой точки y от точки y_0. С другой стороны, любое (даже значительное) отклонение y_0 от значения $y_0 = y_\text{p}$ вызывает такое изменение величины $y(x)$, которое приводит её в конечном итоге вновь к значению $y(x) = y_\text{p}$, т.е. вызывает движение фазовой точки $y(x)$ к точке y_p с любой стороны от неё.

Таким образом, точку $y = 0$ можно рассматривать как точку неустойчивого равновесия, а точку $y = y_\text{p}$, соответственно, как точку устойчивого равновесия.

Если вспомнить, что точка $y = 0$ является репеллером, а точка $y = y_\text{p}$ — аттрактором, то их можно рассматривать как аналоги точек неустойчивого и устойчивого равновесия, соответственно.

Этим мы ограничим рассмотрение понятий, представляющих собой предмет специальных разделов теории дифференциальных уравнений: качественной теории и теории устойчивости. Более полно эти вопросы мы рассмотрим позже. Далее мы продолжим изучение классов дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах.

2.3. Однородное уравнение первого порядка

♦ Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени n* относительно своих аргументов x и y, если для любого значения $\lambda > 0$ (кроме, может быть, $\lambda = 0$) имеет место тождество
$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$
Например,

1) $f(x,y) = x^3 + 3x^2y$ — однородная функция 3-го порядка;

2) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}$ — однородная функция 1-го порядка;

3) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+2y}$ — однородная функция нулевого порядка;

4) $f(x,y) = x\sin\dfrac{x}{y} + x^2$ — функция неоднородная, так как условие не выполняется.

Однородные функции, как следует из определения, обладают следующими свойствами:

1) сумма однородных функций одинакового порядка есть однородная функция того же порядка;
2) произведение однородных функций есть однородная функция, порядок которой равен сумме порядков сомножителей;
3) частное однородных функций есть однородная функция, порядок которой равен разности порядков делимого и делителя.

♦ Дифференциальное уравнение $y' = f(x,y)$ называется *однородным*, если его правая часть $f(x,y)$ есть однородная функция нулевого порядка относительно своих аргументов.

Однородным будет всякое уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.28}$$

где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — однородные функции одного порядка.

Покажем, что интегрирование однородного уравнения

$$y' = f(x,y) \tag{2.29}$$

с помощью специально выбранной подстановки сводится к интегрированию уравнения с разделяющимися переменными.

Действительно, так как $f(x,y)$ — однородная функция нулевого порядка, то для любого λ

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)\lambda^0 = f(x,y).$$

Положив $\lambda = 1/x$, получим

$$f(x,y) = f(1, y/x).$$

Это означает, что правая часть уравнения (2.29) фактически зависит от одного аргумента x/y:

$$f(x,y) = \varphi(x/y),$$

т.е. уравнение (2.29) можно записать в виде

$$y' = \varphi(y/x) \tag{2.30}$$

(здесь $x = 0$ не рассматривается). Введя новую неизвестную функцию u с помощью подстановки

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{или} \quad y = ux,$$

получим вместо уравнения (2.30) уравнение

$$u'x + u = \varphi(u)$$

или

$$u' = \frac{\varphi(u) - u}{x}. \tag{2.31}$$

Это уравнение – уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u. Предположим, что функция $\varphi(u)$ непрерывна на интервале $a < u < b$ и

$$\varphi(u) - u \neq 0.$$

Разделив переменные и проинтегрировав, найдём общие интегралы этого уравнения

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 2.13. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x}\Big(\ln\frac{y}{x} + 1\Big).$$

Решение. Функция $f(x, y)$ определена в области

$$\{x > 0, y > 0\}, \quad \{x < 0, y < 0\}$$

и является однородной. Положив $y = ux$, откуда $y' = u'x+u$, получим уравнение

$$u'x + u = u(\ln u + 1).$$

Отсюда $u'x = u \ln u$ или

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}, \quad \frac{d(\ln u)}{\ln u} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав, найдём

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

или

$$\ln u = Cx.$$

Отсюда

$$u = e^{Cx}.$$

Вернувшись к исходным переменным, запишем

$$\frac{y}{x} = e^{Cx}.$$

Тогда общее решение запишется в виде

$$y = xe^{Cx}. \tag{2.32}$$

При разделении переменных потеряно решение $u = 1$, т.е. $y = x$. Но его можно получить из (2.32), положив $C = 0$. Следовательно, решение (2.32) есть общее решение данного уравнения при любом C в области $\{x > 0, y > 0\}$, $\{x < 0, y < 0\}$.

Пример 2.14. Найти частное решение уравнения

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}dx$$

при начальном условии $y|_{x=3} = 4$.

Решение. Запишем уравнение в форме

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}.$$

Положим $y/x = u$, тогда $y' = u'x + u$ и уравнение преобразуется к виду

$$u'x + u = u + \sqrt{1 + u^2}$$

или
$$u'x = \sqrt{1+u^2}.$$
Разделив переменные и проинтегрировав, найдём
$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} + \ln C$$
и
$$\ln|u + \sqrt{1+u^2}| = \ln|x| + \ln C$$
или
$$u + \sqrt{1+u^2} = xC.$$
Возвратившись к исходным переменным, получим
$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} = xC$$
или
$$y + \sqrt{x^2+y^2} = x^2C.$$
Из начального условия найдём $C = 1$ и запишем частное решение исходного уравнения
$$\sqrt{x^2+y^2} = x^2 - y \quad \text{или} \quad y = \frac{x^2-1}{2}.$$

$\Diamond$ Уравнение вида
$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\Big) \tag{2.33}$$
преобразуется в однородное путем переноса начала координат в точку $M(x_1, y_1)$ — точку пересечения прямых $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ и $a_2x+b_2y+c_2 = 0$.

Действительно, свободные члены в уравнениях этих прямых в новых координатах $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$ будут равны нулю (проверить самостоятельно); коэффициенты при текущих координатах остаются неизменными, а
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX},$$
и уравнение преобразуется к виду
$$\frac{dY}{dX} = f\Big(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\Big)$$
или
$$\frac{dY}{dX} = f\Big(\frac{a_1+b_1Y/X}{a_2+b_2Y/X}\Big) = \varphi\Big(\frac{Y}{X}\Big).$$

Если прямые параллельны, т.е.
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k,$$
то уравнение переходит в уравнение (2.7):
$$\frac{dy}{dx} = f\Big(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y+c_1)+c_2-kc_1}\Big) = F(a_1x+b_1y+c_1).$$

Пример 2.15. Найти общее решение уравнения
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}.$$

Решение. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

и получим $x_1 = 1$, $y_1 = 2$. Положив $x = X + 1$, $y = Y + 2$, запишем

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

Замена переменных $Y = uX$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{1 - u}{1 + u}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{(1 + u)du}{1 - 2u - u^2} = \frac{dX}{X}.$$

Заметим, что

$$(1 + u)du = d\Big(u + \frac{1}{2}u^2\Big) = -\frac{1}{2}d(1 - 2u - u^2).$$

После интегрирования получим

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - 2u - u^2| = \ln|X| - \frac{1}{2}\ln C,$$

т.е.

$$1 - 2u - u^2 = \frac{C}{X^2}$$

или

$$X^2 - 2XY - Y^2 = C.$$

Вернувшись к исходным переменным, запишем

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C.$$

♦ Уравнение $y' = f(x, y)$ называется *обобщённо-однородным*, если существует такое число α, что после замены $y = z^\alpha$ оно становится однородным, т.е. его можно записать в виде (2.29):

$$z' = f(x, z), \tag{2.34}$$

где $f(x, z)$ — однородная функция нулевого порядка.

◊ Если уравнение (2.28) является обобщённо-однородным и число α найдено, то на практике удобнее не сводить его к однородному заменой $y = z^\alpha$, чтобы далее привести его к уравнению с разделяющимися переменными, а, объединив эти две операции, сразу свести его к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$y = x^\alpha u(x) \tag{2.35}$$

где $u(x)$ — новая неизвестная функция.

Проиллюстрируем это примерами.

Пример 2.16. Решить уравнение

$$x^3(y' - x) = y^2.$$

Решение. Записав это уравнение в виде

$$y' = \frac{y^2 + x^4}{x^3}, \tag{2.36}$$

убеждаемся, что оно не является однородным. Сделаем замену

$$y(x) = z^\alpha(x) \tag{2.37}$$

и проверим, станет ли оно обобщённо-однородным при каком-нибудь α. Подставим (2.37) в (2.36):

$$\alpha z^{\alpha-1} z' = \frac{z^{2\alpha} + x^4}{x^3},$$

т.е. получим

$$z' = \frac{z^{2\alpha} + x^4}{\alpha x^3 z^{\alpha-1}} = f(x, z).$$

Чтобы функция $f(x, z)$ была однородной нулевого порядка, необходимо выполнение двух условий:

1) $2\alpha = 4$ для числителя;

2) $3 + \alpha - 1 = 4$ для знаменателя.

Поскольку оба уравнения имеют одно решение $\alpha = 2$, то число α существует. Это означает, что уравнение (2.36) является обобщённо-однородным с числом $\alpha = 2$. Далее рассмотрим два способа решения.

1 способ. Сведение к однородному уравнению

Сделаем замену

$$y(x) = z^2(x), \qquad y'(x) = 2zz'(x). \tag{2.38}$$

Подставим (2.38) в (2.36) или $\alpha = 2$ в $f(x, z)$:

$$z' = \frac{z^4 + x^4}{2x^3 z} = \frac{1}{2}\Big[\Big(\frac{z}{x}\Big)^3 + \Big(\frac{x}{z}\Big)\Big].$$

Это однородное уравнение, которое стандартной заменой

$$z = xu(x) \tag{2.39}$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$(u^2 - 1)^2 = 2uxu'.$$

Разделив переменные:

$$\frac{2u\,du}{(u^2-1)^2} = \frac{dx}{x}$$

и проинтегрировав, получим

$$\ln|x| + \frac{1}{u^2 - 1} = C.$$

Возвратившись от переменной u к переменной z, согласно (2.39), найдём

$$\ln|x| + \frac{1}{(z/x)^2 - 1} = C.$$

Далее, возвратившись от переменной z к переменной y согласно (2.38), получим решение исходного уравнения

$$\ln|x| + \frac{x^2}{y - x^2} = C. \tag{2.40}$$

Формула (2.40) даёт решение для $y > 0$, поскольку $y = z^2$. Нетрудно установить, что и для $y = -z^2 \leqslant 0$ общее решение определяется этой же формулой. Решение $y = x^2$ входит в общее решение при $C = \infty$.

2 способ. Сведение к уравнению с разделяющимися переменными

Если известно, что уравнение (2.36) является обобщённо-однородным с $\alpha = 2$, то в этом уравнении достаточно провести замену

$$y(x) = x^2 u(x), \tag{2.41}$$

чтобы свести его к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, подставив (2.41) в (2.36), получим

$$2xu + x^2 u' = \frac{x^4 u^2 + x^4}{x^3}$$

или

$$xu' = (u-1)^2.$$

Разделив переменные:

$$\frac{du}{(u-1)^2} = \frac{dx}{x}$$

и проинтегрировав, имеем

$$\ln|x| + \frac{1}{u-1} = C.$$

Возвратившись, согласно (2.41), от u к y, найдём общее решение

$$\ln|x| + \frac{x^2}{y - x^2} = C,$$

совпадающее с (2.40), найденным первым способом.

Пример 2.17. Решить уравнение

$$2x^2 y' = y^3 + xy.$$

Решение. Записав это уравнение в виде

$$y' = \frac{y^3 + xy}{2x^2}, \tag{2.42}$$

убеждаемся, что оно не является однородным. Сделаем замену

$$y = z^\alpha$$

и проверим, станет ли оно обобщённо-однородным при каком-нибудь α. Подставим $y = z^\alpha$ в (2.42):

$$\alpha z^{\alpha-1} z' = \frac{z^{3\alpha} + xz^\alpha}{2x^2},$$

т.е.

$$z' = \frac{z^{3\alpha} + xz^\alpha}{2\alpha x^2 z^{\alpha-1}} = f(x, z).$$

Функция $f(x, z)$ будет однородной при выполнении двух условий:

1) $3\alpha = \alpha + 1$ для числителя;

2) $3\alpha = 2 + \alpha - 1$ для знаменателя.

Поскольку оба уравнения имеют один корень $\alpha = 1/2$, то число α существует и уравнение (2.42) является обобщённо-однородным с $\alpha = 1/2$.

Заменой

$$y(x) = x^{1/2} u(x) = \sqrt{x}\, u(x) \tag{2.43}$$

уравнение (2.42) сразу сводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}u + \sqrt{x}u' = \frac{x\sqrt{x}u^3 + x\sqrt{x}u}{2x^2}$$

или

$$\sqrt{x}u' = \frac{u^3}{2\sqrt{x}}.$$

Разделив переменные:

$$\frac{2du}{u^3} = \frac{dx}{x}$$

и проинтегрировав, получим

$$\ln|x| + \frac{1}{u^2} = C.$$

Возвратившись, согласно (2.43), от u к y, найдём общее решение

$$\ln|x| + \frac{x}{y^2} = C. \tag{2.44}$$

Решение $y = 0$ входит в общее решение (2.44) при $C = \infty$.

Отметим, что здесь и некоторых других примерах «потерянные» решения мы включали в общее решение при неограниченных произвольных постоянных, т.е. при $C = \pm\infty$. Подчеркнем, что это утверждение можно понимать в следующем смысле: перепишем уравнение (2.44) в виде

$$C_1(x + y^2 \ln|x|) = y^2,$$

где новая произвольная постоянная $C_1 = 1/C$, и, положив в последнем общем решении $C_1 = 0$, получим решение $y = 0$.

3. Линейные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним

♦ Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно линейно (т.е. первой степени) относительно искомой функции y и её производной y'.

Общий вид линейного уравнения первого порядка:

$$y' + P(x)y = Q(x). \tag{3.1}$$

Если правая часть уравнения $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (3.1) называется линейным однородным, в противном случае оно называется неоднородным.

Будем предполагать, что функции $P(x)$ и $Q(x)$ определены и непрерывны на интервале $]a, b[$ (причем a и b могут принимать значения $a = -\infty$, $b = \infty$). Тогда условия теоремы Коши 1.1 будут выполнены, а функция

$$\frac{\partial}{\partial y}[Q(x) - P(x)y] = P(x)$$

ограничена по модулю. В этом предположении решение задачи Коши для линейного уравнения (3.1) с начальным условием

$$y(x)\big|_{x=x_0} = y_0$$

будет единственным. Геометрически это значит, что через каждую точку (x_0, y_0) полосы $a < x < b$, $|y| < \infty$ будет проходить только одна интегральная кривая, определённая на всем интервале $]a, b[$. Из этого следует, что линейное уравнение не может иметь особых решений. Любое решение линейного уравнения будет частным.

Очевидно, что однородное линейное уравнение

$$y' + P(x)y = 0 \tag{3.2}$$

является уравнением с разделяющимися переменными и легко интегрируется в квадратурах:

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx}, \tag{3.3}$$

где C — произвольная постоянная. Однородное уравнение всегда допускает тривиальное решение $y(x) = 0$.

Найдём теперь общее решение неоднородного уравнения. Существуют различные методы решения этого уравнения, мы начнем с метода Бернулли.

Метод Бернулли

Для интегрирования уравнения (3.1) применим метод Бернулли, положив

$$y = uv,$$

где u и v — неизвестные пока функции. Тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение примет вид

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

или

$$u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x). \tag{3.4}$$

Уравнение (3.1) содержит одну неизвестную функцию y, а уравнение (3.4) — две неизвестных функции u и v. Поэтому одну из них можно выбрать произвольно. Например, при $v = 1$ из (3.4) получим (3.1). Естественно выбрать одну из функций таким образом, чтобы уравнение (3.4) максимально упростилось. Выберем функцию v так, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль:

$$v' + P(x)v = 0. \tag{3.5}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Из него находим функцию v:

$$\frac{dv}{v} = -P(x)dx,$$

$$\ln|v| = -\int P(x)dx$$

или

$$v = \exp\Big[-\int P(x)dx\Big]. \tag{3.6}$$

Здесь не введена произвольная постоянная, так как достаточно какого-либо частного решения уравнения для v, чтобы уравнение (3.4) упростилось.

Итак, функция v подобрана так, что уравнение (3.4) приняло вид

$$u'v = Q(x). \tag{3.7}$$

Подставив выражение для v, запишем

$$u' \exp\Big[-\int P(x)dx\Big] = Q(x).$$

Тогда

$$u' = Q(x)\exp\Big[\int P(x)dx\Big].$$

Проинтегрировав, найдём

$$u = \int Q(x) \exp\left[\int P(x)dx\right] + C, \tag{3.8}$$

а так как $y = uv$, то после подстановки сюда выражений для u и v из формул (3.6) и (3.8) для линейного уравнения первого порядка получим

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]e^{-\int P(x)dx}. \tag{3.9}$$

Следовательно, подстановка $y = uv$ позволяет свести задачу интегрирования одного линейного уравнения (3.1) к отысканию решений двух уравнений с разделяющимися переменными (3.5) и (3.7).

Пример 3.1. Найти частное решение уравнения

$$xy' + y = x + 1$$

при $y|_{x=2} = 3$.

Решение. *1-й способ.* Положим $y = uv$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение примет вид

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}(uv) = \frac{1+x}{x}$$

или

$$u'v + u\Big[v' + \frac{v}{x}\Big] = \frac{1+x}{x}.$$

Подберём v так, чтобы

$$v' + \frac{v}{x} = 0, \qquad v' = -\frac{v}{x}.$$

Отсюда

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав, найдём

$$\ln v = \ln\frac{1}{x}$$

или

$$v = \frac{1}{x}.$$

Тогда уравнение $u'v = (1+x)/x$ примет вид

$$u'\frac{1}{x} = \frac{1+x}{x}$$

или

$$u' = 1 + x.$$

Проинтегрировав, найдём

$$u = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Общее решение исходного уравнения запишется как

$$y = \Big[\frac{x^2}{2} + x + C\Big]\frac{1}{x}.$$

Найдём частное решение, используя начальное условие $y|_{x=2} = 3$, для чего в общее решение подставим $x = 2$, $y = 3$ и вычислим C:

$$3 = \Big[\frac{4}{2} + 2 + C\Big]\frac{1}{2}.$$

Отсюда $C = 2$, и функция

$$y = \left[\frac{x^2}{2} + x + 2\right]\frac{1}{x}$$

есть частное решение исходного уравнения.

2-й способ. Решение исходного уравнения можно получить, воспользовавшись непосредственно формулой (3.9). Запишем это уравнение в виде

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1+x}{x}.$$

Функции $P(x) = 1/x$ и $Q(x) = (1+x)/x$ определены и непрерывны на интервале $]0, \infty[$, и, следовательно, при $x_0 = 3$ задача Коши имеет единственное решение.

Метод Лагранжа

Формула (3.9), по сути дела, полностью исчерпывает задачу решения линейного уравнения.

Несмотря на это, рассмотрим решение (3.9) более подробно, изучив его структуру. Эти результаты будут использованы для построения решения линейных уравнений произвольных порядков.

Итак, функцию (3.9) можно представить в виде суммы

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x), \tag{3.10}$$

где

$$\bar{y}(x) = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{3.11}$$

— общее решение однородного уравнения (3.2), а функция

$$y^*(x) = e^{-\int P(x)dx} \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \tag{3.12}$$

— частное решение неоднородного уравнения (3.1).

Если общее решение (3.11) однородного уравнения известно, функцию $y^*(x)$ (3.12) можно получить методом вариации произвольной постоянной, или, как его ещё называют, методом Лагранжа.

Будем искать решение $y^*(x)$ в виде (3.11):

$$y^* = C(x)e^{-\int P(x)dx}, \tag{3.13}$$

заменив произвольную постоянную C некоторой непрерывно дифференцируемой функцией $C(x)$. Чтобы её определить, подставим (3.13) в уравнение (3.1). Получим

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

или

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Отсюда

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1. \tag{3.14}$$

Выбрав для удобства произвольную постоянную $C_1 = 0$ и подставив (3.14) в (3.13), получим частное решение (3.12) неоднородного уравнения (3.1).

Если для записи неопределённого интеграла

$$\int P(x)dx$$

воспользоваться формой

$$\int P(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau,$$

то общее решение (3.9) можно представить в виде

$$y(x) = \left(C_1 + \int\limits_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} P(\tau)d\tau} dt\right)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(s)ds}. \tag{3.15}$$

Такая форма удобна тем, что если равенство $y(x_0) = y_0$ рассматривать как начальное условие линейного уравнения, то из (3.15) сразу найдём $C_1 = y_0$.

Таким образом, функция

$$y(x) = \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} Q(t)e^{\int\limits_{x_0}^{t} P(\tau)d\tau} dt\right)e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(s)ds} \tag{3.16}$$

является решением задачи Коши, если $y(x_0) = y_0$ — начальное условие, и попрежнему является общим решением, если x_0, y_0 — произвольные постоянные.

♦ Функция (3.16) называется *общим решением линейного уравнения* (3.1) *в форме Коши.*

Метод Коши

Очевидно, что формула (3.16) неудобна для практического использования. Однако если разбить её на составляющие

$$y(x) = [y_0 + q(x)]\bar{y}_{x_0}(x), \tag{3.17}$$

где

$$\bar{y}_{x_0}(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(\tau)d\tau} \tag{3.18}$$

и

$$q(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{Q(t)}{\bar{y}_{x_0}(t)}dt, \tag{3.19}$$

то в таком виде она более удобна для практического применения. Функция $y_{x_0}(x)$ есть решение однородного уравнения с начальным условием $y_{x_0}(x_0) = 1$, тогда как функция $q(x)y_{x_0}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения с нулевым начальным условием: $q(x_0)y_{x_0}(x_0) = 0$.

♦ Функция $y_{x_0}(x)$ (3.18) называется *решением однородного уравнения, нормированным в точке* x_0.

Построение решения по формуле (3.17) с помощью нормированного решения $y_{x_0}(x)$ иногда называют методом Коши. Достоинство этого метода состоит в том, что он позволяет опустить часть промежуточных выкладок. Записав по формуле (3.18) решение $y_{x_0}(x)$ и вычислив $q(x)$ по формуле (3.19), получим по необходимости частное или общее решение линейного уравнения (3.9).

Пример 3.2. Решить задачу Коши из примера 3.1 методом Коши.

Решение. Имеем задачу Коши

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{x+1}{x}, \quad y(2) = 3.$$

Найдём нормированное решение:

$$\bar{y}_2(x) = \exp\Big[-\int\limits_2^x \frac{1}{\tau}d\tau\Big] == e^{-\ln\tau|_2^x} = \frac{2}{x}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\bar{y}_2(x)} = \frac{x}{2},$$

то

$$q(x) = \int\limits_2^x \Big(\frac{t+1}{t}\Big)\frac{t}{2}dt = \frac{1}{2}\Big(\frac{t^2}{2} + t\Big)\Big|_2^x = \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{2} + x - 4\Big),$$

и сразу по формуле (3.17) найдём решение задачи Коши:

$$y(x) = \Big[3 + \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{2} + x - 4\Big)\Big]\frac{2}{x} = \frac{1}{x}\Big(\frac{x^2}{2} + x + 2\Big),$$

совпадающее с найденным в примере 3.1.

В заключение отметим, что решение (3.17) с помощью функции Коши

$$K(x,t) = \frac{\bar{y}_{x_0}(x)}{\bar{y}_{x_0}(t)} \tag{3.20}$$

можно записать в виде

$$y(x) = y_0\bar{y}_{x_0}(x) + \int\limits_{x_0}^x K(x,t)Q(t)dt. \tag{3.21}$$

Пример 3.3. Решить задачу Коши

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}, \quad y(0) = 3.$$

Решение. Функции $P(x) = 2x$ и $Q(x) = xe^{-x^2}$ определены и непрерывны на всем промежутке $]-\infty,\infty[$. Найдём нормированное в точке $x = 0$ решение однородного уравнения:

$$\bar{y}_0(x) = e^{-\int\limits_0^x 2\tau\, d\tau} = e^{-\tau^2|_0^x} = e^{-x^2}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\bar{y}_0} = e^{x^2},$$

то функция Коши (3.20) имеет вид

$$K(x,t) = \frac{\bar{y}_0(x)}{\bar{y}_0(t)} = e^{-x^2+t^2}.$$

С учётом этого, согласно (3.21), функция

$$y(x) = 3e^{-x^2} + \int\limits_0^x e^{-x^2+t^2}te^{-t^2}dt = 3e^{-x^2} + e^{-x^2}\int\limits_0^x t\,dt = \Big(3 + \frac{x^2}{2}\Big)e^{-x^2}$$

является решением исходной задачи Коши.

$\Diamond$ Данный пример иллюстрирует эффективность использования функции Коши. Сама формула (3.21) определяет структуру решения линейных уравнений не только первого, но и высших порядков, в чем мы убедимся ниже. Более того, формула (3.21) остается справедливой для нормальных систем дифференциальных уравнений, если скалярные функции $y(x)$, $Q(x)$ заменить векторными функциями $\vec{y}(x)$, $\vec{Q}(x)$, а нормированное решение $y_{x_0}(x)$ заменить матрицантом $Y_{x_0}(x)$ однородной системы.

Рассмотрим ещё один пример, существенный для построения решений линейных уравнений высших порядков с постоянными коэффициентами.

Пример 3.4. Решить уравнение

$$y' + \lambda y = Q(x), \tag{3.22}$$

Решение. Среди линейных уравнений это выделяется тем, что $P(x) = \lambda$ — постоянная величина. Соответствующие уравнения высших порядков называются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами, их решения, как увидим далее, являются ни чем иным, как обобщением решения уравнений (3.22), которое мы сейчас и получим.

Однородное уравнение

$$\bar{y}' + \lambda\bar{y} = 0,$$

вообще говоря, является автономным уравнением, решение которого полностью исследовано ранее, вплоть до построения его фазового портрета. Нормированное в точке x_0 решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = e^{-\lambda(x-x_0)}. \tag{3.23}$$

(Заметим, что если решение $\bar{y}(x)$ искать в виде $y = e^{kx}$, то число k найдётся из алгебраического уравнения $k + \lambda = 0$.)

Поскольку

$$\bar{y}^{-1}(x) = e^{\lambda(x-x_0)},$$

то функция Коши имеет вид

$$K(x,t) = e^{-\lambda(x-t)}$$

и общее решение уравнения (3.22) в форме Коши запишется как

$$y(x) = y_0 e^{-\lambda(x-x_0)} + \int\limits_{x_0}^{x} Q(t)e^{-\lambda(x-t)}dt. \tag{3.24}$$

Существует один класс функций $Q(x)$, для которых вычисление интеграла в (3.24) существенно упрощается. Если

$$Q(x) = Q_n(x)e^{-\lambda x},$$

где Q_n — полином степени n (множитель $e^{\lambda x_0}$ внесен в $Q_n(x)$), то

$$\int\limits_{x_0}^{x} Q(t)e^{-\lambda(x-t)}dt = \int\limits_{x_0}^{x} Q_n(t)e^{-\lambda t}e^{-\lambda(x-t)}dt = e^{-\lambda x}\int\limits_{x_0}^{x} Q_n(t)dt.$$

Интегрирование полинома $Q_n(x)$ даёт полином, порядок которого на единицу больше, т.е.

$$\int\limits_{x_0}^{x} Q_n(t)dt = \widetilde{Q}_{n+1}(x).$$

Вместо вычисления этого интеграла можно воспользоваться так называемым методом неопределённых коэффициентов. Будем второе слагаемое в (3.24) искать в виде

$$xT_n(x)e^{-\lambda x}, \tag{3.25}$$

где T_n — полином с неизвестными коэффициентами ($xT_n(x)$ — полином $(n+1)$-го порядка).

Подставив (3.25) в исходное уравнение (3.22), получим

$$T_n e^{-\lambda x} + xT_n' e^{-\lambda x} + (-\lambda)xT_n e^{-\lambda x} + \lambda x T_n e^{-\lambda x} = Q_n e^{-\lambda x}$$

или

$$T_n + xT_n' = Q_n(x).$$

Приравняв в этом уравнении коэффициенты при одинаковых степенях x, найдём коэффициенты полинома $T_n(x)$.

Очевидно, что если функция $Q(x)$ не имеет множителя $e^{-\lambda x}$, метод неопределённых коэффициентов неприменим.

$\Diamond$ К линейным приводятся также уравнения

$$\text{I.} \quad f'(y)y'(x) + P(x)f(y) = Q(x); \tag{3.26}$$

$$\text{II.} \quad y'(x) + P(x) = Q(x)e^{ny}; \tag{3.27}$$

$$\text{III.} \quad y'(x) + P(x)y(x) = Q(x)y^n(x), \quad n \neq 0,\ n \neq 1; \tag{3.28}$$

$$\text{IV.} \quad y'(x) + P(x)y(x) = Q(x) + R(x)y^2(x); \tag{3.29}$$

$$\text{V.} \quad M(x,y)dx + N(x,y)dy + R(x,y)(x\,dy - y\,dx) = 0. \tag{3.30}$$

Решение первых двух уравнений находится сведением к линейному уравнению, тогда как остальные три можно свести либо к линейным, либо непосредственно к уравнениям с разделяющимися переменными. В силу этого последние три типа уравнений рассматриваются как самостоятельные.

$\blacklozenge$ Уравнение (3.28), где $n = \mathrm{const}$, называется *уравнением Бернулли.*

$\Diamond$ При $n = 0$ уравнение Бернулли становится линейным, при $n = 1$ оно является уравнением с разделяющимися переменными.

$\blacklozenge$ Уравнение (3.29) называется *уравнением Риккати.*

$\blacklozenge$ Уравнение (3.30), если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ — однородные функции степени m, а $R(x,y)$ — однородная функция степени n, называется *уравнением Дарбу* (при $n = m = 1$ оно уже однородно).

Рассмотрим последовательно уравнения (3.26)–(3.30).

I. Уравнения первого типа

Эти уравнения заменой

$$f(y) = z(x) \tag{3.31}$$

с учётом того, что

$$f'(y)y'(x) = z'(x),$$

сводятся к линейным уравнениям для функции $z(x)$:

$$z'(x) + P(x)z(x) = Q(x).$$

Пример 3.5. Решить уравнение

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}y' + \sqrt{1+y^2} = 1 + x^2.$$

Решение. Это уравнение относится к I типу (3.26), поэтому заменой (3.31):

$$\sqrt{1+y^2} = z(x), \quad z'(x) = \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}}$$

оно сводится к линейному

$$z' + z = 1 + x^2$$

с общим решением

$$z(x) = x^2 - 2x + 3 + Ce^{-x}.$$

Возвратившись к исходной функции $y(x)$, найдём общий интеграл уравнения:

$$1 + y^2 = (x^2 - 2x + 3 + Ce^{-x})^2.$$

II. Уравнения второго типа

Предположим, что в уравнении (3.27) $n \neq 0$, так как в противном случае оно является линейным.

Это уравнение заменой

$$e^{-ny} = z(x) \tag{3.32}$$

с учётом того, что

$$-ny'(x)e^{-ny} = z'(x),$$

сводится к линейному уравнению для функции $z(x)$:

$$-\frac{z'(x)}{n} + P(x)z(x) = Q(x), \quad n \neq 0.$$

Пример 3.6. Решить уравнение

$$y' + \frac{1}{3}(1 + e^{x+3y}) = 0.$$

Решение. Переписав уравнение в виде

$$y' + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^x e^{3y} = 0,$$

заметим, что оно относится ко II типу (3.27) и заменой (3.32):

$$e^{-3y} = z(x), \quad z'(x) = -3e^{-3y}y'$$

сводится к линейному для функции $z(x)$:

$$z' - z = e^x. \tag{3.33}$$

Общее решение уравнения (3.33) имеет вид

$$z(x) = (x + C)e^x.$$

Возвратившись к переменной $y(x)$, найдём общий интеграл исходного уравнения

$$y = -\frac{1}{3}\ln(x + C) - \frac{x}{3}.$$

III. Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли сводится к линейному заменой переменных

$$z = \frac{1}{y^{n-1}}, \qquad (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

или

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + P(x)z = Q(x).$$

$\Diamond$ Следует отметить, что уравнение Бернулли можно решать непосредственно подстановкой $y = uv$, как и линейное уравнение.

$\Diamond$ При $n > 0$ уравнение Бернулли имеет решение $y = 0$. В силу теоремы Коши это решение будет частным, если $n > 1$, и особым, если $0 < n < 1$.

Пример 3.7. Решить уравнение

$$y' + \frac{y}{1+x} = -y^2. \tag{3.34}$$

Решение. Уравнение (3.34) является уравнением Бернулли с $n = 2$.

1-й способ. Сведение к линейному

Поскольку $n = 2$, то, положив

$$z = \frac{1}{y}, \quad z' = -\frac{y'}{y^2},$$

для определения функции z получим линейное уравнение

$$z' - \frac{z}{1+x} = 1$$

с общим решением

$$z(x) = (x+1)(\ln|1+x| + C).$$

Возвратившись к переменной $y(x)$, найдём общее решение исходного уравнения — уравнения Бернулли

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)(\ln|1+x| + C)}. \tag{3.35}$$

2-й способ. Метод Бернулли

Функцию $y(x)$, как и для линейного уравнения, ищем в виде

$$y(x) = u(x)v(x). \tag{3.36}$$

Подстановка (3.36) в исходное уравнение даёт

$$u'v + uv' + \frac{uv}{1+x} = -u^2v^2. \tag{3.37}$$

Наложив на функцию $u(x)$ условие

$$u' + \frac{u}{1+x} = 0, \tag{3.38}$$

получим для функции $v(x)$ уравнение

$$v' = -uv^2. \tag{3.39}$$

Разделив в (3.38) переменные, найдём частное решение

$$u(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Подставив его в уравнение (3.39), получим уравнение с разделяющимися переменными для функции $v(x)$:

$$v' = -\frac{v^2}{1+x}.$$

Разделив переменные:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{dx}{1+x}$$

и проинтегрировав:

$$\frac{1}{v} = \ln|1+x| + C,$$

получим

$$v = \frac{1}{\ln|1+x| + C}.$$

Зная функции

$$u(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{и} \quad v = \frac{1}{\ln|1+x| + C},$$

найдём искомое решение

$$y(x) = u(x)v(x) = \frac{1}{(1+x)(\ln|1+x| + C)},$$

совпадающее с (3.35).

Решение $y(x) = 0$ является частным при $C = \infty$.

Пример 3.8. Решить уравнение

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}.$$

Решение. Это уравнение Бернулли с $n = 1/2$. Решим его методом Бернулли. Положим

$$y(x) = u(x)v(x),$$

тогда

$$u'v + uv' + \frac{x}{1-x^2}uv = x\sqrt{uv}. \tag{3.40}$$

Наложив на функцию $u(x)$ условие

$$u' + \frac{x}{1-x^2}u = 0, \tag{3.41}$$

получим уравнение для функции $v(x)$:

$$v' = x\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}. \tag{3.42}$$

Разделив в (3.41) переменные, найдём частное решение

$$u = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Подставив его в уравнение (3.42), получим уравнение с разделяющимися переменными для функции $v(x)$:

$$v' = \frac{x\sqrt{v}}{\sqrt[4]{x^2-1}}.$$

Разделив переменные:

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-1}}$$

и проинтегрировав:

$$2\sqrt{v} = \frac{2}{3}(x^2-1)^{3/4} + 2C,$$

получим

$$v = \Big[C + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/4}\Big]^2.$$

Зная функции

$$u = \sqrt{x^2-1} \quad \text{и} \quad v = \Big[C + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/4}\Big]^2,$$

найдём искомое решение

$$y = uv = \sqrt{x^2-1}\Big[C + \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/4}\Big]^2$$

или

$$y(x) = \Big[C\sqrt[4]{x^2-1} + \frac{1}{3}(x^2-1)\Big]^2.$$

Решение $y(x) = 0$ — особое, так как $n = 1/2$, $0 < 1/2 < 1$.

IV. Уравнение Риккати

Уравнение Риккати

$$y'(x) + P(x)y(x) = Q(x) + R(x)y^2(x),$$

как и линейное, не имеет особых решений. Все частные решения можно получить из общего. Особенностью этого уравнения является то, что оно интегрируется в квадратурах в исключительных случаях.

1. Если известно одно его частное решение y_1, то замена

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}, \tag{3.43}$$

где $z(x)$ — новая неизвестная функция, приводит уравнение Риккати к линейному.

Пример 3.9. Решить уравнение

$$y' - 1 = x^2 - y^2.$$

Решение. Это уравнение Риккати. Очевидно, что $y_1(x) = x$ есть его частное решение. Положив, согласно (3.43),

$$y = x + \frac{1}{z}, \quad y' = 1 - \frac{z'}{z^2},$$

получим линейное уравнение

$$z' - 2zx = 1$$

с общим решением

$$z(x) = \Big(C + \int e^{-x^2}dx\Big)e^{x^2}.$$

Возвратившись к переменной $y(x)$, найдём общее решение исходного уравнения

$$y(x) = x + \frac{e^{-x^2}}{C + \int e^{-x^2}dx}.$$

2. Уравнение Риккати вида

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}, \tag{3.44}$$

где A, B, C — постоянные, удовлетворяющие условию $(B+1)^2 > 4AC$, имеет частное решение

$$y_1 = \frac{a}{x}, \quad a = \frac{-(B+1) \pm \sqrt{(B+1)^2 - 4AC}}{2A}, \tag{3.45}$$

и, следовательно, заменой (3.43) сводится к линейному. Кроме того, можно заметить, что уравнение (3.44) является обобщённо-однородным с $\alpha = -1$, поэтому подстановка $y = z/x$ сводит его к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 3.10. Решить уравнение

$$y' = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^{-2}.$$

Решение. Это уравнение Риккати вида (3.44) с $A = 1/2$, $B = 0$ и $C = 1/2$. Согласно (3.45), его частное решение имеет вид

$$y_1 = -\frac{1}{x}, \quad a = \frac{-1 \pm \sqrt{1-1}}{1} = -1.$$

Положив теперь

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{z},$$

придём к линейному уравнению

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{1}{2}$$

с общим решением

$$z(x) = \frac{x}{2}(C - \ln|x|),$$

поэтому

$$y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x(C - \ln|x|)}.$$

3. Уравнение Риккати вида

$$y' = A\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + C \tag{3.46}$$

подстановкой

$$y = \sqrt{x}z(x)$$

приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{Az^2 + C} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

и, следовательно, всегда интегрируется в элементарных функциях.

4. Специальное уравнение Риккати

$$y' = R(x)y^2 + Bx^m, \quad Q(x) = Bx^m. \tag{3.47}$$

Специальное уравнение Риккати интегрируется в квадратурах только тогда, когда

$$m = \frac{4k}{\pm 1 - 2k},$$

где k — целое или $k = \infty$.

V. Уравнение Дарбу

Уравнение Дарбу

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + R(x,y)(x\,dy - y\,dx) = 0$$

посредством замены

$$y(x) = ux(u) \tag{3.48}$$

приводится к уравнению Бернулли, которое уже известным способом сводится к линейному.

Пример 3.11. Решить уравнение

$$y\,dx + x\,dy + y^2(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Решение. Это уравнение Дарбу, поскольку функции $M(x,y) = y$ и $N(x,y) = x$ являются однородными первой степени ($m = 1$), а функция $R(x,y) = y^2$ — однородной второй степени ($n = 2$). Воспользуемся заменой (3.48):

$$ux\,dx + x(u\,dx + x\,du) + u^2x^2[x(u\,dx + x\,du) - ux\,dx] = 0$$

или

$$2u\,dx + x(1 + x^2u^2)du = 0, \quad x = 0.$$

Полученное уравнение есть ни что иное, как уравнение Бернулли для функции $x(u)$:

$$2u\frac{dx}{du} + x = -u^2x^2.$$

Положив $z = 1/x^2$, придём к линейному уравнению

$$uz' - z = u^2$$

с общим решением

$$z = (u + C)u.$$

Возвратившись к переменной $y(x)$, найдём общий интеграл исходного уравнения Дарбу

$$y^2 + Cxy - 1 = 0.$$

Решения $x = 0$, $y = 0$ входят сюда при $C = \infty$.

$\Diamond$ Некоторые уравнения становятся линейными, если в них поменять ролями функцию и аргумент.

Пример 3.12. Решить уравнение

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

Решение. Это уравнение не является линейным относительно переменной y, однако оно линейное относительно x. Поэтому целесообразно считать x функцией y. Так как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy},$$

то уравнение можно записать в виде линейного:

$$x' + x = 2e^y$$

с общим решением

$$x(y) = e^y + Ce^{-y}.$$

Пример 3.13. Решить уравнение

$$(x^2 + y^2 + 2x - 2y)dx + 2(y - 1)dy = 0.$$

Решение. Уравнение не относится ни к одному из типов, рассмотренных выше. Преобразовав его следующим образом:

$$[(x+1)^2+(y-1)^2-2]d(x-1)+d(y-1)^2=0$$

и положив $u=x+1$, $v=(y-1)^2$, придём к линейному уравнению

$$\frac{dv}{du}+v=2-u^2$$

с общим решением

$$v=2u-u^2+Ce^{-u}$$

в переменных u, v и общим интегралом

$$x^2+y^2-2y=Ce^{-x}$$

в переменных x, y.

4. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Может случиться, что левая часть дифференциального уравнения

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{4.1}$$

является полным дифференциалом функции $u(x,y)$:

$$du=M(x,y)dx+N(x,y)dy.$$

Такое уравнение называется уравнением в полных дифференциалах.

В этом случае его можно записать в виде

$$du(x,y)=0,$$

откуда интегрированием получается общий интеграл

$$u(x,y)=C.$$

Как известно из курса математического анализа, функцию $u(x,y)$ можно определить, вычислив криволинейный интеграл от $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ между фиксированной точкой (x_0,y_0) и переменным верхним пределом (x,y) по любому пути в области, где справедливы условия теоремы Грина (см. часть III):

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} M(x,y)dx+N(x,y)dy+C. \tag{4.2}$$

В качестве пути интегрирования удобнее всего выбрать ломаную, составленную из двух отрезков, параллельных осям координат. В этом случае

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} M(t,y_0)dt+\int\limits_{y_0}^{y} N(x,t)dt.$$

Теорема 4.1. *Для того чтобы левая часть уравнения являлась полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$ в односвязной области D, необходимо и достаточно, чтобы в этой области существовали непрерывные частные производные и выполнялось равенство*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Докажем сначала необходимость этого условия. Пусть существует такая функция $u(x, y)$, что

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du.$$

Известно, что полный дифференциал функции $u(x, y)$ есть

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Следовательно,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Найдём смешанные производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Из равенства смешанных производных следует, что

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Итак, необходимость этого условия доказана.

Докажем теперь его достаточность. Пусть дано дифференциальное выражение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Здесь $M(x, y)$ и $N(x, y)$ — непрерывные функции, имеющие непрерывные производные $\partial M/\partial y$ и $\partial N/\partial x$ такие, что

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Покажем, что можно найти такую функцию $u(x, y)$, что

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du,$$

т.е. что справедливы равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Построим функцию

$$u(x, y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(t, y)dt + \varphi(y), \tag{4.4}$$

где y — параметр (считается постоянным); $\varphi(y)$ — произвольная функция от y, а x_0 — абсцисса какой-либо точки $P(x_0, y_0)$ области D. Функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y).$$

Определим функцию $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y).$$

Продифференцировав (4.4) и применив правило дифференцирования интеграла по параметру, найдём

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial M(t,y)}{\partial y} dt + \varphi'(y).$$

Так как

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{\partial N(t,y)}{\partial t} dt + \varphi'(y) = N(t,y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y).$$

Потребовав, чтобы $\partial u/\partial y = N(x,y)$, запишем

$$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y).$$

Отсюда $\varphi'(y) = N(x_0,y)$. Проинтегрировав по y, найдём

$$\varphi(y) = \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C.$$

Следовательно, функция

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} M(t,y)dt + \int\limits_{y_0}^{y} N(x_0,t)dt + C$$

и будет такой, для которой выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

является полным дифференциалом. Таким образом, теорема доказана.

Пример 4.1. Найти общее решение уравнения

$$(3xy^2 - x^2)dx - (1 + 6y^2 - 3x^2y)dy = 0.$$

Решение. Проверим выполнение условия (4.3):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy.$$

Следовательно, условие выполнено, а значит, это уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Найдём его общий интеграл по формуле (4.2), положив для упрощения вычислений $x_0 = y_0 = 0$:

$$\int\limits_0^x (3t \cdot 0 - t^2)dt - \int\limits_0^y (1 - 6t^2 - 3x^2t)dt = C;$$

$$-\frac{t^3}{3}\Big|_0^x - \left(t + 2t^3 - \frac{3}{2}x^2t^2\right)\Big|_0^y = C.$$

Окончательно имеем

$$-\frac{x^3}{3} - y - 2y^3 + \frac{3}{2}x^2y^2 = C.$$

Пример 4.2. Проинтегрировать уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2xy}{3y^2+x^2}.$$

Решение. Запишем уравнение в виде

$$(2xy-1)dx + (3y^2+x^2)dy = 0.$$

Проверим выполнение условия (4.3):

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x; \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x.$$

Следовательно, это уравнение есть уравнение в полных дифференциалах. Найдём его общий интеграл по формуле (4.2), положив $x_0 = y_0 = 0$:

$$\int\limits_0^x (2t\cdot 0 - 1)dt + \int\limits_0^y (3t^2+x^2)dt = C.$$

Проинтегрировав, получим

$$-t\Big|_0^x + (t^3+x^2t)\Big|_0^y = C.$$

Окончательно имеем

$$-x + y^3 + x^2y = C.$$

Если равенство (4.3) для уравнения (4.1) не выполнено, то умножим уравнение (4.1) на функцию $\mu(x,y)$:

$$\mu M\,dx + \mu N\,dx = 0 \tag{4.5}$$

и выберем μ так, чтобы для полученного уравнения (4.5) условие (4.3) выполнялось:

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x}. \tag{4.6}$$

♦ Функция $\mu(x,y)$ в уравнении (4.5), для которой выполняется условие (4.6), называется интегрирующим множителем (для уравнения в полных дифференциалах считаем $\mu = 1$).

Для определения μ из (4.6) получим уравнение в частных производных

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big). \tag{4.7}$$

В общем случае решение таких уравнений сложнее решения исходных. Но облегчающим обстоятельством является то, что требуется найти хоть какое-нибудь решение уравнения (4.7). Будем искать функцию $\mu(x,y)$ в виде

$$\mu = \varphi(\omega(x,y)), \tag{4.8}$$

где $\omega(x,y)$ — функция, выбранная из некоторых соображений, а функция φ подлежит определению.

Подставив (4.8) (4.7), получим

$$M\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y} - N\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x} = \mu\Big[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\Big]$$

или

$$\frac{d\mu(\omega)/d\omega}{\mu(\omega)} = \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M\partial\omega/\partial y - N\partial\omega/\partial x}. \tag{4.9}$$

Если здесь правая часть окажется функцией только от ω, то

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \mu\psi(\omega),$$

и, следовательно, μ будет найдена:

$$\mu = e^{\int \psi(\omega)d\omega}. \tag{4.10}$$

Из условия $\mu M\,dx + \mu N\,dy = du$ получим $M\,dx + N\,dy = du/\mu = 0$. Таким образом, решения определяются равенствами

$$du = 0, \qquad \frac{1}{\mu} = 0.$$

Первое даёт $u(x, y) = C$ — общее решение, а второе $\mu(x, y) = \infty$ — решения, которые могут оказаться особыми.

Приведём без доказательства одно из достаточных условий существования интегрирующего множителя.

Теорема 4.2. *Если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны, имеют непрерывные частные производные, то интегрирующий множитель существует, если $M^2 + N^2 \neq 0$.*

Рассмотрим некоторые частные случаи функции $\omega(x, y)$.

1. $\omega(x, y) = x$

В этом случае

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0,$$

и если

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \psi(x), \tag{4.11}$$

то μ будет найден:

$$\mu = e^{\int \psi(x)dx}. \tag{4.12}$$

Пример 4.3. Решить уравнение

$$(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0.$$

Решение. В этом уравнении $M(x, y) = 1 - x^2y$ и $N(x, y) = x^2y - x^3$. Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -x^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2xy - 3x^2,$$

то условие (4.3) не выполнено. Проверим, не имеет ли оно интегрирующего множителя, зависящего только от x. Для этого, согласно (4.11), вычислим

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2y - x^3} = \frac{2x(x - y)}{x^2(y - x)} = -\frac{2}{x}.$$

Это означает, что $\psi(x)$ существует и $\psi(x) = -2/x$. Отсюда, согласно (4.12), найдём

$$\mu = e^{\int(-2/x)dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Умножив исходное уравнение на $\mu = 1/x^2$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0$$

с общим интегралом

$$-\frac{1}{x} - xy + \frac{y^2}{2} = C.$$

Интегрирующий множитель $\mu\big|_{x=0} = 1/x^2\big|_{x=0} = \infty$. Это означает, что $x = 0$ является решением данного уравнения, но это решение частное, оно содержится в общем при $C = \infty$.

2. $\omega(x, y) = y$

В этом случае

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial y} = 1,$$

и если

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M} = \psi(y), \tag{4.13}$$

то μ будет найден:

$$\mu = e^{\int \psi(y) dy}. \tag{4.14}$$

Пример 4.4. Решить уравнение

$$y^2(x - 3y)dx + (1 - 3xy^2)dy = 0.$$

Решение. В этом уравнении $M(x, y) = y^2x - 3y^3$ и $N(x, y) = 1 - xy^2$. Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2xy - 9y^2, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -3y^2,$$

то условие (4.3) не выполнено. Проверим, имеет ли оно интегрирующий множитель, зависящий только от x. Для этого, согласно (4.11), вычислим

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{2xy - 9y^2 + 3y^2}{1 - 3xy^2} = \frac{2y(x - 3y)}{1 - 3xy^2}.$$

Это выражение не является функцией только переменной x. Это означает, что интегрирующий множитель не может быть функцией только от x.

Теперь проверим, имеет ли оно интегрирующий множитель, зависящий только от y. Для этого, согласно (4.13), вычислим

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{-M} = \frac{2xy - 9y^2 + 3y^2}{-y^2x + 3y^3} = \frac{2y(x - 3y)}{-3y^2(x - 3y)} = -\frac{2}{y}.$$

Это означает, что функция $\psi(y)$ существует и $\psi(y) = -2/y$. Теперь, согласно (4.14), найдём

$$\mu = e^{\int(-2/y)dy} = e^{\ln(1/y^2)} = \frac{1}{y^2}.$$

Умножив исходное уравнение на $\mu = 1/y^2$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$(x - 3y)dx + \Big(\frac{1}{y^2} - 3x\Big)dy = 0$$

с общим интегралом

$$x^2y - 6xy^2 - 2 = Cy.$$

Интегрирующий множитель $\mu\big|_{y=0} = \infty$. Это означает, что $y = 0$ является решением данного уравнения, но это решение частное, оно содержится в общем при $C = \infty$.

3. $\omega = x + y$

В этом случае

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = \frac{\partial\omega}{\partial y} = 1,$$

и если

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N - M} = \psi(x + y), \tag{4.15}$$

то μ будет найден:

$$\mu(x, y) = e^{\int \psi(x+y) d(x+y)}. \tag{4.16}$$

Пример 4.5. Решить уравнение

$$(1 + e^{-x}y)y' + 1 = 0.$$

Решение. В этом уравнении $M(x, y) = 1$ и $N(x, y) = 1 + e^{-x}y$. Так как

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-x}y,$$

то условие (4.3) не выполнено. Если обратиться к формулам (4.11) и (4.13), то можно выяснить, что для заданного уравнения интегрирующий множитель не может быть функцией только от x или только от y. Проверим теперь, может ли интегрирующий множитель быть функцией от $x+y$. Для этого, согласно (4.15), вычислим

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N - M} = \frac{0 + e^{-x}y}{1 + e^{-x}y - 1} = 1.$$

Это означает, что функция $\psi(x + y)$ существует и $\psi(x + y) = 1$. С учётом этого, согласно (4.16), найдём

$$\mu(x, y) = e^{\int 1\cdot d(x+y)} = e^{x+y}.$$

Умножив исходное уравнение на $\mu(x, y) = e^{x+y}$, получим уравнение в полных дифференциалах

$$e^{x+y}dx + (e^{x+y} + ye^{y})dy = 0$$

с общим интегралом

$$e^{x+y} + (y - 1)e^{y} = C.$$

Далее можно рассмотреть $\omega = x - y$, $\omega = xy$ и т.д.

5. Уравнения, не разрешённые относительно производной

До сих пор мы рассматривали дифференциальные уравнения $F(x, y, y') = 0$, разрешённые относительно производной y', т.е. уравнения вида $y' = f(x, y)$.

Рассмотрим теперь случаи, когда уравнение (1.3) разрешено относительно самой функции $y(x)$ или её аргумента x.

Уравнение, не разрешённое относительно производной, имеет вид

$$F(x, y, y') = 0, \qquad p = y', \tag{5.1}$$

где $F(x, y, p)$ — гладкая функция своих аргументов.

Разрешив уравнение (5.1) относительно y', получим в общем случае несколько действительных решений (ветвей)

$$y' = f_i(x, y), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

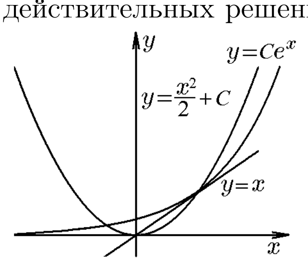


Рис. 13

Если каждое из уравнений $y' = f_i(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности 5.1, то для каждого из них найдётся единственное решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Поэтому для уравнений вида (5.1) через некоторую точку (x_0, y_0) проходит не одна, а несколько интегральных кривых.

Свойство единственности решения уравнения (5.1), удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, обычно понимается в том смысле, что через данную точку (x_0, y_0) по данному направлению проходит не более одной интегральной кривой уравнения $F(x, y, y') = 0$.

Например, для решений уравнения $(dy/dx)^2 - 1 = 0$ свойство единственности всюду выполнено, так как через каждую точку (x_0, y_0) проходят две интегральные кривые, но по различным направлениям. Действительно,

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1, \quad y = x + C \quad \text{и} \quad y = -x + C.$$

Для уравнения $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$ в точках прямой $y = x$ свойство единственности нарушено, так как через точки этой прямой проходят интегральные кривые уравнений $y' = x$ и $y' = y$ по одному и тому же направлению (рис. 13).

Теорема 5.1. *Пусть в замкнутой окрестности точки* (x_0, y_0, y_0') *функция* $F(x, y, y')$ *удовлетворяет условиям:*
1) $F(x, y, y')$ *непрерывна по всем аргументам;*
2) *производная* $\partial F/\partial y'$ *существует и отлична от нуля;*
3) *существует ограниченная по модулю производная:*

$$\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \le N_1.$$

Тогда в некоторой окрестности точки $x = x_0$ *для уравнения*

$$F(x, y, y') = 0 \tag{5.2}$$

существует единственное решение $y = y(x)$*, удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$*, для которого* $y'(x_0) = y_0'$*, где* y_0' *— один из действительных корней уравнения* $F(x_0, y_0, y_0') = 0$.

Доказательство. Согласно теореме о неявной функции, можно утверждать, что первые два условия гарантируют существование единственной непрерывной в окрестности точки (x_0, y_0) функции $y' = f(x, y)$, определяемой уравнением (5.2) и удовлетворяющей условию $y_0' = f(x_0, y_0)$. Остается проверить, будет ли функция $f(x, y)$ удовлетворять условию Липшица или более грубому условию $|\partial f/\partial y| \le N$ в окрестности точки (x_0, y_0), так как тогда можно будет утверждать, что уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{5.3}$$

удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности 1.2 и, следовательно, существует единственное решение уравнения (5.3), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, а вместе с тем существует единственная интегральная кривая уравнения (5.1), проходящая через точку (x_0, t_0) и имеющая в ней угловой коэффициент касательной y_0'.

Согласно теореме о неявной функции, при выполнении всех условий производная $\partial f/\partial y$ существует и может быть вычислена по правилу дифференцирования неявных функций.

Найдя $y' = f(x, y)$ и подставив в $F(x, y, y') = 0$, получим выражение $F(x, y, f(x, y)) = 0$, которое представляет собой тождество по x, y. Продифференцировав его по y, получим

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial y'},$$

откуда в силу условий 2) и 3) следует, что $|\partial f/\partial y| \leqslant N$ в замкнутой окрестности точки (x_0, y_0).

Множество точек (x, y), в которых нарушается единственность решений уравнения (5.1), называется *особым* множеством.

В точках особого множества должно быть нарушено хотя бы одно из условий теоремы 5.1. В прикладных задачах чаще всего нарушается условие $\partial F/\partial y' \neq 0$.

Если условия 1) и 2) выполнены, то в точках особого множества должны одновременно быть справедливыми уравнения

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \tag{5.4}$$

Исключив из этих уравнений y', получим уравнение

$$\Phi(x, y) = 0, \tag{5.5}$$

которому должны удовлетворять точки особого множества.

Уравнение (5.5) определяет кривую, которая называется *p-дискриминантной*, так как уравнения (5.4) чаще записываются в виде $F(x, y, p) = 0$ и $\partial F/\partial p = 0$. Заметим, что точки особого множества могут быть только среди точек кривой $\Phi(x, y) = 0$.

Однако не в каждой точке p-дискриминантной кривой обязательно нарушается единственность решения уравнения (5.1), так как условия теоремы 5.1 достаточны для единственности решения, но не являются необходимыми, и, следовательно, нарушение какого-нибудь условия теоремы не обязательно влечёт за собой нарушение единственности.

Если какая-нибудь ветвь $y = \varphi(x)$ кривой $\Phi(x, y) = 0$ принадлежит особому множеству и в то же время является интегральной кривой, то она называется *особой интегральной кривой*, а функция $y = \varphi(x)$ называется *особым решением*.

Для нахождения особого решения уравнения (5.1) следует:

а) найти p-дискриминантную кривую, определяемую уравнениями

$$F(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = 0;$$

б) путем непосредственной подстановки в уравнение (5.1) выяснить, есть ли среди ветвей p-дискриминантной кривой интегральные кривые;

в) если такие кривые есть, то проверить, нарушена ли в точках этих кривых единственность или нет.

Если единственность нарушена, то такая ветвь p-дискриминантной кривой является особой интегральной кривой.

Пример 5.1. Имеет ли уравнение $y = 2xy' - (y')^2$ особое решение?

Решение. Условия 1) и 3) теоремы существования и единственности выполнены. p-дискриминантная кривая определяется уравнениями $y = 2xp - p^2$, $2x - 2p = 0$, или, исключая p, $y = x^2$. Парабола $y = x^2$ не является интегральной кривой, так как функция $y = x^2$ не удовлетворяет исходному уравнению. Особого решения нет.

♦ *Огибающей семейства кривых*

$$\phi(x, y, C) = 0 \tag{5.6}$$

назовем кривую, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства (5.6) и каждого отрезка которой касается бесконечное множество кривых рассматриваемого семейства.

Огибающая семейства интегральных кривых некоторого уравнения $F(x, y, y') = 0$ всегда будет особой интегральной кривой.

Действительно, в точках огибающей значения x, y и y' совпадают со значениями x, y и y' для интегральной кривой, касающейся огибающей в точке (x, y), и, следовательно, в каждой точке огибающей значения x, y и y' удовлетворяют уравнению $F(x, y, y') = 0$, то есть огибающая является интегральной кривой (см. пример 5.2 и рис. 14). В каждой точке огибающей нарушена единственность, так как через точки огибающей по одному направлению проходят по крайней мере две интегральные кривые: огибающая и касающаяся её в рассматриваемой точке интегральная кривая семейства (5.6). Следовательно, огибающая является особой интегральной кривой.

Пример 5.2. Найти особое решение уравнения

$$x - y = \frac{4}{9}(y')^2 - \frac{8}{27}(y')^3. \tag{5.7}$$

Уравнение (5.7) является уравнением Лагранжа, которые мы рассмотрим подробно в следующем разделе.

Решение. Условия 1) и 3) теоремы существования и единственности выполнены. p-дискриминантная кривая определяется уравнениями

$$x - y = \frac{4}{9}p^2 - \frac{8}{27}p^3, \quad \frac{8}{9}(p - p^2) = 0.$$

Из второго уравнения найдём $p = 0$ или $p = 1$; подставив в первое уравнение, получим

$$y = x \quad \text{или} \quad y = x - \frac{4}{27}.$$

Лишь вторая из этих функций является решением исходного уравнения.

Для того чтобы выяснить, будет ли решение $y = x - 4/27$ особым, надо проинтегрировать уравнение (5.7) и убедиться, что через точки прямой $y = x - 4/27$ проходят другие интегральные кривые, для которых эта прямая является касательной. Проинтегрировав уравнение Лагранжа (5.7), получим

$$(y - C)^2 = (x - C)^3. \tag{5.8}$$

Из уравнения (5.8) и рис. 14 видно, что прямая $y = x - 4/27$ является огибающей семейства полукубических парабол $(y - C)^2 = (x - C)^3$ и, следовательно, в каждой точке прямой $y = x - 4/27$ нарушена единственность — по одному и тому же направлению проходят две интегральные кривые: прямая $y = x - 4/27$ и касающаяся этой прямой в рассматриваемой точке полукубическая парабола.

Итак, особым решением является $y = x - 4/27$.

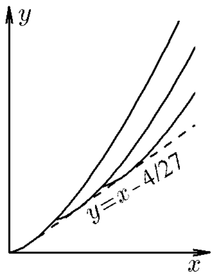


Рис. 14

В этом примере огибающая семейства интегральных кривых является особым решением.

Если известно семейство интегральных кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ некоторого дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$, можно определить его особые решения путем нахождения огибающей.

Огибающая семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$, как известно из курса математического анализа, входит в состав C-дискриминантной кривой, определяемой уравнениями

$$\Phi(x, y, C) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C} = 0.$$

Однако, кроме огибающей, в состав C-дискриминантной кривой могут входить и другие множества, например множество кратных точек кривых рассматриваемого семейства, в которых $\partial\Phi/\partial x = \partial\Phi/\partial y = 0$. Чтобы некоторая ветвь C-дискриминантной кривой заведомо была огибающей, достаточно, чтобы на ней

1) существовали ограниченные по модулю частные производные

$$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right| \le N_1, \quad \left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right| \le N_2;$$

2) $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \ne 0$ или $\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \ne 0$.

Заметим, что эти условия лишь достаточны, так что кривые, на которых нарушено одно из них, тоже могут быть огибающими.

Пример 5.3. Дано семейство интегральных кривых $(y - C)^2 = (x - C)^3$ некоторого дифференциального уравнения (см. пример 5.2). Найти особое решение того же уравнения.

Решение. Найдём C-дискриминантную кривую:

$$(y - C)^2 = (x - C)^3 \quad \text{и} \quad 2(y - C) = 3(x - C)^2.$$

Исключив параметр C, получим

$$y = x \quad \text{и} \quad x - y - \frac{4}{27} = 0.$$

Прямая $y = x - 4/27$ является огибающей, так как на ней выполнены все условия теоремы об огибающей. Функция $y = x$ не удовлетворяет дифференциальному уравнению. Прямая $y = x$ является геометрическим местом точек возврата. В точках этой прямой нарушено второе условие теоремы об огибающей.

6. Интегрирование с помощью параметра. Уравнения Лагранжа и Клеро

I. Пусть уравнение (1.3) разрешимо относительно искомой функции, т.е. имеет вид

$$y = f(x, y'). \tag{6.1}$$

Это уравнение интегрируется путем введения параметра

$$t = y'. \tag{6.2}$$

Тогда

$$y = f(x, t) \tag{6.3}$$

и дифференцирование (6.3) по x даёт

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$

а с учётом (6.2)

$$t = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}t'. \tag{6.4}$$

Если уравнение (6.4) имеет общий интеграл вида

$$x = \Phi(t, C), \tag{6.5}$$

то соотношения (6.3) и (6.5) параметрически определяют решение уравнения (6.1).

Пример 6.1. Решить уравнение

$$y = (y')^2 + xy' - x.$$

Решение. С помощью параметра (6.2) $t = y'$ исходное уравнение примет вид (6.3), т.е.

$$y = t^2 + xt - x, \tag{6.6}$$

и его дифференцирование даёт

$$y' = 2tt' + t + xt' - 1$$

или

$$t = 2tt' + t + xt' - 1.$$

Отсюда найдём

$$\frac{dt}{dx}(2t + x) = 1.$$

Записав последнее уравнение в виде

$$\frac{dx}{dt} = 2t + x,$$

получим линейное уравнение для функции $x(t)$ с общим решением (см. (3.9))

$$x(t) = 2(Ce^t - t - 1). \tag{6.7}$$

Подставив выражение (6.7) в (6.6), получим

$$y(t) = 2Ce^t(t - 1) - t^2 + 2. \tag{6.8}$$

Система уравнений (6.6) и (6.8) определяет общее решение (C — произвольная постоянная) исходного уравнения в параметрической форме с параметром t:

$$\begin{cases} x(t) = 2(Ce^t - t - 1), \\ y(t) = 2Ce^t(t - 1) - t^2 + 2. \end{cases}$$

Пример 6.2. Найти общее решение уравнения

$$y = (y' - 1)e^{y'}.$$

Решение. С помощью параметра $t = y'$ исходное уравнение приводится к виду

$$y = (t-1)e^t, \tag{6.9}$$

и его дифференцирование по x даёт

$$y' = t'e^t + (t-1)e^t t' = te^t t'$$

или

$$t = te^t t'. \tag{6.10}$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$e^t dt = dx,$$

проинтегрировав которое, найдём

$$x(t) = e^t + C, \tag{6.11}$$

где C — произвольная постоянная. Из соотношения (6.10) следует, что исходное уравнение имеет при $t = 0$ решение $y = -1$, которое является особым.

Система уравнений (6.9), (6.11) определяет решение исходного уравнения в параметрической форме с параметром t:

$$\begin{cases} x(t) = e^t + C, \\ y(t) = (t-1)e^t. \end{cases}$$

Пример 6.3. Решить уравнение

$$y = \frac{1}{2}(y')^2 + 2xy' + x^2.$$

Решение. С помощью параметра $t = y'$ исходное уравнение можно записать в виде

$$y = \frac{1}{2}t^2 + 2xt + x^2. \tag{6.12}$$

Продифференцировав это равенство по x, получим

$$y' = tt' + 2t + 2xt' + 2x$$

или

$$t = (t+2x)t' + 2t + 2x,$$

откуда

$$(t+2x)(t'+1) = 0,$$

и, стало быть,

$$t + 2x = 0, \tag{6.13}$$

$$t' + 1 = 0. \tag{6.14}$$

Подставив (6.13) в (6.12), получим решение

$$y = -x^2, \tag{6.15}$$

а проинтегрировав (6.14) — решение

$$x(t) = C - t, \tag{6.16}$$

где C — произвольная постоянная.

Система уравнений (6.12) и (6.16) определяет общее решение исходного уравнения в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x(t) &= C - t, \\ y(t) &= \tfrac{1}{2}t^2 + 2xt + x^2. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Система (6.17) допускает возможность исключить параметр t и записать общее решение в явном виде:

$$y(x) = \frac{1}{2}(C^2 - x^2) + Cx. \tag{6.18}$$

Уравнение (6.18) представляет собой совокупность интегральных кривых. Найдём огибающую этой совокупности. Согласно стандартной схеме, выпишем уравнение

$$F(x,y,C) = y - \frac{1}{2}(C^2 - x^2) - Cx = 0, \tag{6.19}$$

откуда

$$\frac{\partial F}{\partial C} = -C - x = 0. \tag{6.20}$$

Исключив из (6.19) и (6.20) произвольную постоянную C, найдём уравнение огибающей

$$y = -x^2,$$

совпадающее с решением (6.15), представляющим собой особое решение исходного уравнения.

Частным случаем (6.1) является уравнение вида

$$y = xf(y') + \varphi(y'). \tag{6.21}$$

♦ Уравнение (6.21) называется *уравнением Лагранжа.*

Если в уравнении (6.21) функция $f(y') \equiv y'$, то это уравнение примет вид

$$y = xy' + \varphi(y'). \tag{6.22}$$

♦ Уравнение (6.22) называется *уравнением Клеро.*

Стандартным способом с помощью параметра $t = y'$ уравнение Лагранжа (6.21) приводится к виду

$$y = xf(t) + \varphi(t), \tag{6.23}$$

а уравнение Клеро (6.22) к виду

$$y = xt + \varphi(t). \tag{6.24}$$

Продифференцировав (6.23) по x, найдём

$$y' = f(t) + xf'_t t' + \varphi'_t t'$$

или

$$t - f(t) = (xf'_t + \varphi'_t)t'. \tag{6.25}$$

Если

$$x = \Phi(t, C) \tag{6.26}$$

есть общий интеграл этого уравнения, то система (6.23) и (6.26) параметрически определяет общее решение уравнения Лагранжа. Кроме того, из (6.25) следует, что уравнение Лагранжа может иметь особые решения

$$y = xf(t_0) + \varphi(t_0),$$

где t_0 — любой из корней уравнения

$$t - f(t) = 0,$$

полученного из условия, что левая часть уравнения (6.25) обращается в нуль.

В свою очередь, продифференцировав по x уравнение Клеро (6.24), найдём

$$y' = t + xt' + \varphi'_t(t)t'$$

или

$$[x + \varphi'_t(t)]t' = 0.$$

Отсюда

$$t' = 0, \qquad x + \varphi'_t(t) = 0. \tag{6.27}$$

Проинтегрировав первое из уравнений (6.27), получим

$$t = C, \tag{6.28}$$

где C — произвольная постоянная. Подставив (6.28) в (6.24), найдём общее решение уравнения Клеро в виде

$$y(x) = xC + \varphi(C). \tag{6.29}$$

$\Diamond$ Интересно, что общее решение (6.29) можно получить из уравнения Клеро (6.22) формальной заменой y' на произвольную постоянную C.

Если из второго уравнения (6.27) выразить x через φ'_t и подставить его в уравнение (6.24), то мы получим параметрическое представление особого решения уравнения Клеро

$$x(t) = -\varphi'_t(t), \qquad y(t) = -t\varphi'_t(t) + \varphi(t). \tag{6.30}$$

Это решение описывает огибающую семейства интегральных кривых (6.29). Если из уравнений (6.30) исключить параметр t, то можно получить особое решение $y = \Phi(x)$ в явном виде. Кроме того, уравнение $y = \Phi(x)$ можно получить стандартным способом, исходя непосредственно из общего решения (6.29) (см. предыдущий пример).

Таким образом, для решения уравнения Клеро можно сформулировать следующий алгоритм. Заменив в уравнении Клеро (6.21) символ y' на символ C, мы сразу получим его общее решение (6.29). Продифференцировав его по C и исключив из полученной системы двух уравнений произвольную постоянную C, получим особое решение (6.30) в явном виде.

Пример 6.4. Решить уравнение

$$y = x(y')^2 + y'.$$

Решение. Уравнение, согласно определению (6.21), является уравнением Лагранжа. Положив $y' = t$, запишем

$$y = xt^2 + t. \tag{6.31}$$

Продифференцировав это равенство по x, получим

$$y' = t^2 + 2xtt' + t'$$

или

$$t - t^2 = (2xt + 1)\frac{dt}{dx}, \tag{6.32}$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1-t}x + \frac{1}{t(1-t^2)}.$$

Это линейное уравнение с общим решением

$$x(t) = \frac{1}{(1-t)^2}(C + \ln|t| - t),$$

подстановка которого в (6.31) даёт общее решение исходного уравнения в параметрической форме

$$x(t) = \frac{C + \ln|t| - t}{(1-t)^2}, \qquad y(t) = \frac{(C + \ln|t| - t)t^2}{(1-t)^2} + t.$$

Кроме того, уравнение имеет особые решения. Чтобы их найти, приравняем к нулю левую часть уравнения (6.32): $t - t^2 = 0$. Подставив корни этого уравнения $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$ в (6.31), найдём два особых решения: $y_1(x) = 0$ и $y_2(x) = x + 1$.

Пример 6.5. Решить уравнение

$$y = x\frac{1 + (y')^2}{2y'}.$$

Решение. Уравнение является уравнением Лагранжа. Положив $y' = t$, запишем

$$y = \frac{x(1+t^2)}{2t}. \tag{6.33}$$

Продифференцировав это равенство по x, получим

$$y' = \frac{1+t^2}{2t} + \frac{x}{2}\frac{t^2-1}{t^2}t'$$

или
$$t = \frac{1+t^2}{2t} + \frac{x}{2}\frac{t^2-1}{t^2}t',$$
откуда
$$t - \frac{1+t^2}{2t} = \frac{x}{2}\frac{t^2-1}{t^2}t' \tag{6.34}$$
или
$$\frac{x}{t}\frac{dt}{dx} = 1.$$
Разделив переменные
$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x},$$
найдём его общее решение
$$x = tC, \tag{6.35}$$
где C — произвольная постоянная.

Подставив (6.35) в (6.33), получим общее решение исходного уравнения в параметрической форме
$$x(t) = tC, \qquad y(t) = \frac{C}{2}(1+t^2). \tag{6.36}$$
Система (6.36) допускает возможность исключить параметр t и записать общее решение в явном виде:
$$y(x) = \frac{1}{2}\Big(C + \frac{x^2}{C}\Big).$$
Имеются также особые решения, вытекающие из уравнения $t - (1+t^2)/2t = 0$, полученного из условия равенства левой части уравнения (6.34) нулю. Подставив корни этого уравнения $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$ в (6.33), найдём два особых решения: $y_1 = x$, $y_2 = -x$.

Эти особые решения можно найти ещё как огибающие семейства интегральных кривых $y = C/2 + x^2/2C$. Действительно, согласно стандартной схеме, продифференцировав это уравнение по C, найдём $1 - x^2/C^2 = 0$ или $C = \pm x$. Подставив эти значения произвольной постоянной в выражение для $y(x)$, имеем уравнения огибающих, представляющих собой два особых решения
$$y = \pm\frac{x}{2} \pm \frac{x^2}{2x} = \pm x$$
и совпадающих с найденными выше.

Пример 6.6. Решить уравнение
$$(y')^3 + x(y')^2 - y'(2x+3) + y = 0.$$

Решение. Удобнее это уравнение разрешить относительно переменной y:
$$y = x[2y' - (y')^2] + 3y' - (y')^3.$$
Отсюда следует, что мы имеем дело с уравнением Лагранжа. Стандартным способом с помощью параметра $t = y'$ приводим его к виду
$$y = x(2t - t^2) + 3t - t^3. \tag{6.37}$$
Продифференцировав (6.37) по x, найдём
$$y' = (2t - t^2) + x(2-2t)t' + 3t' - 3t^2t'$$
или
$$-t(1-t) = (1-t)[2x + 3(1+t)]\frac{dt}{dx}. \tag{6.38}$$
После простых преобразований это уравнение можно записать как линейное относительно функции $x(t)$ и dx/dt:
$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{t}x = -\frac{3(1+t)}{t}$$

с общим решением
$$x(t) = \frac{C}{t^2} - t - \frac{3}{2}. \tag{6.39}$$
Подставив (6.39) в (6.37), найдём общее решение исходного уравнения в параметрической форме
$$x(t) = \frac{C}{t^2} - t - \frac{3}{2}, \qquad y(t) = C\Big(\frac{2}{t} - 1\Big) - \frac{t^2}{2}.$$
Наряду с этими решениями уравнение имеет два особых решения, которые можно найти, приравняв к нулю левую часть уравнения (6.38): $t(t-1) = 0$. Подставив корни этого уравнения $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$ в (6.37), найдём два особых решения: $y_1 = 0$ и $y_2 = x + 2$.

Пример 6.7. Решить уравнение
$$y = xy' - (y')^4.$$

Решение. Это уравнение имеет вид (6.24) при $\varphi(y') = -(y')^4$, т.е. является уравнением Клеро. Следуя сформулированному выше практическому правилу, заменив y' произвольной постоянной C, получим общее решение
$$y(x) = xC - C^4.$$
Далее, исключив произвольную постоянную C из системы уравнений
$$\begin{cases} y - xC + C^4 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial C}(y - xC + C^4) = -x + 4C^3 = 0, \end{cases} \qquad C = \Big(\frac{x}{4}\Big)^{1/3},$$
найдём особое решение
$$y = 3\Big(\frac{x}{4}\Big)^{4/3}. \tag{6.40}$$
Это особое решение в параметрической форме можно получить, исходя из формул (6.30). Поскольку $\varphi(y') = -(y')^4$, то $\varphi(t) = -t^4$, $\varphi'(t) = -4t^3$. Отсюда
$$x = -\varphi'(t) = 4t^3, \qquad y = -\varphi'(t)t + \varphi(t) = 4t^4 - t^4 = 3t^4.$$
В данном случае система уравнений допускает возможность исключить параметр t. Из первого уравнения получим $t = (x/4)^{1/3}$. С учётом этого найдём функцию $y(x) = 3t^4 = 3(x/4)^{4/3}$, совпадающую с (6.40).

Пример 6.8. Решить уравнение
$$y = xy' + \cos y'.$$

Решение. Имеем уравнение Клеро (6.24) с $\varphi(y') = \cos y'$. Следуя введённому выше алгоритму, формальной заменой y' на произвольную постоянную C сразу получим общее решение
$$y(x) = xC + \cos C.$$
Далее, исключив произвольную постоянную C из системы
$$y - xC - \cos C = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial C}(y - xC - \cos C) = -x + \sin C = 0, \qquad C = \arcsin x,$$
найдём особое решение
$$y = x\arcsin x - \cos(\arcsin x) = x\arcsin x - \sqrt{1 - x^2}. \tag{6.41}$$
Это особое решение в параметрической форме можно получить, исходя из формул (6.30). Поскольку $\varphi(y') = \cos y'$, то $\varphi(t) = \cos t$, $\varphi'(t) = -\sin t$. Отсюда
$$x = -\varphi'(t) = \sin t, \qquad y = -\varphi'(t)t + \varphi(t) = t\sin t + \cos t.$$
Эта система допускает возможность исключить параметр t. Действительно, из первого уравнения найдём $t = \arcsin x$. С учётом этого получим решение
$$y(x) = t\sin t + \cos t = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2},$$
совпадающее с (6.41).

Пример 6.9. Решить уравнение

$$x^2(y')^2 + 2(2 - xy)y' + y^2 = 0.$$

Решение. Это уравнение можно рассматривать как квадратное относительно любой из величин x, y, y'. Его решение имеет вид

$$xy' = y \pm 2\sqrt{-y'}.$$

Разрешив это уравнение относительно искомой функции $y(x)$, получим два уравнения Клеро

$$y = xy' \pm 2\sqrt{-y'}.$$

Замена y' на C_1 даёт их общее решение

$$y = xC_1 \pm 2\sqrt{-C_1}, \quad C_1 \leqslant 0.$$

Переобозначив $-C_1 = C_2^2$, получим общее решение в виде

$$y = \pm 2C_2 - xC_2^2.$$

Положив теперь произвольную постоянную $\pm C_2 = C$, общее решение исходного уравнения можем записать одним выражением

$$y = 2C - xC^2.$$

Особое решение найдём из системы

$$y = 2C - xC^2,$$
$$\frac{\partial}{\partial C}(y - 2C - xC^2) = 0, \quad -2 + 2xC = 0, \quad C = \frac{1}{x}.$$

Исключив из неё произвольную постоянную C, получим

$$y = 2C - xC^2 = \frac{1}{x}.$$

Это же решение можно получить из формул (6.30) (см. предыдущие примеры).

Пример 6.10. Решить уравнение

$$(y')^4 = 4y(2y - xy')^2.$$

Решение. Это уравнение можно преобразовать:

$$(y')^2 = \pm 2\sqrt{y}(2y - xy').$$

Далее его можно решать как квадратное относительно y' (см. предыдущий пример), а можно упростить, избавившись от радикала. Подстановкой $y = z^2$, $y' = 2zz'$ рассматриваемое уравнение приводится к виду

$$4z^2[(z')^2 \pm (z - xz')] = 0.$$

Из равенства $z = 0$ получим решение $y(x) = 0$, а равенство $(z')^2 \pm (z - xz') = 0$ перепишем как уравнение Клеро

$$z = xz' \pm (z')^2,$$

общее решение которого имеет вид

$$z = xC_1 \pm C_1^2 = C_1(x \pm C_1),$$

откуда

$$y(x) = z^2 = C_1^2(x \pm C_1)^2.$$

Переобозначив произвольную постоянную $\pm C_1 = C$, общее решение исходного уравнения можем записать одним выражением

$$y(x) = C^2(x + C)^2. \tag{6.42}$$

Особое решение найдём из системы

$$\begin{aligned} & y - C^2(x+C)^2 = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial C}[y - C^2(x+C)^2] = 2C(x+C)(x+2C) = 0. \end{aligned} \tag{6.43}$$

Последнее уравнение в (6.43) имеет три корня: $C_1 = 0$, $C_2 = -x$, $C_3 = -x/2$. Подставив поочередно эти корни в (6.42), найдём три решения: $y_1(x) = y_2(x) = 0$ и $y_3(x) = x^4/16$.

Первые два решения не являются особыми, поскольку вытекают из общего решения (6.42) при $C = 0$. Третье решение $y_3(x) = x^4/16$ невозможно получить из общего решения ни при каких C, и, следовательно, оно является особым решением исходного уравнения. Это же решение можно найти из формул (6.30).

II. Пусть теперь уравнение (1.3) разрешимо относительно аргумента искомой функции, т.е. имеет вид

$$x = f(y, y'). \tag{6.44}$$

Как и в предыдущем случае, уравнение интегрируется путем введения параметра (6.2): $t = y'$. Тогда

$$x = f(y, t), \tag{6.45}$$

и дифференцирование этого выражения по y (в предыдущем случае дифференцировали по x) даёт

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dy},$$

а с учётом (6.2)

$$\frac{1}{t} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dt}\frac{dt}{dy}. \tag{6.46}$$

Если (6.46) имеет общий интеграл

$$y = \Phi(t, C), \tag{6.47}$$

то (6.45) и (6.47) параметрически определяют общее решение уравнения (6.44).

Пример 6.11. Решить уравнение

$$x = (y')^2 + \frac{y}{y'}.$$

Решение. Положив $t = y'$, имеем

$$x = t^2 + \frac{y}{t}. \tag{6.48}$$

Продифференцировав это равенство по y, найдём

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = 2t\frac{dt}{dy} + \frac{1}{t} - \frac{y}{t^2}\frac{dt}{dy}$$

или

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t} + \Big(2t - \frac{y}{t^2}\Big)\frac{dt}{dy}.$$

Отсюда

$$\Big(2t - \frac{y}{t^2}\Big)\frac{dt}{dy} = 0$$

и, соответственно,

$$\frac{dt}{dy} = 0, \qquad 2t - \frac{y}{t^2} = 0.$$

Таким образом,

$$t_1 = C, \qquad t_2 = (y/2)^{1/3}.$$

Подставив поочередно оба результата в (6.48), найдём общее решение

$$x = C^2 + \frac{y}{C} \quad \text{или} \quad y(x) = Cx - C^3 \tag{6.49}$$

и решение

$$x(y) = 3(y/2)^{2/3} \quad \text{или} \quad y(x) = 2(x/3)^{3/2},$$

которое является особым, поскольку не вытекает из (6.49) ни при каких значениях C.

Пример 6.12. Решить уравнение

$$x = y' \cos y'.$$

Решение. Положив $t = y'$, имеем

$$x = t \cos t. \tag{6.50}$$

Продифференцировав это равенство по y, найдём

$$\frac{1}{y'} = (\cos t - t \sin t)\frac{dt}{dy}$$

или

$$\frac{1}{t} = (\cos t - t \sin t)\frac{dt}{dy}.$$

Разделив переменные, получим

$$dy = (t \cos t - t^2 \sin t)dt.$$

Отсюда

$$y = \int (t \cos t - t^2 \sin t)dt = t^2 \cos t - t \sin t - \cos t + C. \tag{6.51}$$

Таким образом, (6.50) и (6.51) параметрически определяют общее решение исходного уравнения

$$x = t \cos t, \qquad y = t^2 \cos t - t \sin t - \cos t + C.$$

Пример 6.13. Решить уравнение

$$\frac{y'}{x\sqrt{1 + (y')^2}} = 1.$$

Решение. Разрешив это уравнение относительно x, получим уравнение вида (6.44):

$$x = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Решение, как и во всех подобных случаях, будем искать в параметрической форме. Если, как и выше, ввести параметр $t = y'$, то решение будет получено в таком виде, что окажется невозможным исключить параметр.

Подберём такую зависимость $y(t)$, чтобы можно было избавиться от радикала, например

$$y' = \operatorname{tg} t,$$

тогда

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{1}{\cos t}$$

и

$$x = \sin t. \tag{6.52}$$

Продифференцировав (6.52) по y, получим

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} = \cos t \frac{dt}{dy} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \cos t \frac{dt}{dy}.$$

Разделив переменные, получим

$$dy = \sin t \, dt,$$

откуда

$$y = -\cos t + C. \tag{6.53}$$

Таким образом, (6.52) и (6.53) параметрически определяют общее решение исходного уравнения

$$x = \sin t, \qquad y = C - \cos t$$

или

$$x = \sin t, \qquad C - y = \cos t. \tag{6.54}$$

Возведя каждое из уравнений (6.54) в квадрат и сложив полученные равенства, избавимся от параметра t и найдём общее решение в виде

$$(C-y)^2+x^2=1.$$

III. Уравнения 1-го порядка n-й степени

$$(y')^n+a_{n-1}(x,y)(y')^{n-1}+\ldots+a_0(x,y)=0.$$

Введя обозначение $y'=z$, получим алгебраическое уравнение

$$P_n(z)=0,$$

где $P_n(z)$ — полином степени n:

$$P_n(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0.$$

Решение алгебраического уравнения найдём известными способами: разложением на множители, подбором корней, использованием формул для корней квадратного уравнения и др. Для каждого полученного корня $z_k=f_k(x,y)$ имеем уравнение $y'=f_k(x,y)$, которое в дальнейшем интегрируется. Отметим, что к трудностям интегрирования дифференциальных уравнений здесь добавляются трудности решения алгебраического уравнения.

Пример 6.14. Решить уравнение

$$(y')^3-y(y')^2-yy'+y^2=0.$$

Решение. Левая часть уравнения есть полином третьей степени по y'. Разложим его на множители:

$$(y')^3-y(y')^2-yy'+y^2=(y'-\sqrt{y})(y'+\sqrt{y})(y'-y)=0.$$

Получим три уравнения:

$$y'-\sqrt{y}=0,\quad y'+\sqrt{y}=0,\quad y'-y=0.$$

Их интегрирование даёт

$$2\sqrt{y}=x+C_1,\quad 2\sqrt{y}=x+C_2,\quad y=Ce^x.$$

Освободившись от радикала $\sqrt{y}$, найдём $4y=(x+C)^2$.

Таким образом, общее решение представлено двумя совокупностями:

$$y(x)=Ce^x,\qquad y(x)=\Big(\frac{x+C}{2}\Big)^2.$$

Пример 6.15. Решить уравнение

$$y^2(y')^2-2xyy'+2y^2-x^2=0.$$

Построить график интегральной кривой, составленный из участков частного и особого решений.

Решение. Разрешим уравнение относительно y':

$$y'=\frac{x+\sqrt{2}\sqrt{x^2-y^2}}{y}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{x\,dx-y\,dy}{\pm\sqrt{x^2-y^2}}=\frac{d(x^2-y^2)}{\pm\sqrt{x^2-y^2}}=\sqrt{2}\,dx \tag{6.55}$$

и проинтегрируем:

$$\pm\sqrt{x^2-y^2}=2\sqrt{x}+C.$$

Отсюда следует
$$x^2 - y^2 = (2\sqrt{x} + C)^2$$
или
$$(x + C\sqrt{2})^2 + y^2 = C^2. \tag{6.56}$$
Соотношение (6.56) является общим интегралом и определяет семейство окружностей радиуса C с центрами в точках $(-C\sqrt{2}, 0)$ (рис. 15).

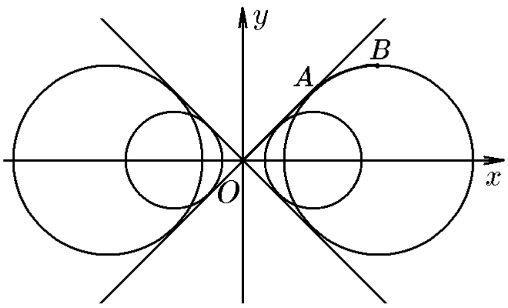


Рис. 15

Особым решением может быть только дискриминантная кривая, уравнение которой имеет вид $x^2 - y^2 = 0$ и получается стандартным образом: дифференцированием исходного уравнения по y' и подстановкой полученного выражения в исходное уравнение (что, впрочем, следует и из (6.55)). Дискриминантная кривая $x^2 - y^2 = 0$ распадается на две прямые: $y = x$ и $y = -x$. Полупрямые $y = \pm x$, $x \neq 0$, являются графиками особых решений — огибающие семейства окружностей (рис. 15).

Гладкая интегральная кривая OAB состоит из отрезка OA — графика особого решения и дуги окружности — графика частного решения.

7. Неполные уравнения

♦ Дифференциальные уравнения
$$F(x, y, y') = 0,$$
в которых функция F содержит явно только одну или две переменных, называются неполными.

Рассмотрим следующие случаи.

I. $F(y') = 0$ (уравнение не содержит явно искомую функцию и независимую переменную x)

Предположим, что это уравнение имеет хотя бы одно решение $y' = k$, где k — решение алгебраического уравнения
$$F(k) = 0. \tag{7.1}$$
Из этого следует, что
$$y(x) = kx + C, \tag{7.2}$$
где C — произвольная постоянная, является общим решением исходного уравнения. Однако решать уравнение (7.1) вовсе не обязательно, тем более, что зачастую найти его решение аналитическими методами вообще невозможно. Значение k можно получить из (7.2): $k = (y - C)/x$, тогда равенство
$$F\Big(\frac{y - C}{x}\Big) = 0, \tag{7.3}$$
равносильное равенству $F(y') = 0$, определяет общий интеграл этого дифференциального уравнения.

Если из соотношение (7.3) удаётся явно выразить y, то будет получено общее решение в виде $y = \varphi(x, C)$. Если же это не удаётся, то соотношение (7.3) позволяет исследовать и построить интегральные кривые при любых C методами математического анализа с помощью производных $y'(x)$, $y''(x)$, которые определяются из (7.3) по правилу дифференцирования функций, заданных неявно.

Пример 7.1. Решить уравнение
$$(y')^4 - 2(y')^3 - y' + 7 = 0.$$

Решение. Решение уравнения (7.1) в явном виде определяется формулами Картана и достаточно громоздко, поэтому воспользуемся формулой (7.3):

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^4 - 2\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 - \left(\frac{y-C}{x}\right) + 7 = 0$$

или

$$(y-C)^4 - 2(y-C)^3 x - (y-C)x^3 + 7x^4 = 0.$$

Это равенство представляет собой общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Пример 7.2. Решить уравнение

$$(y')^2 + y' - 2 = 0.$$

Решение. Воспользовавшись формулой (7.3), имеем общий интеграл уравнения

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^2 - \frac{y-C}{x} - 2 = 0$$

или

$$(y-C)^2 + (y-C)x - 2x^2 = 0.$$

В данном случае нетрудно получить явную форму $y(x)$, решив квадратное уравнение

$$(y-C)_{1,2} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+8x^2}}{2} = \frac{-x \pm 3x}{2},$$

т.е.

$$\begin{aligned} y - C_1 = -2x \quad \text{или} \quad y = C_1 - 2x, \\ y - C_2 = x \quad \text{или} \quad y = C_2 + x. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Эти же общие решения можно получить, решив уравнение (7.1), т.е.

$$k^2 + k - 2 = 0.$$

Поскольку $k_1 = -2$, $k_2 = 1$, то $y_1' = -2$, $y_2' = 1$. Отсюда мы имеем общие решения

$$y_1(x) = C_1 - 2x, \qquad y_2(x) = C_2 + x,$$

совпадающие с (7.4).

Заметим, что данное дифференциальное уравнение одновременно является дифференциальным уравнением 1-го порядка 2-й степени (см. разд. 2.6.III).

II. $F(x, y') = 0$ (уравнение не содержит явно искомую функцию y)

В этом случае параметр t вводится так, чтобы исходное уравнение распалось на два:

$$x = p(t), \qquad y'(t) = q(t). \tag{7.5}$$

Функции p и q подбираются таким образом, чтобы выполнялось равенство $F(p, q) = 0$.

Переписав второе уравнение из (7.5) как

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = q(t)$$

или

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}q(t)$$

и приняв во внимание первое уравнение из (7.5), получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dt} = p'(t)q(t),$$

интегрирование которого даёт общее решение исходного дифференциального уравнения в параметрической форме

$$\begin{aligned} x(t) &= p(t), \\ y(t) &= \int p'(t)q(t)dt + C, \end{aligned} \tag{7.6}$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 7.3. Решить уравнение

$$(y')^3 - 3xy' + x^3 = 0.$$

Решение. Введём параметр t соотношением

$$y' = xt, \tag{7.7}$$

тогда

$$x^3t^3 - 3x^2t + x^3 = 0. \tag{7.8}$$

При $x \neq 0$ из (7.8) имеем

$$xt^3 - 3t + x = 0,$$

откуда

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}. \tag{7.9}$$

Это означает, что функция $p(t)$ имеет вид

$$p(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \tag{7.10}$$

а поскольку, согласно (7.7) и (7.9),

$$y'(t) = xt = \frac{3t^2}{1+t^3},$$

то

$$q(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

Таким образом, получены функции $p(t)$ и $q(t)$, удовлетворяющие уравнению

$$q^3 - 3pq + p^3 = 0.$$

Вычислим интеграл в (7.6):

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \Big(\frac{3t}{1+t^3}\Big)' \frac{3t^2}{1+t^3} dt + C = 9\int \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt + C = \\ &= 9\int \frac{t^2[3-2(1+t^3)]}{(1+t^3)^3} dt + C = 9\int \frac{3t^2 dt}{(1+t^3)^3} - 6\int \frac{3t^2 dt}{(1+t^3)^2} + C = \\ &= -\frac{9}{2}\frac{1}{(1+t^3)^2} + 6\frac{1}{1+t^3} + C = \frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + C. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Тогда формулы (7.9) и (7.11) задают общее решение в параметрической форме

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \qquad y(t) = \frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + C.$$

$\lozenge$ Если уравнение $F(x, y') = 0$ удаётся разрешить относительно y', т.е. привести его к виду $y' = f(x)$, то мы получим уравнение с разделяющимися переменными. Если же уравнение $F(x, y') = 0$ удаётся разрешить относительно аргумента x, т.е. привести его к виду $x = f(y')$, то мы получим уравнение вида I из предыдущего раздела.

Пример 7.4. Найти общее решение уравнения

$$y'(x - \ln y') = 1.$$

Решение. Это уравнение можно разрешить относительно аргумента:

$$x = \frac{1}{y'} + \ln y'.$$

Введение параметра $t = y'$ позволяет записать его в виде

$$x = \frac{1}{t} + \ln t. \tag{7.12}$$

Продифференцировав это равенство по y, найдём

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} = \Big(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\Big)\frac{dt}{dy}$$

или

$$\frac{1}{t} = \Big(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\Big)\frac{dt}{dy}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$dy = \Big(1 - \frac{1}{t}\Big)dt.$$

Проинтегрировав его, получим

$$y = t - \ln t + C. \tag{7.13}$$

Формулы (7.12) и (7.13) задают общее решение в параметрической форме

$$x(t) = \frac{1}{t} + \ln t,$$
$$y(t) = t - \ln t + C.$$

III. $F(y, y') = 0$ (уравнение не содержит явно независимую переменную)

Введём параметр t соотношением $t = y'$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$F(y, t) = 0. \tag{7.14}$$

Дифференцирование этого равенства по x даёт

$$\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0$$

или

$$t\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{dt}{dx} = 0. \tag{7.15}$$

Если уравнение (7.15) имеет общий интеграл

$$\Phi(x, t, C) = 0,$$

то, выразив из (7.14) $y = f(t)$, а из (7.15) $x = \varphi(t, C)$, получим общее решение исходного дифференциального уравнения в параметрической форме.

Если исходное дифференциальное уравнение удаётся разрешить относительно $y' - f(y)$, то мы приходим к уравнению с разделяющимися переменными. Если же его удаётся разрешить относительно искомой функции, то мы имеем уравнение вида

$$y = f(y'). \tag{7.16}$$

С помощью параметра $t = y'$ уравнение (7.16) можно записать как

$$y = f(t). \tag{7.17}$$

Продифференцировав (7.17) по x, найдём

$$y' = f'(t)\frac{dt}{dx}$$

или

$$t = f'(t)\frac{dt}{dx}.$$

Последнее уравнение допускает разделение переменных:

$$dx = \frac{f'(t)}{t}dt.$$

Следовательно,

$$x = \int \frac{f'(t)}{t}dt + C. \tag{7.18}$$

Выражения (7.17) и (7.18) параметрически задают общее решение уравнения (7.16):

$$t(t) = f(t), \qquad x = \int \frac{f'(t)}{t}dt + C. \tag{7.19}$$

Пример 7.5. Решить уравнение

$$(y')^3 - (y')^2 + y^2 = 0.$$

Решение. Уравнение не содержит независимую переменную x. С помощью параметра $y' = t$ его можно записать в виде

$$t^3 - t^2 + y^2 = 0. \tag{7.20}$$

Дифференцирование этого уравнения по x даёт

$$t(3t-2)t' + 2yy' = 0$$

или

$$t[(3t-2)t' + 2y] = 0.$$

Отсюда

$$\begin{gathered} t = 0, \\ (3t-2)\frac{dt}{dx} + 2y = 0. \end{gathered} \tag{7.21}$$

Из первого уравнения получим $y = \mathrm{const}$. Подставив это решение в исходное уравнение, найдём значение $\mathrm{const} = 0$ и, следовательно,

$$y = 0. \tag{7.22}$$

Определим из (7.20)

$$y = \pm\sqrt{t^2 - t^3} = \pm t\sqrt{1-t} \tag{7.23}$$

и с учётом этого 2-е уравнение из (7.21) можем записать

$$(3t-2)\frac{dt}{dx} \pm 2t\sqrt{1-t} = 0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение:

$$x(t) = \pm\int \frac{2-3t}{2t\sqrt{1-t}}dt = \pm\left\{\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t}} - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t}}\right\} = \pm\{I(t) + 3\sqrt{1-t}\}.$$

Здесь интеграл

$$I(t) = \int \frac{dt}{t\sqrt{1-t}}$$

заменой $1 - t = u^2$ приводим к выражению

$$I(t) = -2\int \frac{du}{1-u^2} = \ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| = \ln\frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}.$$

Таким образом, для функции $x(t)$ получим соотношение

$$x(t) = C \pm \left(3\sqrt{1-t} + \ln\frac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}\right),$$

которое вместе с (7.23) определяет общее решение исходного уравнения, записанное в параметрической форме:

$$\begin{cases} x(t) = C \pm \left(3\sqrt{1-t} + \ln\dfrac{1-\sqrt{1-t}}{1+\sqrt{1-t}}\right), \\ y(t) = \pm t\sqrt{1-t}. \end{cases}$$

Решение (7.22) невозможно получить из общего решения выбором произвольной постоянной, и, следовательно, оно является особым.

Пример 7.6. Решить уравнение

$$y' = \operatorname{arctg}\frac{y}{(y')^2}.$$

Решение. Разрешим это уравнение относительно искомой функции:

$$y = (y')^2 \operatorname{tg} y'.$$

С помощью параметра $t = y'$ найдём

$$y(t) = t^2 \operatorname{tg} t = f(t). \tag{7.24}$$

Зависимость $x(t)$ найдём, согласно формуле (7.18):

$$x(t) = \int \frac{f'(t)}{t} dt = \int \Big(2 \operatorname{tg} t + \frac{t}{\cos^2 t} \Big) dt.$$

Вычисление 2-го интеграла по частям даёт

$$\int \frac{t}{\cos^2 t} dt = t \operatorname{tg} t - \int \operatorname{tg} t \, dt,$$

тогда

$$x(t) = t \operatorname{tg} t + \int \operatorname{tg} t \, dt = t \operatorname{tg} t - \ln |\cos t| + C.$$

Это уравнение совместно с (7.24) даёт общее решение исходного дифференциального уравнения в параметрической форме.

ГЛАВА 2

Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков

8. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков

Все дифференциальные уравнения порядка выше первого называются дифференциальными уравнениями высших порядков.

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \tag{8.1}$$

В некоторых случаях это уравнение удаётся разрешить относительно старшей производной $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{8.2}$$

Тогда это уравнение называется уравнением n-го порядка, разрешённым относительно старшей производной.

♦ Всякая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая уравнениям (8.1) и (8.2), т.е. обращающая их в тождества, называется решением дифференциального уравнения.

♦ Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка называется такое его решение, которое содержит n произвольных постоянных

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \tag{8.3}$$

или в неявной форме

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \tag{8.4}$$

Уравнение (8.4), неявным образом определяющее общее решение, называется общим интегралом.

♦ Любое решение, получаемое из (8.3) при конкретных числовых значениях C_i, $i = \overline{1, n}$, называется частным решением уравнения (8.1).

♦ Неявно заданное частное решение называется частным интегралом.

В некоторых случаях при интегрировании уравнения (8.2) получают соотношения вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, C_2, \ldots, C_k) = 0. \tag{8.5}$$

♦ Соотношение (8.5) называется промежуточным интегралом уравнения (8.1) k-го порядка.

♦ Промежуточный интеграл вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, C_1) = 0 \tag{8.6}$$

называется первым интегралом уравнения (8.1).

Зная k независимых первых интегралов, можно понизить порядок уравнения на k единиц. Знание n независимых первых интегралов даёт возможность путем исключения из них всех производных получить общий интеграл (8.4).

Обычно задачи прикладного характера требуют отыскания частного решения. Для этого задаются так называемые начальные условия, т.е. значения искомой функции и её производных до $(n-1)$ порядка включительно при некотором значении аргумента. Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} & y\big|_{x=x_0} = y_0, \\ & y'\big|_{x=x_0} = y_0', \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ & y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Найдя общее решение дифференциального уравнения n-го порядка $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ и желая выделить частное решение, с использованием начальных условий приходим к системе n уравнений для определения n величин $C_1, C_2, \dots, C_n$:

$$\begin{aligned} & \varphi(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0, \\ & \varphi'(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0', \\ & \varphi''(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0'', \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ & \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \dots, C_n) = y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

♦ Задача об отыскании решения дифференциального уравнения n-го порядка, удовлетворяющего начальным условиям (8.7), называется задачей Коши для данного уравнения.

♦ Общее решение

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}),$$

в котором роль произвольных постоянных играют начальные условия (8.7), называется общим решением в форме Коши.

◊ Общее решение в форме Коши позволяет легко находить решение задачи Коши.

Сформулируем теорему существования и единственности решения задачи Коши.

Теорема 8.1 (Коши). *Пусть даны дифференциальное уравнение* (8.2) *и система начальных условий* (8.7). *Если функция* $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *непрерывна и имеет непрерывные и ограниченные частные производные по аргументам* $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, *то существует, и притом единственное, решение уравнения, определённое и непрерывное в некотором интервале, содержащем* x_0, *и удовлетворяющее заданной системе начальных условий.*

Доказательство этой теоремы следует из аналогичной теоремы для систем дифференциальных уравнений, которую мы докажем позже.

9. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Общим из основных методов, применяемых при интегрировании дифференциальных уравнений высших порядков, является понижение порядка уравнения, т.е. сведение уравнения путем замены переменных к другому уравнению, имеющему порядок ниже данного. Следует заметить, что понижение порядка возможно далеко не всегда. Рассмотрим некоторые типы уравнений, допускающие понижение порядка.

9.1. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$

Простейшим уравнением n-го порядка, допускающим понижение порядка, является уравнение вида

$$y^{(n)} = f(x). \tag{9.1}$$

Здесь порядок понижается непосредственно путем последовательного интегрирования:

$$\begin{aligned}
&y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1;\\
&y^{(n-2)} = \int \Big[\int f(x)dx + C_1\Big]dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1x + C_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&y = \int dx \int dx \cdots \int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{(n-2)}}{(n-2)!} + \ldots + C_n,
\end{aligned}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пример 9.1. Найти общее решение уравнения

$$y''' = e^{2x} + \sin 3x.$$

Решение. Проинтегрировав обе части равенства по x трижды, получим последовательно

$$\begin{aligned}
&y'' = \int (e^{2x} + \sin 3x)dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\cos 3x + C_1;\\
&y' = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2;\\
&y = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.
\end{aligned}$$

$\Diamond$ Несмотря на простоту уравнений этого типа, они играют важную роль, потому что к ним сводятся уравнения других видов.

9.2. Уравнения, не содержащие явно искомую функцию и её младшие производные

Дифференциальное уравнение

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{9.2}$$

не содержащее явно искомую функцию y и младшие производные до $(k-1)$-го порядка включительно, допускает понижение порядка на k единиц.

Действительно, положим $y^{(k)} = z$. Тогда $y^{(k+1)} = z', \ldots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$ и данное уравнение перепишется в виде

$$F(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-k)}) = 0, \tag{9.3}$$

т.е. порядок уравнения (9.2) понизился на k единиц. Если найдено решение

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

то, возвратившись к исходным переменным, получим уравнение

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k}),$$

которое решается последовательным интегрированием k раз.

Пример 9.2. Найти общее решение уравнения

$$y^{(4)} = y'''/x.$$

Решение. Положим $y''' = z$, тогда $y^{(4)} = z'$ и исходное уравнение примет вид

$$z' = \frac{z}{x} \quad \text{или} \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав, получим

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|$$

или

$$z = xC_1.$$

Но $z = y'''$ и $y''' = xC_1$. Последовательно интегрируем трижды это уравнение:

$$y'' = \frac{x^2}{2}C_1 + C_2;$$
$$y' = \frac{x^3}{6}C_1 + C_2x + C_3;$$
$$y = \frac{x^4}{24}C_1 + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4.$$

Последнее выражение и есть общее решение исходного дифференциального уравнения.

Частным случаем уравнений такого типа является уравнение второго порядка, не содержащее явно искомую функцию y.

Пример 9.3. Найти решение уравнения

$$y''(x^2 + 1) = 2xy',$$

удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 0$, $y = 1$, $y' = 3$.

Решение. Положим $y' = z$. Тогда $y'' = z'$ и уравнение примет вид

$$z'(x^2 + 1) = 2xz.$$

Разделив переменные:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2x\,dx}{x^2 + 1}$$

и проинтегрировав, получим

$$\ln|z| = \ln|x^2 + 1| + \ln|C_1|,$$

откуда

$$z = C_1(x^2 + 1).$$

Возвратившись к исходным переменным, запишем

$$y' = C_1(x^2 + 1)$$

или

$$dy = C_1(x^2 + 1)dx.$$

Проинтегрировав, найдём общее решение исходного уравнения второго порядка

$$y = C_1\Big(\frac{x^3}{3} + x\Big) + C_2.$$

С учётом начальных условий придём к системе двух уравнения с двумя неизвестными C_1 и C_2, подлежащими определению:

$$\begin{cases} 3 = C_1(0+1), \\ 1 = C_1(0) + C_2, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 3$, $C_2 = 1$. Поэтому частное решение, удовлетворяющее заданной системе уравнений (решение задачи Коши), есть

$$y = x^3 + 3x + 1.$$

$\Diamond$ Иногда постоянные C_j удобнее определять сразу, по мере их возникновения. Так, из равенства $y' = C_1(x^2+1)$ и начального условия $y'(0) = 3$ следует $C_1 = 3$. Тогда $y = x^3 + 3x + C_2$, и второе начальное условие $y(0) = 1$ даёт $C_2 = 1$, т.е. $y = x^3 + 3x + 1$.

9.3. Уравнения, не содержащие явно независимую переменную

Рассмотрим уравнение n-го порядка

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

не содержащее явно независимую переменную x. Положим $y' = p$, но здесь, в отличие от предыдущего случая, $p = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy};$$

$$y''' = p\frac{d}{dy}(pp')$$

и т.д. Подставив производные в исходное уравнение, получим

$$F\Big(y, p, pp', \ldots, \Big[p\frac{d}{dy}\Big]^{n-2}pp'\Big) = 0. \tag{9.4}$$

В частности, для $n = 2$, т.е. для $y'' = f(y, y')$, запишем

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Предположим, что удалось проинтегрировать уравнение (9.4), т.е. найти функции

$$p = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}).$$

Учтя, что $p = y'$, придём к уравнению

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}).$$

Разделив переменные

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = dx$$

и проинтегрировав, найдём решение исходного уравнения n-го порядка

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = \int dx + C_n.$$

Пример 9.4. Найти общее решение уравнения

$$(y')^2 + 2yy'' = 0.$$

Решение. Положим $y' = p$, тогда $y'' = p\,dp/dy$ и уравнение примет вид

$$2yp\frac{dp}{dy} = -p^2$$

или

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{2}\frac{dy}{y}.$$

Проинтегрировав, получим

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C_1|$$

или

$$p\sqrt{y} = C_1.$$

Отсюда

$$p = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Поскольку $p = y'$, придём к уравнению

$$y' = \frac{C_1}{\sqrt{y}}$$

или

$$\sqrt{y}dy = C_1 dx.$$

Проинтегрировав, найдём общий интеграл исходного уравнения второго порядка

$$\frac{2}{3}y^{3/2} = C_1 x + C_2.$$

9.4. Уравнения, однородные относительно неизвестной функции и её производных

Рассмотрим уравнение

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

однородное порядка l относительно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, т.е.

$$f(x, \lambda y, \lambda y', \ldots, \lambda y^{(n)}) = \lambda^l f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}),$$

$\lambda > 0$. С помощью замены переменных $y = e^z$ порядок уравнения можно понизить на единицу. Действительно,

$$y = e^z, \quad y' = e^z z', \quad y'' = e^z[(z')^2 + z''], \ldots,$$

так что

$$y^{(k)} = e^z p_k(z', \ldots, z^{(k)}),$$

где p_k – полином от своих аргументов. После постановки в исходное уравнение получим

$$f(x, e^z, e^z z', \ldots, e^z p_n(z', \ldots, z^{(n)}) = e^{lz} f(x, 1, z', \ldots, p_n(z', \ldots, z^{(n)}) =$$
$$= e^{lz}\varphi(x, z', z'', \ldots, z^{(n)}) = 0.$$

Полученное уравнение не содержит неизвестную функцию z. Замена $z' = q$ приводит его к уравнению $(n-1)$-го порядка.

Пример 9.5. Найти общее решение уравнения

$$yy'' - (y')^2 = 6xy^2.$$

Решение. Положим $y = e^z$. Тогда $y' = e^z z'$, $y'' = e^z[z'' + (z')^2]$. Исходное уравнение примет вид

$$z'' = 6x.$$

Последовательное интегрирование даёт

$$z' = 3x^2 + C_1,$$
$$z = x^3 + C_1x + C_2.$$

Так как $y = e^z$, то

$$y = e^{x^3+C_1x+C_2} = e^{C_2}e^{x^3+C_1x} = \bar{C}_2e^{x^3+C_1x}.$$

9.5. Уравнения в полных производных

Рассмотрим уравнение, левая часть которых

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$

является производной некоторого дифференциального выражения $(n-1)$-го порядка. Такие уравнения называются уравнениями в полных производных.

В этом случае легко находится первый интеграл, т.е. дифференциальное уравнение $(n-1)$-го порядка, содержащее одну произвольную постоянную и эквивалентное данному уравнению n-го порядка. Тем самым порядок исходного уравнения понижается на единицу.

Пример 9.6. Найти общее решение уравнения

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0.$$

Решение. Представим левую часть исходного уравнения в виде

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = \frac{d}{dx}\Big(\frac{y'}{y}\Big) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = C_1$$

или в разделённых переменных

$$\frac{dy}{y} = C_1dx,$$

т.е.

$$y = C_2e^{C_1x}.$$

Пример 9.7. Найти общее решение уравнения

$$yy''' + 3y'y'' = 0.$$

Решение. Так как $yy''' + y'y'' + 2y'y'' = 0$, то $(yy'')' + [(y')^2]' = 0$ или $[yy'' + (y')^2]' = 0$. Отсюда $yy'' + (y')^2 = C_1$, которое, в свою очередь, допускает представление $(yy')' = C_1$ или $yy' = C_1x + C_2$. Теперь, разделив переменные $y\,dy = (C_1x + C_2)dx$ и проинтегрировав, найдём

$$\frac{y^2}{2} = C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

ГЛАВА 3

Линейные дифференциальные уравнения

10. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков

Большое количество задач математики, механики, электротехники и других, не только технических, наук приводит к особому виду дифференциальных уравнений — так называемым линейным уравнениям. В ряде случаев в условие задачи специально вводятся такие дополнительные предположения, которые позволяют получить дифференциальное уравнение линейного вида. Внесение таких дополнительных предположений принято называть линеаризацией.

Рассмотрим линейные дифференциальные уравнения.

♦ Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$\bar{a}_n y^{(n)} + \bar{a}_{n-1} y^{(n-1)} + \bar{a}_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + \bar{a}_1 y' + \bar{a}_0 y = \bar{f}(x), \tag{10.1}$$

где $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ – функции от x или постоянные величины, причём $\bar{a}_n \neq 0$ на некотором интервале $]\alpha, \beta[$ (интервал может быть бесконечным или полубесконечным, т.е. $\alpha = -\infty$ и/или $\beta = \infty$). Разделив (10.1) на $\bar{a}_n$ и обозначив $a_k = \bar{a}_k/\bar{a}_n$, $k = \overline{0, n-1}$, и $f(x) = \bar{f}(x)/\bar{a}_n$, придём к уравнению

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(x). \tag{10.2}$$

♦ Уравнение (10.2) называется *линейным дифференциальным уравнением n-го порядка в канонической форме.*

Далее, если не оговорено противное, будем предполагать, что уравнение записано в канонической форме.

При $f(x) \not\equiv 0$ уравнение (10.2) называется линейным неоднородным уравнением, или уравнением с правой частью.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (10.2) примет вид

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{10.3}$$

и называется линейным однородным уравнением, или уравнением без правой части.

Пусть коэффициенты a_k, $k = \overline{0, n-1}$, и свободный член $f(x)$ являются непрерывными функциями переменной x в некотором интервале $]\alpha, \beta[$. Тогда дифференциальное уравнение (10.2) имеет единственное решение $y = y(x)$, определённое на всем интервале и при $x = x_0$ удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{10.4}$$

Действительно, переписав уравнение (10.2) в виде

$$y^{(n)}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} + f(x) = F(x, y, \ldots, y^{(n-1)}), \tag{10.5}$$

соответствующем (8.2), и заметив, что функция $F(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна вместе со своими частными производными $\partial F/\partial y^{(k)} = -a_k$, $k = \overline{0, n-1}$, для всех $x \in]\alpha, \beta[$ и любых $y^{(k)}$, $k = \overline{0, n-1}$, убеждаемся, что правая часть уравнения (10.5) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности

8.1 при любых начальных условиях. Это означает, что начальные условия $y_0^{(k)}$, $k = \overline{0, n-1}$, можно задавать произвольно, и, кроме того, всякое решение линейного уравнения является его частным решением и, стало быть, особых решений оно не имеет.

Однородное линейное уравнение всегда имеет нулевое решение $y(x) \equiv 0$, называемое тривиальным. Оно удовлетворяет нулевым начальным условиям $y_0(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, причём других решений с такими начальными условиями нет.

11. Свойства решений линейных уравнений

Для удобства работы с линейными дифференциальными уравнениями введём дифференциальный оператор $D = d/dx$, действующий по правилу

$$Dy(x) = \frac{dy(x)}{dx} = y'(x). \tag{11.1}$$

Степень n оператора D определим по индукции: $D^n = D(D^{n-1})$, положив по определению, что $D^0 = 1$ — тождественный оператор

$$D^0 y(x) = 1 \cdot y(x) = y(x). \tag{11.2}$$

С учётом этого имеем цепочку равенств

$$D^n y(x) = D(D^{n-1})y(x) = \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}\Big) = \frac{d^n y(x)}{dx^n} = y^{(n)}(x) \tag{11.3}$$

и, соответственно,

$$D^n[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)] = C_1 D^n y_1(x) + C_2 D^n y_2(x), \tag{11.4}$$

что следует из свойств производных, если C_1 и C_2 — постоянные величины.

Поскольку с помощью дифференциальных операторов (11.3) дифференциальное уравнение (10.2) можно записать в виде

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)y(x) = f(x),$$

то естественно ввести оператор

$$\widehat{L}_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0, \tag{11.5}$$

позволяющий записать уравнение (10.2) в так называемой операторной форме

$$\widehat{L}_n y(x) = f(x). \tag{11.6}$$

♦ Оператор $\widehat{L}_n$ (11.5) называется линейным дифференциальным оператором (ЛДО) n-го порядка.

Свое название он получил за свойство линейности, которое вытекает из следующей теоремы.

Теорема 11.1. *Линейный дифференциальный оператор обладает следующими свойствами:*

$$1)\quad \widehat{L}_n C y = C\widehat{L}_n y, \tag{11.7}$$

$$2)\quad \widehat{L}_n[y_1 + y_2] = \widehat{L}_n y_1 + \widehat{L}_n y_2. \tag{11.8}$$

Доказательство 1. Действительно, согласно (11.4),

$$\begin{aligned}\widehat{L}_n Cy &= (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)Cy = \\ &= C(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)y = C\widehat{L}_n y,\end{aligned}$$

т.е. постоянный множитель выносится за знак ЛДО.

2. Аналогично, с учётом (11.4)

$$\begin{gathered}\widehat{L}_n[y_1 + y_2] = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0)(y_1 + y_2) = \\ = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0)y_1 + (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_0)y_2 = \widehat{L}_n y_1 + \widehat{L}_n y_2,\end{gathered}$$

т.е. ЛДО, применённый к сумме двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, равен сумме результатов применения того же оператора к каждой функции.

Последнее утверждение легко обобщить на случай произвольного числа функций.

Следствие 11.1.1. Справедливо соотношение

$$\widehat{L}_n\Big[\sum_{k=1}^{m} C_k y_k\Big] = \sum_{k=1}^{m} C_k \widehat{L}_n[y_k].$$

Доказательство непосредственно следует из (11.7) и (11.8).

Пример 11.1. Записать явный вид ЛДО $\widehat{L}_2$ и найти $\widehat{L}_2[\sin x]$ и $\widehat{L}_2[x^2]$, если

$$\widehat{L}_2 y = y'' + y.$$

Решение. Легко видеть, что $\widehat{L}_2 y = (D^2 + 1)y$, откуда $\widehat{L}_2 = D^2 + 1$ и

$$\widehat{L}_2[\sin x] = -\sin x + \sin x = 0, \quad \widehat{L}[x^2] = 2 + x^2.$$

Это означает, что функция $y(x) = \sin x$ является частным решением уравнения $\widehat{L}_2 y = 0$, тогда как $y(x) = x^2$ таковым не является.

Воспользовавшись свойствами ЛДО, докажем следующие теоремы о свойствах решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 11.2 (о линейности множества решений однородного уравнения). *Если $y_1, y_2, \ldots, y_m$ являются решениями однородного уравнения $\widehat{L}_n y_k = 0$, $k = \overline{1, m}$, то их линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{m} C_k y_k$ также является решением этого уравнения.*

Доказательство. Воспользуемся следствием 11.1.1 и условием теоремы:

$$\widehat{L}_n\Big[\sum_{k=1}^{m} C_k y_k\Big] = \sum_{k=1}^{m} \widehat{L}_n[C_k y_k] = \sum_{k=1}^{m} C_k \widehat{L}_n y_k = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 11.2.1. Если $C_1 = 1$, а $C_2 = i$, то $\widehat{L}_n[y_1(x) + iy_2(x)] = 0$ и наоборот. Другими словами, если $y = y_1(x) + iy_2(x)$ является комплексным решением однородного уравнения с действительными коэффициентами, то решением этого уравнения является каждая функция $y_1(x) = \operatorname{Re} y(x)$ и $y_2(x) = \operatorname{Im} y(x)$ в отдельности: $\widehat{L}_n y_1 = \widehat{L}_n y_2 = 0$.

Пример 11.2. Проверить, что действительная и мнимая части комплексного решения уравнения

$$y'' + y = 0 \tag{11.9}$$

каждая в отдельности удовлетворяет этому уравнению.

Решение. Легко убедиться, что комплексным решением этого уравнения является, например, функция $y(x) = e^{ix}$, поскольку $(e^{ix})'' = i^2 e^{ix} = -e^{ix}$. Действительную и мнимую части этого решения можно найти по формуле Эйлера:

$$y(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Подставив $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$ в уравнение (11.9), найдём

$$y_1'' + y_1 = (\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0,$$
$$y_2'' + y_2 = (\sin x)'' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0.$$

Это и означает, что функции $y_1 = \cos x$ и $y_2 = \sin x$ каждая в отдельности являются решениями уравнения (11.9).

Теорема 11.3 (принцип суперпозиции). *Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ являются решениями неоднородных уравнений $\widehat{L}_n y_k = f_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, то их линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{m} C_k y_k$ является решением уравнения*

$$\widehat{L}_n \Big[\sum_{k=1}^{m} C_k y_k \Big] = \sum_{k=1}^{m} C_k f_k(x). \tag{11.10}$$

Доказательство. В силу линейности оператора $\widehat{L}_n$ и с учётом условий теоремы можно записать

$$\widehat{L}_n \Big[\sum_{k=1}^{m} C_k y_k \Big] = \sum_{k=1}^{m} C_k \widehat{L}_n y_k = \sum_{k=1}^{m} C_k f_k(x),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 11.3.1. Любое частное решение $y_1(x)$ неоднородного уравнения $\widehat{L}_n y_1 = f_1(x)$ можно дополнить произвольной линейной комбинацией $\sum\limits_{k=2}^{m} C_k y_k$ решений соответствующего однородного уравнения $\widehat{L}_n y_k = 0$, $k = \overline{2, m}$.

Другими словами, и функция $y_1(x)$, и функция $y_1(x) + \sum\limits_{k=2}^{m} C_k y_k(x)$ являются частными решениями одного и того же неоднородного уравнения.

Действительно, положив в (11.10) $C_1 = 1$ и все $f_k = 0$ для $k = \overline{2, m}$, имеем

$$\widehat{L}_n \Big[y_1 + \sum_{k=2}^{m} C_k y_k \Big] = \widehat{L}_n y_1 + \sum_{k=2}^{m} C_k \widehat{L}_n y_k = \widehat{L}_n y_1 = f_1(x).$$

12. Линейно зависимые и независимые системы функций. Определители Вронского и Грама

До сих пор мы пользовались в основном понятием частного решения линейного уравнения. Чтобы найти общее решение, нам потребуется понятие линейной зависимости и независимости системы функций.

♦ Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ являются линейно зависимыми на $]a,b[$, если одна из них является линейной комбинацией других для всех $x \in]a,b[$, т.е. существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, из которых хотя бы одно не равно нулю, что

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0. \tag{12.1}$$

Если тождество (12.1) выполняется лишь в случае, когда все $\alpha_i = 0$, то функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ называются линейно независимыми на $]a,b[$.

♢ Выражение «хотя бы одно α_k не равно нулю» можно определить неравенством $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k^2 > 0$.

♢ Заметим, что если среди функций $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, хотя бы одна является тождественным нулем на промежутке $]a,b[$, то такая система функций является линейно зависимой.

Действительно, пусть, например, $\varphi_1(x) \equiv 0$. Выберем $\alpha_1 \neq 0$, а остальные $\alpha_k = 0$, $k = \overline{2,m}$. Тогда, очевидно, на $]a,b[$ имеет место тождество

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0, \qquad x \in]a,b[,$$

которое и означает, что система функций $\varphi_1(x) \equiv 0$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ линейно зависима на $]a,b[$, поскольку $\alpha_1 \neq 0$.

Из этого замечания следуют два частных вывода.

♢ Любая линейно независимая система не содержит нулевую функцию.

♢ Любую линейно независимую систему функций $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,m}$, можно превратить в линейно зависимую, дополнив её $(m+1)$-ой функцией, тождественно равной нулю на $]a,b[$.

Для систем, состоящих из двух функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, условие (12.1) имеет вид

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) = 0, \qquad x \in]a,b[, \tag{12.2}$$

или

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Отсюда следует, что условием линейной зависимости двух функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ является либо равенство нулю хотя бы одной из них, либо, в противном случае, выполнение соотношения

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \text{const}, \tag{12.3}$$

при котором существуют ненулевые α_1 и α_2:

$$-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \text{const},$$

обращающие (12.2) в тождество.

Для произвольных систем функций существуют более общие критерии исследования линейной зависимости, использующие интегральные или дифференциальные операции в зависимости от условий, налагаемых на функции $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1,m}$.

Чтобы сформулировать эти критерии, введём в рассмотрение определители Грама и Вронского.

Пусть

$$\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^m \tag{12.4}$$

— некоторая система функций, определённая на $]a,b[$.

♦ Определителем Грама системы (12.4) называется определитель

$$\Gamma[\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m] = \begin{vmatrix} \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle & \ldots & \langle\varphi_1|\varphi_m\rangle \\ \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle & \ldots & \langle\varphi_2|\varphi_m\rangle \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \langle\varphi_m|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_m|\varphi_2\rangle & \ldots & \langle\varphi_m|\varphi_m\rangle \end{vmatrix}, \tag{12.5}$$

элементы которого задаются числами

$$\langle\varphi_k|\varphi_s\rangle = \int\limits_b^a \varphi_k(x)\varphi_s(x)dx, \tag{12.6}$$

называемыми скалярным произведением функций $\varphi_k(x)$ и $\varphi_s(x)$.

♦ Определителем Вронского (вронскианом) системы (12.4) называется функциональный определитель

$$W[\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m] = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_m(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_m'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_1^{(m-1)}(x) & \varphi_2^{(m-1)}(x) & \ldots & \varphi_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \det\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ D \\ \ldots \\ D^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_m(x) \end{pmatrix}\right\}. \tag{12.7}$$

Как следует из (12.5), определитель Грама определён, например, на системах квадратично интегрируемых функций (обеспечивающих существование и конечность интегралов (12.6)), т.е. на функциях $\varphi_k(x) \in L_2$. Определитель Вронского определён на функциях, подчинённых более строгим требованиям: существование непрерывных производных вплоть до $(m-1)$-го порядка включительно, т.е. на функциях $\varphi_k(x) \in C^{m-1}_{]a,b[}$.

◊ Определитель Грама является числом, тогда как определитель Вронского в общем случае представляет собой функцию, которую, как мы увидим позже, можно рассматривать как решение некоторого дифференциального уравнения.

Сформулируем теперь критерии, с помощью которых исследуется линейная зависимость заданной системы функций.

Теорема 12.1 (критерий Грама). *Для того чтобы система функций $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, непрерывных на $[a,b]$, была линейно зависима на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы её определитель Грама обращался в нуль, т.е. $\Gamma[\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m] = 0$. В противном случае система функций линейно независима.*

Доказательство. Рассмотрим сначала систему из двух функций, т.е. $m=2$. Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ линейно зависимы. В таком случае они связаны соотношением (12.3): $\varphi_2(x) = \alpha\varphi_1(x)$, а их определитель Грама, согласно (12.5), (12.6), обращается в нуль:

$$\Gamma[\varphi_1,\varphi_2] = \Gamma[\varphi_1,\alpha\varphi_1] = \begin{vmatrix} \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1|\alpha\varphi_1\rangle \\ \langle\alpha\varphi_1|\varphi_1\rangle & \langle\alpha\varphi_1|\alpha\varphi_1\rangle \end{vmatrix} = \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle^2 \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Пусть теперь, наоборот, определитель Грама двух функций φ_1 и φ_2 равен нулю, т.е.

$$\Gamma[\varphi_1, \varphi_2] = \begin{vmatrix} \langle\varphi_1|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle \\ \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle & \langle\varphi_2|\varphi_2\rangle \end{vmatrix} = 0. \tag{12.8}$$

Как известно, определитель равен нулю тогда и только тогда, когда между его столбцами существует линейная зависимость. Поэтому, исходя из равенства (12.8), можно записать

$$\begin{gathered}\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = \alpha\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle, \\ \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle = \alpha\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle - \alpha\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = 0, \\ \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle - \alpha\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = 0,\end{gathered} \tag{12.9}$$

где α — коэффициент пропорциональности.

Равенства (12.9) с учётом (12.6) можно записать в виде

$$\begin{gathered}\langle\varphi_1|\varphi_1 - \alpha\varphi_2\rangle = 0, \\ \langle\varphi_2|\varphi_1 - \alpha\varphi_2\rangle = 0.\end{gathered} \tag{12.10}$$

Вычтя из первого уравнения (12.10) второе, умноженное на α, имеем

$$\langle\varphi_1 - \alpha\varphi_2|\varphi_1 - \alpha\varphi_2\rangle = \int\limits_a^b [\varphi_1(x) - \alpha\varphi_2(x)]^2 dx = 0.$$

Этот интеграл может быть равен нулю только при условии $\varphi_1(x) = \alpha\varphi_2(x)$, т.е. при условии линейной зависимости $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, что и требовалось доказать.

Для произвольного m доказательство проводится по индукции с использованием (12.1) вместо (12.2).

Перейдём теперь к определителю Вронского.

Лемма 12.1. *Если система функций $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, линейно зависима, то их вронскиан на интервале $]a, b[$ тождественно равен нулю, т.е.*

$$W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)] \equiv 0, \quad x \in]a, b[.$$

Доказательство. Если система функций $\varphi_k(x)$, $k = \overline{1, m}$, линейна зависима, то существуют постоянные α_k, $k = \overline{1, m}$, не равные нулю и такие, что

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0, \quad x \in]a, b[. \tag{12.11}$$

Поскольку вронскиан определён на системе функций, имеющих непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно, то, продифференцировав соотношение (12.11) $m-1$ раз, получим систему

$$\begin{gathered}\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x) = 0, \\ \alpha_1\varphi_1'(x) + \alpha_2\varphi_2'(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_1\varphi_1^{(m-1)}(x) + \alpha_2\varphi_2^{(m-1)}(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m^{(m-1)}(x) = 0.\end{gathered} \tag{12.12}$$

Неравенство нулю всех α_k одновременно означает, что эта алгебраическая для α_k система имеет нетривиальные решения. Из этого следует, что её определитель, которым является вронскиан $W[\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)]$, равен нулю во всех точках интервала $]a, b[$, т.е. на $]a, b[$ равен нулю тождественно.

Лемма 12.2. *Если вронскиан системы функций $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, отличен от нуля хотя бы в одной точке интервала $]a,b[$, то эта система функций линейно независима на $]a,b[$.*

Доказательство. Пусть существует точка $x_0\in]a,b[$, в которой вронскиан отличен от нуля: $W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\ldots,\varphi_m(x_0)]\neq 0$. Предположим, что система функций $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, линейно зависима. Тогда в силу леммы 12.1 вронскиан этой системы на интервале $]a,b[$ тождественно равен нулю, в том числе и в точке $x=x_0$. Но в этом случае равенство $W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\ldots,\varphi_m(x_0)]=0$ противоречит условию леммы $W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\ldots,\varphi_m(x_0)]\neq 0$, что и доказывает её справедливость.

Таким образом, мы установили, что если для исследуемой системы $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, в некоторой точке $x_0\in]a,b[$ её вронскиан $W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),\ldots,\varphi_m(x_0)]$, или коротко $W(x_0)$, не равен нулю: $W(x_0)\neq 0$, то, согласно лемме 12.2, эта система линейно независима. Если же $W(x_0)=0$, то вопрос о линейной зависимости функций остаётся открытым.

В частном случае, когда система функций $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,n}$, содержит n функций, являющихся решениями одного линейного уравнения n-го порядка, т.е. $\varphi_k(x)=y_k(x)$, где $\widehat{L}_n y_k(x)=0$, $k=\overline{1,n}$, вопрос о её линейной зависимости решается в рамках следующего утверждения.

Лемма 12.3. *Вронскиан $W(x)$ системы функций $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$, являющихся решениями линейного однородного уравнения*

$$\widehat{L}_n y_k=[D^n+a_{n-1}(x)D^{n-1}+\ldots+a_1(x)]y_k=0 \tag{12.13}$$

с непрерывными на $]a,b[$ коэффициентами $a_l(x)$, $l=\overline{0,n-1}$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$DW(x)=W'(x)=-a_{n-1}(x)W(x). \tag{12.14}$$

Доказательство. Запишем вронскиан системы функций $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}. \tag{12.15}$$

Доказательство проведём сначала для системы двух функций: $n=2$. Найдём

$$W'(x)=DW(x)=D\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ Dy_1(x) & Dy_2(x)\end{vmatrix}=D(y_1Dy_2-y_2Dy_1)=$$

$$=(Dy_1)(Dy_2)+y_1D^2y_2+(Dy_2)(Dy_1)-y_2D^2y_1=y_1D^2y_2-y_2D^2y_1. \tag{12.16}$$

Поскольку y_1 и y_2 являются решениями уравнения (12.13) при $n=2$, то

$$D^2y_k=-a_1(x)Dy_k-a_0(x)y_k,\quad k=1,2.$$

С учётом этого уравнение (12.16) запишется в виде

$$W'(x)=y_1(-a_1Dy_2-a_0y_2)-y_2(-a_1Dy_1-a_0y_1)=-a_1(y_1Dy_2-y_2Dy_1)=$$

$$=-a_1\begin{vmatrix} y_1 & y_2\\ Dy_2 & Dy_1\end{vmatrix}=-a_1W(x),$$

совпадающем с (12.14) при $n=2$, что и требовалось доказать.

Для произвольного n доказательство проводится методом математической индукции с использованием уравнения (12.13).

Теорема 12.2 (формула Лиувилля–Остроградского). *Пусть* $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ *— система решений уравнения* (12.13)*, а* $W(x)$ *— её вронскиан. Тогда справедлива формула*

$$W(x) = W(x_0) \exp\Bigl[-\int\limits_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)dt\Bigr], \quad]x_0, x[\subset]a, b[, \tag{12.17}$$

называемая формулой Лиувилля–Остроградского.

Доказательство. Разделив переменные в уравнении (12.14):

$$\frac{dW(x)}{W(x)} = -a_{n-1}(x)dx,$$

и проинтегрировав по промежутку $]x_0, x[\subset]a, b[$:

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dW(t)}{W(t)}dt = \ln\frac{W(x)}{W(x_0)} = -\int\limits_{x_0}^{x} a_{n-1}(t)dt,$$

убеждаемся в справедливости формулы (12.17).

Следствие 12.2.1. Вронскиан системы $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ решений уравнения $\widehat{L}_n y = 0$ (12.13) либо тождественно равен нулю на промежутке $]a, b[$, либо не обращается в нуль ни в одной его точке.

Это утверждение очевидным образом следует из формулы Лиувилля–Остроградского в предположении, что хотя бы в одной точке x_0 вронскиан $W(x_0) = 0$.

Следствие 12.2.2. Если в уравнении (12.13) $a_{n-1} = 0$, то вронскиан $W(x)$ является постоянной величиной: $W(x) = W(x_0)$.

◊ Обратим внимание, что формула Лиувилля–Остроградского справедлива только для систем, состоящих из решений линейных дифференциальных уравнений, и не применима к системам обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида. Более того, должно выполняться требование: число решений дифференциального уравнения должно совпадать с его порядком (см. примеры 12.1, 12.6, 13.4).

Таким образом, если функции

$$y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x) \tag{12.18}$$

являются решениями уравнения $\widehat{L}_n y(x) = 0$ (12.13) на промежутке $]a, b[$, то все приведённые выше результаты можно обобщить одной из следующих теорем.

Теорема 12.3. *Для того чтобы решения* (12.18) *были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан* $W(x)$ *обращался в нуль хотя бы в одной точке* $x_0 \in]a, b[$.

Теорема 12.4. *Для того чтобы решения* (12.18) *были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы их вронскиан* $W(x)$ *не обращался в нуль хотя бы в одной точке* $x_0 \in]a, b[$.

Пример 12.1. Исследовать на линейную зависимость систему функций

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x, \quad \varphi_3(x) = \frac{x^2}{2} \tag{12.19}$$

всеми рассмотренными выше методами. Возможно ли для неё применение формулы Лиувилля–Остроградского?

Решение. 1. *Использование определения.* Функции (12.19) определены на всей числовой оси. Предположим, что функции (12.19) линейно зависимы на этом промежутке. Тогда, согласно определению, справедливо тождество

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 \frac{x^2}{2} \equiv 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{12.20}$$

в котором все α_k не обращаются в нуль одновременно, т.е. выполняется неравенство $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Последнее невозможно (точнее, возможно, но только не более чем в двух точках), поскольку левая часть (12.20) является полиномом не выше второй степени, который, как известно, может обращаться в нуль не более чем в двух точках промежутка вещественной оси. Следовательно, функции (12.20) линейно независимы на любом промежутке $I_1 =]a, b[$.

2. Воспользуемся *определителем Грама.* Согласно определению (12.5), найдём ($a \neq b$)

$$\langle\varphi_1|\varphi_1\rangle = \langle 1|1\rangle = \int\limits_a^b 1^2 dx = b - a;$$

$$\langle\varphi_1|\varphi_2\rangle = \langle\varphi_2|\varphi_1\rangle = \langle 1|x\rangle = \int\limits_a^b 1 \cdot x\, dx = \frac{b^2 - a^2}{2};$$

$$\langle\varphi_1|\varphi_3\rangle = \langle\varphi_3|\varphi_1\rangle = \Big\langle 1\Big|\frac{x^2}{2}\Big\rangle = \int\limits_a^b 1 \cdot \frac{x^2}{2} dx = \frac{b^3 - a^3}{6};$$

$$\langle\varphi_2|\varphi_2\rangle = \langle x|x\rangle = \int\limits_a^b x \cdot x\, dx = \frac{b^3 - a^3}{3};$$

$$\langle\varphi_2|\varphi_3\rangle = \langle\varphi_3|\varphi_2\rangle = \Big\langle x\Big|\frac{x^2}{2}\Big\rangle = \int\limits_a^b x\Big(\frac{x^2}{2}\Big) dx = \frac{b^4 - a^4}{8};$$

$$\langle\varphi_3|\varphi_3\rangle = \Big\langle \frac{x^2}{2}\Big|\frac{x^2}{2}\Big\rangle = \int\limits_a^b \frac{x^2}{2}\frac{x^2}{2} dx = \frac{b^5 - a^5}{20}.$$

Отсюда

$$\Gamma\Big[1, x, \frac{x^2}{2}\Big] = \begin{vmatrix} (b-a) & (b^2 - a^2)/2 & (b^3 - a^3)/6 \\ (b^2 - a^2)/2 & (b^3 - a^3)/3 & (b^4 - a^4)/8 \\ (b^3 - a^3)/6 & (b^4 - a^4)/8 & (b^5 - a^5)/20 \end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по 3-ей строке:

$$\Gamma\Big[1, x, \frac{x^2}{2}\Big] = \frac{b^3 - a^3}{6}\frac{(b-a)^4}{144}(b^2 + a^2 + 4ab) -$$

$$-\frac{b^4-a^4}{8}\frac{(b-a)^4(b+a)}{24}+\frac{b^5-a^5}{20}\frac{(b-a)^4}{12}=$$
$$=\frac{(b-a)^4}{48}\Big[\frac{b^3-a^3}{18}(b^2+a^2+4ab)-\frac{b^4-a^4}{4}(b+a)+\frac{b^5-a^5}{5}\Big]=$$
$$=\frac{(b-a)^4}{24\cdot 360}[b^5-5b^4a+10b^3a^2-10b^2a^3+5ba^4-a^5]=\frac{(b-a)^9}{8640}.$$

Отсюда следует, что $\Gamma[1,x,x^2/2]\neq 0$ $(a\neq b)$ на любом промежутке $]a,b[\subset\mathbb{R}$, а, следовательно, система (12.19) линейно независима на этом промежутке.

$\Diamond$ Конечно, вычисление определителя Грама в данном случае достаточно громоздко. Это обусловлено характером системы (12.19), где все $\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle\neq 0$. Обычно критерий Грама используется для ортогональных функций, у которых $\langle\varphi_k|\varphi_l\rangle=0$ при $k\neq l$, что существенно упрощает вычисления (см. пример 12.4).

3. Воспользуемся *определителем Вронского*. Согласно определению (12.7), имеем

$$W(1,x,x^2/2)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2/2\\ 0 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0. \qquad (12.21)$$

Так как вронскиан (12.21) отличен от нуля на любом промежутке $]a,b[\subset\mathbb{R}$, то система (12.19), как и следовало ожидать, является линейно независимой в $\mathbb{R}$.

4. Метод *дифференциального уравнения для заданной системы функций*

Чтобы найти дифференциальное уравнение, решениями которого являются линейно независимые функции $1,x,x^2/2$, рассмотрим вспомогательную систему $1,x,x^2/2,y(x)$. Если рассматривать эти функции как решения одного уравнения 3-го порядка, т.е. считать $y(x)$ линейной комбинацией первых трех функций, то их вронскиан должен быть тождественным нулем:

$$W\Big[1,x,\frac{x^2}{2},y(x)\Big]=\begin{vmatrix}1 & x & x^2/2 & y(x)\\ 0 & 1 & x & y'(x)\\ 0 & 0 & 1 & y''(x)\\ 0 & 0 & 0 & y'''(x)\end{vmatrix}=0. \qquad (12.22)$$

Разложим определитель (12.22) по четвертой строке с учётом (12.21):

$$W\Big[1,x,\frac{x^2}{2},y(x)\Big]=W\Big[1,x,\frac{x^2}{2}\Big]y'''(x)=y'''(x)=0,$$

т.е.

$$y'''(x)=0. \qquad (12.23)$$

Уравнение (12.23) и есть искомое линейное уравнение 3-го порядка, частными решениями которого являются функции $1,x,x^2/2$ (12.19). В этом можно убедиться, подставив их в (12.23). Кроме того, поскольку уравнение (12.23) ещё и допускает понижение порядка, то трёхкратное интегрирование даёт его общее решение

$$y(x)=C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3,$$

частные решения которого и составляют линейно независимую систему функций $1,x,x^2/2$.

Из уравнения (12.23) следует, что $W(x)=1$. Действительно, в этом уравнении коэффициент $a_{3-1}(x)=a_2(x)=0$, и, следовательно, формула Лиувилля–Остроградского (12.17) в этом случае имеет вид

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int\limits_{x_0}^{x}a_2(t)dt}=W(x_0)e^0=W(x_0),\quad]x_0,x[\subset]a,b[. \qquad (12.24)$$

Здесь процедуру вычисления вронскиана можно с учётом (12.24) упростить, например, положив $x_0 = 0$:

$$W\Big[1, x, \frac{x^2}{2}\Big] = W\Big[1, x, \frac{x^2}{2}\Big]\Big|_{x=0} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\Bigg|_{x=0} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Пример 12.2. Пусть система функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^m$ определена на $I =]a, b[$.

1. Если эта система функций линейно независима на I, следует ли из этого их линейная независимость на любом промежутке $I_1 =]\alpha, \beta[\subset I$?

2. Если эта система функций линейно независима на некотором промежутке $I_1 =]\alpha, \beta[\subset I$, следует ли из этого их линейная независимость на всем промежутке I?

Решение. Ответ на первый вопрос отрицателен: не следует, а на второй положителен: следует. Рассмотрим ответы подробнее.

1. Приведём пример, подтверждающий отрицательный ответ на первый вопрос. Функции x и $|x|$ линейно независимы, например, на промежутке $I =]-1, 2[$, поскольку тождество

$$\alpha_1 x + \alpha_2|x| \equiv 0, \quad x \in I, \tag{12.25}$$

возможно лишь при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Действительно, при $x = -0{,}5$ из (12.25) имеем $-0{,}5(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, а при $x = 0{,}5$ соответственно $0{,}5(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$. Таким образом, получим алгебраическую систему

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \end{aligned}$$

имеющую только тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Это и означает линейную независимость x и $|x|$ на промежутке $I =]-1, 2[$.

Если теперь положить $x \in I_1 =]0, 2[$, то из (12.25) имеем $(\alpha_1 + \alpha_2)x \equiv 0$, откуда следует, например, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$ и линейная зависимость x и $|x|$ на промежутке I_1. Если же $x \in I_2 =]-1, 0[$, то из (12.25) имеем $(\alpha_1 - \alpha_2)x = 0$, откуда следует, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ и линейная зависимость x и $|x|$ на промежутке I_2.

Таким образом, функции x и $|x|$ линейно независимы на промежутке $I =]-1, 2[$, но линейно зависимы как на $I_1 =]0, 2[$, так и на $I_2 =]-1, 0[$.

Справедливости ради отметим, что, например, в промежутке $I_3 =]-1, 1[\subset I$ функции x и $|x|$ все-таки остаются линейно независимыми. Они будут таковыми на любом промежутке, содержащим точку $x = 0$, роль которой мы выясним позднее (см. разд. «Особые точки дифференциального уравнения»).

По этой же причине при исследовании линейной зависимости функций x и $|x|$ мы не могли воспользоваться их вронскианом, поскольку непрерывная функция $|x|$ имеет разрывную в точке $x = 0$ первую производную.

2. Предположим, что исходная система, линейно независимая на I_1, на всем промежутке $I \subset I_1$ линейно зависима. Тогда на I имеет место тождество

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_m\varphi_m(x) \equiv 0, \quad x \in I,$$

в котором все α_k не обращаются в нуль одновременно. Поскольку $I \supset I_1$, то тождество выполняется и на I_1. Но это означает линейную зависимость функций на I_1, что противоречит условию, доказывая тем самым линейную независимость системы на всем промежутке I.

Далее нам неоднократно придётся обращаться к вычислению вронскианов от трех и более функций. В следующем примере будет получена полезная формула, позволяющая понижать порядок исходного вронскиана.

Пример 12.3. Показать, что если функции $\varphi_k(x)$, $k=\overline{1,m}$, непрерывно дифференцируемы $m-1$ раз на промежутке $]a,b[$ и на этом промежутке $\varphi_1(x)\neq 0$, то для вронскиана функций из этой системы справедливы формулы понижения порядка

$$W[\varphi_1,\varphi_2]=\varphi_1^2\Big(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)', \quad m=2; \tag{12.26}$$

$$W[\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_m]=\varphi_1^m W\Big[\Big(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)',\Big(\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\Big)',\ldots,\Big(\frac{\varphi_m}{\varphi_1}\Big)'\Big]. \tag{12.27}$$

Решение. Формула (12.26) очевидна, поскольку

$$W[\varphi_1,\varphi_2]=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1' & \varphi_2'\end{vmatrix}=\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2=\varphi_1^2\Big(\frac{\varphi_1\varphi_2'-\varphi_1'\varphi_2}{\varphi_1^2}\Big)=\varphi_1^2\Big(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)'.$$

Получим теперь эту формулу таким способом, который можно использовать для вывода более общего соотношения (12.27). Заметим, что

$$\Big(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\Big)'=\varphi_k'\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)+\varphi_k\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)', \quad k=1,2, \tag{12.28}$$

откуда

$$\varphi_1\Big(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\Big)'=\varphi_k'+\varphi_k\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1, \quad k=1,2,$$

и, в частности,
при $k=1$

$$0=\varphi_1'+\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1^2, \tag{12.29}$$

при $k=2$

$$\varphi_1\Big(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)'=\varphi_2'+\varphi_2\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1. \tag{12.30}$$

Заметим далее, что если в определителе второго порядка

$$W[\varphi_1,\varphi_2]=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1' & \varphi_2'\end{vmatrix} \tag{12.31}$$

первую строку умножить на $(1/\varphi_1)'\varphi_1$ (этот множитель подсказан формулой (12.29)) и сложить со второй строкой, то мы получим определитель

$$W[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1'+\Big(\dfrac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1^2 & \varphi_2'+\varphi_2\Big(\dfrac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1\end{vmatrix},$$

который с учётом (12.29) и (12.30) примет вид

$$W[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ 0 & \varphi_1\Big(\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)'\end{vmatrix}=\varphi_1^2\Big(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\Big)'.$$

Формула (12.27) получится аналогично, если вместо (12.28)–(12.30) воспользоваться формулой Лейбница

$$\Big(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\Big)^{(l)}=\varphi_k^{(l)}\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)+C_l^1\varphi_k^{(l-1)}\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'+\ldots+C_l^{l-1}\varphi_k'\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l-1)}+\varphi_k\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l)},$$

где $k=\overline{1,m}$ и $l=\overline{1,m-1}$, $C_s^m=m!/s!(m-s)!$, и следующей из неё формулой

$$\varphi_1\Big(\frac{\varphi_k}{\varphi_1}\Big)^{(l)}=\varphi_k^{(l)}+C_l^1\varphi_k^{(l-1)}\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1+\ldots+C_l^{l-1}\varphi_k'\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l-1)}\varphi_1+\varphi_k\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l)}\varphi_1.$$

В частности, при $k=1$

$$0=\varphi_1^{(l)}+C_l^1\varphi_1^{(l-1)}\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)'\varphi_1+\ldots+C_l^{l-1}\varphi_1'\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l-1)}\varphi_1+\varphi_1\Big(\frac{1}{\varphi_1}\Big)^{(l)}\varphi_1.$$

Пример 12.4. Исследовать линейную независимость функций $\{\sin kx\}_{k=1}^4$ на промежутке $]0, \pi[$.

Решение. 1. Воспользуемся определителем Грама

$$\Gamma[\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x] =$$
$$= \begin{vmatrix} \langle \sin x|\sin x\rangle & \langle \sin x|\sin 2x\rangle & \langle \sin x|\sin 3x\rangle & \langle \sin x|\sin 4x\rangle \\ \langle \sin 2x|\sin x\rangle & \langle \sin 2x|\sin 2x\rangle & \langle \sin 2x|\sin 3x\rangle & \langle \sin 2x|\sin 4x\rangle \\ \langle \sin 3x|\sin x\rangle & \langle \sin 3x|\sin 2x\rangle & \langle \sin 3x|\sin 3x\rangle & \langle \sin 3x|\sin 4x\rangle \\ \langle \sin 4x|\sin x\rangle & \langle \sin 4x|\sin 2x\rangle & \langle \sin 4x|\sin 3x\rangle & \langle \sin 4x|\sin 4x\rangle \end{vmatrix}.$$

Вычислим сначала диагональные скалярные произведения:

$$\langle \sin kx|\sin kx\rangle = \int\limits_0^\pi \sin^2 kx\, dx = \frac{\pi}{2} \neq 0 \tag{12.32}$$

для всех $k = \overline{1,4}$. Остальные $(k \neq l)$ скалярные произведения равны нулю:

$$\langle \sin kx|\sin lx\rangle = \int\limits_0^\pi \sin kx \sin lx\, dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi [\cos(k-l)x - \cos(k+l)x]dx = 0. \tag{12.33}$$

Таким образом,

$$\Gamma[\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x] = \begin{vmatrix} \pi/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi/2 \end{vmatrix} = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^4 \neq 0,$$

что означает линейную независимость исследуемых функций.

$\lozenge$ Система функций, удовлетворяющих условиям (12.32) и (12.33) на некотором промежутке $]a, b[$, называется ортогональной на этом промежутке. Вычисление определителя Грама таких функций показывает, что ортогональные на $]a, b[$ функции линейно независимы на этом промежутке.

2. Воспользуемся определителем Вронского

$$W[\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x] = \begin{vmatrix} \sin x & \sin 2x & \sin 3x & \sin 4x \\ \cos x & 2\cos 2x & 3\cos 3x & 4\cos 4x \\ -\sin x & -4\sin 2x & -9\sin 3x & -16\sin 4x \\ -\cos x & -8\cos 2x & -9\cos 3x & -64\cos 4x \end{vmatrix}.$$

Вместо громоздкого вычисления этого определителя воспользуемся формулой (12.27):

$$W[\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x] = \sin^4 x\, W\Big[\Big(\frac{\sin 2x}{\sin x}\Big)', \Big(\frac{\sin 3x}{\sin x}\Big)'\Big(\frac{\sin 4x}{\sin x}\Big)'\Big],$$

поскольку все функции удовлетворяют условиям её применимости.

Теперь, используя известные тригонометрические соотношения, найдём

$$\Big(\frac{\sin 2x}{\sin x}\Big)' = \Big(\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}\Big)' = -2\sin x;$$
$$\Big(\frac{\sin 3x}{\sin x}\Big)' = \Big(\frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x}\Big)' = (3 - 4\sin^2 x)' = -8\sin x\cos x;$$
$$\Big(\frac{\sin 4x}{\sin x}\Big)' = \Big[\frac{\cos x(4\sin x - 8\sin^3 x)}{\sin x}\Big]' = (4\cos x - 8\cos x\sin^2 x)' =$$

$$= \sin x(-4 + 8\sin^2 x - 16\cos^2 x).$$

Тогда

$$W(x) = \sin^4 x W[-2\sin x, -8\sin x\cos x, \sin x(-4 + 8\sin^2 x - 16\cos^2 x)].$$

Применив формулу (12.27) ещё раз, получим

$$W(x) = \sin^4 x(-2\sin x)^3 W[(4\cos x)', (2 - 4\sin^2 x + 8\cos^2 x)'] =$$
$$= -8\sin^7 x\, W[-4\sin x, -24\sin x\cos x]$$

и, наконец,

$$W(x) = -8\sin^4 x(-4\sin x)^2\Big(\frac{-24\sin x\cos x}{-4\sin x}\Big)' = 32\sin^9 x(6\cos x)' = -192\sin^{10} x.$$

Вронскиан $W[\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x] = -192\sin^{10} x \neq 0$ для всех x из промежутка $]0, \pi[$, что подтверждает результат, полученный методом Грама: система линейно независима.

Пример 12.5. Исследовать на линейную зависимость системы функций:

$$1)\ 1, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x; \quad 2)\ e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x; \quad 3)\ 1, \arcsin x, \arccos x; \quad 4)\ x^2, x|x|.$$

Решение. 1. Функции $1, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ обладают непрерывными производными любого порядка на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$. Вычислим их вронскиан:

$$W[1, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x] = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ 0 & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ 0 & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \end{vmatrix} = \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x = -1 \neq 0.$$

Это означает линейную независимость заданной системы функций на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$.

2. Как и в предыдущем случае, функции $e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ обладают непрерывными производными любого порядка. Их вронскиан можно вычислить как по определению:

$$W[e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x] = \begin{vmatrix} e^x & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ e^x & \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \\ e^x & \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \end{vmatrix} = 0, \quad x \in]a, b[\subset \mathbb{R}$$

(первая и третья строки совпадают), так и по формуле понижения порядка (12.27):

$$W[e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x] = e^{3x} W\Big[\Big(\frac{e^x + e^{-x}}{2e^x}\Big)', \Big(\frac{e^x - e^{-x}}{2e^x}\Big)'\Big] =$$
$$= e^{3x} W[-e^{-2x}, e^{-2x}] = e^{3x} e^{-4x}(-1)' = 0, \quad x \in]a, b[\subset \mathbb{R}.$$

Естественно, результаты совпали. Вронскиан системы обращается в нуль, и вопрос о линейной зависимости системы остаётся открытым.

Однако если учесть тот факт, что функции $e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ являются частными решениями одного уравнения 3-го порядка $y''' - y' = 0$, то вывод об их линейной зависимости вытекает непосредственно из теоремы 12.3.

Этот вывод подтверждается и использованием определения линейной независимости. Действительно, линейная комбинация

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 \operatorname{ch} x + \alpha_3 \operatorname{sh} x \equiv 0$$

или

$$\Big(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{\alpha_3}{2}\Big)e^x + \Big(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_3}{2}\Big)e^{-x} \equiv 0$$

обращается тождественно в нуль на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$ при ненулевых коэффициентах, например $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_1 = -1$.

3. Функции $1, \arcsin x, \arccos x$ обладают непрерывными производными любого порядка на промежутке $]-1, 1[$. Вычислим их вронскиан по формуле понижения порядка (12.27):

$$W[1, \arcsin x, \arccos x] = W\Big[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big] = 0, \quad x \in]-1, 1[,$$

(функции различаются только знаком).

Поскольку вронскиан обращается в нуль и сделать вывод о линейной зависимости этих функций нельзя, воспользуемся определением:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \arcsin x + \alpha_3 \arccos x \equiv 0, \quad x \in]-1, 1[.$$

Эта линейная комбинация обращается тождественно в нуль на промежутке $]-1, 1[$ при ненулевых коэффициентах: $\alpha_1 = -\pi/2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$ в силу известного равенства

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, функции $1, \arcsin x, \arccos x$ на промежутке $]-1, 1[$ линейно зависимы.

4. Непрерывные функции x^2 и $x|x|$ обладают непрерывными производными первого порядка на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$. Вычислим их вронскиан:

$$W[x^2, x|x|] = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & 2|x| \end{vmatrix} \equiv 0. \tag{12.34}$$

Поскольку вронскиан обращается в нуль и вывод о линейной зависимости сделать нельзя, то обратимся к определению. Линейная комбинация

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x|x| \equiv 0 \tag{12.35}$$

на любом промежутке $]-|a|, |b|[\subset \mathbb{R}$, содержащем точку $x = 0$, обращается в нуль только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Действительно, $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, например, при $x = -1$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ при $x = 1$. Однородная система $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ имеет только тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Это означает, что на любом промежутке $]-|a|, |b|[\subset \mathbb{R}$ функции x^2 и $x|x|$ линейно независимы.

Если линейную комбинацию (12.35) рассматривать на любом промежутке, не содержащем точку $x = 0$, например, на $]|a|, |b|[$ или $]-|a|, -|b|[$, то функции становятся линейно зависимыми. Действительно, на промежутке $]|a|, |b|[$ эти функции просто совпадают: x^2 и $x|x| = x^2$, а на промежутке $]-|a|, -|b|[$ они различаются только знаком: x^2 и $x|x| = -x^2$.

Система функций x^2 и $x|x|$ является наглядным примером систем, вронскиан которых тождественно равен нулю как на промежутке их линейной зависимости, так и на промежутке их линейной независимости.

Пример 12.6. Показать, что функции $1, x, \ldots, x^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, линейно независимы на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$. Записать уравнение, решениями которого являются эти функции.

Решение. Этот пример является обобщением примера 12.1, где рассматривалась аналогичная система для $m = 3$. Мы не будем в данном случае использовать определитель Грама в силу громоздкости его вычисления, а воспользуемся определением линейной независимости системы функций и их вронскианом.

Прежде, однако, отметим, что исследуемые функции являются непрерывными и имеют непрерывные производные любого порядка на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$.

1. Воспользуемся определением и предположим, что функции линейно зависимы на некотором промежутке $]a, b[$. Тогда на этом промежутке справедливо тождество

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1} \equiv 0, \qquad (12.36)$$

в котором все α_k, $k = \overline{0, m-1}$, не обращаются в нуль одновременно. Но это тождество не может быть справедливым для всех точек промежутка $]a, b[$, поскольку левая часть (12.36) является полиномом степени не выше $m-1$, который, как известно, может обращаться в нуль не более чем в $(m-1)$-й точке этого промежутка. Следовательно, функции $1, x, \ldots, x^{m-1}$ линейно независимы на $]a, b[$.

2. Этот же результат даёт вычисление вронскиана:

$$W[1, x, \ldots, x^{m-1}] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{m-1} \\ 0 & 1! & 2x & \ldots & (m-1)x^{m-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! \end{vmatrix} = 1 \cdot 1! \cdot 2! \cdots (m-1)! \neq 0.$$

3. Поскольку вронскиан системы отличен от нуля и имеет треугольный вид, то легко получить уравнение, решениями которого являются заданные функции. Проведя вычисления, аналогичные приведённым в примере 12.1, найдём

$$W[1, x, \ldots, x^{m-1}, y(x)] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{m-1} & y(x) \\ 0 & 1! & 2x & \ldots & (m-1)x^{m-2} & y'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (m-1)! & y^{(m-1)}(x) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & y^{(m)}(x) \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$y^{(m)}(x) = 0. \qquad (12.37)$$

Это уравнение допускает понижение порядка. Проинтегрировав его m раз, получим его общее решение

$$y(x) = C_1 + C_2 x + \ldots + C_{m-1} x^{m-1}.$$

Очевидно, что исходная система $1, x, \ldots, x^{m-1}$ есть система линейно независимых на любом промежутке $]a, b[$ частных решений уравнения (12.37).

Пример 12.7. Показать, что функции $e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_m x}$ линейно независимы на $]a, b[$, если $k_1, \ldots, k_m$ — различные комплексные числа.

Решение. Действительно,

$$W[e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_m x}] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & \ldots & e^{k_m x} \\ k_1 e^{k_1 x} & \ldots & k_m e^{k_m x} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{m-1} e^{k_1 x} & \ldots & k_m^{m-1} e^{k_m x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(k_1 + \ldots + k_m)x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & \ldots & k_m \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ k_1^{m-1} & \ldots & k_m^{m-1} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + \ldots + k_m)x} \prod_{1 \leqslant j \leqslant i < m-1} (k_i - k_j) \neq 0,$$

так как последний определитель есть определитель Вандермонда, который не равен нулю, если все k_i различны, как не равна нулю и $\exp[(k_1 + \ldots + k_m)x]$.

Рассмотрим, наконец, комплекснозначные функции действительного аргумента $w(x) = u(x) + iv(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Пример 12.8. Показать, что если система функций

$$w_k(x) = u_k(x) + iv_k(x), \quad w_k^*(x) = u_k(x) - iv_k(x), \quad k = \overline{1, m},$$

линейно независима на промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$, то система функций

$$u_k(x), v_k(x), \quad k = \overline{1, m},$$

также линейно независима на этом промежутке.

Решение. Предположим противное:

$$\sum_{k=1}^{m} [\alpha_k u_k(x) + \beta_k v_k(x)] \equiv 0,$$

где α_k и β_k – некоторые коэффициенты линейной комбинации. Приняв во внимание, что

$$u_k(x) = \frac{1}{2}[w_k(x) + w_k^*(x)], \quad v_k(x) = \frac{1}{2i}[w_k(x) - w_k^*(x)],$$

это тождество можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{m} \Big[\frac{\alpha_k}{2}(w_k + w_k^*) + \frac{\beta_k}{2i}(w_k - w_k^*)\Big] \equiv 0$$

или

$$\sum_{k=1}^{m} \Big[\frac{\alpha_k + i\beta_k}{2} w_k(x) + \frac{\alpha_k - i\beta_k}{2i} w_k^*(x)\Big] \equiv 0.$$

Из последнего равенства в силу линейной независимости на $]a, b[$ системы функций $w_k(x), w_k^*(x)$, $k = \overline{1, m}$, следует

$$\begin{array}{l} \alpha_k + i\beta_k = 0, \\ \alpha_k - i\beta_k = 0, \end{array} \quad k \in \overline{1, m},$$

откуда $\alpha_k = \beta_k \equiv 0$, $k = \overline{1, m}$, что и означает линейную независимость функций $u_k(x), v_k(x)$, $k = \overline{1, m}$.

Пример 12.9. Доказать линейную независимость на любом промежутке $[a, b[\subset \mathbb{R}$ системы функций

$$\begin{array}{l} e^{\alpha_1 x} \cos \beta_1 x, \ e^{\alpha_2 x} \cos \beta_2 x, \ \ldots, \ e^{\alpha_m x} \cos \beta_m x, \\ e^{\alpha_1 x} \sin \beta_1 x, \ e^{\alpha_2 x} \sin \beta_2 x, \ \ldots, \ e^{\alpha_m x} \sin \beta_m x, \end{array}$$

где α_s, β_s — действительные числа, $\beta_s \neq 0$, $s = \overline{1, m}$, при условии, что все комплексные числа $k_s = \alpha_s + i\beta_s$ не равны между собой и $k_s \neq \bar{k}_s$.

Решение. Данные функции линейно независимы на любом промежутке $]a, b[\subset \mathbb{R}$, так как они являются действительными и мнимыми частями функций вида

$$\begin{array}{l} w_s = e^{k_s x} = e^{\alpha_s x}(\cos \beta_s x + i \sin \beta_s x), \\ \bar{w}_s = e^{\bar{k}_s x} = e^{\alpha_s x}(\cos \beta_s x - i \sin \beta_s x), \end{array} \qquad s = \overline{1, m},$$

линейная независимость которых показана в примере 12.7.

13. Фундаментальные системы функций и общее решение линейных однородных уравнений

Мы продолжаем рассматривать линейное однородное уравнение

$$\widehat{L}_n y(x) = [D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x)]y(x) = 0 \tag{13.1}$$

с коэффициентами $a_k(x) \in \mathcal{C}_{]a,b[}$, $k = \overline{1, n-1}$.

♦ *Фундаментальной системой решений* уравнения (13.1) называется система из n линейно независимых на $]a, b[$ решений этого уравнения $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$.

Лемма 13.1. *Фундаментальные системы решений уравнения* (13.1) *существуют.*

Доказательство. Задача Коши для уравнения (13.1), как уже отмечалось выше, имеет единственное решение в точке $x_0 \in]a, b[$ при любых начальных значениях $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$.

Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — решения уравнения (13.1), определяемые начальными условиями

$$\begin{array}{cccc} y_1(x_0) = y_{10}, & y_2(x_0) = y_{20}, & \ldots, & y_n(x_0) = y_{n0}; \\ y_1'(x_0) = y_{10}', & y_2'(x_0) = y_{20}', & \ldots, & y_n'(x_0) = y_{n0}'; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)}; \end{array} \quad x_0 \in]a, b[, \tag{13.2}$$

при условии, что столбцы в (13.2), задающие начальные данные каждой функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, являются линейно независимыми, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_{10} & y_{20} & \cdots & y_{n0} \\ y_{10}' & y_{20}' & \cdots & y_{n0}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{10}^{(n-1)} & y_{20}^{(n-1)} & \cdots & y_{n0}^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как $W[y_1(x), \ldots, y_n(x)]\big|_{x=x_0\in]a,b[} = W(x_0) = \Delta \neq 0$, то, согласно теореме 12.2, система функций $\{y_k(x)\}_{k=1}^n$ линейно независима на $]a, b[$, их количество равно n, а потому эти функции составляют фундаментальную систему решений уравнения (13.1).

Теорема 13.1 (о структуре общего решения однородного уравнения). *Если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений уравнения* (13.1), *то его общее решение имеет вид*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x), \tag{13.3}$$

где C_k, $k = \overline{1, n}$, — произвольные постоянные.

Доказательство. Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (13.1), существование которой доказано в лемме 13.1. Из решений этой системы составим линейную комбинацию

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x)$$

с произвольными постоянными C_k, $k = \overline{1, n}$. В силу теоремы 11.2 (о линейности решений однородного уравнения) эта линейная комбинация также является решением уравнения (13.1). Это решение будет общим, если выбором произвольных постоянных его можно превратить в частное решение (13.1) с наперёд заданными начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad x_0 \in]a, b[. \tag{13.4}$$

Исследуем эту возможность, подставив (13.3) в (13.4):

$$\begin{array}{l} C_1 y_1(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0, \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{array} \tag{13.5}$$

Полученная неоднородная система имеет единственное решение $C_1, C_2, \ldots, C_n$, поскольку определитель матрицы системы отличен от нуля ($\Delta = W(y_1(x), \ldots, y_n(x))\big|_{x_0 \in]a,b[} \neq 0$) в силу линейной независимости фундаментальной системы решений. Это и означает, что решение (13.3) — действительно общее решение уравнения (13.1).

◇ Утверждение теоремы 13.1 является фундаментальным результатом теории дифференциальных уравнений, отделяя класс линейных уравнений от всех остальных, т.е. нелинейных дифференциальных уравнений. Как показывает формула (13.3), для того чтобы найти общее решение, т.е. все решения линейного однородного уравнения, достаточно найти всего n линейно независимых решений: два для $n = 2$, три для $n = 3$ и т.д. Для нелинейных уравнений ситуация с общим решением значительно сложнее. Например, если нам известны десять или даже сто десять решений нелинейного уравнения первого порядка, то нет никакого рецепта, позволяющего найти ещё одно решение по уже известным, не говоря уже обо всех его решениях.

Итак, общее решение уравнения (13.1) определяется формулой (13.3). Чтобы найти частное решение — решение задачи Коши, требуется решить алгебраическую систему (13.5), определителем которой является вронскиан фундаментальной системы решений $W[y_1(x), \ldots, y_n(x)]\big|_{x=x_0 \in]a,b[} = W(x_0)$. Это можно сделать методом Крамера, методом обратной матрицы или любым другим методом, известным из линейной алгебры. Можно, однако, вместо произвольной фундаментальной системы рассматривать так называемую нормальную фундаментальную систему.

♦ Фундаментальная система решений $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ называется *нормальной*, или *нормированной в точке* $x = x_0 \in]a, b[$, если она удовлетворяет условиям

$$\begin{array}{llll} y_1(x_0) = 1, & y_1'(x_0) = 0, & \ldots, & y_1^{(n-1)}(x_0) = 0; \\ y_2(x_0) = 0, & y_2'(x_0) = 1, & \ldots, & y_2^{(n-1)}(x_0) = 0; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \\ y_n(x_0) = 0, & y_n'(x_0) = 0, & \ldots, & y_n^{(n-1)}(x_0) = 1, \end{array}$$

которые могут быть записаны в виде

$$[D^{s-1} y_k(x)]\big|_{x=x_0 \in]a,b[} = \delta_{sk} = \begin{cases} 0, & s \neq k, \\ 1, & s = k, \end{cases} \quad s, k = \overline{1, n}. \tag{13.6}$$

В этом случае матрица системы (13.5) является диагональной и система имеет вид

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = y_0', \quad \ldots, \quad C_n = y_0^{(n-1)}, \tag{13.7}$$

задавая явное выражение произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$ через начальные значения $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$.

Таким образом, если $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ — нормированная в точке $x = x_0 \in]a, b[$ фундаментальная система решений уравнения (13.1), то его общее решение с учётом (13.7) можно записать в виде

$$y(x) = y_0 y_1(x) + y_0' y_2(x) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_n(x), \tag{13.8}$$

если считать начальные данные $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ произвольными постоянными.

♦ Общее решение в форме (13.8) называется *общим решением уравнения* (13.1) *в форме Коши*. Другими словами, общее решение (13.8) уравнения (13.1), построенное на нормированной в точке $x = x_0 \in]a, b[$ фундаментальной системе $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, называется *общим решением в форме Коши*.

Очевидно, что общее решение в форме Коши имеет ряд преимуществ, однако, чтобы его найти, необходимо располагать нормированной фундаментальной системой решений. Рассмотрим процедуру нормировки произвольной фундаментальной системы решений. Для этого введём в рассмотрение фундаментальную матрицу фундаментальной системы решений.

♦ *Фундаментальной матрицей фундаментальной системы решений* уравнения (13.1) называется матрица вида

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \tag{13.9}$$

определитель которой является вронскианом фундаментальной системы

$$\det Y(x) = W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] \neq 0, \quad x \in]a, b[.$$

♦ Фундаментальная матрица $Y_{x_0}(x)$, построенная на нормированной фундаментальной системе решений, т.е. фундаментальная матрица, удовлетворяющая начальным условиям

$$\begin{gathered} Y_{x_0}(x)\big|_{x=x_0\in]a,b[} = \mathbb{I}; \\ \det Y_{x_0}(x_0) = W(x_0) = 1, \end{gathered} \tag{13.10}$$

называется *матрицантом*.

Пусть $Y(x)$ — фундаментальная матрица произвольной фундаментальной системы решений $y_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, а $Y_{x_0}(x)$ — её матрицант, построенный на нормированной в точке $x_0 \in]a, b[$ фундаментальной системе $y_{x_0 k}(x)$, $k = \overline{1, n}$. Обозначим через A некоторую матрицу, переводящую функциональную матрицу $Y(x)$ в её матрицант $Y_{x_0}(x)$, т.е.

$$Y_{x_0}(x) = Y(x)A. \tag{13.11}$$

♢ Только такое произведение позволяет создавать линейные комбинации фундаментальных решений — первая строка, их производных — вторая строка и т.д.

Чтобы найти матрицу A, положим в (13.11) $x = x_0 \in]a, b[$. Тогда

$$Y_{x_0}(x_0) = Y(x_0)A$$

или с учётом (13.10)

$$\mathbb{I} = Y(x_0)A. \tag{13.12}$$

Поскольку $\det Y(x_0) = W(x_0) \neq 0$, то матрица $Y(x_0)$ является невырожденной и имеет обратную матрицу $Y^{-1}(x_0)$. Умножив (13.12) на $Y^{-1}(x_0)$ слева, получим

$$A = Y^{-1}(x_0).$$

Следовательно, соотношение (13.11) можно записать в виде

$$Y_{x_0}(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0). \tag{13.13}$$

♦ Процедура вычисления $Y_{x_0}(x)$ по формуле (13.13) называется *нормировкой фундаментальной системы решений в точке* x_0.

Нормировка позволяет перейти от произвольной фундаментальной системы решений $y_k(x)$, $k = \overline{1,n}$, к фундаментальной системе решений $y_{x_0k}(x)$, $k = \overline{1,n}$, нормированной в заданной точке $x_0 \in]a,b[$. Таким образом,

1) чтобы найти общее решение линейного уравнения (13.1), достаточно найти любую его фундаментальную систему решений, т.е. n любых (частных) линейно независимых решений этого уравнения (так как уравнение (13.1) не имеет особых решений, любое его решение является частным);

2) найденная фундаментальная система решений определяет по формуле (13.3) общее решение уравнения, а по формуле (13.8) — его общее решение в форме Коши, если эта фундаментальная система нормирована в точке $x_0 \in]a,b[$;

3) чтобы найти решения задачи Коши, т.е. решения уравнения (13.1) с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, можно исходить из общего решения как в форме (13.3), так и в форме (13.8). Если выбирать его в виде (13.3), то необходимо решить алгебраическую систему (13.5), определяющую постоянные C_k, $k = \overline{1,n}$. Если же выбирать общее решение в форме Коши (13.8), то решение задачи Коши задаётся непосредственно формулой (13.8) при подстановке в неё конкретных начальных данных. В этом случае для нормировки фундаментальной системы решений в точке x_0 следует воспользоваться формулой (13.13).

Перейдём к примерам.

Пример 13.1. Показать, что функции $1, x, x^2/2$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'''(x) = 0$. Нормировать эту систему в точках $x_0 = 0$ и $x_0 = 1$. Найти решение задачи Коши

$$\begin{aligned} &1)\ \ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4; \\ &2)\ \ y(1) = 2, \quad y'(1) = 3, \quad y''(1) = 6. \end{aligned}$$

Решение. В примере 11.2 было показано, что функции $1, x, x^2/2$ являются решениями уравнения $y'''(x) = 0$ и линейно независимы на промежутке $]-\infty, \infty[$. Следовательно, согласно определению, они на указанном промежутке образуют фундаментальную систему решений уравнения $y'''(x) = 0$. Его общее решение, согласно теореме 13.1, имеет вид

$$y(x) = C_3\frac{x^2}{2} + C_2x + C_1. \tag{13.14}$$

Для нормировки фундаментальной системы решений выпишем фундаментальную матрицу

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13.15}$$

Поскольку в точке $x_0 = 0$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I},$$

то обратная матрица $Y^{-1}(0)$ также является единичной:

$$Y^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I},$$

и, следовательно,

$$Y_0(x) = Y(x)Y^{-1}(0) = Y(x)\mathbb{I} = Y(x).$$

Это означает, что относительно точки $x_0 = 0$ фундаментальная матрица (13.15) является матрицантом и общее решение (13.14) является одновременно и общим решением в форме Коши. Следовательно, вместо (13.14) можно записать

$$y(x) = y_0 + y_0'x + y_0''\frac{x^2}{2},$$

и тогда решение задачи Коши 1) находится простой подстановкой начальных данных $y_0'' = y''(0) = 4$, $y_0' = y'(0) = 2$, $y_0 = y(0) = 1$, т.е.

$$y(x) = 1 + 2x + 2x^2. \tag{13.16}$$

Нормируем фундаментальную систему $1, x, x^2/2$ в точке $x_0 = 1$ и найдём решению задачи Коши 2). Подставив $x_0 = 1$ в (13.15), запишем

$$Y(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det Y(1) = 1. \tag{13.17}$$

Обратную матрицу $Y^{-1}(1)$ можно найти методом элементарных преобразований. Выписав матрицу Γ и проведя указанные элементарные преобразования:

$$\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{S_2-S_3}{\sim} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{S_1-S_2}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{S_1-S_3/2}{\sim} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

получим

$$Y^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Y_1(x) = Y(x)Y^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x-1 & 1/2 - x + x^2/2 \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{13.18}$$

Первая строка матрицанта (13.18) определяет нормированную в точке $x_0 = 1$ фундаментальную систему решений уравнения $y'''(x) = 0$:

$$y_{11}(x) = 1, \quad y_{12}(x) = x - 1, \quad y_{13}(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}. \tag{13.19}$$

С её помощью можно перейти от общего решения (13.14) к общему решению в форме Коши

$$y(x) = y_0 + y_0'(x-1) + y_0''\Big(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\Big). \tag{13.20}$$

Теперь решение задачи Коши 2) находится подстановкой в (13.20) начальных данных $y_0'' = y''(1) = 6$, $y_0' = y'(1) = 3$, $y_0 = y(1) = 2$, т.е.

$$y(x) = 2 + 3(x-1) + 6\Big(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\Big) = 2 - 3x + 3x^2. \qquad (13.21)$$

Это решение можно получить другим способом, не прибегая к нормировке (13.19) фундаментальной системы решений

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = x, \quad y_3(x) = \frac{x^2}{2},$$

а исходя из общего решения (13.14) и системы (13.8). Согласно начальным данным

$$\begin{aligned}
&y(x)\big|_{x=1} = \Big(C_1 + C_2x + C_3\frac{x^2}{2}\Big)\Big|_{x=1} = C_1 + C_2 + \frac{C_3}{2} = 2;\\
&y'(x)\big|_{x=1} = (C_2 + C_3x)\big|_{x=1} = C_2 + C_3 = 3;\\
&y''(x)\big|_{x=1} = C_3\big|_{x=1} = C_3 = 6,
\end{aligned}$$

имеем алгебраическую систему

$$\begin{aligned}
C_1 + C_2 + C_3/2 &= 2,\\
C_2 + C_3 &= 3,\\
C_3 &= 6,
\end{aligned}$$

откуда найдём $C_3 = 6$, $C_2 = -3$, $C_1 = 2$. Подставив эти значения в (13.14), получим решение задачи Коши 2)

$$y(x) = 3x^2 - 3x + 2,$$

совпадающее с найденным ранее (13.21).

Пример 13.2. При каких начальных условиях в точке $x_0 = 1$ соответствующая задача Коши для уравнения $y'''(x) = 0$ имеет ограниченное решение?

Решение. В предыдущем примере для уравнения $y'''(x) = 0$ было получено общее решение в форме Коши

$$y(x) = y_0''\Big(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}\Big) + y_0'(x-1) + y_0, \qquad (13.22)$$

где $y_0'' = y''(1)$, $y_0' = y'(1)$, $y_0 = y(1)$.

Первые два слагаемых в (13.22) при $x \to \infty$ являются бесконечно большими величинами. Чтобы решение при $x \to \infty$ было ограниченным, необходимо потребовать $y''(1) = y'(1) = 0$, тогда как $y(1)$ может принимать произвольные значения.

Таким образом, искомая задача Коши имеет вид

$$y'''(x) = 0, \quad y''(1) = y'(1) = 0, \quad y(1) = y_0$$

с решением $y(x) = y_0$, где y_0 — любое действительное число.

Пример 13.3. Выяснить, являются ли решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \Big(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\Big)y = 0,$$

называемого уравнением Бесселя индекса ν ($\nu = \mathrm{const}$), линейно независимыми на $I =]0, \infty[$, если известно, что

$$\begin{aligned}
\text{а)}\quad & y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = 0;\\
& y_1'(1) = -2, \quad y_2'(1) = 1;\\
\text{б)}\quad & y_1(1) = 1, \quad y_2(1) = -3;\\
& y_1'(1) = -2, \quad y_2'(1) = 6.
\end{aligned}$$

Решение. Воспользовавшись формулой Лиувилля–Остроградского (12.17), получим

$$W[y_1, y_2] = W(1)e^{-\int\limits_1^x \frac{dt}{t}} = W(1)e^{-\ln|x|} = W(1)\frac{1}{|x|}.$$

Далее найдём

$$\text{а)}\;\; W(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad W[y_1, y_2] = W(1)\frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|} \neq 0,\; x \in I,$$

$$\text{б)}\;\; W(1) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0, \quad W[y_1, y_2] = W(1)\frac{1}{|x|} = 0,\; x \in I.$$

Это означает, что в случае а) решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, а в случае б) — линейно зависимы на I.

Пример 13.4. Показать, что функции $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = e^x$ образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка. Составить это уравнение. Решить для него задачу Коши с начальными условиями $y''(1) = 1$, $y'(1) = 4$, $y(1) = 2$.

Решение. Найдём вронскиан

$$W[x, x^2, e^x] = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2x & e^x \\ e & e^x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ 2 & e^x \end{vmatrix} =$$
$$= e^x[x(2x-2) - (x^2 - 2)] = e^x(x^2 - 2x + 2). \tag{13.23}$$

Если соотношение (13.23) представить в виде

$$e^x(x^2 - 2x + 2) = e^x[(x-1)^2 + 1],$$

то очевидно, что $W[x, x^2, e^x] = e^x[(x-1)^2 + 1] \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Это означает, что данные функции образуют на $\mathbb{R}$ фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного уравнения третьего порядка

$$y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0. \tag{13.24}$$

Общее решение этого уравнения, согласно теореме 13.1, имеет вид

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + C_3y_3(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3e^x. \tag{13.25}$$

Поскольку общее решение $y(x)$ является линейной комбинацией элементов y_1, y_2, y_3 фундаментальной системы решений, то вронскиан системы четырёх функций y_1, y_2, y_3 и y должен быть равен нулю, т.е.

$$W[y_1, y_2, y_3, y] = W[x, x^2, e^x, y] = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x & y \\ 1 & 2x & e^x & y' \\ 0 & 2 & e^x & y'' \\ 0 & 0 & e^x & y''' \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив этот определитель по четвёртому столбцу:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} y''' - \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} y'' + \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 0 & 2 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} y' - \begin{vmatrix} 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{vmatrix} y = 0,$$

с учётом (13.23) придём к уравнению

$$(x^2-2x+2)e^x y''' - x^2 e^x y'' + 2xe^x y' - 2e^x y = 0.$$

Разделив на отличный от нуля для всех $x \in \mathbb{R}$ множитель $(x^2-2x+2)e^x$, получим искомое уравнение (13.24) в канонической форме

$$y'''(x) - \frac{x^2}{x^2-2x+2}y''(x) + \frac{2x}{x^2-2x+2}y'(x) - \frac{2}{x^2-2x+2}y(x) = 0. \qquad (13.26)$$

Перейдём теперь к решению задачи Коши для этого уравнения с начальными условиями б). Поскольку общее решение уравнения (13.26) уже известно и представлено формулой (13.25), то, подставив его в заданные начальные условия:

$$\begin{aligned}
y(x)\big|_{x=1} &= (C_1x + C_2x^2 + C_3e^x)\big|_{x=1} = C_1 + C_2 + C_3e = 2,\\
y'(x)\big|_{x=1} &= (C_1 + 2C_2x + C_3e^x)\big|_{x=1} = C_1 + 2C_2 + C_3e = 4,\\
y''(x)\big|_{x=1} &= (2C_2 + C_3e^x)\big|_{x=1} = 2C_2 + C_3e = 1,
\end{aligned}$$

получим систему

$$\begin{aligned}
C_1 + C_2 + C_3e &= 2,\\
C_1 + 2C_2 + C_3e &= 4,\\
2C_2 + C_3e &= 1.
\end{aligned}$$

Вычтя из первого уравнения второе, а из второго третье, придём к системе

$$-C_2 = -2, \quad C_1 = 3, \quad 2C_2 + C_3e = 1,$$

откуда $C_1 = 3$, $C_2 = 2$, $C_3 = -3/e$. Подставив найденные коэффициенты в общее решение (13.25), получим решение задачи Коши б)

$$y(x) = 3x + 2x^2 - 3e^{x-1}. \qquad (13.27)$$

Подставив функцию (13.27) в уравнение (13.26) и проверив справедливость начальных условий, убедимся в правильности полученного решения.

Получим это же решение другим способом, воспользовавшись общим решением уравнения (13.26) в форме Коши. Для этого фундаментальную систему решений нормируем в точке $x_0 = 1$.

Выписав фундаментальную матрицу

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{pmatrix},$$

имеем

$$Y(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & e \\ 1 & 2 & e \\ 0 & 2 & e \end{pmatrix}, \quad \det Y(1) = e \neq 0.$$

Поскольку

$$Y^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2/e & -2/e & 1/e \end{pmatrix},$$

то

$$Y_1(x) = Y(x)Y^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 2e^{x-1} - x^2 & -2e^{x-1} + x^2 + x & e^{x-1} - x \\ 2e^{x-1} - 2x & -2e^{x-1} + 2x + 1 & e^{x-1} - 1 \\ 2e^{x-1} - 2 & -2e^{x-1} + 2 & e^{x-1} \end{pmatrix}.$$

Первая строка этого матрицанта даёт нормированную в точке $x = 1$ фундаментальную систему решений

$$y_{11}(x) = 2e^{x-1} - x^2, \quad y_{12}(x) = -2e^{x-1} + x^2 + x, \quad y_{13}(x) = e^{x-1} - x.$$

Тогда общее решение в форме Коши запишется так:

$$y(x) = y(1)[2e^{x-1} - x^2] + y'(1)[-2e^{x-1} + x^2 + x] + y''(1)[e^{x-1} - x]. \tag{13.28}$$

Подставив сюда конкретные начальные условия б), получим решение задачи Коши

$$y(x) = 2(2e^{x-1} - x^2) + 4(-2e^{x-1} + x^2 + x) + (e^{x-1} - x) = 3x + 2x^2 - 3e^{x-1},$$

совпадающее с полученным ранее (13.27).

$\Diamond$ Отметим, что общее решение в форме Коши (13.28) позволяет легко находить новые решения при изменении начальных условий. Более того, оно позволяет достаточно просто исследовать влияние начальных условий на характер решения.

Пример 13.5. Найти общее решение уравнений а) $y'' - y = 0$, б) $y'' + y = 0$.

Решение. а) Это уравнение имеет очевидные частные решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$, которые, как показано в примере 12.6, линейно независимы. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

б) Аналогично

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Пример 13.6. Найти общее решение уравнения $y''' - y' = 0$.

Решение. Это уравнение имеет очевидные решения $y_1 = 1$, $y_2 = e^x$, $y_3 = \operatorname{ch} x$, $y_4 = \operatorname{sh} x$. Решение

$$y = C_1 e^x + C_2 \operatorname{ch} x + C_3 \operatorname{sh} x$$

уравнения $y''' - y' = 0$ не является общим решением, так как e^x, $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$, согласно результатам примера 12.5, линейно зависимы. Согласно результатам этого же примера, линейно независимыми являются функции 1, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ и, следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 + C_2 \operatorname{sh} x + C_3 \operatorname{ch} x.$$

14. Замена переменных в линейных уравнениях. Формула Абеля

В этом разделе мы покажем, что существуют такие замены аргумента искомой функции или самой функции, которые позволяют существенно упростить дифференциальное уравнение или даже привести его к виду, допускающему понижение порядка. Более того, иногда удаётся записать общее решение уравнения, имея в своём распоряжении только часть фундаментальной системы решений дифференциального уравнения.

Начнём с уравнений второго порядка. Некоторые из полученных для этого случая результатов мы позднее обобщим на линейные уравнения n-го порядка.

Пример 14.1. Для уравнения

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{14.1}$$

с помощью замены аргумента $x \in I =]a, b[$ на аргумент $t \in J =]\alpha, \beta[$ соотношением $x = x(t)$ [или $t = t(x)$], показать, что:

а) заменой

$$t = \int e^{-\int a_1(x)dx} dx \tag{14.2}$$

можно устранить слагаемое с первой производной и привести уравнение (14.1) к виду

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 a_0(x(t))y(t) = 0; \tag{14.3}$$

б) если коэффициенты уравнения (14.1) удовлетворяют условию

$$\frac{1}{\sqrt{ka_0(x)}}\left[\frac{a_0'(x)}{2a_0(x)} + a_1(x)\right] = k_1, \tag{14.4}$$

где k, k_1 — некоторые константы, причём $k \neq 0$, то уравнение (14.1) заменой

$$t = \int \sqrt{ka_0(x)}\, dx \tag{14.5}$$

можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + k_1\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{k}y(t) = 0, \tag{14.6}$$

если же коэффициенты $a_1(x)$ и $a_0(x)$ удовлетворяют условию

$$\frac{a_0'(x)}{2a_0(x)} + a_1(x) = 0, \tag{14.7}$$

то в этом случае $k_1 = 0$ и уравнение (14.6) становится не только уравнением с постоянными коэффициентами, но ещё и не содержит первую производную:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{1}{k}y(t) = 0; \tag{14.8}$$

в) в общем случае не существует замена аргументов, приводящая уравнение (14.1) к виду, не содержащему y.

Решение. Выразим производные от функции y по x через производные по новой независимой переменной t; по правилу дифференцирования сложной функции запишем

$$\begin{gathered} y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}, \\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2}. \end{gathered} \tag{14.9}$$

Подставим (14.9) в (14.1):

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{d^2t}{dx^2} + a_1\frac{dt}{dx}\right)\frac{dy}{dt} + a_0y = 0.$$

Поскольку $dt/dx \neq 0$, $x \in I$, $t \in J$, то полученное уравнение можно записать в канонической форме

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{(dt/dx)^2}\left(\frac{d^2t}{dx^2} + a_1\frac{dt}{dx}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{a_0}{(dt/dx)^2}y = 0$$

или

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b_1(t)\frac{dy(t)}{dt} + b_0(t)y(t) = 0, \tag{14.10}$$

если ввести обозначения

$$\begin{aligned} b_1(t) &= \frac{1}{(dt/dx)^2}\Big(\frac{d^2t}{dx^2} + a_1\frac{dt}{dx}\Big) = \Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2\Big(\frac{d^2t}{dx^2} + a_1\frac{dt}{dx}\Big), \\ b_2 &= \frac{a_0}{(dt/dx)^2} = \Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2 a_0. \end{aligned} \tag{14.11}$$

Из (14.10) следует, что замена аргумента не меняет характер уравнения, оставляя его линейным и однородным.

Перейдём к пункту а). Потребуем, чтобы коэффициент $b_1(t)$ обращался в нуль для всех $t \in J$. В этом случае должно выполняться равенство

$$\frac{d^2t}{dx^2} + a_1(x)\frac{dt}{dx} = 0, \tag{14.12}$$

которое можно рассматривать как дифференциальное уравнение для функции $t(x)$. Это уравнение допускает понижение порядка заменой $dt/dx = z(x)$, тогда

$$\frac{dz}{dx} + a_1(x)z = 0.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, частное решение которого легко находится:

$$z(x) = e^{-\int a_1(x)\,dx}, \quad \mathrm{const} = C_1 = 0.$$

Поскольку

$$z(x) = \frac{dt}{dx} = e^{-\int a_1(x)\,dx}, \tag{14.13}$$

то ещё одно интегрирование даёт

$$t(x) = \int e^{-\int a_1(x)\,dx}dx, \quad \mathrm{const} = C_2 = 0.$$

Полученная формула определяет замену (14.2), которая приводит уравнение (14.1) к уравнению (14.3), не содержащему первую производную. Его с учётом (14.13) можно записать также в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_0 e^{2\int a_1(x)\,dx} y(t) = 0. \tag{14.14}$$

б) В этом случае мы должны потребовать, чтобы в уравнении (14.10) коэффициенты b_0 и b_1 являлись постоянными, т.е. выполнялись равенства

$$b_0(t) = \frac{a_0}{(dt/dx)^2} = C = \mathrm{const} \neq 0 \tag{14.15}$$

($C = \mathrm{const} = 0$ соответствует $a_0 = 0$, и исходное уравнение (14.1) допускает понижение порядка и, следовательно, решается другими методами);

$$b_1(t) = \frac{1}{(dt/dx)^2}\Big(\frac{d^2t}{dx^2} + a_1\frac{dt}{dx}\Big) = k_1 = \mathrm{const}\,. \tag{14.16}$$

При выполнении условий (14.15), (14.16) уравнение (14.1) становится уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k_1\frac{dy}{dt} + \frac{1}{k}y = 0, \quad k = \frac{1}{C} \neq 0.$$

Соотношение (14.15) можно рассматривать как дифференциальное уравнение

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{ka_0(x)},$$

из которого найдём связь между t и x (14.5):

$$t = \int \sqrt{ka_0(x)}\,dx.$$

Подставив это выражение в (14.16), получим условие (14.4) для коэффициентов $a_1(x)$ и $a_0(x)$, т.е.

$$\frac{1}{\sqrt{ka_0(x)}}\Big[\frac{a_0'(x)}{2a_0(x)} + a_1(x)\Big] = k_1.$$

Очевидно, что при

$$\frac{a_0'(x)}{2a_0(x)} + a_1(x) = 0$$

$k_1 = 0$ и уравнение примет вид (14.8):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{1}{k}y(t) = 0.$$

в) Уравнение (14.10) с переменной t не содержит y только при условии

$$b_0(t) = \frac{a_0(x(t))}{(dx/dt)^2} = 0. \tag{14.17}$$

Поскольку $dx/dt \neq 0$, $x \in I$, $t \in J$, то условие (14.17) выполнимо только при $a_0(x) \equiv 0$, $x \in I$, но в этом случае оно уже не содержит y. Если же $a_0(x) \neq 0$, $x \in I$, то выполнение условия (14.17) невозможно при любой замене аргумента $x = x(t)$.

Пример 14.2. С помощью замены независимой переменной привести уравнения

$$\begin{aligned} &\text{а)}\quad y''(x) - y'(x) + e^{2x}y(x) = 0;\\ &\text{б)}\quad y'' + \operatorname{tg} x\, y'(x) - \frac{4}{9}\operatorname{ctg}^2 x\, y(x) = 0 \end{aligned}$$

к виду, не содержащему первую производную неизвестной функции, или к уравнению с постоянными коэффициентами, по возможности записать общее решение.

Решение. Воспользуемся результатами предыдущего примера.

а) Здесь $a_1(x) = -1$, $a_0(x) = e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$. Проведём замену переменной (14.2), в результате которой исчезает слагаемое с первой производной, т.е.

$$t = \int e^{-\int a_1(x)dx}dx = \int e^{-\int(-1)dx}dx = e^x, \tag{14.18}$$

тогда

$$x = \ln t$$

и

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}.$$

Преобразованное уравнение (14.3) имеет вид

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 a_0(x(t))y(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{1}{t^2}t^2y(t) = 0,$$

т.е.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 0. \tag{14.19}$$

Это уравнение является не только уравнением, не содержащим первую производную, но ещё и уравнением с постоянными коэффициентами.

Теперь проведём замену аргумента (14.5), переводящую исходное уравнение в уравнение с постоянными коэффициентами:

$$t = \int \sqrt{ka_0(x)}\,dx = \int \sqrt{ke^{2x}}\,dx = \sqrt{k}\int e^x dx = \sqrt{k}e^x, \quad k \neq 0. \tag{14.20}$$

Тогда

$$x = \ln\frac{t}{\sqrt{k}} = \ln t - \frac{1}{2}\ln k$$

и

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{t^2}, \quad \frac{dt}{dx} = \sqrt{k}e^x, \quad \frac{d^2t}{dx^2} = ke^x.$$

Преобразованное уравнение (14.10) с коэффициентами (14.11) в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t^2}[\sqrt{k}e^x + (-1)\sqrt{k}e^x]\frac{dy}{dt} + \frac{e^{2x}}{(\sqrt{k}e^x)^2}y = 0,$$

т.е. уравнение

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{1}{k}y(t) = 0 \tag{14.21}$$

представляет собой не только уравнение с постоянными коэффициентами, но и уравнение, не содержащее первую производную.

Таким образом, обе замены: $t = e^x$ и $t = \sqrt{k}e^x$ приводят к уравнениям (14.19) и (14.21) одного типа, различающимся лишь множителем $1/k$ у второго слагаемого. Это различие вообще исчезнет при $k = 1$, и тогда мы при совпавших заменах $t = e^x$ придём к одному уравнению (14.19). Такое совпадение замен (14.18), (14.20) и уравнений (14.19), (14.21) объясняется тем, что коэффициенты $a_1(x)$ и $a_0(x)$ исходного уравнения удовлетворяют условию (14.7)

$$\frac{a_0'(x)}{2a_0(x)} + a_1 = \frac{(e^{2x})'}{2e^{2x}} - 1 = \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} - 1 = 0,$$

которое является одновременно и условием приводимости к уравнению с постоянными коэффициентами, и условием отсутствия первой производной.

Итак, замена (14.18) $t = e^x$, $t \in \mathbb{R}$, поскольку $x \in I =]-\infty, \infty[$, приводит к уравнению (14.19):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 0.$$

Это уравнение уже рассматривалось в примере 13.5, где было показано, что оно имеет частные решения $y_1(t) = \cos t$, $y_2(t) = \sin t$, которые, как следует из примера 12.7, являются линейно независимыми на J и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений. Поэтому общее решение имеет вид

$$y(t) = C_1\cos t + C_2\sin t.$$

Возвратившись от новой переменной t к старой переменной x заменой (14.18) $t = e^x$, получим общее решение исходного уравнения

$$y(x) = C_1\cos e^x + C_2\sin e^x.$$

б) Здесь $a_1(x) = \operatorname{tg} x$, $a_0(x) = -\frac{4}{9}\operatorname{ctg}^2 x$, $x \in I =]0, \pi/2[$. Сначала проведём замену переменной (14.2), в результате которой слагаемое с первой производной исчезает, т.е.

$$t = \int e^{-\int a_1(x)dx} dx = \int e^{-\int \operatorname{tg} x\, dx} dx = \int \cos x\, dx = -\sin x, \quad t \in J =]-1, 0[. \tag{14.22}$$

Так как

$$\frac{dt}{dx} = -\cos x,$$

то преобразованное уравнение (14.3) примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{a_0}{(dt/dx)^2}y = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\cos^2 x}\Big(-\frac{4}{9}\operatorname{ctg}^2 x\Big)y = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{4}{9}\frac{1}{\sin^2 x(t)}y = 0,$$

т.е.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{4}{9}\frac{1}{t^2}y(t) = 0.$$

Решение этого уравнения мы рассмотрим позднее, а сейчас перейдём к замене аргумента (14.5), преобразующей исходное уравнение в уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\begin{gathered} t = \int \sqrt{ka_0(x)}\, dx = \int \sqrt{\Big(-\frac{1}{4}\Big)\Big(-\frac{4}{9}\operatorname{ctg}^2 x\Big)}dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{ctg} x\, dx = \\ = \frac{1}{3}\ln\sin x = \ln\sqrt[3]{\sin x}, \quad t \in J =]-\infty, 0[, \quad k = -\frac{1}{4}. \end{gathered} \tag{14.23}$$

Тогда

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3}\operatorname{ctg} x, \qquad \frac{d^2t}{dx^2} = -\frac{1}{3\sin^2 x}$$

и преобразованное уравнение (14.10) с коэффициентами (14.11) примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{[(\operatorname{ctg} x)/3]^2}\Big[-\frac{1}{3\sin^2 x} + \operatorname{tg} x\frac{1}{3}\operatorname{ctg} x\Big]\frac{dy}{dt} - \frac{4}{9}\operatorname{ctg}^2 x\frac{1}{(\operatorname{ctg}^2 x)/9}y = 0.$$

После несложных преобразований получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 4y = 0. \tag{14.24}$$

Чтобы найти фундаментальную систему решений этого уравнения, запишем соответствующий ему линейный дифференциальный оператор

$$\widehat{L}_2 = D^2 - 3D - 4, \qquad D = \frac{d}{dt},$$

который можно записать и так:

$$\widehat{L}_2 = (D-4)(D+1) \quad \text{и} \quad \widehat{L}_2 = (D+1)(D-4).$$

Это будет соответствовать уравнениям

$$(D-4)(y'+y) = 0 \quad \text{и} \quad (D+1)(y'-4y) = 0$$

или двум уравнениям первого порядка

$$y'(t) + y(t) = 0 \quad \text{и} \quad y'(t) - 4y(t) = 0,$$

решения которых очевидны: $y = e^{-t}$ и $y = e^{4t}$. Поскольку $e^{4t}/e^{-t} = e^{5t} \neq 0$ для всех t, то эти решения линейно независимы и представляют собой фундаментальную систему решений уравнения (14.24). Тогда его общее решение можно записать в виде

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{4t}.$$

Перейдя от новой переменной t к старой переменной x заменой (14.23), получим общее решение исходного уравнения б)

$$y(x) = C_1 e^{\ln(\sin x)^{-1/3}} + C_2 e^{\ln(\sin x)^{4/3}} = C_1(\sin x)^{-1/3} + C_2(\sin x)^{4/3}.$$

Пример 14.3. При какой функции $a_0(x)$ уравнение

$$\text{а)}\quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0;$$
$$\text{б)}\quad \frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{tg} x\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

заменой аргумента $t = t(x)$ можно свести к уравнению с постоянными коэффициентами, в котором отсутствует слагаемое с первой производной? (Последнее условие в физических приложениях можно рассматривать, например, как отсутствие сил сопротивления, пропорциональных скорости изменения величины $y(x)$.)

Решение. В примере 14.1 было показано, что уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

можно привести к требуемому виду, если выполняется условие (14.7):

$$\frac{a_0'(x)}{2a_0(x)} + a_1(x) = 0.$$

Это соотношение, являясь уравнением с разделяющимися переменными, после интегрирования даёт связь между $a_0(x)$ и $a_1(x)$:

$$a_0(x) = e^{-2\int a_1(x)dx}.$$

а) В этом случае $a_1(x) = -1$ и, следовательно,

$$a_0(x) = e^{2x+\mathrm{const}}.$$

Выбрав постоянную интегрирования равной нулю, имеем

$$a_0(x) = e^{2x}$$

и, соответственно, уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + e^{2x}y = 0.$$

Это уравнение рассматривалось в примере 14.2. Там указана замена, упрощающая это уравнение, и приведено его общее решение.

б) Здесь $a_1(x) = \operatorname{tg} x$ и, следовательно,

$$a_0(x) = e^{-2\int \operatorname{tg} x\, dx} = e^{2\ln|\cos x| + 2k_2} = e^{2k_2}\cos^2 x.$$

Выбрав произвольную постоянную $k_2 = 0$, получим

$$a_0(x) = \cos^2 x$$

и, соответственно, уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} + \cos^2 x\, dy = 0. \qquad (14.25)$$

Замена переменной $t = t(x)$, приводящая это уравнение к требуемому виду, определяется формулой (14.5):

$$t = \sqrt{ka_0(x)} = \sqrt{k} \int \cos x\, dx = -\sqrt{k} \sin x + k_3,$$

где k_3 — произвольная постоянная. Задав произвольные постоянные: $k = 1$, $k_3 = 0$, имеем

$$t = -\sin x \qquad (14.26)$$

и, соответственно, исходное уравнение преобразуется к виду (14.8), (14.19):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения получено в примере 14.1:

$$y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Вернувшись к переменной x посредством замены (14.26), запишем общее решение уравнения (14.25):

$$y(x) = C_1 \cos(-\sin x) + C_2 \sin(-\sin x) = C_1 \cos(\sin x) - C_2 \sin(\sin x).$$

Таким образом, мы не только определили коэффициент $a_0(x)$ в уравнении б), но и нашли его общее решение.

Пример 14.4. Найти функцию $a_0(x)$, при которой уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{tg} x \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

заменой аргумента сведётся к уравнению с постоянными коэффициентами.

Решение. В примере 14.1 было показано, что уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

может быть приведено к требуемому виду, если выполняется условие

$$\frac{a_0'(x)}{2a_0(x)} + a_1(x) = k_1\sqrt{k}\sqrt{a_0(x)}, \qquad (14.27)$$

где k_1, k — отличные от нуля произвольные постоянные (при $k_1 = 0$ это условие вырождается в условие (14.7), что приводит к $a_0(x) = \cos^2 x$ из предыдущего примера).

Соотношение (14.27) является уравнением Бернулли

$$a_0' + 2a_1(x)a_0 = 2k_1\sqrt{k}a_0^{4/2}(x),$$

и его интегрирование даёт связь между коэффициентами $a_0(x)$ и $a_1(x)$:

$$a_0(x) = \frac{e^{-2\int a_1(x)dx}}{k_1^2 k\left(\int e^{-\int a_1(x)dx} dx\right)^2}. \tag{14.28}$$

В нашем случае $a_1(x) = \operatorname{tg} x$ и, следовательно, с учётом

$$\int a_1(x)dx = \int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| - k_2$$

имеем

$$a_0 = \frac{e^{2(\ln|\cos x|+k_2)}}{k_1^2 k\left(\int e^{k_2}\cos x\, dx\right)^2} = \frac{e^{2k_2}\cos^2 x}{k_1^2 k(e^{k_2}\sin x + k_3)^2}, \tag{14.29}$$

где k_2, k_3 — произвольные постоянные интегрирования.

Задав константы $k = -1/4$, $k_1 = -3$ $k_2 = k_2 = 0$, найдём коэффициент

$$a_0(x) = \frac{\cos^2 x}{9(-1/4)\sin^2 x} = -\frac{4}{9}\operatorname{ctg}^2 x$$

и, соответственно, уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \operatorname{tg} x\frac{dy}{dx} - \frac{4}{9}\operatorname{ctg}^2 x\, y = 0.$$

Это уравнение рассматривалось в примере 14.2,б). Там же приведена замена, приводящая это уравнение к требуемому виду, и с её помощью получено общее решение исходного уравнения.

Пример 14.5. Найти общее решение уравнения

$$y''' + \frac{9}{x}y'' + \frac{18}{x^2}y' + \frac{6}{x^3}y = 0, \quad x \in I =]0, \infty[.$$

Решение. Если линейное однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

может быть приведено к уравнению с постоянными коэффициентами, то, как и в примере 14.1, мы найдём замену переменной

$$t = \int \sqrt[n]{ka_0(x)}\, dx, \tag{14.30}$$

реализующую это преобразование.

В нашем случае $n = 3$, $a_0 = 6/x^3$. Тогда

$$t = \int \sqrt[3]{k\frac{6}{x^3}} dx = \sqrt[3]{6k}\int \frac{dx}{x} = \sqrt[3]{6k}\ln x + k_1.$$

Выбрав константы: $k_1 = 0$, $k = 1/6$, имеем

$$t = \ln x \quad \text{или} \quad x = e^t, \quad x \in I =]0, \infty[, \quad t \in J =]-\infty, \infty[. \tag{14.31}$$

Исходя из (14.31), последовательно найдём

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt};$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\Big(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\Big);$$

$$y''' = \frac{d}{dt}(y'') = \frac{2}{x^3}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{x^3}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{x^3}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{x^3}\frac{d^3y}{dt^3} = \frac{1}{x^3}\Big(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\Big).$$

Подставив эти выражения в исходное уравнение, получим

$$\frac{1}{x^3}\Big(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\Big)+\frac{9}{x}\frac{1}{x^2}\Big(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\Big)+\frac{18}{x^2}\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}+\frac{6}{x^3}y=0$$

или

$$\frac{d^3y}{dt^3}+6\frac{d^2y}{dt^2}+11\frac{dy}{dt}+6y=0. \qquad (14.32)$$

Чтобы найти фундаментальную системы решений этого уравнения, выпишем отвечающий ему линейный дифференциальный оператор:

$$\widehat{L}_3=D^3+6D^2+11D+6, \quad D=\frac{d}{dt},$$

который можно записать в трёх вариантах:

$$\widehat{L}_3=(D+1)(D+2)(D+3)=(D+2)(D+3)(D+1)=(D+3)(D+1)(D+2).$$

Это будет соответствовать трём уравнениям

$$\begin{aligned}&(D+1)(D+2)(y'+3y)=0,\\&(D+2)(D+3)(y'+y)=0,\\&(D+3)(D+1)(y'+2y)=0.\end{aligned}$$

Эти уравнения обращаются в тождества, если функция $y(x)$ удовлетворяет трём уравнениям 1-го порядка:

$$\begin{aligned}&y'+3y=0,\\&y'+y=0,\\&y'+2y=0.\end{aligned}$$

Решения этих уравнений очевидны: $y=e^{-3t}$, $y=e^{-t}$, $y=e^{-2t}$. Как следует из примера 12.7, эти функции являются линейно независимыми в $\mathbb{R}$. Тогда можно рассматривать их как фундаментальную систему решений уравнения (14.32):

$$y_1(t)=e^{-t}, \quad y_2(t)=e^{-2t}, \quad y_3(t)=e^{-3t}$$

и общее решение записать в виде

$$y(t)=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3=C_1e^{-t}+C_2e^{-2t}+C_3e^{-3t},$$

где C_1,C_2,C_3 — произвольные постоянные.

Возвратившись, согласно (14.31), от переменной t к старой переменной x, найдём общее решение исходного уравнения

$$y(x)=\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\frac{C_3}{x^3}, \quad x\in I=]0,\infty[.$$

Пример 14.6. Линейное однородное уравнение

$$y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0, \quad x\in I=]a,b[,$$

заменой функции $y(x)$ на новую неизвестную функцию $v(x)$ соотношением $y(x)=p(x)v(x)$, $p(x)\neq 0$, $x\in I$, привести к виду

а) не содержащему $v'(x)$;

б) не содержащему $v(x)$.

Решение. Произведя замену переменных

$$y(x) = p(x)v(x), \tag{14.33}$$

последовательно найдём

$$\begin{aligned} y'(x) &= p(x)v'(x) + p'(x)v(x), \\ y''(x) &= p(x)v''(x) + 2p'(x)v'(x) + p''(x). \end{aligned} \tag{14.34}$$

Подставим эти выражения в исходное уравнение:

$$p(x)v'' + [2p'(x) + a_1(x)]v' + [p''(x) + a_1(x)p'(x) + a_0(x)p(x)]v = 0.$$

Поскольку $p(x) \neq 0$ для всех $x \in I$, то полученное уравнение можно привести к каноническому виду

$$v''(x) + b_1(x)v'(x) + b_0(x)v(x) = 0, \tag{14.35}$$

где

$$b_1(x) = \frac{2p'(x) + a_1(x)p(x)}{p(x)}, \tag{14.36}$$

$$b_0(x) = \frac{p''(x) + a_1(x)p'(x) + a_0(x)p(x)}{p(x)}. \tag{14.37}$$

Как следует из (14.35), замена функции (14.33) не меняет характер уравнения, оставляя его линейным и однородным.

Для случая а) мы должны потребовать выполнения условия $b_1(x) = 0$ или, согласно (14.36),

$$2p'(x) + a_1(x)p(x) = 0, \tag{14.38}$$

при котором будет отсутствовать слагаемое, содержащее первую производную $v'(x)$. Из (14.38), разделив переменные, найдём

$$p(x) = Ce^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx}. \tag{14.39}$$

Таким образом, функция $p(x)$ определяется однозначно с точностью до произвольного постоянного множителя и приводит исходное уравнение к виду

$$v''(x) + b_0(x)v(x) = 0. \tag{14.40}$$

Преобразовав $b_0(x)$ (14.37) с учётом (14.38), выразим его непосредственно через коэффициенты исходного уравнения $a_1(x)$ и $a_0(x)$:

$$\begin{aligned} b_0(x) = \frac{1}{p(x)}\Big\{ -\frac{1}{2}[a_1(x)p(x)]' + a_1(x)p'(x) + a_0(x)p(x)\Big\} = \\ = a_0(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x). \end{aligned} \tag{14.41}$$

Подставив (14.41) в (14.40), получим

$$v''(x) + \Big[a_0(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x)\Big]v(x) = 0. \tag{14.42}$$

♢ Позже мы увидим, что выражение в квадратных скобках является важной характеристикой линейных уравнений 2-го порядка.

Для случая б) мы должны потребовать выполнения условия $b_0(x) = 0$ в (14.35). Это означает, что функция $p(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$p''(x) + a_1(x)p'(x) + a_0(x)p(x) = 0,$$

совпадающему с исходным уравнением.

Таким образом, если нам известно какое-либо решение $p(x)$ исходного уравнения, то заменой (14.33) это уравнение можно привести к виду

$$v''(x) + b_1(x)v'(x) = 0, \tag{14.43}$$

допускающему понижение порядка. Положив в (14.43)

$$v(x) = \int u(x)dx, \tag{14.44}$$

придём к уравнению первого порядка для новой неизвестной функции $u(x)$:

$$u'(x) + b_1(x)u(x) = 0$$

или с учётом (14.36)

$$u'(x) + \frac{2p'(x) + a_1(x)p(x)}{p(x)}u(x) = 0. \tag{14.45}$$

В заключение заметим, что рассмотренный пример подводит нас к двум важным свойствам преобразований линейных однородных уравнений. Мы перейдём к их рассмотрению после следующего примера.

Пример 14.7. Уравнения

$$\text{а)}\quad y'' + x^2y' + \Big(1 + x + \frac{x^4}{4}\Big)y = 0,$$

$$\text{б)}\quad y'' + xy' + \Big(\frac{3}{2} + \frac{x^2}{4}\Big)y = 0$$

привести к каноническому виду, не содержащему первую производную, по возможности записать общее решение.

Решение. Как следует из предыдущего примера, заданное уравнение приводится к требуемому виду (14.42):

$$v''(x) + \Big[a_0(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x)\Big]v(x) = 0$$

заменой $y(x) = p(x)v(x)$, где $p(x)$ определяется как (14.39):

$$p(x) = C\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx\Big\}.$$

Поскольку в случае а) $a_1(x) = x^2$, $a_1'(x) = 2x$, $a_0(x) = 1 + x + x^2/4$, то

$$p(x) = e^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx} = e^{-\frac{1}{2}\int x^2dx} = e^{-x^3/6}, \quad C = 1,$$

и замена

$$y(x) = e^{-x^3/6}v(x) \tag{14.46}$$

приведёт уравнение а) к каноническому виду

$$v''(x) + \Big[\Big(1 + x + \frac{x^4}{4}\Big) - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}2x\Big]v = 0$$

или

$$v''(x) + v(x) = 0. \tag{14.47}$$

Это уравнение уже рассматривалось в примере 13.5, где было получено его общее решение

$$v(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{14.48}$$

Таким образом, общее решение уравнения а) имеет вид

$$y(x) = e^{-x^3/6}(C_1 \cos x + C_2 \sin x). \tag{14.49}$$

В случае б) $a_1(x) = x$, $a_1'(x) = 1$, $a_0(x) = 3/2 + x/4$, и, следовательно,

$$p(x) = e^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx} = e^{-\frac{1}{2}\int x\,dx} = e^{-x^2/4}, \quad C = 1.$$

Тогда замена

$$y(x) = e^{-x^2/4}v(x) \tag{14.50}$$

приведёт уравнение б) к каноническому виду

$$v''(x) + \Big(\frac{3}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\Big)v(x) = 0$$

или

$$v''(x) + v(x) = 0,$$

которое совпадает с уравнением (14.47), полученным для уравнения а). Поскольку общее решение этого уравнения задаётся формулой (14.49), то уравнение б) имеет общее решение

$$y(x) = e^{-x^2/4}(C_1 \cos x + C_2 \sin x). \tag{14.51}$$

Интересно, что замены (14.46) и (14.50) приводят оба уравнения а) и б) к одному каноническому виду (14.47), определяющему, по сути дела, их общие решения (14.49) и (14.51). Чтобы объяснить это совпадение, введём такое понятие, как инвариант линейного дифференциального уравнения (см. также пример 14.6).

♦ Инвариантом $Q(x)$ линейного уравнения

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \tag{14.52}$$

называется функция

$$Q(x) = a_0(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x). \tag{14.53}$$

Лемма 14.1. *Два линейных уравнения*

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0, \tag{14.54}$$

$$y''(x) + \bar{a}_1(x)y'(x) + \bar{a}_0(x)y(x) = 0 \tag{14.55}$$

с равными инвариантами можно привести к одному каноническому виду.

Доказательство. Согласно определению, инвариант уравнения (14.54) равен

$$Q(x) = a_0(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x), \tag{14.56}$$

а уравнения (14.55), соответственно,

$$\bar{Q}(x) = \bar{a}_0(x) - \frac{1}{4}\bar{a}_1^2(x) - \frac{1}{2}\bar{a}_1'(x). \tag{14.57}$$

Как показано в примере 14.6, эти уравнения заменами

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx}v(x)$$

и

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int \bar{a}_1(x)dx} v(x),$$

соответственно, сводятся к уравнениям

$$v''(x) + b_0(x)v(x) = 0, \tag{14.58}$$

$$v''(x) + \bar{b}_0(x)v(x) = 0, \tag{14.59}$$

коэффициенты которых определяются выражением

$$b_0(x) = a_0(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x),$$

$$\bar{b}_0(x) = \bar{a}_0(x) - \frac{1}{4}\bar{a}_1^2(x) - \frac{1}{2}\bar{a}_1'(x).$$

Но эти коэффициенты, согласно (14.56) и (14.57), совпадают с инвариантами уравнений (14.54), (14.55): $b_0(x) = Q(x)$, $\bar{b}_0(x) = \bar{Q}(x)$. Это означает, что в случае равенства инвариантов $Q(x) = \bar{Q}(x)$ каноническая форма уравнений (14.54), (14.55) совпадает, что и требовалось доказать.

Теорема 14.1. *Равенство инвариантов двух уравнений*

$$\begin{aligned} &y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0,\\ &\bar{y}''(x) + \bar{a}_1(x)\bar{y}'(x) + \bar{a}_0(x)\bar{y}(x) = 0 \end{aligned} \tag{14.60}$$

является достаточным условием того, чтобы одно из них могло быть преобразовано в другое заменой

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int [a_1(x)-\bar{a}_1(x)]dx}\bar{y}(x). \tag{14.61}$$

Доказательство. Пусть $Q(x)$ и $\bar{Q}(x)$ — инварианты первого и второго уравнения (14.60). Так как эти инварианты равны, то, согласно лемме 14.1, оба уравнения заменами

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx} v(x) \tag{14.62}$$

и

$$\bar{y}(x) = e^{-\frac{1}{2}\int \bar{a}_1(x)dx} v(x), \tag{14.63}$$

соответственно, приводятся к одному каноническому уравнению для функции $v(x)$:

$$v''(x) + Q(x)v(x) = 0. \tag{14.64}$$

Тогда, записав из (14.63)

$$v(x) = e^{-\frac{1}{2}\int \bar{a}_1(x)dx}\bar{y}(x) \tag{14.65}$$

и подставив (14.65) в (14.62), придём к подстановке (14.61), связывающей функции $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ из уравнений (14.60).

Пример 14.8. Для уравнений из примера 14.7 найти замену, позволяющую преобразовать уравнение а) в уравнение б).

Решение. Имеем уравнения

$$y''(x) + x^2y'(x) + \Big(1 + x + \frac{x^4}{4}\Big)y(x) = 0,$$

$$\bar{y}''(x) + x\bar{y}'(x) + \Big(\frac{3}{2} + \frac{x^2}{4}\Big)\bar{y}(x) = 0.$$

Вычислим инварианты обоих уравнений:

$$\text{а)}\quad Q(x) = \Big(1 + x + \frac{x^4}{4}\Big)y - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}2x = 1,$$

$$\text{б)}\quad \bar{Q}(x) = \Big(\frac{3}{2} + \frac{x^2}{4}\Big) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x = 1,$$

т.е. $Q(x) = \bar{Q}(x) = 1$ и, следовательно, согласно теореме 14.1, искомая замена имеет вид

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int[a_1(x)-\bar{a}_1(x)]dx}\bar{y}(x) = e^{-\frac{1}{2}\int(x^2-x)dx}\bar{y}(x) = e^{-x^3/6+x^2/4}\bar{y}(x).$$

Подставив сюда решение уравнения б), найденное в примере 14.7, получим

$$y(x) = e^{-x^3/6+x^2/4}e^{-x^2/4}(C_1\cos x + C_2\sin x) = e^{-x^3/6}(C_1\cos x + C_2\sin x).$$

Это решение совпадает с решением (14.49) из того же примера.

◊ В заключение отметим, что именно равенством инвариантов объясняется совпадение уравнений для функции $v(x)$ в примере 14.7.

◊ Заметим, что в задаче б) из примера 14.6 замена (14.33), позволяющая понизить порядок заданного уравнения, сама определяется решением этого уравнения, что делает её мало применимой. Ситуация меняется кардинально, если известно какое-либо решение заданного уравнения. В этом случае замена (14.33) позволяет построить второе решение и тем самым найти его общее решение.

Лемма 14.2 (формула Абеля). *Если $y_1(x)$ — нетривиальное решение линейного однородного уравнения*

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0,$$

где $a_1(x), a_0(x)$ — непрерывные на $I =]a, b[$ функции, причём $y_1(x) \neq 0$ для всех $x \in I$, то его общее решение определяется формулой Абеля

$$y(x) = C_1y_1(x)\int e^{-\int a_1(x)dx}\frac{dx}{y_1^2(x)} + C_2y_1(x), \tag{14.66}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Доказательство. Воспользовавшись результатами примера 14.7,б), заменой искомой функции

$$y(x) = y_1(x)\int u(x)dx \tag{14.67}$$

придём к уравнению 1-го порядка для функции $u(x)$ (14.45)

$$u'(x) + \frac{2y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)}{y_1(x)}u(x) = 0.$$

Разделив переменные:

$$\frac{du}{u(x)} = -\Big[a_1(x) + \frac{2y_1'(x)}{y_1(x)}\Big]dx$$

и проинтегрировав:

$$u(x) = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int a_1(x)dx},$$

из (14.67) найдём

$$y(x) = y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int a_1(x)dx}dx.$$

Таким образом, имеем два решения

$$y_1(x), \quad y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)dx} dx, \tag{14.68}$$

которые в силу соотношения

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \int \frac{1}{y_1^2(x)} e^{-\int a_1(x)dx} dx \not\equiv 0, \quad x \in I,$$

являются линейно независимыми. Это позволяет систему (14.68) рассматривать как фундаментальную, определяющую общее решение (14.66).

Пример 14.9. Найти общее решение уравнения

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0, \quad x \in I =]1, \infty[.$$

Решение. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция $y_1 = x$ является решением исходного уравнения. Действительно,

$$(x)'' - \frac{x}{x-1}(x)' + \frac{1}{x-1}x = -\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x-1} = 0.$$

Второе решение уравнения можно найти по формуле (14.68):

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{-x}{x-1}dx} dx = x\int \frac{1}{x^2} e^{x + \ln(x-1)} dx = \\ &= x\int \frac{1}{x^2}(x-1)e^x = x\Big[\int \frac{e^x}{x}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx\Big]. \end{aligned} \tag{14.69}$$

Вычислим первый интеграл по частям, положив $u = 1/x$, $dv = e^x dx$, $du = -dx/x^2$, $v = e^x$:

$$\int \frac{e^x}{x}dx = \frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}dx.$$

Подставив это выражение в (14.69), найдём

$$y_2(x) = x\left[\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x^2}dx - \int \frac{e^x}{x^2}dx\right] = e^x.$$

Решения $y_1 = x$ и $y_2 = e^x$ в силу их линейной независимости на I образуют фундаментальную систему решений и определяют общее решение исходного уравнения

$$y(x) = C_1 x + C_2 e^x.$$

Замена (14.67), приводящая к формуле Абеля для уравнений 2-го порядка, эффективна и для уравнений более высоких порядков. Именно это иллюстрируют следующие два примера.

Пример 14.10. Найти решение задачи Коши

$$\begin{gathered} y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0, \quad x \in I =]0, \infty[; \\ y(1) = 2, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = -4. \end{gathered} \tag{14.70}$$

Решение. Несложно с помощью простой проверки установить, что функция $y_1(x) = x$ является решением уравнения (14.70). Действительно,

$$(x)''' - \frac{3}{x}(x)'' + \frac{6}{x^2}(x)' - \frac{6}{x^3}x = 0 - 0 + \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x^2} = 0.$$

Понизим порядок уравнения (14.70) заменой неизвестной функции по формуле (14.67):

$$y(x) = y_1(x)\int u(x)dx = x\int u(x)dx, \tag{14.71}$$

где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Тогда

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int u(x)dx + xu(x),\\ y''(x) &= 2u(x) + xu'(x),\\ y'''(x) &= 3u'(x) + xu''(x). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в уравнение (14.70), относительно функции $u(x)$ получим линейное однородное уравнение

$$3u'(x) + xu''(x) - \frac{3}{x}[2u(x) + xu'(x)] + \frac{6}{x^2}\left[\int u(x)dx + xu(x)\right] - \frac{6}{x^3}x\int u(x)dx = 0,$$

которое после приведения подобных примет вид

$$u''(x) = 0.$$

Это уравнение допускает понижение порядка и имеет фундаментальную систему решений

$$u_1(x) = 1, \qquad u_2(x) = x.$$

Подставив последовательно эти функции в (14.71), найдём ещё два частных решения уравнения (14.70)

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x\int u_1(x)dx = x\int dx = x^2;\\ y_2(x) &= x\int u_2(x)dx = x\int xdx = \frac{x^3}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли три решения уравнения (14.70)

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x^2, \quad y_3(x) = x^3 \tag{14.72}$$

(для удобства множитель $1/2$ у функции $y_3(x)$ опущен, поскольку решения однородных уравнений определены с точностью до постоянного множителя).

Чтобы исследовать решения (14.72) на линейную независимость, вычислим их вронскиан. Напомним, что кроме определения

$$W[x, x^2, x^3] = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3\\ 1 & 2x & 3x^2\\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2x & 3x^2\\ 2 & 6x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & x^3\\ 2 & 6x \end{vmatrix} = 6x^3 - 4x^3 = 2x^3 \neq 0, \quad x \in I, \tag{14.73}$$

можно воспользоваться формулой (12.27):

$$W[x, x^2, x^3] = x^3 W[1, 2x] = x^3 2 = 2x^3 \neq 0, \quad x \in I,$$

или вычислить $W[x, x^2, x^3]$ в какой-либо точке $x \in I$, например $x = 1$:

$$W[x, x^2, x^3]\big|_{x=1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Все три результата говорят о линейной независимости функций (14.72) на промежутке I. Это означает, что система (14.72) является фундаментальной системой решений уравнения (14.70) и определяет его общее решение

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3. \tag{14.74}$$

Проверка полученного решения обычно осуществляется его подстановкой в исходное уравнение. Напомним, что возможен и другой способ. Действительно (см. пример 13.4), уравнение

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & y \\ 1 & 2x & 3x^2 & y' \\ 0 & 2 & 6x & y'' \\ 0 & 0 & 6 & y''' \end{vmatrix} = 0 \tag{14.75}$$

должно совпасть с исходным. Разложив определитель в (14.75) по четвёртому столбцу, найдём

$$W[x, x^2, x^3] y''' - 6x^2 y'' + 12xy' - 12y = 0$$

или с учётом $W[x, x^2, x^3] = 2x^3$

$$y''' - \frac{3}{x} y'' + \frac{6}{x^2} y' - \frac{6}{x^3} y = 0.$$

Полученное уравнение совпало с исходным, подтвердив правильность решения.

Чтобы найти решение задачи Коши, подставим общее решение (14.74) в начальные условия (14.70) и придём к системе

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 2, \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 &= 1, \\ 2C_2 + 6C_3 &= -4, \end{aligned}$$

решение которой даёт $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$ и, соответственно,

$$y(x) = 2x + x^2 - x^3.$$

Это же решение получится с помощью нормировки системы (14.72) в точке $x = 1$.

Пример 14.11. Найти общее решение уравнения

$$y'''(x) + \frac{4x - 3}{x(2x - 1)} y''(x) - \frac{2}{x(2x - 1)} y'(x) + \frac{2}{x^2(2x - 1)} y(x) = 0, \quad x \in \left]\frac{1}{2}, \infty\right[, \tag{14.76}$$

если известны два его решения: $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x^{-1}$.

Решение. Для простоты выберем функцию $y_1(x) = x$ и заменой

$$y(x) = y_1(x) \int u(x)dx = x \int u(x)dx \tag{14.77}$$

понизим порядок уравнения (14.76).

Вычислив производные

$$y'(x) = \int u(x)dx + xu(x),$$
$$y''(x) = 2u(x) + xu'(x),$$
$$y'''(x) = 3u'(x) + xu''(x)$$

и подставив их вместе с (14.77) в исходное уравнение (14.76), получим для новой функции уравнение 2-го порядка

$$(3u'+xu'')+\frac{4x-3}{x(2x-1)}(2u+xu')-\frac{2}{x(2x-1)}\Big[\int u\,dx+xu\Big]+\frac{2}{x^2(2x-1)}x\int u\,dx=0,$$

которое после приведения подобных можно записать в канонической форме:

$$u''(x) + \frac{10x-6}{x(2x-1)}u'(x) + \frac{6x-6}{x^2(2x-1)}u(x) = 0. \tag{14.78}$$

Одно решение $u_1(x)$ этого уравнения можно найти, если в выражении (14.77) положить $y(x) = y_2(x)$. Тогда

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{1}{x^2} = \int u_1(x)dx$$

или

$$u_1(x) = \Big(\frac{1}{x^2}\Big)' = -\frac{2}{x^3}. \tag{14.79}$$

Второе решение $u_2(x)$ найдём, воспользовавшись формулой (14.68) для уравнения (14.78)

$$u_2(x) = u_1(x)\int u_1^{-2}(x)e^{-\int\frac{10x-6}{x(2x-1)}dx}dx = -\frac{2}{x^3}\int\frac{x^6}{4}e^{-\int\frac{10x-6}{x(2x-1)}dx}dx. \tag{14.80}$$

Вычислив интеграл

$$\int\frac{10x-6}{x(2x-1)}dx = \int\Big(\frac{6}{x} - \frac{2}{2x-1}\Big)dx = 6\ln x - \ln(2x-1) \tag{14.81}$$

и подставив его в (14.80), получим

$$u_2(x) = -\frac{2}{x^3}\int\frac{x^6}{4}\frac{1}{x^6}(2x-1)dx = -\frac{1}{2x^3}\int(2x-1)dx = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\Big).$$

Теперь, подставив $u_2(x)$ в (14.77), найдём третье решение исходного уравнения

$$y_3(x) = x\int\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\Big)dx = -\frac{1}{2}x\Big(\ln x + \frac{1}{x}\Big) = -\frac{1}{2}(x\ln x + 1). \tag{14.82}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет три решения

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = \frac{1}{x}, \quad y_3(x) = x\ln x + 1. \tag{14.83}$$

Вычислив вронскиан системы функций (14.83):

$$W\Big[x,\frac{1}{x},x\ln x+1\Big] = x^3W\Big[-\frac{2}{x^3},\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\Big] = x^3\frac{4}{x^6}\Big[\Big(-\frac{x^3}{2}\Big)\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\Big)\Big]' = -\frac{2}{x^3}(2x-1),$$

убеждаемся в их линейной независимости, поскольку

$$W[y_1,y_2,y_3] = -\frac{2(2x-1)}{x^3} \neq 0$$

для всех $x \in I$. Это означает, что система функций (14.83) является фундаментальной системой решений уравнения (14.76) и определяет его общее решение

$$y(x) = C_1 x + C_2 \frac{1}{x} + C_3 (x \ln x + 1), \quad x \in \left]\frac{1}{2}, \infty\right[. \tag{14.84}$$

Выше мы предполагали, что коэффициенты уравнения (10.1) непрерывны во всей области определения $I =]a, b[$. Если эти функции определены в интервале $]a, b[$, за исключением отдельных точек, в которых они разрывны, то последние называются особыми точками уравнения (10.1). Если коэффициенты этого уравнения непрерывны в I, то особыми точками будут только те точки, в которых коэффициент $\bar{a}_n(x)$ при старшей производной обращается в нуль, поскольку при переходе к канонической форме уравнение делится на этот коэффициент.

В каждом из интервалов I_i, не содержащих особых точек, существует, вообще говоря, своя фундаментальная система решений однородного уравнения, позволяющая строить общее решение этого уравнения в области I_i, совокупность которых определяет общее решение в области $I = \sum\limits_i I_i$ (или $I = \bigcup\limits_i I_i$).

Пример 14.12. Построить общее решение уравнения

$$x^2(2x-1)y'''(x) + x(4x-3)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0. \tag{14.85}$$

Решение. Коэффициенты уравнения (14.85) непрерывны на $\mathbb{R}$, однако коэффициент при старшей — третьей — производной обращается в нуль в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1/2$. Это означает, что именно эти точки являются особыми точками рассматриваемого уравнения. Действительно, при переходе от (14.85) к канонической форме

$$y'''(x) + \frac{4x-3}{x(2x-1)}y''(x) - \frac{2}{x(2x-1)}y'(x) + \frac{2}{x^2(2x-1)}y(x) = 0$$

мы получим коэффициенты, разрывные в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 1/2$.

Таким образом, решение уравнения (14.85) можно рассматривать в области $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I \subset \mathbb{R}$, где $I_1 =]-\infty, 0[$, $I_2 =]0, 1/2[$, $I_3 =]1/2, \infty[$. Как следует из предыдущего примера, во всех трёх областях можно указать два частных решения $y_1 = x$, $y_2 = 1/x$. Чтобы найти третье решение, нужно вычислить интеграл (14.81):

$$\int \frac{10x-6}{x(2x-1)}dx = 6\ln|x| - \ln|2x-1| = \ln\frac{x^6}{|2x-1|}, \quad x \in I,$$

тогда из (14.80) запишем

$$u_2(x) = -\frac{2}{x^3}\int \frac{x^6}{4}\frac{1}{x^6}|2x-1|dx = -\frac{1}{2x^3}\int |2x-1|dx$$

и, согласно (14.82), имеем

$$y_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(x\ln|x| + 1), & x \in I_1 \cup I_2; \\ -\dfrac{1}{2}(x\ln|x| + 1), & x \in I_3. \end{cases}$$

Поэтому вместо (14.82) для всех трёх интервалов найдём третье решение

$$y_3(x) = x\ln|x| + 1, \quad x \in I = I_1 \cup I_2 \cup I_3.$$

Таким образом, вместо (14.83) имеем три решения

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = \frac{1}{x}, \quad y_3(x) = x\ln|x| + 1. \tag{14.86}$$

Вычислив вронскиан функций (14.86), убеждаемся в их линейной независимости на каждом из промежутков I_1, I_2, I_3, а следовательно, и на промежутке $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Это означает, что система (14.86) представляет собой фундаментальную систему решений уравнения (14.85) и определяет его общее решение на $I = I_1 \cup I_2 \cup I_3$

$$y(x) = C_1 x + C_2\frac{1}{x} + C_3(x\ln|x| + 1),$$

совпадающее на $I_3 =]1/2, \infty[$ с найденным ранее (14.84).

15. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка. Метод Лагранжа

Перейдём теперь к рассмотрению неоднородных дифференциальных уравнений.

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, согласно (10.2), имеет вид

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0 y = f(x) \tag{15.1}$$

или, согласно (11.6),

$$\widehat{L}_n y(x) = f(x), \tag{15.2}$$

где $\widehat{L}_n$ — ЛДО n-го порядка (11.5), т.е.

$$\widehat{L}_n = D^n + a_{n-1}(x)D^{n-1} + \ldots + a_1(x)D + a_0(x). \tag{15.3}$$

Поскольку решение неоднородного уравнения (15.2) тесно связано с решением соответствующего однородного уравнения, то наряду с функцией $y(x)$ мы введём функцию $\bar{y}(x)$, являющуюся решением однородного уравнения

$$\widehat{L}_n \bar{y}(x) = 0. \tag{15.4}$$

Все предположения относительно коэффициентов ЛДО $\widehat{L}_n$, сделанные при рассмотрении однородного уравнения (15.4), сохраняются и для неоднородного уравнения.

Теорема 15.1 (о структуре общего решения неоднородного уравнения). *Общим решением $y(x)$ неоднородного уравнения* (15.2) *является сумма его произвольного частного решения $y^*(x)$ и общего решения соответствующего однородного уравнения* (15.4), *т.е.*

$$y(x) = y^*(x) + \bar{y}(x). \tag{15.5}$$

Доказательство. Функция $y(x)$ в виде суммы (15.5) является решением неоднородного уравнения. Это следует непосредственно из теоремы 11.3 (принцип суперпозиции). Так как

$$\widehat{L}_n y^*(x) = f(x) \quad \text{и} \quad \widehat{L}_n \bar{y}(x) = 0,$$

то справедливо

$$\widehat{L}(y^*(x) + \bar{y}(x)) = f(x).$$

Теперь мы должны показать, что из решения (15.5) можно получить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y(x)\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'(x)\big|_{x=x_0} = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x)\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}, \tag{15.6}$$

Для этого воспользуемся развернутой записью общего решения однородного уравнения

$$\bar{y}(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x), \tag{15.7}$$

где C_i, $i = \overline{1,n}$, — произвольные постоянные, а $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, — фундаментальная система решений однородного уравнения (15.4). С учётом этого решение (15.5) запишется так:

$$y(x) = y^*(x) + \sum_{i=1}^{n} C_iy_i(x). \tag{15.8}$$

Подставив (15.8) в (15.6), получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} C_iy_i(x_0) = y_0 - y^*(x_0);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\sum_{i=1}^{n} C_iy_i^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - (y^*)^{(n-1)}(x_0)
\end{aligned}$$

для произвольных постоянных C_i.

Так как определитель этой системы является вронскианом $W(x_0)$ фундаментальной системы решений $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, то $W(x_0) \neq 0$. В силу этого система имеет единственное нетривиальное решение $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$, $\ldots$, $C_n = C_n^0$, и, следовательно, решение (15.8) является частным решением неоднородного уравнения, удовлетворяющим начальным условиям (15.7). Это и означает, что решение (15.8), а соответственно, и (15.5), является общим решением неоднородного уравнения (15.2), что и требовалось доказать.

Если известна фундаментальная система $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, решений однородного уравнения (15.4), то общее решение неоднородного уравнения (15.2) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (методом Лагранжа). Впервые мы применили этот метод для линейного уравнения 1-го порядка, заменив в решении однородного уравнения $\bar{y}(x) = Cy_1(x)$ произвольную постоянную C функцией $C(x)$. Представление общего решения неоднородного уравнения в виде $y(x) = C(x)y_1(x)$ позволило достаточно просто найти функции $C(x)$ и тем самым общее решение неоднородного уравнения $y(x)$.

Так как для линейного однородного уравнения n-го порядка мы вместо одной функции имеем фундаментальную систему решений $y_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, определяющих общее решение однородного уравнения (15.7) через n произвольных постоянных

$$\bar{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} C_jy_j(x),$$

то решение неоднородного уравнения ищем в виде

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j(x)y_j. \tag{15.9}$$

Так как при подборе функций $C_j(x)$ должно удовлетворяться лишь одно уравнение

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_0(x)y = f(x),$$

то можно потребовать, чтобы эти n функций $C_j(x)$ удовлетворяли ещё $(n-1)$-му уравнению, которые выберем так, чтобы производные функции имели вид, аналогичный (15.9). Поскольку

$$y' = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j' + \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j,$$

этого можно достичь, если потребовать

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j = 0,$$

тогда

$$y' = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j'.$$

Продифференцировав это равенство, получим

$$y'' = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j'' + \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y'$$

и потребуем, чтобы

$$\sum_{j=1}^{n} C_j y_j' = 0.$$

Аналогично вычислим производные до $(n-1)$ включительно:

$$\begin{aligned}
&y = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j;\\
&y' = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j', \quad \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y(x) = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\
&y^{(n-1)} = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j^{(n-1)}, \quad \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_i^{(n-2)}(x) = 0.
\end{aligned}$$

Вычислив

$$y^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j^{(n-1)}$$

и подставив эти производные в уравнение (15.1), получим

$$\sum_{j=1}^{n} C_j(x) y^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} C_j' y_j^{(n-1)} + a_{n-1} \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j^{(n-1)} + \ldots + a_0(x) \sum_{j=1}^{n} C_j(x) y_j =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} C_j(x) \widehat{L}_n y_j(x) + \sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j^{(n-1)} = f(x),$$

т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} C_j'(x) y_j^{(n-1)} = f(x),$$

поскольку $\widehat{L}_n y_j(x) = 0$. Таким образом, для определения C_j' получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} C_j' y_j = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} C_j' y_j' = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\sum_{j=1}^{n} C_j' y_j^{(n-2)} = 0,\\
&\sum_{j=1}^{n} C_j' y_j^{(n-1)} = f(x)
\end{aligned} \tag{15.10}$$

с отличным от нуля определителем

$$\begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y_1' & \ldots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Действительно, это определитель Вронского, а он не равен нулю, так как функции $y_1, \ldots, y_n$ линейно независимы. Найдём из алгебраической системы (15.10) функции $C_j'(x) = \varphi_j(x)$. Тогда

$$C_j(x) = \int \varphi_j(x) dx + \bar{C}_j, \quad \bar{C}_j = \mathrm{const}, \tag{15.11}$$

и общее решение примет вид

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} \Big[C_j + \int \varphi_j(x) dx \Big] y_j(x)$$

или

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x) + \sum_{j=1}^{n} \Big[\int \varphi_j(x) dx \Big] y_j(x). \tag{15.12}$$

В полном соответствии с теоремой 15.1 первое слагаемое (15.12) определяет общее решение однородного уравнения (15.7):

$$\bar{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_j(x), \tag{15.13}$$

а второе слагаемое — частное решение неоднородного уравнения (15.2):

$$y^*(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j(x) \int \varphi_j(x) dx. \tag{15.14}$$

Таким образом, фундаментальная система решений однородного уравнения и решение алгебраической системы (15.10) позволяют с помощью формулы (15.12) найти решение неоднородного уравнения n-го порядка в квадратурах.

Несмотря на это, как и для линейного уравнения 1-го порядка, рассмотрим решение (15.12) и его составляющие более подробно. Начнем с частного решения $y^*(x)$. Если интеграл в (15.14) записать как

$$\int \varphi_j(x) dx = \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_j(t) dt,$$

то частное решение примет вид

$$y^*(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j(x) \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_j(t)dt \tag{15.15}$$

и будет удовлетворять условию

$$y^*(x_0) = 0. \tag{15.16}$$

Но тогда, если равенства (15.6) рассматривать как начальные условия к неоднородному уравнению (15.2), то в силу (15.16) они же будут и начальными условиями к однородному уравнению.

Таким образом, задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\begin{gathered} \widehat{L}_n y(x) = f(x), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{gathered} \tag{15.17}$$

посредством представления

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x)$$

всегда можно разбить на две:

1) однородное уравнение с ненулевыми (неоднородными) начальными условиями

$$\begin{gathered} \widehat{L}_n \bar{y}(x) = 0, \\ \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0, \quad \bar{y}'(x_0) = \bar{y}_0', \quad \ldots. \quad \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}_0^{(n-1)}; \end{gathered} \tag{15.18}$$

2) неоднородное уравнение с нулевыми начальными условиями

$$\begin{gathered} \widehat{L}_n y^*(x) = f(x), \\ y^*(x_0) = (y^*)'(x_0) = \cdots = (y^*)^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{gathered} \tag{15.19}$$

$\Diamond$ Очевидно, что переход от одной задачи (15.17) к двум: (15.18) и (15.19), называемый иногда редукцией задачи, допустим не только для получения частного решения, но может быть использован и для получения общего решения при произвольных значениях $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$.

Задачу (15.18) мы подробно рассмотрели в предыдущем разделе, выписав её общее решение, общее решение в форме Коши и непосредственно решение задачи Коши.

Решение задачи (15.19), как уже отмечалось, можно найти методом Лагранжа в виде (15.15), решив систему (15.10).

Кроме того, чтобы найти частное решение $y^*(x)$, можно воспользоваться методом Коши. Согласно этому методу, частное решение $y^*(x)$, являющееся решением задачи (15.19), нужно искать по формуле Коши

$$y^*(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,t)f(t)dt, \tag{15.20}$$

где $K(x,t)$ — функция Коши (или функция влияния), являющаяся при каждом значении параметра t решением однородного уравнения

$$\widehat{L}_n K(x,t) = 0 \tag{15.21}$$

и удовлетворяющая условиям

$$K(x,x) = K'(x,x) = \ldots = K^{(n-2)}(x,x) = 0, \quad K^{(n-1)}(x,x) = 1. \tag{15.22}$$

Эти условия являются очевидным результатом подстановки (15.20) в уравнение (15.19). Действительно, вычислив производные $y^*(x)$ с учётом (15.22), имеем

$$\begin{aligned}
&(y^*)'(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K'_x(x,t)f(t)dt + K(x,x)f(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K'_x(x,t)f(t)dt,\\
&(y^*)''(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K''_x(x,t)f(t)dt + K'(x,x)f(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K''_x(x,t)f(t)dt,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&(y^*)^{(n-1)}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K^{(n-1)}_x(x,t)f(t)dt + K^{(n-2)}(x,x)f(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K^{(n-1)}_x(x,t)f(t)dt,\\
&(y^*)^{(n)}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K^{(n)}_x(x,t)f(t)dt + K^{(n-1)}(x,x)f(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K^{(n)}_x(x,t)f(t)dt + f(x).
\end{aligned} \tag{15.23}$$

Подставив (15.23) совместно с (15.20) в (15.19), получим равенство

$$\int\limits_{x_0}^{x} (\widehat{L}_n K(x,t))f(t)dt + f(x) = f(x),$$

которое обращается в тождество, если учесть (15.21).

Таким образом, формула Коши (15.20) позволяет свести решение неоднородного уравнения (15.19) к решению однородного уравнения (15.21). Поскольку фундаментальная система решений $y_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, оператора $\widehat{L}_n$ уже известна из (15.17), то функция Коши в виде

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(x)\psi_j(t) \tag{15.24}$$

заведомо удовлетворяет уравнению (15.21). Функции $\psi_j(t)$ следует подобрать так, чтобы выполнялись условия (15.22). Подстановка (15.24) в (15.22) приводит к алгебраической системе для функций $\psi_j(x)$:

$$\begin{aligned}
&\psi_1(x)y_1(x) + \psi_2(x)y_2(x) + \ldots + \psi_n(x)y_n(x) = 0,\\
&\psi_1(x)y'_1(x) + \psi_2(x)y'_2(x) + \ldots + \psi_n(x)y'_n(x) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\psi_1(x)y_1^{(n-2)}(x) + \psi_2(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + \psi_n^{(n-2)}(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0,\\
&\psi_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \psi_2(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \psi_n^{(n-1)}(x)y_n^{(n-1)}(x) = 1.
\end{aligned} \tag{15.25}$$

Матрица этой системы представляет собой фундаментальную матрицу

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x)\\ \multicolumn{3}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}, \tag{15.26}$$

составленную из фундаментальной системы решений $y_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, однородного уравнения (15.4). Введя в рассмотрение два столбца

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \dots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{I}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{15.27}$$

систему (15.27) можно записать в матричном виде

$$Y(x)\psi(x) = \mathbb{I}_0. \tag{15.28}$$

Поскольку $\det Y(x) = W[y_1, \dots, y_n] \neq 0$, то существует обратная матрица $Y^{-1}(x)$, умножив на которую (15.28), получим явный вид столбца

$$\psi(x) = Y^{-1}(x)\mathbb{I}_0. \tag{15.29}$$

Заметим далее, что сумму (15.24) можно записать как произведение соответствующих строки и столбца

$$K(x,t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(x)\psi_j(x) = (y_1(x) \quad \dots \quad y_n(x)) \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \dots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}.$$

Здесь столбец $\psi(x)$ определен равенством (15.29), а строка $(y_1(x)\ y_2(x)\ \dots\ y_n(x))$ из фундаментальных решений является первой строкой фундаментальной матрицы $Y(x)$. Обозначив её

$$(y_1(x) \quad \dots \quad y_n(x)) = [Y(x)]_1 \tag{15.30}$$

и воспользовавшись (15.29), получим компактную векторную запись функции Коши:

$$K(x,t) = [Y(x)]_1 Y^{-1}(t)\mathbb{I}_0 \tag{15.31}$$

и, соответственно, частного решения

$$y^*(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,t)f(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} [Y(x)]_1 Y^{-1}(t)\mathbb{I}_0 f(t)dt. \tag{15.32}$$

Учтем при этом, что общее решение однородного уравнения в форме Коши

$$\bar{y}(x) = y_{x_0 1}(x)y_0 + y_{x_0 2}(x)y_0' + \dots + y_{x_0 n}(x)y_0^{(n-1)},$$

можно записать как произведение строки

$$(y_{x_0 1}(x) \quad \dots \quad y_{x_0 n}(x)) = [Y(x)]_1 Y^{-1}(x_0) \tag{15.33}$$

на столбец из произвольных начальных условий

$$y^0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \dots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}, \tag{15.34}$$

т.е.

$$\bar{y}(x) = [Y(x)]_1 Y^{-1} y^0.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения (15.2) в форме Коши можно записать в матричной форме

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x) = [Y(x)]_1 Y^{-1}(x_0)y^0 + \int\limits_{x_0}^{x} [Y(x)]_1 Y^{-1}(t)\mathbb{I}_0 f(t)dt \tag{15.35}$$

или

$$y(x) = [Y(x)]_1 \left\{ Y^{-1}(x_0) y^0 + \int_{x_0}^{x} Y^{-1}(t) \mathbb{I}_0 f(t) dt \right\}. \tag{15.36}$$

◊ Из формул (15.35), (15.36) следует, что решение неоднородного уравнения всегда можно найти в квадратурах, причем оно целиком определяется фундаментальной матрицей $Y(x)$.

◊ Так как решение $y(x)$ является скаляром, то векторная запись (15.36) подсказывает возможность представления уравнения n-го порядка в некотором матричном виде, т.е. системой дифференциальных уравнений. В справедливости этого мы убедимся позднее.

◊ По сравнению с методом Лагранжа формула (15.36), выражающая суть метода Коши, в некоторых случаях позволяет уменьшить число промежуточных вычислений.

Пример 15.1. Найти решение задачи Коши

$$y'''(x) - \frac{x^2}{x^2-2x+2} y''(x) + \frac{2x}{x^2-2x+2} y' - \frac{2}{x^2-2x+2} y(x) = x^2 - 2x + 2;$$
$$y(1) = 2, \quad y'(1) = 4, \quad y''(1) = 1.$$

Решение. Коэффициенты уравнения определены и непрерывны на всем промежутке $]-\infty, \infty[$, поскольку $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$. Это означает, что задача Коши имеет единственное решение. В примере 13.4 было показано, что уравнение имеет фундаментальную систему решений

$$y_1 = x, \quad y_2 = x^2, \quad y_3 = e^x.$$

Найдём решение двумя способами.

1-й способ. Метод вариации постоянных (*метод Лагранжа*)

Общее решение уравнения ищем в виде

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + C_3(x) y_3(x) = C_1(x) x + C_2(x) x^2 + C_3(x) e^x,$$

где функции C_j, $i = \overline{1,3}$, удовлетворяют системе (15.10), которая для данного случая имеет вид

$$\begin{aligned} &C_1' x + C_2' x^2 + C_3' e^x = 0, \\ &C_1' + C_2' 2x + C_3' e^x = 0, \\ &C_2' 2 + C_3' e^x = x^2 - 2x + 2. \end{aligned}$$

Вычтя третье уравнение из первых двух, получим

$$\begin{aligned} &C_1' x + C_2'(x^2 - 2) = -x^2 + 2x - 2, \\ &C_1' + C_2' 2(x-1) = -x^2 + 2x - 2, \\ &C_2' 2 + C_3' e^x = x^2 - 2x + 2. \end{aligned} \tag{15.37}$$

Вычтя теперь 2-ое уравнение, умноженное на x, из первого, найдём

$$C_2'[(x^2 - 2) - 2x(x-1)] = (-x^2 + 2x - 2)(1 - x),$$

откуда

$$C_2'(x) = 1 - x. \tag{15.38}$$

Подставив теперь (15.38) в первое и третье уравнения системы (15.37), получим

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= x(x-2), \\ C_3'(x) &= x^2e^{-x}. \end{aligned} \tag{15.39}$$

Интегрирование (15.38), (15.39) даёт явный вид коэффициентов

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \int x(x-2)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + C_1, \\ C_2(x) &= \int (1-x)dx = x - \frac{x^2}{2} + C_2, \\ C_3(x) &= \int x^2e^{-x}dx = -(x^2+2x+2)e^{-x}C_3. \end{aligned} \tag{15.40}$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

С учётом (15.40) общее решение неоднородного уравнения примет вид

$$y(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3e^x + \frac{x^4}{3} - x^3 + x^3 - \frac{x^4}{2} - x^2 - 2x - 2$$

или

$$y(x) = C_1x + C_2x^2 + C_3e^x - \frac{x^4}{6} - x^2 - 2x - 2. \tag{15.41}$$

Вычислив производные

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1 + C_2 2x + C_3e^x - \frac{2}{3}x^3 - 2x - 2, \\ y''(x) &= C_2 2 + c_3e^x - 2x^2 - 2 \end{aligned}$$

и подставив их в вместе с (15.41) в начальные условия, получим систему

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3e - \frac{31}{6} &= 2, \\ C_1 + 2C_2 + C_3e - \frac{14}{3} &= 4, \\ 2C_2 + C_3e - 4 &= 1 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3e &= \frac{43}{6}, \\ C_1 + 2C_2 + C_3e &= \frac{26}{3}, \\ 2C_2 + C_3e &= 5. \end{aligned}$$

Вычтя из первого уравнения второе, а из второго третье, придём к системе

$$\begin{aligned} -C_2 = -\frac{9}{6} &= -\frac{3}{2}, \\ C_1 &= \frac{11}{3}, \\ 2C_2 + C_3e &= 5, \end{aligned}$$

откуда $C_1 = 11/3$. $C_2 = 3/2$, $C_3 = 2/e$. Подставив найденные коэффициенты в общее решение (15.41), получим решение задачи Коши

$$y(x) = -\frac{x^4}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x - 2 + 2e^{x-1}.$$

2-й способ. Метод Коши

По известной фундаментальной системе решений однородного уравнения $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = e^x$ построим фундаментальную матрицу

$$Y(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{pmatrix}$$

и вычислим её:

$$\det Y(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & e^x \\ 1 & 2x & e^x \\ 0 & 2 & e^x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 2x & e^x \\ 2 & e^x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ 2 & e^x \end{vmatrix} = e^x(x^2 - 2x + 2),$$

т.е. $\det Y(x) > 0$ для всех x. Чтобы найти $Y^{-1}(x)$, вычислим союзную матрицу

$$\widetilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2x & e^x \\ 2 & e^x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ 2 & e^x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ 2x & e^x \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x(x-1) & -e^x & 2 \\ -e^x(x^2-2) & xe^x & -2x \\ e^x(x^2-2x) & -e^x(x-1) & x^2 \end{pmatrix},$$

тогда

$$Y^{-1}(x) = \frac{1}{e^x(x^2-2x+2)} \begin{pmatrix} 2e^x(x-1) & -e^x(x^2-2) & e^x x(x-2) \\ -e^x & xe^x & -e^x(x-1) \\ 2 & -2x & x^2 \end{pmatrix}$$

и

$$Y^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2/e & -2/e & 1/e \end{pmatrix}.$$

Вычислив строку

$$[Y(x)]_1 Y^{-1}(1) = \begin{pmatrix} 2e^x(x-1) & e^x(2-x^2) & e^x x(x-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2/e & -2/e & 1/e \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2e^{x-1} - x^2 & -2e^{x-1} + x^2 + x & e^{x-1} - x \end{pmatrix}$$

и столбец

$$Y^{-1}(t)\mathbb{I}_0 = \frac{1}{e^t(t^2-2t+2)} \begin{pmatrix} 2e^t(t-1) & -e^t(t^2-2) & e^t t(t-2) \\ -e^t & te^t & -e^t(t-1) \\ 2 & -2t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{e^t(t^2-2t+2)} \begin{pmatrix} e^t t(t-2) \\ -e^t(t-1) \\ t^2 \end{pmatrix}$$

и подставив их в (15.36), получим общее решение в форме Коши

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x),$$

где общее решение однородного уравнения в форме Коши

$$\bar{y}(x) = y_0(2e^{x-1} - x^2) + y_0'(x^2 + x - 2e^{x-1}) + y_0''(e^{x-1} - x) \tag{15.42}$$

и частное решение неоднородного уравнения

$$y^*(x) = \int\limits_1^x \frac{1}{e^t(t^2-2t+2)}[xe^t t(t-2) - x^2 e^t(t-1) + e^x t^2] f(t)dt =$$

$$= x\int\limits_1^x t(t-2)dt + x^2\int\limits_1^x (1-t)dt + e^x\int\limits_1^x e^{-t}t^2 dt =$$

$$= x\Big(\frac{t^3}{3} - t^2\Big)\Big|_1^x + x^2\Big(t - \frac{t^2}{2}\Big)\Big|_1^x - -e^x(t^2+2t+2)e^{-t}\Big|_1^x =$$

$$= -\frac{x^4}{6} - \frac{3x^2}{2} - \frac{4}{3}x - 2 + 5e^{x-1}. \tag{15.43}$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения в форме Коши имеет вид

$$y(x) = y_0(2e^{x-1} - x^2) + y_0'(x^2 + x - 2e^{x-1}) + y_0''(e^{x-1} - x) - \frac{x^4}{6} - \frac{3x^2}{2} - \frac{4}{3}x - 2 + 5e^{x-1}. \tag{15.44}$$

Подставив сюда начальные условия $y_0 = 2$, $y_0' = 4$, $y_0'' = 1$, получим решение задачи Коши

$$y(x) = -\frac{x^4}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{3}x - 2 + 2e^{x-1},$$

совпадающее с найденным методом Лагранжа.

В заключение в качестве проверки отметим, что, согласно (15.43), $y^*(1) = 0$, а согласно (15.42),

$$\bar{y}(x) = 3x + 2x^2 - 3e^{x-1}$$

является решением однородного уравнения с заданными начальными условиями (см. пример 13.4).

Пример 15.2. Показать, что частное решение уравнения

$$y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

с нулевыми начальными условиями можно найти по формуле

$$y^*(x) = \int\limits_{x_0}^x \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix} \frac{f(t)}{W(t)} dt, \tag{15.45}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, а $W(t)$ — их вронскиан.

Решение. Составим фундаментальную матрицу

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det Y(x) = W(x)$, то

$$Y^{-1}(x) = \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_2(x) \end{pmatrix},$$

поэтому

$$[Y(x)]_1 Y^{-1}(t)\mathbb{I}_0 = (y_1(x) \quad y_2(x)) \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (y_1(x) \quad y_2(x)) \frac{1}{W(t)} \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(t)}[-y_1(x)y_2(t) + y_2(x)y_1(t)] =$$

$$= \frac{1}{W(t)} \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}.$$

Подставив это выражение в (15.32), придём к формуле (15.45).

ГЛАВА 4

Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

16. Основные определения и свойства

♦ Линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами (или стационарным) называется уравнение (10.1), в котором коэффициенты $\bar{a}_k$, $k = \overline{0, n}$, являются постоянными величинами.

Каноническая форма однородного уравнения (10.3) с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\widehat{L}_n y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{16.1}$$

где $\widehat{L}_n$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, или линейный стационарный дифференциальный оператор (ЛСДО)

$$\widehat{L}_n = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0. \tag{16.2}$$

Ниже мы рассмотрим уравнения с вещественными коэффициентами a_k, $k = \overline{0, n-1}$, а, кроме того, наряду с обычным обозначением $\widehat{L}_n$ будем использовать для (16.2) обозначение $L_n(D)$.

Все результаты, полученные для уравнений с переменными коэффициентами, остаются справедливыми и для стационарных уравнений и, более того, могут быть модифицированы. Так, например, теорема 12.2 (формула Лиувилля–Остроградского) для стационарного уравнения имеет более конкретную формулировку.

Теорема 16.1 (формула Лиувилля–Остроградского для стационарного уравнения). *Пусть $y_k(x)$, $k = \overline{1, n}$, — решения стационарного уравнения* (16.1), *а $W(x)$ — их вронскиан. Тогда справедлива формула*

$$W(x) = W(0)e^{-xa_{n-1}}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{16.3}$$

Доказательство очевидным образом вытекает из формулы (12.17) с учётом

$$\int\limits_{x_0}^{x} a_{n-1}(x)dx = \int\limits_{0}^{x} a_{n-1}dx = a_{n-1}\int\limits_{0}^{x} dx = a_{n-1}x.$$

Аналогично переформулируется формула Абеля и ряд других утверждений, рассмотренных выше.

Наряду с этим у решений стационарных уравнений появляются дополнительные свойства.

♦ Функция $\tilde{y}(x)$ называется сдвигом (смещением) функции $y = y(x)$ на постоянную x_0, если $\tilde{y}(x) = y(x - x_0)$.

Лемма 16.1. *Сдвиг решения однородного стационарного уравнения* (16.1) *также является решением этого уравнения.*

Доказательство. Пусть $y(x)$ — решение уравнения (16.1)

$$\widehat{L}_n y(x) = 0,$$

тогда

$$\Big[\frac{d^n}{d(x-x_0)^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{d(x-x_0)^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{d}{d(x-x_0)}+a_0\Big]y(x-x_0)=0$$

для всех $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Из соотношений

$$\frac{d}{d(x-x_0)}=\frac{1}{d(x-x_0)/dx}\frac{d}{dx}=\frac{d}{dx}=D, \quad \frac{d^k}{d(x-x_0)^k}=D^k$$

следует

$$\Big[\frac{d^n}{d(x-x_0)^n}+\ldots+a_1\frac{d}{d(x-x_0)}+a_0\Big]y(x-x_0)=$$
$$=[D^n+\ldots+a_1D+a_0]y(x-x_0)=\widehat{L}_ny(x-x_0)=0$$

для всех $x, x_0 \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

Следствие 16.1.1. Если $Y(x)$ — фундаментальная матрица (16.1), а $Y_0(x)$ — её матрицант в точке $x=0$, то матрицант в точке $x=x_0$ можно найти как

$$Y_{x_0}(x)=Y_0(x-x_0).$$

Задачу Коши для стационарного однородного уравнения

$$\widehat{L}_ny(x)=0,$$
$$y(x_0)=y_0, \quad y'(x_0)=y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

с учётом леммы 16.1 сдвигом $t=x-x_0$ всегда можно свести к виду

$$\widehat{L}_ny(t)=0,$$
$$y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}.$$

Рассмотрим предельные частные случаи стационарного уравнения

$$\widehat{L}_ny(x)=D^ny(x)=y^{(n)}(x)=0,$$
$$\widehat{L}_1y(x)=(D+a_0)y(x)=y'(x)+a_0y(x)=0.$$

Первое из этих уравнений имеет решение в виде полинома

$$y(x)=C_0+C_1x+\ldots+C_{n-1}x^{n-1},$$

а решением второго является экспонента

$$y(x)=Ce^{-a_0x}.$$

Позднее мы убедимся, что решением произвольного стационарного уравнения являются исключительно функции, представляющие собой произведение полиномов на экспоненты и получившие название квазиполиномов.

♦ Квазиполиномом (квазимногочленом) называется функция

$$g(x)=e^{\lambda_1x}P_{k_1}(x)+\ldots+e^{\lambda_mx}P_{k_m}(x)=\sum_{l=1}^m e^{\lambda_lx}P_{k_l}(x), \tag{16.4}$$

где λ_l — комплексные постоянные, а $P_{k_l}(x)$ — действительные полиномы степени k_l, $l=\overline{1,m}$. Если $\lambda_l\neq\lambda_s$ при $l\neq s$, то квазиполиномы (16.4) называются приведёнными.

Другими словами, линейные однородные стационарные уравнения можно рассматривать как источник, порождающий такой класс функций, как квазиполиномы.

17. Общее решение линейного стационарного однородного уравнения

Основной особенностью линейного стационарного однородного уравнения (16.1) является то, что его интегрирование сводится фактически к решению алгебраической задачи, а именно алгебраического уравнения n-й степени.

Чтобы установить алгебраический характер задачи об интегрировании стационарного уравнения (16.1), будем, следуя Эйлеру, искать его частные решения в виде

$$y(x) = e^{\lambda x}, \tag{17.1}$$

где λ — некоторая постоянная, подлежащая определению. Если учесть, что

$$De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}, \quad D^2 e^{\lambda x} = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \ldots, D^n e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x} \tag{17.2}$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} L_n(D)e^{\lambda x} &= (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0)e^{\lambda x} = \\ &= (\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = L_n(\lambda)e^{\lambda x}, \end{aligned}$$

где

$$L_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0, \tag{17.3}$$

то подстановка (17.1) в (16.1) даёт

$$L_n(D)e^{\lambda x} = L_n(\lambda)e^{\lambda x} = 0. \tag{17.4}$$

Это и означает, что решение дифференциального уравнения сводится фактически к решению алгебраического уравнения ($e^{\lambda x} \neq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$)

$$L_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{17.5}$$

Для удобства работы с (17.3) и (17.5) введём следующую терминологию.

♦ Полином (17.3) будем называть характеристическим полиномом линейного стационарного дифференциального оператора (ЛСДО) (16.2) (или характеристическим полиномом стационарного однородного уравнения (16.1)).

♦ Алгебраическое уравнение (17.5), определяющее нули характеристического полинома, будем называть характеристическим уравнением, а решения (или корни) характеристического уравнения — характеристическими числами.

Из сравнения определений (16.2) и (17.3) следует, что переход от ЛСД-оператора $\widehat{L}_n = L_n(D)$ к характеристическому полиному $L_n(\lambda)$ и наоборот соответствует формальной замене символа D на характеристическое число λ.

Согласно основной теореме алгебры, характеристическое уравнение как алгебраическое уравнение n-го порядка имеет n корней (т.е. нулей полинома) λ_k, $k = \overline{1, n}$ (см., например, [2]).

Исходя из этого, мы можем выписать систему частных решений однородного уравнения (16.1) в виде (17.1):

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}, \ldots, y_n(x) = e^{\lambda_n x}. \tag{17.6}$$

Далее необходимо исследовать линейную независимость этой системы. Очевидно, что если характеристические числа λ_k, $k = \overline{1, n}$, различны, то, как было показано ранее (см. пример 12.7), система (17.6) является линейно независимой для всех $x \in \mathbb{R}$ и, следовательно, представляет собой фундаментальную систему решений уравнения (16.1), определяющую его общее решение

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x} = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}. \tag{17.7}$$

Если среди характеристических чисел какое-либо число, например λ_k, является комплексным: $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$, то, поскольку коэффициенты характеристического уравнения вещественны, характеристическим числом является и комплексно сопряжённое к нему $\lambda_k^* = \alpha_k - i\beta_k$, которое мы обозначим, как $\lambda_{k+1} = \lambda_k^*$. В этом случае, согласно следствию из теоремы 11.2, две комплекснозначные функции

$$y_k(x) = e^{(\alpha_k + i\beta_k)x}, \qquad y_{k+1}(x) = e^{(\alpha_k - i\beta_k)x} \tag{17.8}$$

в общем решении (17.7) удобнее заменить двумя действительными

$$y_k(x) = e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, \qquad y_{k+1}(x) = e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x. \tag{17.9}$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения (16.1) при наличии различных (простых) корней характеристического уравнения (17.5) задаётся квазиполиномами вида (17.7) с произвольными постоянными C_k, $k = \overline{1,n}$.

При наличии кратных (совпадающих) корней система частных решений (17.6) не является линейно независимой в силу совпадения некоторых её функций, а следовательно, с её помощью нельзя построить общее решение уравнения (16.1). Существуют различные подходы к построению фундаментальной системы решений для этого случая. Мы рассмотрим подход, который опирается на свойства ЛСД-оператора и его характеристического полинома и известен как метод Эйлера.

Как известно, если полином $L_n(\lambda)$ имеет нулями характеристические числа λ_l кратности r_l, $l = \overline{1,m}$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$, то он может быть разложен на сомножители:

$$L_n(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_m)^{r_m}. \tag{17.10}$$

Лемма 17.1. *Если характеристический полином $L_n(\lambda)$ ЛСД-оператора $\widehat{L}_n = L_n(D)$ имеет вид* (17.10)*, то этот оператор можно представить в виде произведения*

$$\widehat{L}_n(D) = (D - \lambda_1)^{r_1}(D - \lambda_2)^{r_2}\cdots(D - \lambda_m)^{r_m} \tag{17.11}$$

с любым порядком сомножителей.

Доказательство. Пусть $n = 2$. Тогда коэффициенты характеристического полинома

$$L_2(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

и его нули λ_1 и λ_2, согласно теореме Виета, связаны соотношениями $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, $a_0 = \lambda_1\lambda_2$. Учтя, что постоянный множитель можно вынести за знак производной (и, следовательно, за символ D), имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} L_2(D)y(x) &= (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y(x) = (D^2 - \lambda_1 D - D\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2)y(x) = \\ &= [D^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)D + \lambda_1\lambda_2]y(x) = (D^2 + a_1 D + a_0)y(x), \end{aligned}$$

из которой и следует

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = D^2 + a_1 D + a_0 = L_2(D). \tag{17.12}$$

Аналогично найдём для сомножителей в другом порядке

$$(D - \lambda_2)(D - \lambda_1) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2) = L_2(D). \tag{17.13}$$

Для кратных (совпадающих) нулей $\lambda_1 = \lambda_2$ из (17.12), (17.13) имеем

$$(D - \lambda_1)^2 = \widehat{L}_2 = L_2(D). \tag{17.14}$$

Для произвольных n доказательство проводится по индукции.

♦ Представление ЛСД-оператора $\widehat{L}_n = L_n(D)$ разложением (17.11), аналогичным (17.10), называется факторизацией.

Доказанная лемма позволяет работать с ЛСД-операторами по тем же правилам, что и с характеристическими, т.е. алгебраическими полиномами. Различие проявляется при их воздействии на функции.

Лемма 17.2. *Для любых натуральных чисел s и постоянных a_0, λ справедливо соотношение*

$$(D + a_0)^s e^{\lambda x} f(x) = e^{\lambda x}(D + a_0 + \lambda)^s f(x). \tag{17.15}$$

Соотношение (17.15) *называется формулой коммутации экспоненты.*

Доказательство. При $s = 1$ имеем

$$(D + a_0)e^{\lambda x} f(x) = \Big(\frac{d}{dx} + a_0\Big)e^{\lambda x} f(x) = \frac{d}{dx}[e^{\lambda x} f(x)] + a_0 e^{\lambda x} f(x) =$$
$$= e^{\lambda x}\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} f(x) = e^{\lambda x}(D + \lambda + a_0)f(x).$$

Для $s > 1$ в справедливости утверждения леммы убеждаемся методом математической индукции. Пусть соотношение (17.15) справедливо для некоторого $s > 1$. Тогда

$$(D + a_0)^{s+1} e^{\lambda x} f(x) = (D + a_0)(D + a_0)^s e^{\lambda x} f(x) =$$
$$= (D + a_0)e^{\lambda x}(D + a_0 + \lambda)^s f(x) = e^{\lambda x}(D + a_0 + \lambda)^{s+1} f(x),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 17.2.1. *Справедливо соотношение*

$$(D - \lambda)^s e^{\lambda x} f(x) = e^{\lambda x} D^s f(x). \tag{17.16}$$

Доказательство следует непосредственно из (17.15) при $a_0 = -\lambda$.

Следствие 17.2.2. *Общее решение уравнения*

$$\widehat{L}_s y(x) = L_s(D)y(x) = (D - \lambda)^s y(x) = 0 \tag{17.17}$$

имеет вид квазиполинома

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + \ldots + C_s x^{s-1})e^{\lambda x}. \tag{17.18}$$

Доказательство. Положив в (17.17)

$$y(x) = e^{\lambda x} u(x), \tag{17.19}$$

согласно (17.16), имеем

$$(D - \lambda)e^{\lambda x} u(x) = e^{\lambda x} D^s u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

откуда ($e^{\lambda x} \neq 0$)

$$D^s u(x) = u^{(s)}(x) = 0. \tag{17.20}$$

Фундаментальная система решений этого, допускающего понижение порядка уравнения имеет вид

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x, \quad \ldots, \quad u_{s-1}(x) = x^{s-1}.$$

С учётом этого и (17.19) для уравнения (17.17) получим фундаментальную систему решений

$$y_1(x) = e^{\lambda x}, \quad y_2(x) = xe^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y_s(x) = x^{s-1}e^{\lambda x}, \tag{17.21}$$

которая и задаёт общее решение в виде квазиполинома (17.18) с произвольными постоянными C_k, $k = \overline{1, s}$.

Сказанное выше обобщается следующим утверждением.

Теорема 17.1. *Общее решение однородного уравнения* (16.1) *представляется приведённым квазиполиномом*

$$y(x) = P_{r_1-1}(x)e^{\lambda_1 x} + P_{r_2-1}(x)e^{\lambda_2 x} + \ldots + P_{r_m-1}(x)e^{\lambda_m x}, \tag{17.22}$$

где λ_l — корни характеристического уравнения (17.5) *с кратностью r_l, $l = \overline{1, m}$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$, а $P_{r_l-1}(x)$ — полиномы степени $r_l - 1$:*

$$P_{r_l-1}(x) = C_1^{\lambda_l} + C_2^{\lambda_l}x + \ldots + C_{r_l}^{\lambda_l}x^{r_l-1}, \quad l = \overline{1, m}, \tag{17.23}$$

с произвольными постоянными $C_k^{\lambda_l}$.

Доказательство. Пусть $L_n(\lambda)$ — характеристический полином однородного стационарного уравнения (16.1), а λ_l — его нули кратности r_l, $l = \overline{1, m}$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$. Воспользовавшись факторизацией ЛСД-оператора (17.11), исходное уравнение можно записать как

$$(D - \lambda_1)^{r_1}(D - \lambda_2)^{r_2} \cdots (D - \lambda_l)^{r_m} y(x) = 0. \tag{17.24}$$

Выбрав последовательно $y(x)$ в виде

$$y(x) = y_1(x) = e^{\lambda_1 x}u_1(x), \quad \ldots, \quad y(x) = y_m(x) = e^{\lambda_m x}u_m(x) \tag{17.25}$$

и подставив их в (17.24), получим m уравнений вида

$$(D - \lambda_l)^{r_l}y_l(x) = (D - \lambda_l)^{r_l}e^{\lambda_l x}u_l(x) = e^{\lambda_l x}D^{r_l}u_l(x) = 0, \quad l = \overline{1, m},$$

или

$$D^{r_l}u_l(x) = 0, \quad l = \overline{1, m}. \tag{17.26}$$

Отсюда, согласно лемме 17.2, уравнение (16.1) имеет совокупную фундаментальную систему решений

$$e^{\lambda_l x}, \; xe^{\lambda_l x}, \; \ldots, \; x^{r_l-1}e^{\lambda_l x}, \quad l = \overline{1, m}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{17.27}$$

состоящую из $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ линейно независимых функций. Домножив их последовательно на произвольные постоянные и сгруппировав при суммировании в квазиполиномы, принадлежащие одному характеристическому корню λ_l, получим общее решение в виде приведённого квазиполинома (17.22) с полиномами (17.23), что и требовалось доказать.

Пример 17.1. Решить уравнения

$$\text{а)}\;\; y'' + 3y' - 4y = 0; \qquad \text{б)}\;\; y'' - 2y' + 1 = 0.$$

Решение. В случае а) имеем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ с корнями

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -4,$$

следовательно,

$$y(x) = C_1e^x + C_2e^{-4x}.$$

В случае б) имеем $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, следовательно,

$$y(x) = (C_1 + xC_2)e^x.$$

Пример 17.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

имеет комплексные корни

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Здесь $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Тогда, согласно (17.9), общее решение уравнения будет

$$y = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Пример 17.3. Решить уравнения

а) $y''' - 6y'' + 3y' + 10y = 0$; б) $y''' + y' + 10y = 0$; в) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$.

Решение. В случае а) имеем характеристическое уравнение $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $\lambda_1 = -1$ является его корнем, тогда

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 10 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет три различных корня: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$, и, следовательно,

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}.$$

В случае б) характеристическое уравнение $\lambda^3 + \lambda + 10 = 0$ разлагается на сомножители $(\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$. Отсюда $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1 + 2i$, $\lambda_3 = 1 - 2i$, и, следовательно, фундаментальная система имеет вид

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^{(1+2i)x}, \quad y_3 = e^{(1-2i)x}.$$

Последнюю пару функций можно заменить, согласно (17.9),

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^x \cos 2x, \quad y_3 = e^x \sin 2x.$$

Тогда можно записать общее решение:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + e^x(C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x).$$

В случае в) характеристическое уравнение $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$ или $(\lambda + 1)^3 = 0$ имеет один корень $\lambda = -1$ кратности $r = 3$. Следовательно,

$$y(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2).$$

Пример 17.4. Решить уравнения

а) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$; б) $y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + y = 0$.

Решение. В случае а) характеристическое уравнение $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ или $(\lambda^2 + 1)^2 = 0$, т.е. $\lambda_{1,2}^2 = -1$, имеет пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$ кратности $r = 2$. Следовательно,

$$y(x) = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

В случае б) характеристическое уравнение $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$ симметрично и $\lambda = 0$ не является его корнем. Тогда, разделив на λ^2, получим

$$\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - 4\Big(\lambda + \frac{1}{\lambda}\Big) + 5 = 0.$$

Сделаем замену

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = t, \tag{17.28}$$

тогда $\lambda^2 + 1/\lambda^2 = t^2 - 2$. Относительно t получим уравнение $t^2 - 4t + 3 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = 3$. Из соотношения (17.28), найдём $\lambda + 1/\lambda = 1$, $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ и $\lambda_{1,2} = (1 \pm i\sqrt{3})/2$; $\lambda + 1/\lambda = 3$, $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ и $\lambda_{3,4} = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Поэтому общее решение можно записать в виде

$$y(x) = e^{x/2}\Big(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\Big) + C_3 e^{x(3+\sqrt{5})/2} + C_4 e^{x(3-\sqrt{5})/2}.$$

Пример 17.5. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 2y'' = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0.$$

и найдём его корни:

$$\lambda^2(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2) = 0$$

или

$$\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0,$$

откуда

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 1 + i, \quad \lambda_5 = 1 - i.$$

Запишем частные решения:

$$y_1 = e^{0x} = 1; \quad y_2 = xe^{0x} = x; \quad y_3 = e^{1x} = e^x; \quad y_4 = e^x \cos x; \quad y_5 = e^x \sin x.$$

Отсюда получим общее решение

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + e^x(C_4 \cos x + C_5 \sin x)$$

или

$$y = C_1 + xC_2 + e^x(C_3 + C_4 \cos x + C_5 \sin x),$$

где C_1–C_5 — произвольные постоянные.

Пример 17.6. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} + 32y = 0.$$

Решение. Корни характеристического уравнения $\lambda^5 + 32 = 0$ найдём по формуле

$$\lambda = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{2^5(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2\Big(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{5}\Big),$$

где $k = \overline{1,5}$. Исходное уравнение имеет пять простых корней

$$\lambda_1 = 2\Big(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\Big); \quad \lambda_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2;$$
$$\lambda_3 = 2\Big(\cos\frac{3\pi}{5} - i\sin\frac{3\pi}{5}\Big); \quad \lambda_4 = 2\Big(\cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}\Big); \quad \lambda_5 = 2\Big(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\Big),$$

из которых две пары комплексно сопряжённых, и, соответственно, фундаментальную систему решений

$$y_1(x) = e^{-2x};$$
$$y_2(x) = e^{2x\cos\pi/5}\cos\Big(2x\sin\frac{\pi}{5}\Big); \quad y_3(x) = e^{2x\cos\pi/5}\sin\Big(2x\sin\frac{\pi}{5}\Big);$$
$$y_4(x) = e^{2x\cos3\pi/5}\cos\Big(2x\sin\frac{3\pi}{5}\Big); \quad y_5(x) = e^{2x\cos3\pi/5}\cos\Big(2x\sin\frac{3\pi}{5}\Big).$$

Поэтому общее решение имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{5} C_k y_k(x).$$

Пример 17.7. Построить общее решение уравнения $\widehat{L}_n y(x) = 0$, если оператор $L_n(D)$ имеет вид

а) $L_7(D) = D^3[D - (2 + i)][D - (2 - i)](D - \sqrt{5})^2$;

б) $L_8(D) = [D - (1 + i\sqrt{2})]^2[D - (1 - i\sqrt{2})]^2 D^3(D - 2)$;

в) $L_{12}(D) = (D + 0{,}1)^4(D + i)^3(D - i)^3(D - 3)^2$.

Решение. В случае а) характеристический полином имеет следующие нули: $\lambda_1 = 0$ кратности $r_1 = 3$, простые комплексно сопряжённые $\lambda_{2,3} = 2 \pm i$ и $\lambda_4 = \sqrt{5}$ кратности $r_4 = 2$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3) + e^{2x}(C_4 \cos x + C_5 \sin x) + e^{\sqrt{5}x}(C_6 + C_7 x).$$

В случае б) характеристическими числами являются пара комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{2}$ кратности $r_{1,2} = 2$; $\lambda_3 = 0$ кратности $r_3 = 3$; $\lambda_4 = 2$ кратности $r_4 = 1$. Следовательно,

$$y(x) = e^x[(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x) + x(C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x)] + \\ +(C_5 + C_6 x + C_7 x^2) + C_8 e^{2x}.$$

В случае в) характеристическими числами являются $\lambda_1 = -0{,}1$ кратности $r_1 = 4$; комплексно сопряжённая пара $\lambda_{2,3} = \pm i$ кратности $r_{2,3} = 3$ и $\lambda_4 = 3$ кратности $r_4 = 2$. Следовательно,

$$y(x) = e^{-0{,}1x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3) + (C_5 \cos x + C_6 \sin x) + \\ +x(C_7 \cos x + C_8 \sin x) + x^2(C_9 \cos x + C_{10} \sin x) + e^{3x}(C_{11} + C_{12} x).$$

Пример 17.8. Может ли оператор $\widehat{L}_n = L_n(D)$ уравнения $\widehat{L}_n y(x) = 0$ с действительными коэффициентами a_k, $k = \overline{0, n-1}$, иметь факторизацию вида

а) $L_4(D) = D^2(D-2)(D+i)$;
б) $L_7(D) = (D-1)^2 D(D+i)^3(D-i)$?

Решение. Нет. Если коэффициенты оператора $L_n(D)$ вещественны и корень характеристического уравнения $\lambda_l = \alpha_l + i\beta_l$ имеет кратность r_l, то корнем является и число, комплексно сопряжённое к нему $\lambda_l^* = \alpha_l - i\beta_l$ с той же кратностью r_l. В случае а) наряду с множителем $D + i$ должен присутствовать и сомножитель $D - i$. Его отсутствие говорит о невозможности такой факторизации. В случае б) этот сомножитель присутствует, но его кратность не совпадает с кратностью множителя $D+i$: $1 \neq 3$. Несовпадение кратностей говорит о невозможности такой факторизации.

Пример 17.9. Представить все возможные формы общего решения уравнения $y''(x) + a_0 y(x) = 0$.

Решение. Рассмотрим следующие случаи:
1) $a_0 = 0$, тогда $y''(x) = 0$, $y(x) = C_1 x + C_2$.
2) $a_0 = \omega^2 > 0$, тогда $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$ с характеристическим уравнением $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ и корнями $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. В этом случае общее решение можно представить следующими формулами:
а) комплексной $y(x) = a_1 e^{i\omega x} + a_2 e^{-i\omega x}$;
б) действительной $y(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$;
в) гармонической $y(x) = A \cos(\omega x - \varphi)$,
где $a_1, a_2, C_1, C_2, A, \varphi$ — произвольные постоянные, связанные друг с другом соотношениями $a_1 = (C_1 - iC_2)/2$; $a_2 = (C_1 + iC_2)/2$; $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$; $\operatorname{tg} \varphi = C_2/C_1$.
3. $a_0 = -\omega^2 < 0$, тогда $y''(x) - \omega^2 y(x) = 0$ с характеристическим уравнением $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ и корнями $\lambda_{1,2} = \pm\omega$. В этом случае общее решение можно записать только в действительной форме, однако тоже в трёх вариантах:
а) $y(x) = a_1 e^{\omega x} + a_2 e^{-\omega x}$;
б) $y(x) = C_1 \operatorname{ch} \omega x + C_2 \operatorname{sh} \omega x$;
в) $y(x) = A \operatorname{ch}(\omega x + \varphi)$, $C_1 \neq 0$.
Произвольные постоянные связаны друг с другом соотношениями $a_1 = (C_1 + C_2)/2$; $a_2 = (C_1 - C_2)/2$; $A = \sqrt{|C_1^2 - C_2^2|}$; $\operatorname{th} \varphi = C_2/C_1$.

Пример 17.10. Построить нормальную фундаментальную систему решений линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'''(x) + \omega^2 y'(x) = 0, \quad \omega > 0. \tag{17.29}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + \omega^2\lambda = \lambda(\lambda^2 + \omega^2) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i\omega$. Фундаментальную систему решений образуют функции

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = \cos\omega x, \quad y_3(x) = \sin\omega x. \tag{17.30}$$

Для построения нормальной системы решений уравнения (17.29) нужно пронормировать фундаментальную систему (17.30) в произвольной точке x_0. Для этого выпишем фундаментальную систему решений

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\omega x & \sin\omega x \\ 0 & -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \\ 0 & -\omega^2\cos\omega x & -\omega^2\sin\omega x \end{pmatrix}. \tag{17.31}$$

Положив в (17.31) $x = x_0$, найдём

$$Y(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \cos\omega x_0 & \sin\omega x_0 \\ 0 & -\omega\sin\omega x_0 & \omega\cos\omega x_0 \\ 0 & -\omega^2\cos\omega x_0 & -\omega^2\sin\omega x_0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det Y(x_0) = W(x_0) = \omega^3 \neq 0$, то матрица $Y(x_0)$ имеет обратную

$$Y^{-1}(x_0) = \frac{1}{\omega^3}\begin{pmatrix} \omega^3 & 0 & \omega \\ 0 & -\omega^2\sin\omega x_0 & -\omega\cos\omega x_0 \\ 0 & \omega^2\cos\omega x_0 & -\omega\sin\omega x_0 \end{pmatrix}. \tag{17.32}$$

Отсюда, согласно (13.13), найдём матрицант

$$Y_{x_0}(x) = Y(x)Y^{-1}(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{1}{\omega}\sin\omega(x - x_0) & \dfrac{1}{\omega^2}[1 - \cos\omega(x - x_0)] \\ 0 & \cos\omega(x - x_0) & \dfrac{1}{\omega}\sin\omega(x - x_0) \\ 0 & -\omega\sin\omega(x - x_0) & \cos\omega(x - x_0) \end{pmatrix},$$

первая строка которого даст нормированную в точке x_0 фундаментальную систему

$$y_{x_01}(x) = 1, \quad y_{x_02}(x) = \frac{1}{\omega}\sin\omega(x - x_0), \quad y_{x_03}(x) = \frac{1}{\omega^2}[1 - \cos\omega(x - x_0)]$$

и, соответственно, общее решение в форме Коши

$$y(x) = y_0 + \frac{y_0'}{\omega}\sin\omega(x - x_0) + \frac{y_0''}{\omega^2}[1 - \cos\omega(x - x_0)]. \tag{17.33}$$

Этот же результат можно получить, если найти $Y_0(x)$ с помощью $Y^{-1}(0)$, а затем воспользоваться следствием из леммы 16.1: $Y_{x_0}(x) = Y_0(x - x_0)$.

Пример 17.11. Проинтегрировать уравнение

$$y''(x) + 2xy'(x) + (x^2 + 5)y(x) = 0.$$

Решение. Это уравнение второго порядка с переменными коэффициентами $a_1(x) = 2x$, $a_0(x) = x^2 + 5$. Вычислим его инвариант:

$$Q(x) = a_0(x) - \frac{1}{4}a_1^2(x) - \frac{1}{2}a_1'(x) = x^2 + 5 - \frac{1}{4}4x^2 - \frac{1}{2}2 = 4.$$

Поскольку $Q(x)$ не зависит от x, исходное уравнение заменой (14.30), (14.39)

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx}u(x) = e^{-x^2/2}u(x)$$

можно привести к уравнению с постоянными коэффициентами

$$u''(x) + Q(x)u(x) = u''(x) + 4u(x) = 0.$$

Поэтому

$$y(x) = e^{-x^2/2}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

или

$$y(x) = Ae^{-x^2/2}\cos(2x + \varphi).$$

$\Diamond$ В заключение отметим, что представление линейных стационарных операторов в виде (17.11) (факторизация) не является единственным методом построения фундаментальной системы решений. В дальнейшем нам потребуется ещё один метод, который применим и для уравнений с переменными коэффициентами и смысл которого состоит в следующем предельном переходе. Пусть λ_1, λ_2 и λ_3 — три различных корня характеристического полинома $L_n(\lambda)$ стационарного уравнения $\widehat{L}_n y(x) = 0$. Тогда $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}$ — решения этого уравнения. Кроме того, функции

$$\frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_3 x}}{\lambda_1 - \lambda_3} \tag{17.34}$$

также являются решениями того же уравнения. Если теперь предположить, что при изменении коэффициентов полинома $L_n(\lambda)$ числа λ_1,λ_2 и λ_3 становятся равными, переходя в пределе в один трехкратный корень, то решениями будут и функции (17.34) при $\lambda_1 \to \lambda_2$ и $\lambda_1 \to \lambda_3$, т.е.

$$\lim_{\lambda_1\to\lambda_2} \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad \lim_{\lambda_1\to\lambda_3} \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_3 x}}{\lambda_1 - \lambda_3}.$$

Вычисление этих пределов, например по правилу Лопиталя, даёт наряду с $e^{\lambda_1 x}$ ещё два решения

$$xe^{\lambda_2 x}, \qquad xe^{\lambda_3 x}.$$

Аналогично предельный переход $\lambda_2 \to \lambda_3$ даёт ещё одно решение уравнения:

$$\lim_{\lambda_2\to\lambda_3} \frac{xe^{\lambda_2 x} - xe^{\lambda_3 x}}{\lambda_2 - \lambda_3} = x^2 e^{\lambda_3 x}.$$

Таким образом, наряду с решением $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ можно выписать ещё два:

$$y_2(x) = xe^{\lambda_2 x}\big|_{\lambda_2=\lambda_1} = xe^{\lambda_1 x},$$
$$y_3(x) = x^2 e^{\lambda_3 x}\big|_{\lambda_3=\lambda_1} = x^2 e^{\lambda_1 x},$$

которые и образуют фундаментальную систему решений, относящуюся к характеристическому корню λ_1 кратности $r_1 = 3$. Аналогично можно поступить с любым корнем λ_m кратности r_m.

18. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Здесь мы более подробно рассмотрим линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Естественно, что для них справедливы все результаты, полученные выше для уравнений произвольного порядка. Однако, поскольку эти уравнения наиболее востребованы в приложениях самого различного характера, то в курсе дифференциальных уравнений они занимают особое положение. В связи с этим их рассмотрение мы начнём с примера, который позволяет построить общее решение уравнения с использованием только понятия характеристического уравнения.

Пример 18.1. Построить общее решение линейного однородного уравнения второго порядка

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{18.1}$$

где p и q — постоянные коэффициенты.

Решение. Чтобы найти общее решение этого уравнения, нужно найти два частных линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Их сумма

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

и будет общим решением.

Будем искать частные решения в виде

$$y = e^{\lambda x}, \quad \lambda = \mathrm{const}\,.$$

Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ и уравнение (18.1) примет вид

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Так как $e^{\lambda x} \neq 0$, то λ должно удовлетворять алгебраическому уравнению

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{18.2}$$

Уравнение (18.2) называется характеристическим уравнением.

Таким образом, если λ будет удовлетворять уравнению (18.2), то $y = e^{\lambda x}$ будет решением уравнения (18.1).

Характеристическое уравнение (18.2) квадратное и имеет два корня

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad \lambda_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Возможны три следующих случая: 1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — корни действительные; 2) λ_1 и λ_2 — комплексные числа; 3) $\lambda_1 = \lambda_2$ — корни действительные и равные.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно и запишем выражение для общего интеграла.

1) Корни характеристического уравнения действительные и различные.

В этом случае два частных решения

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

линейно независимы, так как

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1 x}} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \mathrm{const}\,.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{18.3}$$

2) Корни характеристического уравнения комплексные.

Как известно, комплексные корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами являются сопряжёнными комплексными числами, т.е.

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

В этом случае частные решения уравнения (18.2) будут иметь вид

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$
$$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{-i\beta x}.$$

Воспользовавшись формулой Эйлера, выражения для y_1 и y_2 можно записать в виде

$$y_1 = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad y_2 = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

Эти решения являются комплексными. Получим действительные решения.

Очевидно, что если какая-либо комплексная функция действительного аргумента

$$y = u(x) + iv(x) \tag{18.4}$$

удовлетворяет уравнению (18.2), то этому уравнению удовлетворяют $u(x)$ и $v(x)$.

Действительно, если (18.4) удовлетворяет уравнению (18.2), то, подставив туда (18.4), получим

$$(u + iv)'' + p(u + iv)' + q(u + iv) \equiv 0$$

или

$$(u'' + pu' + qu) + i(v'' + pv' + qv) \equiv 0.$$

Но комплексная функция равна нулю тогда и только тогда, когда равны нулю действительная и мнимая части, т.е.

$$u'' + pu' + qu = 0, \quad v'' + pv' + qv = 0,$$

а это и доказывает, что $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют уравнению (18.2), т.е. являются решениями данного уравнения. Следовательно, согласно только что доказанному, частными решениями будут функции

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Решения $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ линейно независимы, так как

$$\frac{\bar{y}_1}{\bar{y}_2} = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{e^{\alpha x}\cos\beta x} = \operatorname{tg}\beta x \neq \mathrm{const}\,.$$

Таким образом, в случае комплексных корней характеристического уравнения общее решение уравнения (18.2) будет иметь вид

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$$

или
$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \qquad (18.5)$$
где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

3) Корни характеристического уравнения действительные и равные.

В этом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = -p/2$. Одним частным решением будет $y_1 = e^{\lambda_1 x}$. Нужно найти второе частное решение, линейно независимое относительно первого. Будем искать его в виде
$$y_2 = u(x)e^{\lambda_1 x},$$
где $u(x)$ — неизвестная пока функция. Продифференцировав, найдём
$$y_2' = u'e^{\lambda_1 x} + \lambda_1 u e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x}(u' + \lambda_1 u);$$
$$y_2'' = e^{\lambda_1 x}(u'' + 2\lambda_1 u' + \lambda_1^2 u).$$
Так как y_2 — решение уравнения (18.2), то подставив его в данное уравнение, получим тождество
$$e^{\lambda_1 x}[u'' + (2\lambda_1 + p)u' + (\lambda_1^2 + p\lambda_1 + q)u] \equiv 0.$$
Отсюда следует, что $u''(x) = 0$, так как
$$e^{\lambda_1 x} \neq 0, \quad \lambda_1 = -\frac{p}{2}, \quad \lambda_1^2 + p\lambda_1 + q = 0$$
(поскольку $\lambda_1 = -p/2$ — корень характеристического уравнения).

Проинтегрировав, найдём, что
$$u = Ax + B,$$
где A и B — произвольные постоянные. В частности, можно положить $A = 1$, $B = 0$, так как нужно найти частное решение. Тогда получим $u(x) = x$. Следовательно, вторым частным решением, линейно независимым относительно первого, будет
$$y_2 = xe^{\lambda_1 x}$$
и общее решение уравнения (18.2) в случае равных корней характеристического уравнения примет вид
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$$
или
$$y = e^{\lambda_1 x}(C_1 + xC_2), \qquad (18.6)$$
где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 18.2. Построить нормальную фундаментальную систему решений уравнения
$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$
с постоянными коэффициентами и записать его общее решение в форме Коши.

Решение. Заменой
$$y(x) = e^{-\frac{p}{2}x}u(x) \qquad (18.7)$$
уравнение сводится к виду
$$u''(x) + Qu(x) = 0, \qquad (18.8)$$

где Q — инвариант уравнения, равный

$$Q = q - \frac{1}{4}p^2 = -\frac{1}{4}(p^2 - 4q). \tag{18.9}$$

Рассмотрим следующие случаи.

I. Пусть $Q = -\omega^2/4 < 0$, где $\omega = \sqrt{p^2 - 4q}$, $p^2 - 4q > 0$. Тогда из (18.8) следует

$$u''(x) - \frac{\omega^2}{4}u(x) = 0.$$

Фундаментальная система решений этого уравнения имеет вид

$$u_1(x) = e^{\omega x/2}, \qquad u_2(x) = e^{-\omega x/2},$$

а фундаментальная система решений исходного уравнения с учётом (18.7) — вид

$$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}e^{\frac{\omega}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}(p-\omega)x}, \quad y_2(x) = e^{-\frac{p}{2}x}e^{-\frac{\omega}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}(p+\omega)x} \tag{18.10}$$

или

$$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\operatorname{ch}\frac{\omega}{2}x, \quad y_2(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}x \tag{18.11}$$

с учётом результатов примера 17.9. (Формулы (18.10) и (18.11) можно получить из характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $\lambda_{1,2} = (-p \pm \omega)/2$.)

Чтобы получить нормальную систему решений, выпишем, исходя из (18.11), фундаментальную матрицу

$$Y(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\omega}{2}x & \operatorname{sh}\frac{\omega}{2}x \\ -\frac{p}{2}\operatorname{ch}\frac{\omega}{2}x + \frac{\omega}{2}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}x & -\frac{p}{2}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}x + \frac{\omega}{2}\operatorname{ch}\frac{\omega}{2}x \end{pmatrix} \tag{18.12}$$

и её значение в точке $x = 0$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p/2 & \omega/2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку обратная ей матрица имеет вид

$$Y^{-1}(0) = \frac{2}{\omega}\begin{pmatrix} \omega/2 & 0 \\ p/2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18.13}$$

то произведение (18.12) на (18.13) даёт матрицант в точке $x = 0$:

$$Y_0(x) = Y(x)Y^{-1}(0) = e^{-\frac{p}{2}x}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\frac{\omega}{2}x + \frac{p}{\omega}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}x & \frac{2}{\omega}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}x \\ \frac{\omega^2 - p^2}{2\omega}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}x & \operatorname{ch}\frac{\omega}{2}x - \frac{p}{\omega}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}x \end{pmatrix},$$

первая строка которого задаёт фундаментальную систему решений, нормированную в точке $x = 0$:

$$y_{01}(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\Big(\operatorname{ch}\frac{\omega}{2}x + \frac{p}{\omega}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}x\Big), \quad y_{02}(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\frac{2}{\omega}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}x. \tag{18.14}$$

Так как функции, получающиеся из (18.14) сдвигом на x_0, согласно лемме 16.1, также являются решением этого уравнения, то фундаментальная система решений

$$\begin{aligned} y_{x_01}(x) &= e^{-\frac{p}{2}(x-x_0)}\Big[\operatorname{ch}\frac{\omega}{2}(x-x_0)+\frac{p}{\omega}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}(x-x_0)\Big],\\ y_{x_02}(x) &= e^{-\frac{p}{2}(x-x_0)}\frac{2}{\omega}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}(x-x_0) \end{aligned} \tag{18.15}$$

представляет собой фундаментальную систему решений, нормированную в произвольной точке $x = x_0$, т.е. нормальную фундаментальную систему решений исходного уравнения. Общее решение исходного уравнения в форме Коши при $Q < 0$ имеет вид

$$y(x) = e^{-\frac{p}{2}(x-x_0)}\Big\{y(x_0)\Big[\operatorname{ch}\frac{\omega}{2}(x-x_0)+\frac{p}{\omega}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}(x-x_0)\Big]+y'(x_0)\frac{2}{\omega}\operatorname{sh}\frac{\omega}{2}(x-x_0)\Big\}. \tag{18.16}$$

II. Пусть $Q = 0$, т.е. $p^2 - 4q = 0$. Тогда из (18.8) следует

$$u''(x) = 0.$$

Отсюда

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x,$$

и, соответственно, фундаментальная система решений исходного уравнения

$$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}, \quad y_2(x) = xe^{-\frac{p}{2}x}. \tag{18.17}$$

Исходя из (18.17), запишем фундаментальную матрицу

$$Y(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\begin{pmatrix} 1 & x \\ -\dfrac{p}{2} & 1-\dfrac{p}{2}x \end{pmatrix} \tag{18.18}$$

и её значение в точке $x = 0$:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку обратная матрица имеет вид

$$Y^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p/2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18.19}$$

то произведение (18.18) на (18.19) даёт матрицант в точке $x = 0$:

$$Y_0(x) = Y(x)Y^{-1}(0) = e^{-\frac{p}{2}x}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{p}{2}x & x \\ -\dfrac{p^2}{4} & 1-\dfrac{p}{2}x \end{pmatrix},$$

первая строка которого задаёт фундаментальную систему решений, нормированную в точке $x = 0$:

$$y_{01}(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\Big(1+\frac{p}{2}x\Big), \quad y_{02}(x) = e^{-\frac{p}{2}x}x. \tag{18.20}$$

Поскольку функции, полученные из (18.20) сдвигом на величину x_0, согласно лемме 16.1, также являются решением этого уравнения, то фундаментальная система решений

$$y_{x_01}(x) = e^{-\frac{p}{2}(x-x_0)}\Big[1+\frac{p}{2}(x-x_0)\Big], \quad y_{x_02}(x) = e^{-\frac{p}{2}(x-x_0)}(x-x_0) \tag{18.21}$$

представляет собой фундаментальную систему решений, нормированную в произвольной точке $x = x_0$, т.е. нормальную фундаментальную систему решений исходного уравнения. Общее решение исходного уравнения в форме Коши при $Q = 0$ имеет вид

$$y(x) = e^{-\frac{p}{2}(x-x_0)}\Big\{y(x_0)\Big[1+\frac{p}{2}(x-x_0)\Big] + y'(x_0)(x-x_0)\Big\}. \tag{18.22}$$

III. Пусть $Q = \omega^2/4 > 0$, где $\omega = \sqrt{4q-p^2}$, $p^2-4q < 0$. Тогда из (18.8) следует

$$u''(x) + \frac{\omega^2}{4}u(x) = 0.$$

В качестве фундаментальной системы решений этого уравнения можно выбрать

$$u_1(x) = \cos\frac{\omega}{2}x, \qquad u_2(x) = \sin\frac{\omega}{2}x.$$

Тогда для фундаментальной системы решений исходного уравнения с учётом (18.7) получим

$$y_1(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\cos\frac{\omega}{2}x, \quad y_2(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\sin\frac{\omega}{2}x. \tag{18.23}$$

Чтобы найти нормальную систему решений, выпишем, исходя из (18.23), фундаментальную матрицу

$$Y(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2}x & \sin\frac{\omega}{2}x \\ -\frac{p}{2}\cos\frac{\omega}{2}x - \frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2}x & -\frac{p}{2}\sin\frac{\omega}{2}x + \frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}x \end{pmatrix} \tag{18.24}$$

и её значение в точке $x = 0$:

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p/2 & \omega/2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку обратная ей матрица имеет вид

$$Y^{-1}(0) = \frac{2}{\omega}\begin{pmatrix} \omega/2 & 0 \\ p/2 & 1 \end{pmatrix}, \tag{18.25}$$

то произведение (18.24) на (18.25) даёт матрицант в точке $x = 0$:

$$Y_0(x) = Y(x)Y^{-1}(0) = e^{-\frac{p}{2}x}\begin{pmatrix} \cos\frac{\omega}{2}x + \frac{p}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}x & \frac{2}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}x \\ -\frac{p^2+\omega^2}{2\omega}\sin\frac{\omega}{2}x & \cos\frac{\omega}{2}x - \frac{p}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}x \end{pmatrix},$$

первая строка которого определяет фундаментальную систему решений, нормированную в точке $x = 0$:

$$y_{01}(x) = e^{-\frac{p}{2}x}\Big(\cos\frac{\omega}{2}x + \frac{p}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}x\Big), \quad y_{02}(x) = \frac{2}{\omega}e^{-\frac{p}{2}x}\sin\frac{\omega}{2}x. \tag{18.26}$$

Функции, полученные из (18.26) сдвигом на x_0, согласно лемме 16.1, также являются решением этого уравнения, и фундаментальная система решений

$$\begin{gathered} y_{x_0 1}(x) = e^{-\frac{p}{2}(x-x_0)}\Big[\cos\frac{\omega}{2}(x-x_0) + \frac{p}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}(x-x_0)\Big], \\ y_{x_0 2}(x) = \frac{2}{\omega}e^{-\frac{p}{2}(x-x_0)}\sin\frac{\omega}{2}(x-x_0) \end{gathered} \tag{18.27}$$

представляет собой фундаментальную систему решений, нормированную в произвольной точке $x = x_0$, т.е. нормальную фундаментальную систему решений исходного уравнения. Общее решение исходного уравнения в форме Коши при $Q > 0$ имеет вид

$$y(x) = e^{-\frac{p}{2}(x-x_0)}\Big\{y(x_0)\Big[\cos\frac{\omega}{2}(x-x_0) + \frac{p}{\omega}\sin\frac{\omega}{2}(x-x_0)\Big] + \frac{2}{\omega}y'(x_0)\sin\frac{\omega}{2}(x-x_0)\Big\}. \tag{18.28}$$

Полученные решения, записанные через коэффициенты p и q, нетрудно при необходимости выразить через корни характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$:

$$\lambda_1 = -\frac{p}{2} - \frac{\omega}{2}, \qquad \lambda_2 = -\frac{p}{2} + \frac{\omega}{2}, \quad \omega = \sqrt{p^2 - 4q}.$$

I. Пусть $p^2 - 4q > 0$. Поскольку $p = -(\lambda_2 + \lambda_1)$ и $\omega = \lambda_2 - \lambda_1$, то наряду с (18.16) можно записать

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\{y(x_0)[\lambda_2 e^{\lambda_1(x-x_0)} - \lambda_1 e^{\lambda_2(x-x_0)}] + y'(x_0)[-e^{\lambda_1(x-x_0)} + e^{\lambda_2(x-x_0)}]\} = \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\{[\lambda_2 y(x_0) - y'(x_0)]e^{\lambda_1(x-x_0)} - [\lambda_1 y(x_0) - y'(x_0)]e^{\lambda_2(x-x_0)}\}. \end{aligned} \tag{18.29}$$

II. Пусть $p^2 - 4q = 0$. В этом случае $p = -2\lambda$, $\omega = 0$, и наряду с (18.22) имеем

$$y(x) = e^{\lambda(x-x_0)}\{y(x_0)[1 - \lambda(x-x_0)] + y'(x_0)(x-x_0)\}. \tag{18.30}$$

III. Пусть $p^2 - 4q < 0$. Поскольку в этом случае

$$\lambda_1 = \lambda = -\frac{p}{2} - i\frac{\omega}{2}, \qquad \lambda_2 = \lambda^* = -\frac{p}{2} + i\frac{\omega}{2}, \quad \omega = \sqrt{-(p^2 - 4q)},$$

то $p = -(\lambda + \lambda^*)$, $\omega = i(\lambda - \lambda^*)$, и наряду с (18.28) запишем

$$\begin{aligned} y(x) = e^{(\lambda+\lambda^*)(x-x_0)/2}\Big\{y(x_0)\Big[\cos\Big(\frac{i(\lambda-\lambda^*)}{2}(x-x_0)\Big) - \frac{\lambda+\lambda^*}{i(\lambda-\lambda^*)}\sin\Big(\frac{i(\lambda-\lambda^*)}{2}(x-x_0)\Big)\Big] + \\ + \frac{2}{i(\lambda-\lambda^*)}y'(x_0)\sin\Big(\frac{i(\lambda-\lambda^*)}{2}(x-x_0)\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{18.31}$$

Пример 18.3. В плоскости параметров p, q изобразить множества, для которых общее решение уравнения

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0$$

определяется формулами (18.29)–(18.31).

Решение. Как следует из предыдущего примера, существуют три области, в которых общее решение задаётся формулами (18.29)–(18.31). Эти области определяются значениями дискриминанта Δ характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, т.е. $\Delta = p^2 - 4q$. Однако, согласно (18.9), дискриминант характеристического уравнения выражается через инвариант Q дифференциального уравнения соотношением

$$Q = -\frac{1}{4}D = -\frac{1}{4}(p^2 - 4q). \qquad (18.32)$$

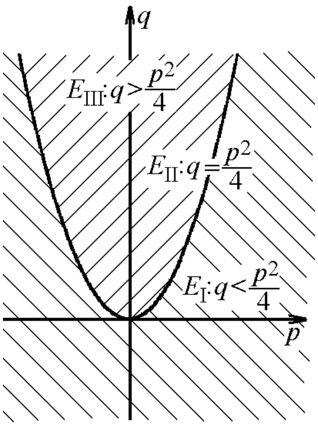


Рис. 16

Приняв во внимание, что, согласно теореме 14.1, все уравнения с одинаковыми инвариантами могут быть получены из одного уравнения преобразованием (14.61), то на плоскости (p, q) (рис. 16) можно выделить 3 области, в которых общее решение имеет заданный вид:

I) E_{I}: $p^2 - 4q > 0$, что соответствует положительному дискриминанту $\Delta > 0$ и отрицательному инварианту $Q < 0$, т.е. действительным и различным корням $\lambda_2 \neq \lambda_1$;

II) E_{II}: $p^2 - 4q = 0$, что соответствует нулевым дискриминанту и инварианту $(\Delta = Q = 0)$, т.е. действительным и равным корням $\lambda_2 = \lambda_1$;

III) E_{III}: $p^2 - 4q < 0$, что соответствует отрицательному дискриминанту $\Delta < 0$ и положительному инварианту $Q > 0$, т.е. паре комплексно сопряжённых корней.

Рассмотренные выше примеры дают исчерпывающие сведения о решении линейного однородного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Графики решений $y(x)$, задаваемых формулами (18.29)–(18.31), наглядно иллюстрируют изменение функции $y(x)$ в зависимости от x и начальных условий $y(x_0)$, $y'(x_0)$. Дело, однако, в том, что в приложениях дифференциальных уравнений зачастую большое значение имеет исследование не только зависимости $y(x)$, но и скорости её изменения. В этом случае график $y(x)$ в координатной плоскости xOy малоэффективен, поскольку только вычисление производной $y'(x)$ связано с дополнительными построениями касательных в исследуемых точках. Для повышения эффективности графического метода мы наряду с координатной плоскостью xOy рассмотрим фазовую плоскость yOv, $v = y'(x)$, как это было сделано при исследовании автономных уравнений 1-го порядка $y'(x) = \psi(y)$.

Если для уравнений 1-го порядка мы имели одну фазовую кривую (траекторию), определяемую непосредственно самим уравнением $y' = \psi(x)$, то для уравнений 2-го порядка мы поступим следующим образом. По формулам (18.29)–(18.31) найдём зависимость $y'(x)$ и в фазовой плоскости yOv рассмотрим график функции $v(y)$, параметрически заданной уравнениями

$$\begin{aligned} &y = y(x), \\ &v(x) = y'(x). \end{aligned} \qquad (18.33)$$

Этот график, как и ранее, будем называть фазовой кривой, или траекторией. (Термин «график функции $v(y)$» не совсем корректен, поскольку при его построении нарушается условие взаимной однозначности v и y.) В зависимости от начальных условий $y(x_0)$ и $y'(x_0)$ уравнения (18.33) будут определять целое семейство фазовых траекторий.

♦ Совокупность всех фазовых траекторий дифференциального уравнения будем называть фазовым портретом этого уравнения.

Для уравнения с постоянными коэффициентами

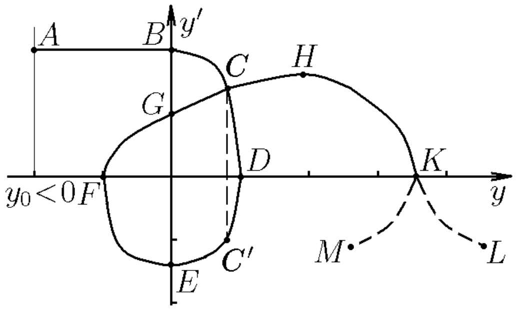


Рис. 17

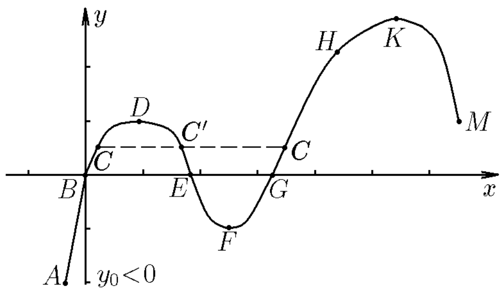


Рис. 18

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \tag{18.34}$$

в силу свойств его решений (18.29)–(18.31) можно провести классификацию всех его фазовых портретов. Рассмотрим предварительно следующий пример.

Пример 18.4. По фазовой траектории, изображённой на рис. 17, схематически построить график зависимости $y = y(x)$ на плоскости xOy. Обосновать продолжение фазовой траектории, изображённое штриховой линией.

Решение. На отрезке AB функция возрастает от $y_0(< 0)$ до $y(x) = 0$ с постоянной скоростью y'. На дуге BD функция $y(x)$ продолжает возрастать с уменьшающейся скоростью. В точке D скорость $y'(x)$ обращается в нуль. На дуге DE производная $y'(x)$ отрицательна и функция $y(x)$ на этом участке уменьшается до нуля, которого она достигает в точке E. На промежутке EF скорость изменения y' возрастает от отрицательного значения в точке E до нуля в точке F. При этом функция $y(x)$, пройдя в точке E через нуль, продолжает уменьшаться. На дуге FG производная $y'(x)$ положительна и функция $y(x)$ начинает возрастать, достигнув в точке G нуля. На дуге GH производная $y'(x)$ продолжает расти, и с её ростом растет и функция $y(x)$, которая на этом участке положительна. И, наконец, на промежутке HK функция $y'(x)$ начинает убывать, достигнув нуля в точке K. При этом функция $y(x)$ продолжает возрастать с убывающей скоростью, достигая своего максимального значения в той же точке K.

Продолжение фазовой траектории из точки K возможно только в направлении точки M. Продолжение её в направлении точки L означало бы возрастание функции при отрицательной производной $y'(x) < 0$, что невозможно. Таким образом, поведению производной, показанному на рис. 17, соответствует схематический график функции $y(x)$, приведённый на рис. 18.

Следующий пример раскрывает ещё одну особенность фазовых траекторий.

Пример 18.5. Показать, что решение $y(x) = e^x$ уравнения

$$y''(x) - y(x) = 0 \tag{18.35}$$

и любое его смещение $\tilde{y}(x) = e^{x-x_0}$ имеют одну фазовую траекторию. Сравнить с результатами примера 18.2.

Решение. Поскольку функция $y(x) = e^x$ положительна, то $y'(x) = e^x$ и, следовательно,

$$v(x) = y'(x) = y(x). \tag{18.36}$$

Поступая, как в предыдущем примере, или воспользовавшись (18.36) (что проще), строим график $y(x) = e^x$ и соответствующую фазовую траекторию (18.36) (рис. 19).

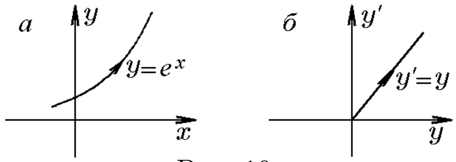


Рис. 19

Рассмотрим теперь решение $\tilde{y}(x) = e^{x-x_0}$. Согласно лемме 16.1, эта функция также является решением уравнения (18.35). Поскольку $\tilde{y}(x) = e^{x-x_0}$ и $\tilde{y}'(x) = e^{x-x_0}$, то

$$\tilde{v} = \tilde{y}'(x) = \tilde{y}(x) \text{ для всех } x_0. \tag{18.37}$$

Соответствующий график и фазовая траектория приведены на рис. 20. Сравнив фазовые траектории на рис. 19,*б* и 20,*б*, убеждаемся в их идентичности.

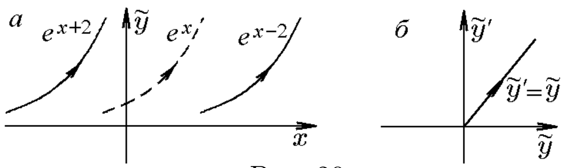


Рис. 20

График функции и фазовая траектория для уравнения (18.35) (рис. 19) совпадают с аналогичными для уравнения $y' = y$ из примера 18.2 (рис. 7). Это легко объяснить совпадением явного вида этого уравнения с уравнением фазовой траектории (18.34). Действительно, продифференцировав (18.34), получим

$$y'' = y' \quad \text{или} \quad y'' - y = 0,$$

поскольку $y' = y$.

Результат этого примера относительно конкретного уравнения (18.35) легко обобщить на случай произвольного уравнения (18.34).

Лемма 18.1. *Если $y(x)$ — решение уравнения*

$$y'' + py' + qy = 0,$$

то фазовые траектории $y(x)$ и любого решения $\tilde{y}(x) = y(x - x_0)$, полученного из $y(x)$ сдвигом на x_0, состоят из одних и тех же точек, т.е. совпадают.

Доказательство. График функции $\tilde{y}(x) = y(x - x_0)$ получен параллельным переносом графика $y = y(x)$ вдоль оси x. Такой перенос сохраняет все абсолютные значения ординат y и углов наклона касательных $v = y'$ во всех точках. Это означает, что фазовая точка траектории $\tilde{y}(x)$ повторит движение фазовой точки траектории решения $y(x)$, только со смещением параметра на величину x_0, что и требовалось доказать.

Исходя из доказанной леммы, сформулируем ещё одно свойство фазовых траекторий уравнения с постоянными коэффициентами.

Теорема 18.1. *Две фазовые траектории уравнения*

$$y'' + py' + qy = 0$$

либо не имеют общих точек, либо совпадают.

Доказательство. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два решения уравнения. Допустим, что фазовые траектории этих решений имеют общую точку $A(y'_0, y_0)$, т.е. существуют такие x_1 и x_2, что

$$\begin{aligned} y_1(x_1) = y_2(x_2) = y_0, \\ y'_1(x_1) = y'_2(x_2) = y'_0. \end{aligned} \qquad (18.38)$$

Пусть $\tilde{y}_1(x)$ получена из решения $y_1(x)$ сдвигом вида

$$\tilde{y}_1(x) = y_1(x + x_1 - x_2). \qquad (18.39)$$

Согласно лемме 16.1, функция $\tilde{y}_1(x)$ является решением того же уравнения, что и $y_1(x)$, а согласно лемме 18.1, $\tilde{y}_1(x)$ и $y_1(x)$ имеют одну фазовую траекторию.

Убедимся, что решения $\tilde{y}_1(x)$ и $y_2(x)$ имеют одинаковые начальные условия. Для этого найдём $\tilde{y}_1(x_2)$. Исходя из (18.39), имеем $\tilde{y}_1(x_2) = y_1(x_1) = y_0$. Отсюда, согласно (18.38), $\tilde{y}_1(x_2) = y_0 = y_2(x_2)$. Аналогично $\tilde{y}'_1(x_2) = y'_1(x_1) = y'_0 = y'_2(x_2)$. Таким образом, решения $\tilde{y}_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями одной и той же задачи Коши. Это означает, что в силу единственности решения задачи Коши эти решения тождественны, а тождественные решения имеют одну фазовую траекторию. Стало быть, все три решения: $y_1(x)$, $\tilde{y}_1(x)$ и $y_2(x)$ имеют одну фазовую траекторию. Отсюда следует, что наличие общей точки у двух фазовых траекторий ведёт к их совпадению.

Из всего множества решений уравнения с постоянными коэффициентами

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \qquad (18.40)$$

выделим так называемые стационарные решения.

♦ Решение

$$y(x) = y_0 \qquad (18.41)$$

уравнения (18.40), сохраняющее постоянное значение y_0 при всех значениях x, называется стационарным.

Стационарное решение (18.41) обладает тем свойством, что его фазовая траектория состоит из одной точки $A(y_0, 0)$, называемой фазовой точкой покоя, поскольку для всех x выполняется равенство $v = y' = (y_0)' = 0$.

Количество стационарных решений уравнения (18.40) и соответствующих им точек покоя определяется значением коэффициента q или, в силу соотношения $q = \lambda_1\lambda_2$, значением корней характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

При $q \neq 0$, т.е. в отсутствие нулевых корней характеристического уравнения ($\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$), уравнение (18.40) имеет единственное стационарное решение $y(x) = 0$. Действительно, подставив (18.41) в (18.40), имеем

$$(y_0)'' + p(y_0)' + qy_0 = qy_0 = 0, \qquad q \neq 0,$$

откуда $y_0 = 0$. Это и есть единственное нулевое решение стационарное решение $y(x) = 0$, которому соответствует единственная точка покоя $O(0, 0)$, совпадающая с началом координат фазовой плоскости.

При $q = 0$, т.е. при наличии хотя бы одного нулевого корня характеристического уравнения, уравнение

$$y''(x) + py'(x) = 0, \qquad q = 0, \qquad (18.42)$$

имеет бесконечное множество стационарных решений, поскольку стационарное решение (18.41) обращает уравнение (18.42) в тождество при любых значениях y_0. Каждому стационарному решению $y(x) = y_0$ будет соответствовать своя точка покоя $A(y_0, 0)$. В силу произвольности значения величины y_0 все точки покоя стационарных решений уравнения (18.42) образуют прямую покоя, совпадающую с осью $v = 0$ фазовой плоскости yOv.

Перейдём теперь к рассмотрению фазовых траекторий нестационарных решений.

19. Классификация фазовых портретов уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Итак, мы переходим к рассмотрению фазовых траекторий нестационарных решений уравнения

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \tag{19.1}$$

которое мы для удобства запишем с помощью дифференциального оператора:

$$\widehat{L}_2 y(x) = (D^2 + pD + q)y(x) = 0 \tag{19.2}$$

и его факторизации:

$$(D^2 + pD + q)y(x) = (D - \lambda_1)(D - \lambda_2)y(x) = 0. \tag{19.3}$$

Конечно, для построения фазовых траекторий можно обратиться к решениям (18.27)–(18.29) уравнения (19.1). Однако качественную характеристику этих решений зачастую удобнее получить, напротив, исходя из фазового портрета уравнения, который определяется явным видом коэффициентов p и q или корней λ_1 и λ_2. Тем более, что число фазовых портретов уравнения (19.1) исчерпывается несколькими вариантами.

Начнём со случая $q \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, когда фазовые портреты имеют по одной точке покоя и их классификация сводится, по сути, к классификации точек покоя.

Рассмотрим общую характеристику фазовых траекторий нестационарных решений уравнения (19.1).

Так как $v(x) = Dy(x) = y'(x)$, то функция $y(x)$ возрастает в верхней фазовой полуплоскости $v > 0$ и убывает в нижней полуплоскости $v < 0$. Другими словами, движение по фазовой плоскости при возрастании x в верхней полуплоскости происходит слева направо, а в нижней — справа налево (рис. 21, см. также пример 18.4).

Касательная к фазовой траектории в точке $(y(x), v(x))$ имеет угловой коэффициент

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv/dx}{dy/dx} = \frac{D^2y(x)}{Dy(x)} = \frac{(-pD - q)y(x)}{Dy(x)} = \frac{-pv(x) - qy(x)}{v(x)}, \tag{19.4}$$

поэтому каждая траектория пересекает ось $v = 0$ с вертикальной касательной, а прямую $-pv - qy = 0$ с горизонтальной касательной (рис. 21).

Наряду с этим, поскольку вдоль фазовой траектории

$$v'(x) = D^2y(x) = -pv(x) - qy(x), \tag{19.5}$$

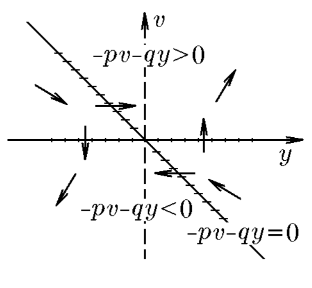


Рис. 21

то, согласно (19.5), в полуплоскости $-pv - qy < 0$ составляющая $v(x)$ фазовой траектории убывает, а в полуплоскости $-pv - qy > 0$ возрастает, т.е. движение по фазовой траектории при возрастании x в этих полуплоскостях происходит вниз и вверх, соответственно (рис. 21). Рис. 21 можно назвать общей схемой изменения составляющих $y(x)$ и $v(x)$ фазовой траектории при движении по ней с ростом параметра x.

Следует отметить, что при замене аргумента x на $-x$ коэффициент p в уравнении (19.1) меняет знак:

$$y''(x) - py'(x) + qy(x) = 0. \tag{19.6}$$

При этом все фазовые траектории получаются симметричным отражением относительно оси $v = 0$ и направление движения по траекториям меняется на противоположное, взаимное же расположение фазовых кривых не меняется. Поэтому далее можно считать

$$p \geqslant 0. \tag{19.7}$$

♦ Фазовая траектория решения $y(x)$ уравнения (19.1) называется

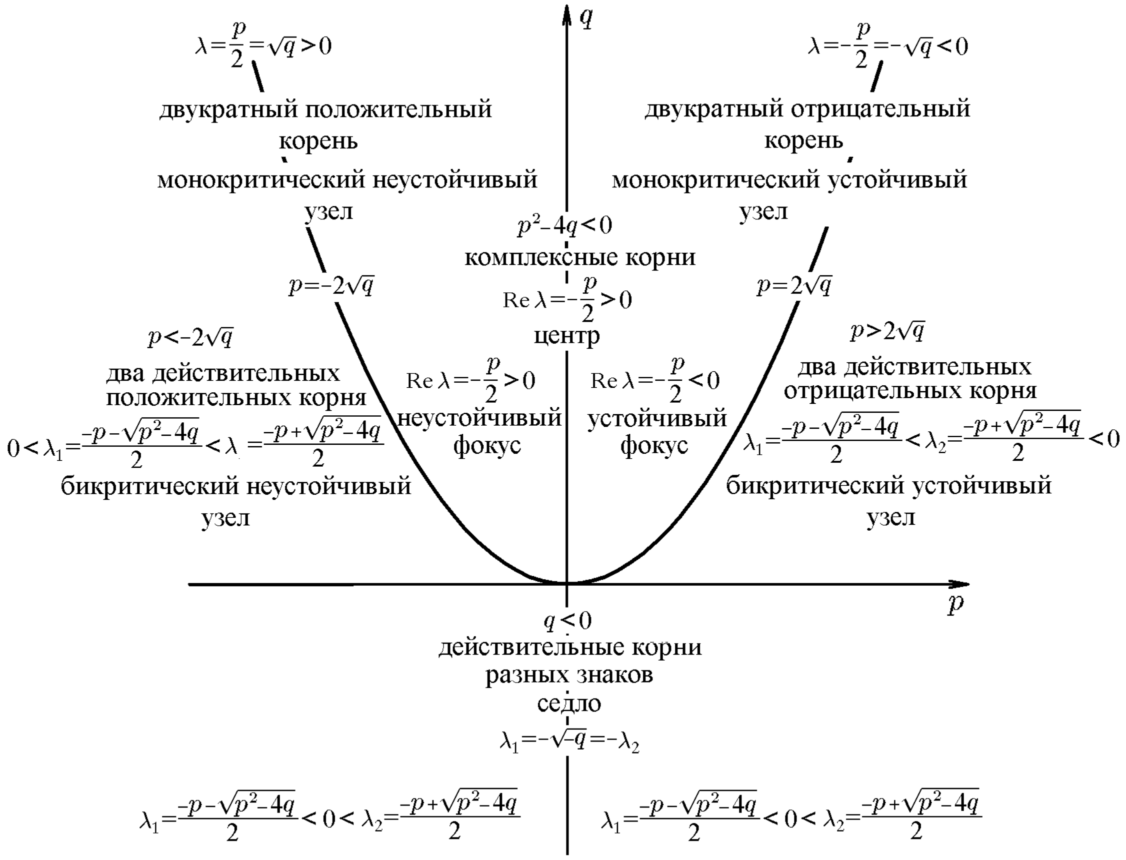


Рис. 22

O^+-траекторией, если

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} v(x) = 0$$

и

O^--траекторией, если

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} v(x) = 0.$$

Геометрически это означает, что фазовая точка при движении по O^+-траектории при $x \to \infty$ стремится занять положение точки покоя, которой в данном случае является начало координат $O(0,0)$ фазовой плоскости, а при движении по O^--траектории точка стремится удалиться от точки покоя, т.е. удалиться от начала координат $O(0,0)$.

♦ $O^\pm$-траектории называются $O^\pm_\lambda$-траекториями, если

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{d}{dx}(\ln y(x)) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{v(x)}{y(x)} = \lambda. \tag{19.8}$$

Если фазовая кривая уравнения (19.1) является $O^\pm_\lambda$-траекторией, то, согласно правилу Лопиталя, для (19.8) имеем

$$\lambda = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{v(x)}{y(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{Dv(x)}{Dy(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{D^2y(x)}{v(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-pv(x) - qy(x)}{v(x)} =$$

$$= -p - q \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{v(x)} = -p - q\frac{1}{\lambda}.$$

Отсюда
$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad \lambda \neq 0,$$
т.е. λ является корнем характеристического уравнения. В частности, для комплексных и нулевых корней характеристического уравнения не существует $O^{\pm}_{\lambda}$-траекторий.

На рис. 16 в плоскости параметров p, q уравнения (19.1) выделены три области, в которых общие решения этого уравнения различаются фактически лишь по форме. Дальнейшая детализация решений позволит выделить в них области, где решения являются уже качественно эквивалентными, т.е. фазовые портреты этих решений в выделенных областях должны совпадать, образуя определённый тип. На рис. 22 приведены все типы этих фазовых портретов и соответствующих им областей. Этот рисунок можно рассматривать как схему классификации всех фазовых портретов возможных решений дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (19.1). Поскольку на этой схеме присутствуют только фазовые портреты, обладающие одной точкой покоя ($q \neq 0$), то эту классификацию называют ещё классификацией точек покоя, в окрестности которых фазовые портреты принадлежат к одному типу.

I. Седло

В этом случае корни характеристического уравнения являются действительными величинами, имеющими разные знаки: $q = \lambda_1\lambda_2 < 0$; $p^2 - 4q > 0$ для всех p.

I.A. $q < 0$, $p > 0$

В этом случае
$$\lambda_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} < 0 < \lambda_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$
В силу (18.29) фазовые траектории определяются параметрическими уравнениями
$$y(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\{[\lambda_2 y(0) - y'(0)]e^{\lambda_1 x} - [\lambda_1 y(0) - y'(0)]e^{\lambda_2 x}\}, \tag{19.9}$$
$$y'(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\{\lambda_1[\lambda_2 y(0) - y'(0)]e^{\lambda_1 x} - \lambda_2[\lambda_1 y(0) - y'(0)]e^{\lambda_2 x}\}. \tag{19.10}$$

Рассмотрим частные решения (19.9), удовлетворяющие начальным условиям вида
$$\lambda_1 y(0) - y'(0) = 0,$$
т.е.
$$y'(0) = \lambda_1 y(0), \quad \lambda_1 < 0. \tag{19.11}$$
В этом случае из (19.9), (19.10) с учётом (19.11) получим частные решения
$$\begin{aligned} y(x) &= y(0)e^{\lambda_1 x}, \\ y'(x) &= \lambda_1 y(0)e^{\lambda_1 x}, \end{aligned} \quad \lambda_1 < 0, \tag{19.12}$$
из явного вида которых следуют три важных вывода.

Во-первых, фазовые траектории решений (19.12) являются O^+-траекториями:
$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} y(x) &= \lim_{x\to+\infty} y(0)e^{\lambda_1 x} = 0, \\ \lim_{x\to+\infty} y'(x) &= \lim_{x\to+\infty} \lambda_1 y(0)e^{\lambda_1 x} = 0, \end{aligned} \quad \lambda_1 < 0, \tag{19.13}$$
и, более того, они являются $O^+_{\lambda_1}$-траекториями:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y'(x)}{y(x)} = \lambda_1 < 0. \tag{19.14}$$

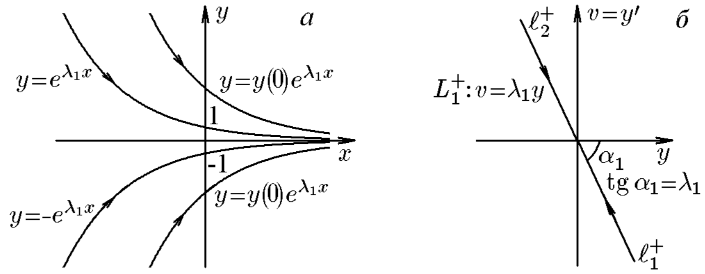


Рис. 23

Во-вторых, в системе (19.12) можно избавиться от параметрической зависимости от x и получить явное уравнение фазовой траектории

$$y' = \lambda_1 y \quad \text{или} \quad v = \lambda_1 y, \quad \lambda_1 < 0, \tag{19.15}$$

представляющей собой прямую, проходящую через вторую и четвертую четверти (рис. 23,*б*) фазовой плоскости yOv.

И, наконец, в-третьих, поскольку уравнение (19.14) не содержит начальное значение $y(0)$, все фазовые траектории, соответствующие частным решениям (19.12), принадлежат фазовой прямой $v = \lambda_1 y$. Действительно, если в (19.12) $y(0) > 0$, то решению

$$y(x) = y(0)e^{\lambda_1 x} > 0 \tag{19.16}$$

соответствует фазовая полупрямая, или фазовый луч ℓ_1^+: $v = \lambda_1 y$, $y > 0$. Если же $y(0) < 0$, то решению

$$y(x) = y(0)e^{\lambda_1 x} < 0 \tag{19.17}$$

соответствует фазовая полупрямая, или фазовый луч ℓ_2^+: $v = \lambda_1 y$, $y < 0$ (рис. 23,*б*).

Отметим, что всем частным решениям (19.16) соответствует один фазовый луч ℓ_1^+, а всем частным решениям (19.17) — другой фазовый луч ℓ_2^+. Это следует из леммы 17.2, так как, переписав решения (19.16) в виде

$$y(x) = e^{\ln y(0)}e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1(x-x_0)}, \quad x_0 = \frac{1}{\lambda_1}\ln y(0), \quad y(0) > 0,$$

заключаем, что все решения (19.16) представляют собой смещения на x_0 решения $y(x) = e^{\lambda_1 x}$, полученного из (19.16) при $y(0) = 1$. Согласно лемме 17.2, фазовые траектории всех решений, являющихся смещениями, совпадают, образуя луч ℓ_1^+. Это же справедливо и для фазового луча ℓ_2^+. Оба фазовых луча и точка покоя $O(0,0)$ образуют фазовую прямую, которую мы обозначим как L_1^+. На рис. 23 изображены решения (19.16), (19.17) и соответствующие им фазовые лучи, образующие фазовую прямую L_1^+. Стрелками обозначено направление движения точки по фазовой траектории, соответствующее возрастанию аргумента x.

Рассмотрим ещё один тип частных решений (19.9), удовлетворяющих начальным условиям вида

$$\lambda_2 y(0) - y'(0) = 0,$$

т.е.

$$y'(0) = \lambda_2 y(0), \quad \lambda_2 > 0. \tag{19.18}$$

В этом случае из (19.9), (19.10) с учётом (19.18) получим частные решения

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0)e^{\lambda_2 x}, \\ y'(x) &= \lambda_2 y(0)e^{\lambda_2 x}, \end{aligned} \quad \lambda_2 > 0. \tag{19.19}$$

Из явного вида решений (19.12) следует, что их фазовые траектории являются $O^-_{\lambda_2}$-траекториями, поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} y(x) &= \lim_{x\to-\infty} y(0)e^{\lambda_2 x} = 0,\\ \lim_{x\to-\infty} y'(x) &= \lim_{x\to-\infty} \lambda_2 y(0)e^{\lambda_2 x} = 0 \end{aligned} \qquad \lambda_2 > 0, \tag{19.20}$$

и

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{y'(x)}{y(x)} = \lambda_2 > 0. \tag{19.21}$$

Кроме того, в системе (19.19) можно избавиться от параметрической зависимости, исключив переменную x, и получить явное уравнение фазовой траектории

$$y' = \lambda_2 y \quad \text{или} \quad v = \lambda_2 y, \quad \lambda_2 > 0, \tag{19.22}$$

представляющей собой прямую, проходящую через первую и третью четверти (рис. 24,*б*) фазовой плоскости yOv.

Исходя из того, что уравнение (19.22) не содержит начальное значение $y(0)$, можно заключить, что все фазовые траектории, соответствующие частным решениям (19.19), принадлежат фазовой прямой $v = \lambda_2 y$. Действительно, если в (19.19) $y(0) > 0$, то решению

$$y(x) = y(0)e^{\lambda_2 x} > 0 \tag{19.23}$$

соответствует фазовая полупрямая, или фазовый луч ℓ_1^-: $v = \lambda_2 y$, $y > 0$. Если же $y(0) < 0$, то решению

$$y(x) = y(0)e^{\lambda_2 x} < 0 \tag{19.24}$$

соответствует фазовая полупрямая, или фазовый луч ℓ_2^-: $v = \lambda_2 y$, $y < 0$ (рис. 24,*б*).

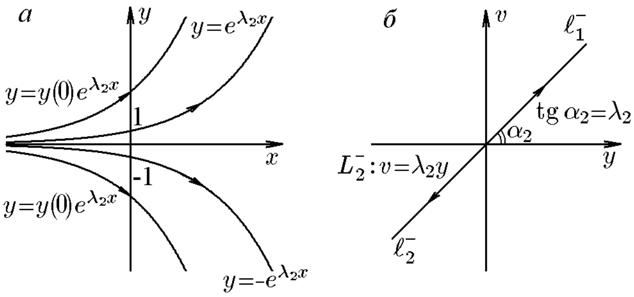


Рис. 24

Отметим, что всем частным решениям (19.23) соответствует один фазовый луч ℓ_1^-, а всем частным решениям (19.24) соответствует другой фазовый луч ℓ_2^-. Это следует из леммы 17.2. Действительно, переписав решения (19.23) и (19.24) в виде

$$y(x) = e^{\ln y(0)}e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_2(x-x_0)}, \quad x_0 = \frac{1}{\lambda_2}\ln y(0), \quad y(0) > 0,$$

$$y(x) = -e^{\ln[-y(0)]}e^{\lambda_2 x} = -e^{\lambda_2(x-x_0)}, \quad x_0 = \frac{1}{\lambda_2}\ln|y(0)|, \quad y(0) < 0,$$

видим, что все решения (19.23) и (19.24) представляют собой смещения на x_0 решения $y(x) = e^{\lambda_2 x}$, вытекающего из (19.23) при $y(0) = 1$ и, соответственно, решения $y(x) = -e^{\lambda_2 x}$, полученного из (19.24) при $y(0) = -1$. Согласно лемме 17.2, все решения, являющиеся смещениями, обладают одной фазовой траекторией, которой в данном случае является либо фазовый луч ℓ_1^-, либо фазовый луч ℓ_2^-. Оба фазовых луча и точка покоя $O(0,0)$ образуют фазовую прямую, которую мы обозначим как L_2^-.

На рис. 24 изображены решения (19.23), (19.24) и соответствующие им фазовые лучи, образующие фазовую прямую L_2^-. Стрелками обозначено направление движения точки по фазовой траектории, соответствующее возрастанию аргумента x.

В заключение объединим рис. 23 и 24 в один (рис. 25), из которого видно, что картина на плоскости xOy (рис. 25,*а*) неудобна для графического представления решений, тогда как картина на фазовой плоскости yOv (рис. 25,*б*) весьма наглядна, информативна и пригодна для построения фазовых траекторий, соответствующих различным начальным условиям.

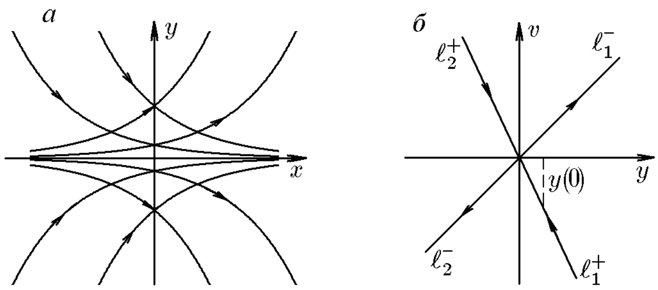


Рис. 25

Действительно, рис. 25,*б* наглядно иллюстрирует следующие свойства решений уравнения (19.3). Если начальные условия $y(0)$ и $v(0) = y'(0)$, определяющие частное решение $y = y(x)$, соответствуют фазовой точке $(y(0), v(0))$, попадающей, например, на фазовый луч $\ell_1^+ : v(0) = \lambda_1 y(0)$, $\lambda_1 < 0$, $y(0) > 0)$, то сам луч и является фазовой траекторией частного решения $y = y(x)$. Положение этого луча качественно характеризует поведение решения $y = y(x)$: с ростом x бесконечно большое положительное значение $y(x)$ при $x = -\infty$ $(\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = \infty)$ уменьшается, становясь в точке $x = 0$ равным $y(0)$; и далее фазовая точка стремится занять положение точки покоя $O(0,0)$ — начала координат при $x \to \infty$ $(\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0)$. При этом уменьшение $y(x)$ осуществляется с отрицательной скоростью $v(x) = y'(x)$, увеличивающейся с ростом x до нуля $(\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = 0)$.

Аналогичным образом можно описать поведение решений $y = y(x)$, если начальные условия соответствуют фазовой точке, попадающей на другие фазовые лучи.

Таким образом, четыре фазовых луча: ℓ_1^+, ℓ_2^+ как $O_{\lambda_1}^+$-траектории и ℓ_1^-, ℓ_2^- как $O_{\lambda_2}^-$-траектории разбивают всю фазовую плоскость на четыре области. Это означает, что фазовые траектории, соответствующие другим частным решениям, должны целиком располагаться в этих областях, не пересекаясь, согласно теореме 16.1, ни с фазовыми лучами, ни друг с другом.

Рассмотрим частные решения, начальные условия которых соответствуют фазовым точкам из областей между фазовыми лучами ℓ_1^+ и ℓ_1^-, а также ℓ_2^+ и ℓ_2^-. Не ограничивая общность рассмотрения, можно считать, что эти точки лежат на фазовой оси Oy, где $y'(0) = 0$ (рис. 26,*б*). Согласно (19.9), (19.10), такие решения имеют вид

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{y(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}(\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x}), \\ y'(x) &= \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} y(0)(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}), \end{aligned} \qquad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0, \tag{19.25}$$

где $y(0)$ — начальное значение $y(x)$ при $x = 0$. Из (19.25) с учётом $y'(0) = 0$ легко установить, что значение $y(0)$ является экстремальным для функции $y(x)$. Действительно, при $y(0) > 0$ оно соответствует минимуму функции, а при $y(0) < 0$ — максимуму (рис. 26,*а*), поскольку при $y(0) > 0$

$$y'(x) = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} y(0)(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) \Rightarrow \begin{cases} < 0, & x < 0; \\ = 0, & x = 0; \\ > 0, & x > 0, \end{cases}$$

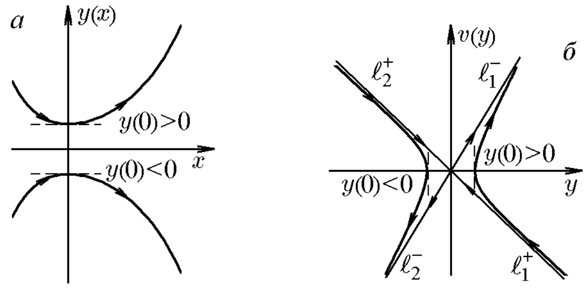


Рис. 26

а при $y(0) < 0$

$$y'(x) = \frac{\lambda_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} y(0)(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}) \Rightarrow \begin{cases} > 0, & x < 0; \\ = 0, & x = 0; \\ < 0, & x > 0. \end{cases}$$

Для построения фазовых траекторий решений (19.25) вычислим пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{v(x)}{y(x)} = \lambda_1\lambda_2 \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x}} = \lambda_1\lambda_2 \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\lambda_2 x}}{\lambda_1 e^{\lambda_2 x}} = \lambda_2;$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{v(x)}{y(x)} = \lambda_1\lambda_2 \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}}{\lambda_2 e^{\lambda_1 x} - \lambda_1 e^{\lambda_2 x}} = \lambda_1\lambda_2 \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_2 e^{\lambda_1 x}} = \lambda_1.$$

С учётом этого заключаем, что фазовая траектория решения (19.25) при $y(0) > 0$ целиком располагается в правой фазовой полуплоскости между лучами ℓ_1^+ и ℓ_1^-, причём эти лучи являются её асимптотами, и пересекает в точке $(y(0), 0)$ ось Ov (см. рис. 21) снизу вверх с вертикальной касательной, как на рис. 26,*б*. Аналогично фазовая траектория решения (19.25) при $y(0) < 0$ целиком располагается в левой фазовой полуплоскости между лучами ℓ_2^+ и ℓ_2^-, которые являются её асимптотами, и пересекает в точке $(y(0), 0)$ ось Ov (см. рис. 21) сверху вниз также с вертикальной касательной, как на рис. 26,*б*. На рис. 26,*а* изображены частные решения (19.25), а на рис. 26,*б* — их фазовые траектории. Стрелками обозначено движение по любой кривой в направлении увеличения переменной x.

И, наконец, рассмотрим последний тип частных решений, которые получаются при начальных условиях, соответствующих фазовым точкам из областей между фазовыми лучами ℓ_1^- и ℓ_2^+, а также ℓ_2^- и ℓ_1^+. Не ограничивая общности, можно считать, что эти точки лежат на фазовой оси Ov, где $y(0) = 0$ (рис. 27). Согласно (19.9), (19.10), такие решения имеют вид

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{y'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}(-e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}), \\ v(x) = y'(x) &= \frac{y'(0)}{\lambda_2 - \lambda_1}(-\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{\lambda_2 x}), \end{aligned} \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0, \tag{19.26}$$

где $y(0)$ — начальное значение производной $y'(x)$ при $x = 0$.

Из (19.26) с учётом

$$-\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{\lambda_2 x} > 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}$ следует, что решение (19.26) монотонно возрастает при $y'(0) > 0$ и монотонно убывает при $y'(0) < 0$ (рис. 27,*а*).

Чтобы построить фазовые траектории решений (19.26), вычислим пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{v(x)}{y(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{\lambda_2 x}}{-e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}} = \lambda_2;$$

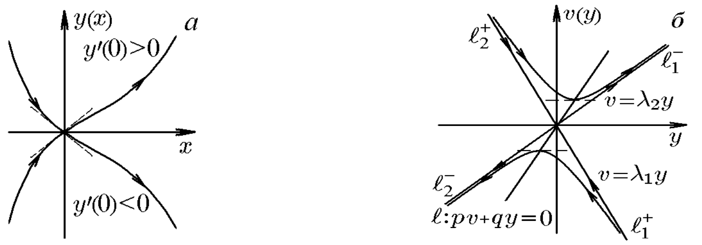


Рис. 27

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{v(x)}{y(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\lambda_1e^{\lambda_1x}+\lambda_2e^{\lambda_2x}}{-e^{\lambda_1x}+e^{\lambda_2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\lambda_1e^{\lambda_1x}}{-e^{\lambda_1x}}=\lambda_1.$$

С учётом этого заключаем, что фазовая траектория решения (19.26) при $y'(0)>0$ целиком располагается в верхней фазовой полуплоскости между лучами ℓ_2^+ и ℓ_1^-, причём эти лучи является её асимптотами, и (см. рис. 21) пересекает прямую ℓ: $pv+qy=0$ слева направо с горизонтальной касательной, как на рис. 27,*б*. Аналогично фазовая траектория решения (19.26) при $y'(0)<0$ целиком располагается в нижней фазовой полуплоскости между лучами ℓ_1^+ и ℓ_2^-, которые являются её асимптотами, и (см. рис. 21) пересекает прямую ℓ: $pv+qy=0$ справа налево с горизонтальной касательной, как на рис. 27,*б*. Как и ранее, стрелками обозначено направление возрастания переменной x.

Объединив все рассмотренные случаи, получим фазовый портрет точки покоя, называемой седлом (рис. 28,*в*: $p>0$).

I.Б. $q<0$, $p<0$

Как уже отмечалось ранее, уравнение (19.5)

$$y''(x)+py'(x)+qy(x)=0$$

заменой аргумента x на $-x$ приводится к виду

$$y''(x)-py'(x)+qy(x)=0.$$

Это означает, что фазовый портрет этого уравнения представляет собой зеркальное отражение фазового портрета уравнения (19.5) при $p>0$ (рис. 28,*в*) с последующим изменением направления движения по траектории на противоположное, как на рис. 28,*а*.

I.В. $q<0$, $p=0$

В этом случае

$$\lambda_1=-\sqrt{-q}<0<\lambda_2=\sqrt{-q}$$

и

$$y(x)=y(0)\operatorname{ch}\sqrt{-q}x+\frac{y'(0)}{\sqrt{-q}}\operatorname{sh}\sqrt{-q}x.$$

Поскольку $\lambda_1=-\lambda_2$, то прямые L_1^+: $v=-\sqrt{-q}y$ и L_2^-: $v=\sqrt{-q}y$ симметричны относительно оси Ov. Кроме того, прямая ℓ: $pv+qy=0$ вырождается в прямую $y=0$,

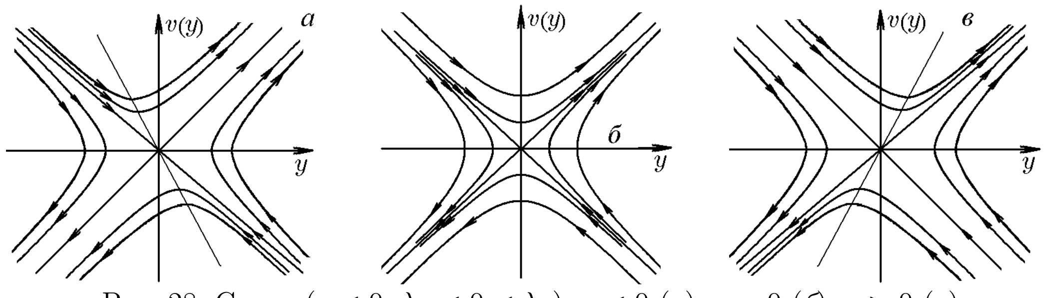


Рис. 28. Седло ($q<0$, $\lambda_1<0<\lambda_2$): $p<0$ (*а*); $p=0$ (*б*); $p>0$ (*в*)

т.е. совпадает с осью Ov. В силу этого все фазовые траектории уравнения

$$y''(x) + qy(x) = 0$$

симметричны относительно осей Oy и Ov и пересекают их с вертикальной и горизонтальной касательной, соответственно, как на рис. 28,*б*.

II. Узел бикритический: $q > 0,\ p^2 - 4q > 0$

II.A. Узел бикритический устойчивый: $p > 2\sqrt{q}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

Как и в предыдущем случае, в силу (19.9), (19.10) фазовые траектории определяются параметрическими уравнениями

$$y(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\{[\lambda_2 y(0) - y'(0)]e^{\lambda_1 x} - [\lambda_1 y(0) - y'(0)]e^{\lambda_2 x}\}; \tag{19.27}$$

$$y'(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\{\lambda_1[\lambda_2 y(0) - y'(0)]e^{\lambda_1 x} - \lambda_2[\lambda_1 y(0) - y'(0)]e^{\lambda_2 x}\}. \tag{19.28}$$

Основное отличие этих этих уравнений от уравнений (19.9), (19.10), определяющих седло, состоит в том, что оба характеристических корня имеют один знак — отрицательный:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0. \tag{19.29}$$

По сути дела, это и определяет отличие фазового портрета седла от фазового портрета устойчивого узла.

Первое различие состоит в том, что если фазовый портрет седла имеет как O^+-, так и O^--траектории, то фазовый портрет устойчивого узла содержит только O^+-траектории. Действительно, предельный переход в (19.27), (19.28) с учётом (19.29) даёт

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} y'(x) = 0. \tag{19.30}$$

Это означает, что точка, движущаяся по любой фазовой траектории, при $x \to +\infty$ стремится занять положение точки покоя.

Рассмотрим последовательно частные решения (19.27), (19.28), позволяющие построить фазовый портрет устойчивого узла.

Пусть

$$\lambda_1 y(0) - y(0) = 0,$$

т.е.

$$y(0) = \lambda_1 y(0), \quad \lambda_1 < 0. \tag{19.31}$$

В этом случае (рис. 29,*а*)

$$y(x) = y(0)e^{\lambda_1 x}, \qquad y'(x) = \lambda_1 y(0)e^{\lambda_1 x}. \tag{19.32}$$

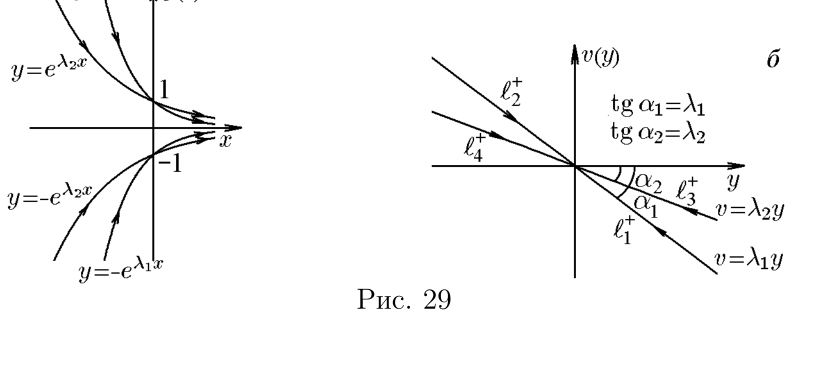


Рис. 29

Из (19.32) легко установить, что этим решениям соответствуют $O^+_{\lambda_1}$-фазовые траектории:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y'(x)}{y(x)}=\lambda_1<0.$$

Исключив в (19.32) параметр x, получим уравнение фазовой траектории в явном виде:

$$y=\lambda_1 y \quad \text{или} \quad v=\lambda_1 y, \quad \lambda_1<0. \tag{19.33}$$

Эта траектория представляет собой прямую, проходящую через вторую и четвертую четверти (рис. 29,*б*) фазовой плоскости yOv и состоящую из двух фазовых лучей ℓ_1^+ и ℓ_2^+:

$$\ell_1^+: y=\lambda_2 y, \quad y>0 \quad (\text{если } y(0)>0);$$
$$\ell_1^+: y=\lambda_2 y, \quad y<0 \quad (\text{если } y(0)<0),$$

как на рис. 29,*б*.

Теперь вместо начальных условий (19.31) рассмотрим условия

$$\lambda_2 y(0)-y'(0)=0,$$

т.е.

$$y'(0)=\lambda_2 y(0), \quad \lambda_2<0. \tag{19.34}$$

В этом случае (рис. 29,*а*)

$$y(x)=y(0)e^{\lambda_1 x}, \qquad y'(x)=\lambda_1 y(0)e^{\lambda_1 x}. \tag{19.35}$$

Этим решениям соответствуют $O^+_{\lambda_2}$-фазовые траектории:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y'(x)}{y(x)}=\lambda_2<0.$$

Исключив в (19.35) параметр x, получим уравнение фазовой траектории в явном виде:

$$y'=\lambda_2 y \quad \text{или} \quad v=\lambda_2 y, \quad \lambda_2<0, \tag{19.36}$$

которая представляет собой прямую, проходящую через вторую и четвертую четверти (рис. 29,*б*) фазовой плоскости yOv и состоящую из двух фазовых лучей ℓ_3^+ и ℓ_4^+:

$$\ell_3^+: y'=\lambda_2 y, \quad y>0 \quad (\text{если } y(0)>0);$$
$$\ell_4^+: y'=\lambda_2 y, \quad y<0 \quad (\text{если } y(0)<0),$$

как на рис. 29,*б*.

Таким образом, как и ранее, четыре фазовых луча: ℓ_1^+, ℓ_2^+ $O^+_{\lambda_1}$-траектории и ℓ_3^+, ℓ_4^+ $O^-_{\lambda_2}$-траектории разбивают всю фазовую плоскость на четыре области. Это означает, что фазовые траектории, соответствующие другим частным решениям, должны целиком располагаться в этих областях, не пересекаясь, согласно теореме 16.1, ни с фазовыми лучами, ни друг с другом.

Рассмотрим частные решения, начальные условия которых соответствуют фазовым точкам из областей между фазовыми лучами ℓ_2^+ и ℓ_3^+, а также ℓ_1^+ и ℓ_4^+. Не ограничивая общность рассмотрения, можно считать, что эти точки лежат на фазовой оси Oy' (Ov), где $y(0)=0$ (рис. 29,*б*). Согласно (19.27), (19.28), такие решения имеют вид

$$\begin{aligned} y(x)&=\frac{y'(0)}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{\lambda_2 x}-e^{\lambda_1 x}),\\ y'(x)&=\frac{y'(0)}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_2 e^{\lambda_2 x}-\lambda_1 e^{\lambda_1 x}), \end{aligned} \quad \lambda_1<\lambda_2<0, \quad \lambda_2-\lambda_1>0, \tag{19.37}$$

где $y'(0)$ — начальное значение $y'(x)$ при $x=0$.

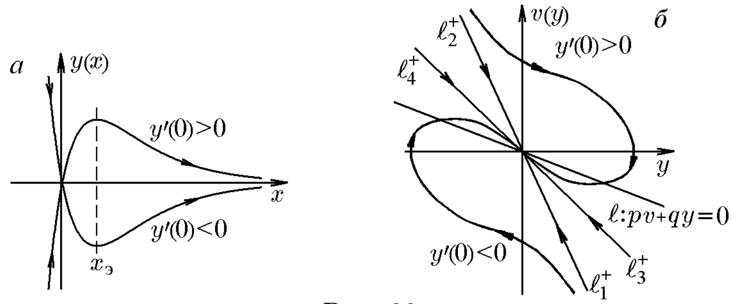


Рис. 30

По формуле (19.37) несложно построить график функции $y = y(x)$, изображённый на рис. 30,*а*. Точка

$$x_э = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \quad \lambda_2 - \lambda_1 > 0, \tag{19.38}$$

соответствует максимуму этой функции при $y'(0) > 0$ и минимуму при $y(0) < 0$ (рис. 30,*а*).

Для построения фазовых траекторий решений (19.37) вычислим пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{v(x)}{y(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{y'(x)}{y(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}} = \lambda_2;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{v(x)}{y(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{y'(x)}{y(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 x} - \lambda_1 e^{\lambda_1 x}}{e^{\lambda_2 x} - e^{\lambda_1 x}} = \lambda_1.$$

С учётом этого заключаем, что фазовая траектория решения (19.37) при $y'(0) > 0$ целиком располагается между фазовыми лучами ℓ_2^+ и ℓ_3^+ (рис. 30,*б*). Луч ℓ_2^+ (прямая $y' = \lambda_1 y$) является асимптотой этой фазовой траектории при $x \to -\infty$. С ростом x фазовая траектория пересекает ось Oy с вертикальной касательной (см. рис. 21). Перейдя в нижнюю полуплоскость, она, согласно той же общей схеме, пересекает прямую l: $py'+qy = 0$ с горизонтальной касательной. Далее при $x \to \infty$ траектория как $O^+_{\lambda_2}$-траектория по касательной — фазовому лучу ℓ_3^+ (прямой $y' = \lambda_2 y$) — стремится к точке покоя — началу координат фазовой плоскости.

Если теперь построенную фазовую траекторию симметрично отобразить относительно точки покоя, т.е. начала координат, то получим фазовую траекторию для решения (19.37) при $y'(0) < 0$, как на рис. 30,*б*.

И, наконец, рассмотрим последний тип частных решений, начальные условия для которых соответствуют фазовым точкам из областей между фазовыми лучами ℓ_2^+ и ℓ_4^+, а также между ℓ_1^+ и ℓ_3^+ (рис. 31,*б*). Не ограничивая общность рассмотрения, выберем например, начальные условия типа

$$y'(0) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} y(0). \tag{19.39}$$

Подставив (19.39) в (19.27), (19.28), получим частные решения вида

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{y(0)}{2}(e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}), \\ y'(x) &= \frac{y(0)}{2}(\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{\lambda_2 x}), \end{aligned} \qquad \lambda_1 < \lambda_2 < 0. \tag{19.40}$$

Из формулы (19.40) несложно построить график функции $y = y(x)$, изображённый на рис. 31,*а*. При $y(0) > 0$ эта функция монотонно убывает до нуля, а при $y(0) < 0$ монотонно до нуля возрастает.

Для построения фазовых траекторий решений (19.40) вычислим пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{v(x)}{y(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{y'(x)}{y(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x}} = \lambda_2;$$

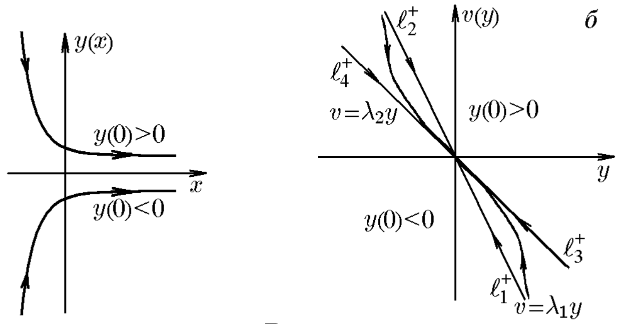


Рис. 31

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{v(x)}{y(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{y'(x)}{y(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 x}+\lambda_2 e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1 x}+e^{\lambda_2 x}}=\lambda_1.$$

С учётом этого заключаем, что фазовая траектория решения (19.40) при $y'(0)>0$ располагается между фазовыми лучами ℓ_2^+ и ℓ_4^+ (рис. 31*б*), причём луч ℓ_2^+ (прямая $y'=\lambda_1 y$) является её асимптотой при $x\to-\infty$. С ростом x фазовая траектория как $O^+_{\lambda_2}$-траектория по касательной — фазовому лучу ℓ_4^+ (прямой $y'=\lambda_4 y$) — стремится к точке покоя — началу координат фазовой плоскости.

Если построенную фазовую траекторию отобразить симметрично относительно точки покоя, т.е. начала координат, то получим фазовую траекторию для решения (19.40) при $y'(0)<0$, как на рис. 31,*б*.

Объединив все рассмотренные случаи, получим фазовый портрет точки покоя, называемый устойчивым узлом (рис. 32,*б*).

II.Б. Узел бикритический неустойчивый: $p<-2\sqrt{q}$, $0<\lambda_1<\lambda_2$

Основное отличие этого случая от предыдущего заключается в наличии двух положительных характеристических корней вместо двух отрицательных. Это означает, что экспоненты $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ при $x\to\infty$ возрастают.

Как уже отмечалось ранее, уравнение

$$y''(x)+py'(x)+qy(x)=0$$

заменой аргумента x на $-x$ приводится к виду

$$y''(x)-py'(x)+qy(x)=0.$$

Это означает, что фазовый портрет неустойчивого узла можно получить зеркальным отражением фазового портрета устойчивого узла относительно оси $v=0$ с изменением направления движения точек по траекториям на противоположное: не к точке покоя, а от нее, как на рис. 32,*а*.

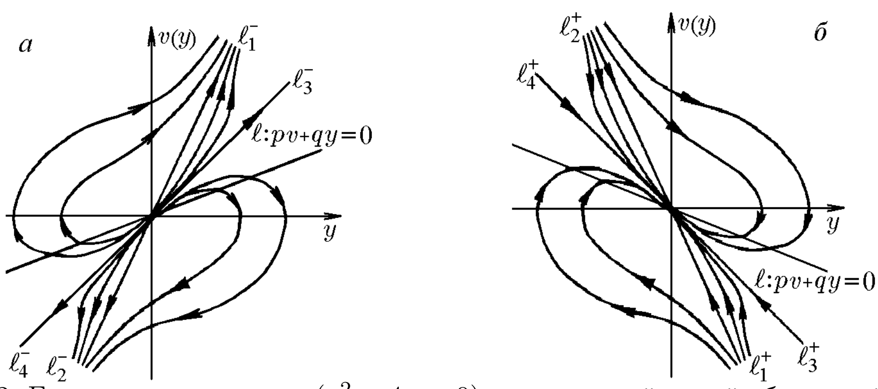


Рис. 32. Бикритические узлы ($p^2-4q>0$): *а* — неустойчивый, *б* — устойчивый

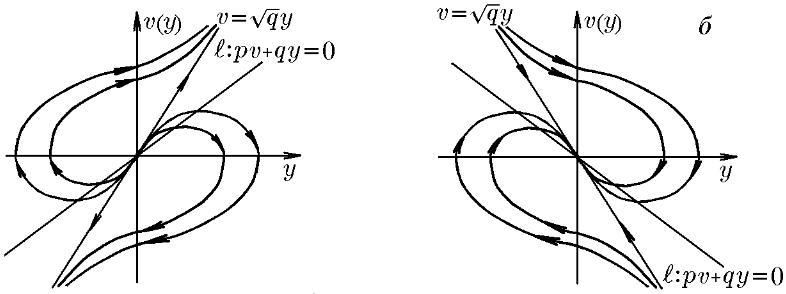


Рис. 33. Монокритические узлы ($p^2 - 4q = 0$): *а* — неустойчивый, *б* — устойчивый

III. Узел монокритический: $q > 0,\ p^2 - 4q = 0$

III.А. Монокритический узел устойчивый: $p = 2\sqrt{q}$ ($p^2 - 4q = 0$), $\lambda_1 = \lambda_2 = -p/2 = -\sqrt{q}$

Поскольку корни λ_1 и λ_2 совпадают (кратные) и отрицательны, фазовый портрет монокритического устойчивого узла легко получается из фазового портрета бикритического устойчивого узла (рис. 32,*б*) совмещением двух фазовых прямых $y' = \lambda_1 x$ и $y' = \lambda_2 x$ в одну (рис. 33,*б*).

III.Б. Монокритический узел неустойчивый: $p = -2\sqrt{q}$ ($p^2 - 4q = 0$), $\lambda_1 = \lambda_2 = -p/2 = \sqrt{q}$

Поскольку корни λ_1 и λ_2 совпадают (кратные) и положительны, фазовый портрет монокритического неустойчивого узла легко получается из фазового портрета бикритического неустойчивого узла (рис. 32,*а*) совмещением двух фазовых прямых $y' = \lambda_1 x$ и $y' = \lambda_2 x$ в одну $y' = \sqrt{q}y$ (рис. 33,*а*).

IV. Фокус: $q > 0,\ p^2 - 4q < 0$

Пара комплексно сопряжённых корней

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\frac{\omega}{2}, \qquad \omega = \sqrt{4q - p^2},$$

причем $p \neq 0$.

IV.А. Фокус устойчивый: $0 < p < 2\sqrt{q}$

В этом случае решение уравнения (19.1) в гармонической форме (см. пример 17.9) имеет вид

$$y(x) = Ae^{-px/2}\cos\Big(\frac{\omega}{2}x - \varphi\Big), \tag{19.41}$$

где A, φ — постоянные, определяющие различные частные решения, представляющие собой затухающие гармонические колебания (рис. 34,*а*).

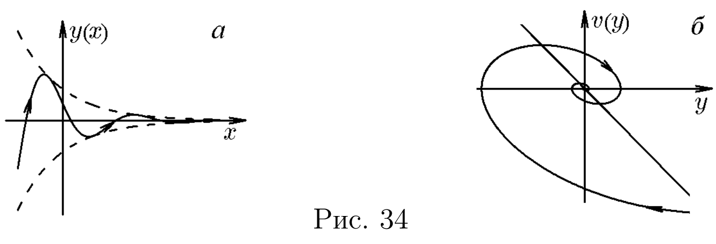


Рис. 34

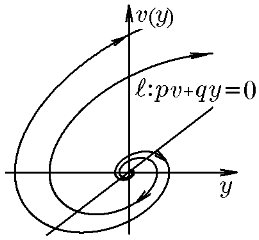
Для построения фазового портрета (19.41) продифференцируем это выражение:

$$y'(x) = e^{-px/2}A\Big[-\frac{p}{2}\cos\Big(\frac{\omega}{2}x - \varphi\Big) - \frac{\omega}{2}\sin\Big(\frac{\omega}{2}x - \varphi\Big)\Big]$$

и снова запишем его в гармонической форме

$$y'(x) = \bar{A}e^{-px/2}\sin\Big(\frac{\omega}{2}x - \bar{\varphi}\Big), \tag{19.42}$$

Таким образом, уравнения (19.41) и (19.42) параметрически задают фазовые траектории точки покоя, называемой устойчивым фокусом.



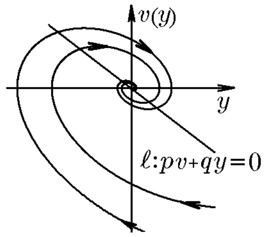


Рис. 35. Неустойчивый $p<0$ (*а*) и устойчивый $p>0$ (*б*) фокусы: $p^2-4q<0$

Из явного вида (19.41), (19.42) следует, что фазовые траектории устойчивого фокуса представляют собой O^+-траектории, поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\lim_{x\to+\infty} y'(x)=0.$$

Так как составляющие $y(x)$ и $y'(x)$ бесконечно много раз меняют знак при $x\to\pm\infty$, соответствующая фазовая траектория представляет собой спираль, совершающую бесконечно много оборотов вокруг начала координат (рис. 34,*б*). Согласно общей схеме на рис. 21, спираль обязана пересекать ось Oy с вертикальными, а прямую ℓ: $py'+qy=0$ — с горизонтальными касательными (рис. 34,*б*).

Подтверждением этого является параметрическая зависимость при $\varphi-\bar\varphi=n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$,

$$\frac{[y(x)]^2}{A^2}+\frac{[y'(x)]^2}{\bar A^2}=e^{-px}, \tag{19.43}$$

которая получается, если уравнения (19.41) и (19.42) возвести в квадрат и сложить.

Меняя в (19.41) значения A и φ, получим общий фазовый портрет устойчивого фокуса, состоящий из совокупности спиралей (рис. 35,*б*).

IV.Б. Фокус неустойчивый: $-2\sqrt{q}<p<0$

В этом случае решения по-прежнему определяются формулой (19.38) и представляют собой гармонические колебания с возрастающей при $x\to\infty$ амплитудой. Фазовые траектории неустойчивого фокуса являются O^--траекториями, поскольку

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\lim_{x\to+\infty} y'(x)=0.$$

Как и ранее, при изменении знака коэффициента p фазовый портрет неустойчивого фокуса можно получить из фазового портрета устойчивого фокуса его зеркальным отражением относительно оси $v=0$ с изменением направления движения точек по траекториям на противоположное: не к точке покоя, а от нее (рис. 35,*а*).

V. Центр: $q>0,\ p=0,\ \omega=2\sqrt{q},\ \lambda_{1,2}=\pm i\dfrac{\omega}{2}=\pm i\sqrt{q}$

В этом случае, как следует из (19.41), решения уравнения (19.1) имеют вид гармонических колебаний

$$\begin{aligned} y(x)&=A\cos(\sqrt{q}x-\varphi),\\ y'(x)&=-A\sqrt{q}\sin(\sqrt{q}x-\varphi). \end{aligned} \tag{19.44}$$

Уравнения (19.41) параметрически задают фазовые траектории точки покоя, называемой центром. Если оба уравнения (19.44) возвести в квадрат и сложить, то получим уравнение фазовых траекторий в явном виде

$$\frac{y^2(x)}{A^2}+\frac{[y'(x)]^2}{A^2q}=1. \tag{19.45}$$

Из (19.45) следует, что фазовый портрет точки покоя, являющейся центром, представляет собой совокупность эллипсов (рис. 36,*а*), вырождающихся в окружности

$$y^2(x)+[y'(x)]^2=A^2$$

при $q=1$ (рис. 36,*б*).

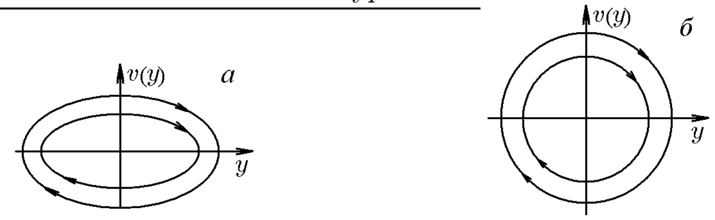


Рис. 36

Теперь от случая $q \neq 0$ перейдём к случаю $q = 0$. Уравнение (19.1) при $q = 0$ имеет вид

$$y''(x) + py'(x) = 0, \quad q = 0. \tag{19.46}$$

Как уже отмечалось, функция $y(x) = y_0$ является стационарным решением уравнения (19.46). Вся ось $v = y' = 0$ состоит из точек покоя, образуя прямую покоя.

I. Прямая покоя с одним нулевым характеристическим корнем $\boldsymbol{\lambda_1 = -p}$, $\boldsymbol{\lambda_2 = 0}$

В этом случае решение уравнения (19.46) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 + C_2 e^{-px}, \\ y'(x) &= -pC_2 e^{-px}. \end{aligned} \tag{19.47}$$

Уравнения (19.47) параметрически определяют фазовый портрет прямой покоя. Избавившись в (19.47) от параметра x, получим явное уравнение фазовых траекторий (19.44):

$$y'(x) = -p(y - C_1). \tag{19.48}$$

Из (19.48) следует, что фазовые траектории в данном случае представляют собой лучи, направленные к оси $v = y' = 0$ при $p > 0$ и от неё при $p < 0$ (рис. 37).

Рис. 37

II. Прямая покоя с двумя нулевыми характеристическими корнями $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = p = 0}$

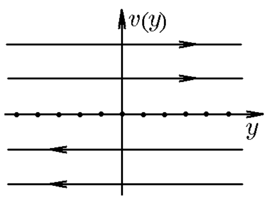


Рис. 38

В этом случае уравнение (19.46) превращается в уравнение

$$y''(x) = 0$$

с фазовыми траекториями

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 + C_2 x, \\ y'(x) &= C_2, \end{aligned}$$

лежащими на горизонтальных прямых и направленными в соответствии с общей схемой (рис. 38).

Пример 19.1. Для уравнения

$$y''(x) + 5y'(x) - 6y(x) = 0 \tag{19.49}$$

указать начальные условия, при которых его решение $y(x) > 0$ для всех x. Для конкретных начальных условий указать наименьшее значение $y(x)$.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$

имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{-5+7}{2}, \qquad \lambda_1 = -6, \quad \lambda_2 = 1.$$

Согласно (19.9), общее решение в форме Коши имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{7}\{[y(0) - y'(0)]e^{-6x} + [6y(0) + y'(0)]e^{x}\}. \qquad (19.50)$$

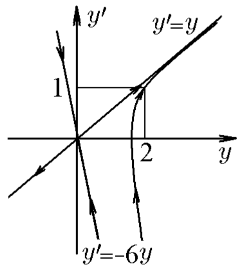


Рис. 39

Поскольку характеристические корни $\lambda_1 = -6$ и $\lambda_2 = 1$ имеют разные знаки, фазовый портрет уравнения (19.46) представляет собой седло. Согласно приведённой выше классификации, фазовые прямые, делящие фазовую плоскость на четыре области, описываются уравнениями $y' = 6y$ и $y' = y$ (рис. 39). Это означает, что фазовая точка, определяющая требуемые начальные условия, должна располагаться в растворе угла

$$-6y(x) < y'(x) < y(x), \quad y(x) > 0 \qquad (19.51)$$

для всех x (см. рис. 39). Положив в (19.51) $x = 0$, получим требование

$$-6y(0) < y'(0) < y(0), \quad y(0) > 0 \qquad (19.52)$$

к начальным условиям, обеспечивающим выполнение требования $y(x) > 0$ для всех x, т.е. ответ на первый вопрос.

Чтобы ответить на второй вопрос, зададим, например, значения $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, удовлетворяющие условиям (19.52). При таком выборе решение (19.50) примет вид

$$y(x) = \frac{1}{7}(e^{-6x} + 13e^{x}). \qquad (19.53)$$

Очевидно, что решение (19.53) удовлетворяет условию $y(x) > 0$ для всех x. Чтобы найти наименьшее значение $y(x)$, вычислим производную от (19.53) и приравняем её к нулю:

$$y'(x) = \frac{1}{7}(-6e^{-6x} + 13e^{x}) = 0.$$

Решением этого уравнения является значение

$$x = \frac{1}{7}\ln\frac{6}{13} \approx -0{,}11, \qquad (19.54)$$

соответствующее минимуму, т.е. наименьшему на $x \in]-\infty, \infty[$ значению $y(x)$. Подставив (19.51) в (19.53), получим (см. рис. 39)

$$y_{\min} = \frac{1}{7}\Big[\Big(\frac{6}{13}\Big)^{-6/7} + 13\Big(\frac{6}{13}\Big)^{1/7}\Big] \approx 1{,}94.$$

Пример 19.2. Определить тип точки покоя уравнения

$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + y(x) = 0$$

в зависимости от параметра α.

Решение. Решив характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + 1 = 0,$$

найдём

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Если $|\alpha| > 1$, то $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2 = 1 > 0$. Следовательно, точка покоя — бикритический узел. Если $\alpha = \pm 1$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1$ и точка покоя — монокритический узел. Если $|\alpha| < 1$, то $\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{1-\alpha^2}$, поэтому при $\alpha \neq 0$ точка покоя — фокус, а при $\alpha = 0$ — центр.

Пример 19.3. Для точки покоя уравнения

$$y'' + py' + qy = 0, \quad q < 0, \tag{19.55}$$

записать в явном виде уравнения, определяющие фазовые траектории её фазового портрета.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{19.56}$$

в силу условия $q < 0$ имеет два действительных корня разных знаков

$$\lambda_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Это означает, что точка покоя уравнения (19.55) является седлом.

Обозначив, как и ранее, $v = y'$ и следуя (19.2), мы можем записать

$$\frac{dv}{dy} = \frac{dv/dx}{dy/dx} = \frac{y''}{y'} = \frac{-py' - qy}{y'} = \frac{-pv - qy}{v}.$$

Отсюда для фазовых траекторий получим уравнение

$$\frac{dv}{dy} = -p - q\frac{y}{v}, \tag{19.57}$$

которое является однородным уравнением 1-го порядка.

Чтобы проинтегрировать уравнение (19.57), проведём стандартную замену

$$u = \frac{v}{y} \quad \text{или} \quad v = yu$$

и для функции u получим уравнение

$$u + yu' = -p - \frac{q}{u}$$

с разделяющимися переменными

$$yu' = -\Big(u + p + \frac{q}{u}\Big) = -\frac{u^2 + pu + q}{u}$$

или

$$u\,du = -(u^2 + pu + q)\frac{dy}{y}. \tag{19.58}$$

Поскольку полином в правой части совпадает с характеристическим полиномом (19.57), то (19.58) можно записать в виде

$$u\,du = -(u - \lambda_1)(u - \lambda_2)\frac{dy}{y}. \tag{19.59}$$

Из (19.56) следуют два частные решения:

$$u = \lambda_1 \quad \text{или} \quad v = \lambda_1 y$$

и

$$u = \lambda_2 \quad \text{или} \quad v = \lambda_2 y,$$

соответствующие фазовым лучам ℓ_1^+, ℓ_2^+, ℓ_1^-, ℓ_2^- (см. рис. 25).

Чтобы найти другие решения, перепишем (19.59) в виде

$$\frac{du}{(u - \lambda_1)(u - \lambda_2)} = -\frac{dy}{y}.$$

Разложим левую часть на простейшие дроби:

$$\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\Big(\frac{\lambda_1}{u-\lambda_1}-\frac{\lambda_2}{u-\lambda_2}\Big)du=-\frac{dy}{y}$$

или

$$\Big(\frac{\lambda_1}{u-\lambda_1}-\frac{\lambda_2}{u-\lambda_2}\Big)du=(\lambda_2-\lambda_1)\frac{dy}{y}.$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\lambda_1\ln|u-\lambda_1|-\lambda_2\ln|u-\lambda_2|=(\lambda_2-\lambda_1)\ln|y|+\ln C,$$

где C — произвольная постоянная. Преобразовав это выражение:

$$\frac{|u-\lambda_1|^{\lambda_1}}{|u-\lambda_2|^{\lambda_2}}=C|y|^{\lambda_2-\lambda_1}$$

и возвратившись от переменной $u=v/y$ к переменной v, найдём

$$|v-\lambda_1 y|^{\lambda_1}=C|v-\lambda_2 y|^{\lambda_2}. \tag{19.60}$$

Если уравнение (19.60) дополнить начальным условием

$$v(y)\big|_{y=0}=v(0),$$

то

$$|v(0)|^{\lambda_1}=C|v(0)|^{\lambda_2}$$

и

$$C=|v(0)|^{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Подставив это значение в (19.60), получим в явном виде уравнение фазовых траекторий седла

$$\Big|\frac{v-\lambda_1 y}{v(0)}\Big|^{\lambda_1}=\Big|\frac{v-\lambda_2 y}{v(0)}\Big|^{\lambda_2},$$

графически представленных на рис. 28.

Аналогично можно получить уравнения и для точек покоя других типов.

20. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

20.1. Методы Лагранжа и Коши

Все результаты, полученные в предыдущем разделе, остаются справедливыми и для линейных неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\widehat{L}_n(D)y(x)=y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1y'(x)+a_0y(x)=f(x), \tag{20.1}$$

где a_j, $j=\overline{0,n-1}$, — постоянные.

Поскольку фундаментальная система решений (20.1) может быть найдена с помощью характеристического уравнения, то она позволяет использовать как метод Лагранжа, так и метод Коши, причем последний для уравнения (20.1) существенно упрощается.

Пример 20.1. Найти общее решение уравнения

$$y''+y=\operatorname{tg}x$$

методом Лагранжа.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

имеет комплексные корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

т.е. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$. Система (15.10) для такого уравнения примет вид

$$\begin{aligned} &C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ &-C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Умножив обе части первого уравнения на $\sin x$, а второго на $\cos x$ и сложив, получим $C_2' = \sin x$. Тогда из первого уравнения следует

$$C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Интегрирование даёт

$$\begin{aligned} &C_1 = \sin x - \ln \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\Big) + \bar{C}_1, \\ &C_2 = -\cos x + \bar{C}_2. \end{aligned}$$

Отсюда запишем общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = \sin x \cos x - \cos x \ln \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\Big) + \bar{C}_1 \cos x - \cos x \sin x + \bar{C}_2 \sin x$$

или

$$y = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x - \cos x \ln \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\Big).$$

Пример 20.2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

методом Лагранжа.

Решение. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Варьируем C_1 и C_2:

$$\bar{y} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

$C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяем из системы (15.10):

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{1}{\cos x}, \end{cases}$$

откуда

$$C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, \quad C_2' = 1$$

и

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \bar{C}_1, \quad C_2(x) = x + \bar{C}_2.$$

Общее решение

$$y = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Пример 20.3. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$$

методом Лагранжа.

Решение. Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

имеет два различных корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Варьируем C_1 и C_2:

$$\bar{y} = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{2x}.$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{2x} = 0, \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x) 2e^{2x} = e^{3x}. \end{cases}$$

Решив систему, найдём $C_1'(x) = -e^{2x}$, $C_2'(x) = e^x$, откуда

$$C_1(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + \bar{C}_1, \qquad C_2(x) = e^x + \bar{C}_2$$

и общее решение исходного уравнения

$$y = -\frac{1}{2}e^{2x}e^x + e^x e^{2x} + \bar{C}_1 e^x + \bar{C}_2 e^{2x} = \frac{1}{2}e^{3x} + \bar{C}_1 e^x + \bar{C}_2 e^{2x}.$$

Обратимся теперь к методу Коши. Дополним уравнение (20.1) начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{20.2}$$

Тогда задача Коши для неоднородного уравнения (20.1) с начальными условиями (20.2) представлением

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x)$$

сводится к двум задачам Коши:

$$\begin{gathered} L_n(D)\bar{y}(x) = 0, \\ \bar{y}(x_0) = y_0, \quad \bar{y}'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad \bar{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{gathered} \tag{20.3}$$

и

$$\begin{gathered} L_n(D)y^*(x) = f(x), \\ y^*(x_0) = (y^*)'(x_0) = \ldots = (y^*)^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{gathered} \tag{20.4}$$

Рассмотрим последовательно каждую из них.

Пусть $y_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, — фундаментальная система решений однородного уравнения (20.3). Если $y_{0j}(x)$, $j = \overline{1,n}$, — фундаментальная система, нормированная в точке $x = 0$, то $y_{0j}(x - x_0)$, $j = \overline{1,n}$, является фундаментальной системой, нормированной в точке $x = x_0$, в силу леммы 16.1. Но тогда

$$\bar{y}(x) = y_0 y_{01}(x - x_0) + y_0' y_{02}(x - x_0) + \ldots + y_0^{(n-1)} y_{0n}(x - x_0) \tag{20.5}$$

определяет общее решение уравнения (20.3) в форме Коши при произвольных значениях $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ и, соответственно, решение задачи Коши, если эти значения определяют начальные условия (20.2).

Решение задачи (20.4), т.е. частное решение ищем в виде

$$y^*(x) = \int\limits_{x_0}^{x} K(x,t)f(t)dt. \tag{20.6}$$

Оказывается, что роль функции Коши $K(x,t)$ в этом случае может играть функция $y_{0n}(x-t)$ из фундаментальной системы $y_{0j}(x-x_0)$, $j=\overline{1,n}$, при $x_0=t$. Согласно определению, функция $K(x,t)$ должна удовлетворять однородному уравнению (20.3) и начальным условиям (15.22). Функция $y_{0n}(x-t)$ удовлетворяет обоим этим требованиям. Очевидно, что она удовлетворяет однородному уравнению. Кроме того, являясь n-ым членом нормированной фундаментальной системы, она в фундаментальной матрице $Y_0(x-t)$ образует n-ый столбец

$$\begin{aligned}
&y(x-t)|_{x=t}=0,\\
&y'(x-t)|_{x=t}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots,\\
&y^{(n-2)}(x-t)|_{x=t}=0,\\
&y^{(n-1)}(x-t)|_{x=t}=1,
\end{aligned}$$

соответствующий условиям (15.22). В силу этого решение (20.6) можно записать в виде

$$y^*(x) = \int\limits_{x_0}^{x} y_{0n}(x-t)f(t)dt. \tag{20.7}$$

Таким образом, фундаментальная система стационарного оператора $\widehat{L}_n$, нормированного в точке $x=0$, посредством формул (20.5) и (20.7) целиком определяет решение задачи (20.1), (20.2) в виде суммы

$$y(x) = y_0y_{01}(x-x_0) + y_0^{(n-1)}y_{0n}(x-x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} y_{0n}(x-t)f(t)dt. \tag{20.8}$$

Пример 20.4. Найти общее и частное, удовлетворяющее условиям $y(1)=1$, $y'(1)=-1$, решения уравнения

$$y''+3y'+2y=\frac{1}{e^x+1}.$$

Решение. Корни характеристического уравнения $\lambda^2+3\lambda+2=0$ равны $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-2$. Следовательно, фундаментальная система решений имеет вид

$$y_1=e^{-x}, \qquad y_2=e^{-2x}. \tag{20.9}$$

Далее решения найдём методами Лагранжа и Коши.

I. *Метод Лагранжа.*

Общее решение ищем в виде

$$y(x)=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{-2x},$$

Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определятся из системы

$$\begin{aligned}
C_1'e^{-x}+C_2'e^{-2x}&=0,\\
-C_1'e^{-x}-2C_2'e^{-2x}&=\frac{1}{e^x+1}.
\end{aligned} \tag{20.10}$$

Сумма уравнений даёт
$$-C_2'e^{-2x} = \frac{1}{e^x+1}$$
или
$$C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^x+1}.$$
Тогда из первого уравнения (20.10) имеем
$$C_1'(x) = \frac{e^x}{e^x+1}.$$
Проинтегрируем два последних выражения:
$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = C_1 + \ln(e^x+1),\\ C_2(x) &= -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx = C_2 + \ln(e^x+1) - e^x \end{aligned} \tag{20.11}$$
и запишем общее решение
$$y(x) = (C_1-1)e^{-x} + C_2e^{-2x} + (e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1). \tag{20.12}$$
Вычислив
$$y'(x) = -(C_1-1)e^{-x} - 2C_2e^{-2x} - (e^{-x}+2e^{-2x})\ln(e^x+1) + (e^{-x}+2e^{-2x})\frac{e^x}{e^x+1}$$
и подставив $y(x)$ и $y'(x)$ в начальные условия, получим
$$\begin{aligned} &(C_1-1)e^{-1} + C_2e^{-2} + (e^{-1}+e^{-2})\ln(e+1) = 1.\\ &-(C_1-1)e^{-1} - 2C_2e^{-2} - (e^{-1}+2e^{-2})\ln(e+1) + \frac{1}{e} = -1. \end{aligned}$$
Сложив уравнения, найдём
$$-C_2e^{-2} - e^{-2}\ln(e+1) + e^{-1} = 0$$
или
$$C_2 = e - \ln(e+1).$$
Подставив теперь C_2 в первое уравнение системы, получим
$$(C_1-1)e^{-1} + [e-\ln(e+1)]e^{-2} + (e^{-1}+e^{-2})\ln(e+1) = 1,$$
откуда
$$C_1 - 1 = (e-1) - \ln(e+1).$$
Зная C_1-1 и C_2, из (20.12) найдём решение задачи Коши
$$\begin{aligned} y(x) &= [(e-1)-\ln(e+1)]e^{-x} + [e-\ln(e+1)]e^{-2x} + (e^{-x}+2^{-2x})\ln(e^x+1) =\\ &= (e-1)e^{-x} + ee^{-2x} - (e^{-x}+e^{-2x}\ln(e+1) + (e^{-x}-e^{-2x}\ln(e^x+1) \end{aligned}$$
или
$$y(x) = e^{-(x-1)} - e^{-x} + e^{-2x+1} + (e^{-x}+e^{-2x})\ln\frac{e^x+1}{e+1}.$$
II. *Метод Коши.*

Фундаментальная матрица неоднородного уравнения имеет вид
$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x}\\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \det Y(0) = 1$$

и, соответственно,

$$Y^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычислив

$$[Y(x)]_1 Y^{-1}(0) = (e^{-x} \quad e^{-2x}) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2e^{-x} - e^{-2x} \quad e^{x} - e^{-2x}),$$

получим фундаментальную систему решений однородного уравнения, нормированную в точке $x = 0$, т.е.

$$y_{01}(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}, \quad y_{02}(x) = e^{x} - e^{-2x}.$$

Тогда общее решение однородного уравнения в форме Коши, согласно (20.5), имеет вид

$$\bar{y}(x) = y_0(2e^{-(x-1)} - e^{-2(x-1)}) + y_0'(e^{-(x-1)} - e^{-(2x-1)}). \tag{20.13}$$

Соответственно, частное решение $y^*(x)$ найдём по формуле (20.7):

$$\begin{aligned} y^*(x) &= \int\limits_1^x [e^{-(x-t)} - e^{-2(x-t)}] \frac{1}{e^t+1} dt = e^{-x} \int\limits_1^x \frac{e^t}{e^t+1} dt - e^{-2x} \int\limits_1^x \frac{e^{2t}}{e^t+1} dt = \\ &= e^{-x} \ln(e^t+1)\Big|_1^x + e^{-2x}\big[\ln(e^t+1)\Big|_1^x - e^t\Big|_1^x\big] = \\ &= e^{-x} \ln\frac{e^x+1}{e+1} + e^{-2x} \ln\frac{e^x+1}{e+1} + e^{-2x}(-e^x + e), \end{aligned}$$

откуда

$$y^*(x) = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln\frac{e^x+1}{e+1} - e^{-x} + e^{-2x+1}. \tag{20.14}$$

Формулы (20.13) и (20.14) дают общее решение исходного уравнения в форме Коши

$$\begin{aligned} y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x) = y_0[2e^{-(x-1)} - e^{-2(x-1)}] + y_0'[e^{-(x-1)} - e^{-(2x-1)}] + \\ + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln\frac{e^x+1}{e+1} - e^{-x} + e^{-2x+1}. \end{aligned}$$

Подставив сюда начальные значения $y_0 = 1$, $y_0' = -1$, найдём решение задачи Коши:

$$y(x) = e^{-(x-1)} - e^{-x} + e^{-2x+1} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln\frac{e^x+1}{e+1},$$

совпадающее с найденным методом Лагранжа.

20.2. Метод неопределённых коэффициентов

Как уже отмечалось, решения линейных однородных уравнений относятся к тому классу функций, который называется квазиполиномами, и имеют вид (16.4). Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (15.1) с правой частью $f(x)$, которая также является некоторым квазиполиномом, т.е. уравнение вида

$$\widehat{L}_n y(x) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = P_l(x) e^{\alpha x}. \tag{20.15}$$

Решение этого уравнения можно найти методами Лагранжа и Коши, однако тот факт, что правая часть также является квазиполиномом, позволяет избежать операции интегрирования, обязательной в этих методах.

Сравнив два квазиполинома: квазиполином, представляющий решение однородного уравнения $\bar{y}(x)$, и квазиполином, представляющий правую часть уравнения $f(x)$, можно составить частное решение $y^*(x)$ в виде третьего квазиполинома с неизвестными коэффициентами. Подставив этот квазиполином в дифференциальное уравнение и сравнив квазиполиномы в левой и правой частях этого уравнения, можно найти неизвестные коэффициенты. Такой метод построения частного решения называется методом неопределённых коэффициентов. Рассмотрим некоторые варианты построения квазиполиномов, обеспечивающих наиболее экономичную процедуру вычисления неизвестных коэффициентов.

I. Правая часть уравнения (20.15) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} P_l(x), \tag{20.16}$$

где $P_l(x)$ — полином l-й степени, причём

а) α — действительное число и не является корнем характеристического уравнения, тогда частное решение неоднородного уравнения ищут в виде

$$y^* = e^{\alpha x} Q_l(x) = e^{\alpha x}(A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \ldots + A_{l-1}x + A_l), \tag{20.17}$$

где $Q_l(x)$ — полином l-й степени, т.е. той же степени, что и $P_l(x)$. Здесь $A_0, A_1, \ldots, A_l$ — неизвестные пока коэффициенты. Найдя

$$\begin{aligned} &(y^*)' = Q_l'(x)e^{\alpha x} + \alpha e^{\alpha x} Q_l(x), \\ &(y^*)'' = Q_l''(x)e^{\alpha x} + 2\alpha Q_l'(x)e^{\alpha x} + \alpha^2 e^{\alpha x} Q_l(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{20.18}$$

и подставив их вместе с (20.17) в (20.15), получим уравнение для определения коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A_0, A_1, \ldots, A_l$.

Решив полученную систему уравнений и найдя коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_n$, подставим их в (20.17) и найдём частное решение y^*.

б) Если α — r-кратный корень характеристического уравнения, то решение нужно искать в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x} Q_l(x). \tag{20.19}$$

Пример 20.5. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = f(x),$$

если

$$\text{а)}\ \ f(x) = 3xe^{2x}, \quad \text{б)}\ \ f(x) = 3xe^{x}, \quad \text{в)}\ \ f(x) = x^2.$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$\bar{y}'' - 4\bar{y}' + 4\bar{y} = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

имеет два равных корня $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ или один корень $\lambda_1 = 2$ кратности $r = 2$. Общее решение линейного однородного уравнения будет

$$\bar{y} = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

Найдём теперь частное решение линейного неоднородного уравнения. Так как в случае а) правая часть имеет вид

$$f(x) = P_1(x)e^{2x} = 3xe^{2x},$$

причём $\alpha = 2$ совпадает с двукратным корнем характеристического уравнения ($\alpha = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$), то частное решение следует искать в виде квазиполинома 3-го порядка

$$y^* = x^2e^{2x}(A_0x + A_1)$$

или

$$y^* = e^{2x}Q(x),$$

где

$$Q(x) = A_0x^3 + A_1x^2.$$

Поскольку

$$Q'(x) = 3A_0x^2 + 2A_1x;$$
$$Q''(x) = 6A_0x + 2A_1,$$

то

$$(y^*)' = e^{2x}[2Q(x) + Q'(x)] = e^{2x}[2A_0x^3 + (2A_1 + 3A_0)x^2 + 2A_1x];$$
$$(y^*)'' = e^{2x}[4Q(x) + 4Q'(x) + Q''(x)] =$$
$$= e^{2x}[4A_0x^3 + (4A_1 + 12A_0)x^2 + (6A_0 + 8A_1)x + 2A_1].$$

Подставим их в уравнение:

$$e^{2x}[4A_0x^3 + 4A_1x^2 + 12A_0x^2 + 6A_0x + 8A_1x + 2A_1 - 8A_0x^3 - 8A_1x^2 -$$
$$-12A_0x^2 - 8A_1x + 4A_0x^3 + 4A_1x^2] = 3xe^{2x},$$

т.е.

$$6A_0x + 2A_1 = 3x,$$

откуда $2A_1 = 0$, $A_1 = 0$; $6A_0 = 3$, $A_0 = 1/2$, и частное решение имеет вид

$$y^* = \frac{1}{2}x^3e^{2x}.$$

Тогда общее решение неоднородного линейного уравнения запишется как

$$y = \bar{y} + y^* = e^{2x}(C_1 + C_2x) + \frac{1}{2}x^3e^{2x}$$

или

$$y = e^{2x}\Big(C_1 + C_2x + \frac{x^3}{2}\Big).$$

б) В этом случае правая часть имеет вид

$$f(x) = P_1(x)e^x = 3xe^x,$$

причем $\alpha = 1 \neq \lambda_1 = \lambda_2 = 2$, т.е. α не совпадает с характеристическими числами. В этом случае частное решение ищем в виде квазиполинома 1-го порядка

$$y^*(x) = (A_0 + A_1x)e^x.$$

Поскольку

$$(y^*)' = [(A_0 + A_1) + A_1x]e^x,$$
$$(y^*)'' = [(A_0 + 2A_1) + A_1x]e^x,$$

то

$$[(A_0 + 2A_1) + A_1 x]e^x - 4[(A_0 + A_1) + A_1 x] + 4(A_0 + A_1 x) = 3xe^x$$

или

$$(A_0 - 2A_1)e^x + A_1 x e^x = 3xe^x.$$

Отсюда $A_0 = 6$, $A_1 = 3$ и частное решение имеет вид

$$y^*(x) = 3(2 + x)e^x.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения запишется как

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + 3(2 + x)e^x.$$

в) В этом случае правая часть имеет вид

$$f(x) = P_2(x)e^{0\cdot x} = x^2,$$

причем $\alpha = 0 \neq \lambda_1 = \lambda_2 = 2$, т.е. $\alpha = 0$ не совпадает с характеристическими числами и частное решение будем искать в виде квазиполинома 2-го порядка

$$y^* = (A_0 + A_1 x + a_2 x^2)e^{0\cdot x} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2.$$

Продифференцировав:

$$(y^*)' = A_1 + 2A_2 x, \qquad (y^*)'' = 2A_2$$

и подставив в исходное уравнение, найдём

$$2A_2 - 4(A_1 + 2A_2 x) + 4(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) = x^2,$$
$$(2A_2 - 4A_1 + 4A_0) + (-8A_2 + 4A_1)x + 4A_2 x^2 = x^2,$$

откуда

$$\begin{aligned} 2A_2 - 4A_1 + 4A_0 &= 0, \\ -8A_2 + 4A_1 &= 0, \\ 4A_2 &= 1 \end{aligned}$$

или $A_0 = 3/8$, $A_1 = 1/2$, $A_2 = 1/4$. С учётом этого частное решение имеет вид

$$y^*(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$$

и, соответственно, общее решение

$$y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3}{8} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2.$$

II. Правая часть уравнения (20.15) имеет вид

$$f(x) = [P_l(x)\cos\beta x + \bar{P}_m(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, \qquad (20.20)$$

где α и β — действительные числа; $P_l(x)$ и $\bar{P}_m(x)$ — полиномы различных степеней. Тогда

а) если числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения, то частное решение ищут в виде

$$y^* = [Q_s(x)\cos\beta x + \bar{Q}_s(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}, \qquad (20.21)$$

где $Q_s(x)$ и $\bar{Q}_s(x)$ — полиномы, степени которых равны наивысшей из степеней полиномов $P_l(x)$ и $\bar{P}_m(x)$, т.е. $s = \max(l, m)$;

б) если числа $\alpha \pm i\beta$ являются корнями характеристического уравнения кратности r, то частное решение ищут в виде

$$y^* = x^r e^{\alpha x}[Q_s(x)\cos\beta x + \bar{Q}_s(x)\sin\beta x], \qquad (20.22)$$

где $Q_s(x)$ и $\bar{Q}_s(x)$ — полиномы, степени которых равны наивысшей из степеней полиномов $P_l(x)$ и $\bar{P}_m(x)$, т.е. $s = \max(l, m)$.

Пример 20.6. Найти частное решение линейного неоднородного уравнения

$$y'' + y = f(x),$$

где

$$\text{а)}\ \ f(x) = \cos 2x; \quad \text{б)}\ \ f(x) = \sin x; \quad \text{в)}\ \ f(x) = xe^x.$$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

а) Правая часть данного линейного неоднородного уравнения есть

$$f(x) = P_0 \operatorname{Re} e^{\pm 2ix} = \cos 2x,$$

т.е. $\alpha = 0$, $\beta = 2$. Так как числа $\pm 2i$ не являются корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 0 \pm i$, частное решение ищем в виде

$$y^* = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

где A, B — полиномы нулевой степени, как $P_0 = 1$. Вычислив

$$(y^*)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x;$$
$$(y^*)'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

и подставив в исходное дифференциальное уравнение, получим

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = \cos 2x$$

или

$$-3A\cos 2x - 3B\sin 2x = \cos 2x.$$

Приравняв коэффициенты соответственно при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в левой и правой частях, приходим к системе двух уравнений для определения A и B:

$$-3A = 1, \quad -3B = 0,$$

откуда $A = -1/3$, $B = 0$. Следовательно, частное решение линейного неоднородного уравнения будет

$$y^* = -\frac{1}{3}\cos 2x.$$

В случае б) правая часть имеет вид

$$f(x) = P_0 \sin x = \operatorname{Im}\ e^{(0\pm i)x},$$

т.е. $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Так как число $\alpha \pm i\beta = 0 \pm i$ совпадает с простыми (кратности $r = 1$) корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 0 \pm i$, то частное решение ищем в виде

$$y^*(x) = x(A\cos x + B\sin x),$$

где A, B — полиномы нулевой степени, как и $P_0 = 1$. Найдём

$$(y^*)' = (A + Bx)\cos x + (B - Ax)\sin x,$$
$$(y^*)'' = 2(-A\sin x + B\cos x) - x(A\cos x - B\sin x)$$

и подставим в исходное уравнение:

$$2(-A\sin x + B\cos x) - x(A\cos x - B\sin x) + x(A\cos x + B\sin x) = \sin x.$$

Отсюда

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \sin x$$

и, соответственно, $A = -1/2$, $B = 0$. Следовательно, частное решение есть

$$y^*(x) = -\frac{x}{2}\cos x,$$

а общее

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x.$$

В случае в) правая часть имеет вид

$$f(x) = P_1(x)e^{\alpha x} = xe^x,$$

т.е. $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Так как число $\alpha \pm i\beta = 1$ не совпадает с корнями характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = 0 \pm i$, то частное решение ищем в виде

$$y^*(x) = (A_0 + A_1 x)e^x,$$

где $A_0 + A_1 x$ — полином первой степени, как $P_1(x) = x$. Найдём

$$(y^*)' = e^x(A_0 + A_1 + A_1 x),$$
$$(y^*)'' = e^x(A_0 + 2A_1 + A_1 x)$$

и подставим в исходное уравнение:

$$e^x(A_0 + 2A_1 + A_1 x) + e^x(A_0 + A_1 x) = xe^x.$$

Тогда

$$2(A_0 + A_1) + 2A_1 x = x$$

и, соответственно, $A_0 + A_1 = 0$, $2A_1 = 1$. Отсюда $A_0 = -1/2$, $A_1 = 1/2$, и частное решение имеет вид

$$y^*(x) = -\frac{1}{2}(1 - x)e^x.$$

Пример 20.7. Некоторое линейное неоднородное уравнение имеет следующие корни характеристического уравнения:

$\lambda_1 = 2$ — простой корень (кратность $r_1 = 1$);

$\lambda_2 = 3$ — корень кратности 2 ($r_2 = 2$);

$\lambda_{3,4} = 2 \pm 3i$ — комплексно сопряжённые корни кратности 3 ($r_{3,4} = 3$).

Записать квазиполином, в виде которого следует искать частное решение $y^*(x)$ для следующих правых частей $f(x)$:

а) $x^3 e^{2x}$, б) $x^3 e^x$, в) $(x^2 + x)e^{3x}$, г) $e^{2x}(\cos 3x + x^2 \sin 3x)$,
д) $e^{2x}(x \cos x + \sin x)$, е) $x^2 \cos 3x + x \sin 3x$.

Решение. а) $f(x) = P_3(x)e^{\alpha x} = x^3 e^{2x}$, т.е. $\alpha = 2$, $\beta = 0$, следовательно, $\alpha \pm i\beta = 2$ совпадает с корнем $\lambda_1 = 2$ кратности $r_1 = 1$, Частное решение ищем в виде

$$y^*(x) = Q_3(x)e^{2x}x = (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3)e^{2x}x.$$

Полином $Q_3(x)$ должен иметь третью степень, как и $P_3(x) = x^3$, $q_{0,1,2,3}$ — неизвестные коэффициенты.

б) $f(x) = P_3(x)e^{\alpha x} = x^3 e^x$, т.е. $\alpha = 1$, $\beta = 0$, следовательно, $\alpha \pm i\beta = 1$ не совпадает ни с одним характеристическим корнем. Частное решение ищем в виде

$$y^*(x) = Q_3(x)e^x = (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3)e^x.$$

в) $f(x) = P_2(x)e^{\alpha x} = (x^2 + x)e^{3x}$, т.е. $\alpha = 3$, $\beta = 0$, следовательно, $\alpha \pm i\beta = 3 \pm i \cdot 0 = 3$ совпадает с корнем $k_2 = 3$ кратности $r_2 = 2$. Решение ищем в виде

$$y^*(x) = Q_2(x)e^x x^2 = (q_0 + q_1 x + q_2 x^2)e^{3x}x^2.$$

г) $f(x) = e^{\alpha x}(P_0 \cos 3x + \bar{P}_2(x) \sin 3x) = e^{2x}(\cos 3x + x^2 \sin 3x)$, т.е. $\alpha = 2$, $\beta = 3$, следовательно, $\alpha \pm i\beta = 2 \pm 3i$ совпадает с комплексными корнями $\lambda_{3,4} = 2 \pm 3i$ кратности 3 ($r_{3,4} = 3$). Решение ищем в виде

$$y^*(x) = e^{2x}(Q_2(x)\cos 3x + \bar{Q}_2 \sin 3x)x^3 =$$
$$= e^{2x}[(q_0 + q_1x + q_2x^2)\cos 3x + (\bar{q}_0 + \bar{q}_1 x + \bar{q}_2 x^2)\sin 3x]x^3.$$

д) $f(x) = e^{\alpha x}(P_1 \cos x + P_0 \sin x) = e^{2x}(x\cos x + \sin x)$, т.е. $\alpha = 2$, $\beta = 1$, следовательно, $\alpha \pm i\beta = 2 \pm i$ не совпадает ни с одним характеристическим корнем. Решение ищем в виде

$$y^*(x) = e^{2x}(Q_1(x)\cos x + \bar{Q}_1 \sin x) =$$
$$= e^{2x}[(q_0 + q_1x)\cos x + (\bar{q}_0 + \bar{q}_1 x)\sin x].$$

е) $f(x) = e^{\alpha x}(P_2 \cos 3x + \bar{P}_1 \sin 3x) = 1\cdot(x^2\cos 3x + x\sin 3x)$, т.е. $\alpha = 0$, $\beta = 3$, следовательно, число $\alpha \pm i\beta = 0 \pm 3i$ не совпадает ни с одним характеристическим корнем. Решение ищем в виде

$$y^*(x) = Q_2(x)\cos 3x + \bar{Q}_2(x)\sin 3x =$$
$$= (q_0 + q_1x + q_2x^2)\cos 3x + (\bar{q}_0 + \bar{q}_1 x + \bar{q}_2 x^2)\sin 3x.$$

$\Diamond$ Если правая часть линейного неоднородного уравнения $f(x)$ есть сумма двух функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение y^* такого уравнения, согласно принципу суперпозиции, можно получить, как сумму

$$y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x),$$

где $y_1^*(x)$ и $y_2^*(x)$ есть частные решения уравнений

$$\widehat{L}_n y_1^*(x) = f_1(x),$$
$$\widehat{L}_n y_2^*(x) = f_2(x).$$

21. Уравнения Лагранжа, Эйлера и Чебышева

В разделе, посвящённом преобразованиям линейных уравнений, мы рассмотрели некоторые типы уравнений с переменными коэффициентами, которые можно привести к уравнениям с постоянными коэффициентами. Здесь мы выделим особо важные для приложений типы уравнений с переменными коэффициентами, которые сводятся к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

$\blacklozenge$ Уравнение вида

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1xy' + a_0y = f(x) \tag{21.1}$$

где a_j, $j = \overline{0, n-1}$, — постоянные, называется *уравнением Эйлера.*

В канонической форме уравнение Эйлера имеет вид

$$y^{(n)} + a_{n-1}\frac{1}{x}y^{(n-1)} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{n-1}}y' + a_0y = \tilde{f}(x), \quad |x| > 0. \tag{21.2}$$

Согласно формуле (14.30), при $x > 0$ делаем замену переменной

$$t = \int \sqrt[n]{ka_0(x)}dx, \quad a_0(x) = \frac{a_0}{x^n}.$$

Выбрав $k = 1/a_0$, имеем

$$t = \int \frac{dx}{x} = \ln x$$

или

$$x = e^t. \tag{21.3}$$

Как показано в разд. 14, такая замена сводит уравнения (21.1), (21.2) к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

При $x < 0$ положим $x = -e^t$, что приведёт к общему решению того же вида (с заменой x на $-x$). Поэтому достаточно найти общее решение при $x > 0$ и заменить в нем x на $-x$.

Пример 21.1. Найти общее решение уравнения

$$x^3y''' - 6x^2y'' + 18xy' - 24y = 0.$$

Решение. Заданное уравнение — уравнение Эйлера. Сделаем замену (21.3):

$$x = e^t, \quad t = \ln x, \quad x > 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_t t'_x = \frac{1}{x} y'_t, \\ y''_x &= -\frac{1}{x^2}y'_t + y''_t\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}(-y'_t + y''_t), \\ y'''_x &= -\frac{2}{x^3}(-y'_t + y''_t) + \frac{1}{x^3}\Big(-y''_t\frac{1}{x} + y'''_t\Big) = \frac{1}{x^3}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t). \end{aligned} \tag{21.4}$$

Подставив эти производные в исходное уравнение, получим уравнение

$$x^3\frac{1}{x^3}(y'''_t - 3y''_t + 2y'_t) - 6x^2\frac{1}{x^2}(-y'_t + y''_t) - 18x\frac{1}{x}y'_t - 24y = 0,$$

которое после преобразований примет вид уравнения с постоянными коэффициентами

$$y'''_t - 9y''_t + 26y'_t - 24y = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24 = 0 \tag{21.5}$$

имеет корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$ и, следовательно, общее решение

$$y(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + C_3e^{4t}$$

или

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x^3 + C_3x^4. \tag{21.6}$$

Явный вид (21.6) показывает, что частное решение исходного уравнения можно было искать в виде

$$y(x) = x^\lambda, \tag{21.7}$$

тогда вместо (21.4) имели бы

$$y'(x) = \lambda x^{\lambda-1}, \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}, \quad y'''(x) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}.$$

Подставив эти производные в исходное уравнение, получим

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^\lambda - 6\lambda(\lambda-1)x^\lambda + 18\lambda x^\lambda - 24x^\lambda = 0.$$

Разделив на x^λ, придём к характеристическому уравнению (21.5).

◊ На практике зачастую решение уравнения Эйлера ищут именно в виде (21.7), а не сводят к уравнению с постоянными коэффициентами.

Пример 21.2. Найти общее решение уравнения

$$x^2y'' + xy' + 9y = \ln x.$$

Решение. Заданное уравнение есть неоднородное уравнение Эйлера. Сделав замену $x = e^t$, $x > 0$, с учётом (21.4) найдём

$$y''_t - y'_t + y'_t + 9y = t$$

или

$$y''_t + 9y = t.$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = \pm 3i$ и, следовательно, общее решение однородного уравнения

$$\bar{y}(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t.$$

Частное решение $y^*(t)$ ищем методом неопределённых коэффициентов

$$y^*(t) = A + Bt,$$

тогда $(y^*)' = B$, $(y^*)'' = 0$, и, следовательно,

$$9(A + Bt) = t.$$

Отсюда $A = 0$, $B = 1/9$. Это даёт частное решение

$$y^*(t) = \frac{1}{9}t.$$

Зная $\bar{y}(t)$ и $y^*(t)$, запишем общее решение

$$y(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t + \frac{1}{9}t.$$

Возвратившись к переменной x, получим

$$y(x) = C_1 \cos(3 \ln x) + C_2 \sin(3 \ln x) + \frac{1}{9} \ln x.$$

♦ Уравнение вида

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1(ax + b)y' + a_0 y = f(x)$$

где a, b, a_j, $j = \overline{0, n-1}$, — постоянные, называется *уравнением Лагранжа–Эйлера* (при $a = 1$, $b = 0$ оно становится уравнением Эйлера, рассмотренным выше).

Заменой $ax + b = e^t$ уравнение Лагранжа–Эйлера сводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами.

Пример 21.3. Найти общее решение уравнения

$$(3x + 1)^2 y'' - 2(3x + 1)y' - 12y = 0.$$

Решение. Заданное уравнение — однородное уравнение Лагранжа–Эйлера. Сделаем замену

$$e^t = 3x + 1, \quad t = \ln(3x + 1).$$

Вычислив производные:

$$y'_x = y'_t t'_x = y'_t \frac{3}{3x + 1},$$
$$y''_x = -\frac{9}{(3x + 1)^2} y'_t + y''_t \frac{9}{(3x + 1)^2} = \frac{9}{(3x + 1)^2}(-y'_t + y''_t)$$

и подставив их в исходное уравнение, получим уравнение

$$3y''_t - 5y'_t - 4y = 0$$

с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $3\lambda^2 - 5\lambda - 4 = 0$ имеет корни

$$\lambda_1 = \frac{5}{6} + \frac{\sqrt{73}}{6}, \qquad \lambda_2 = \frac{5}{6} - \frac{\sqrt{73}}{6}.$$

Общее решение имеет вид

$$y(t) = e^{5t/6}(C_1 e^{\sqrt{73}t/6} + C_2 e^{-\sqrt{73}t/6}).$$

Возвратившись к переменной x, запишем

$$y(x) = (3x+1)^{5/6}[C_1(3x+1)^{\sqrt{73}/6} + C_2(3x+1)^{-\sqrt{73}/6}].$$

♦ Уравнение вида

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \quad n = \text{const}, \quad |x| \neq 1,$$

называется *уравнением Чебышева.*

Для $|x| < 1$ заменой $x = \cos t$ оно сводится к уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} + n^2 y = 0,$$

а для $|x| > 1$ заменой $x = \operatorname{ch} t$ — к уравнению

$$\frac{d^2y}{dt^2} - n^2 y = 0.$$

Пример 21.4. Решить задачу Коши

$$(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(\sqrt{2}) = 1, \quad y'(\sqrt{2}) = 0.$$

Решение. Для $x > 1$ проведём замену независимой переменной:

$$x = \operatorname{ch} t.$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{dx/dt} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\operatorname{sh} t};\\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}\Big(\frac{dy}{dt}\frac{1}{\operatorname{sh} t}\Big)\frac{dt}{dx} = \Big(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\operatorname{sh} t} - \frac{dy}{dt}\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}\Big)\frac{1}{\operatorname{sh} t} =\\
&= \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 t} - \frac{dy}{dt}\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^3 t}
\end{aligned}$$

и подставим их в исходное уравнение. С учётом того, что $1 - x^2 = 1 - \operatorname{ch}^2 t = -\operatorname{sh}^2 t$, получим

$$-\operatorname{sh}^2 t\Big(\frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 t} - \frac{dy}{dt}\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^3 t}\Big) - \operatorname{ch} t\frac{dy}{dt}\frac{1}{\operatorname{sh} t} + 4y = 0$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4y = 0.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Тогда общее решение можно записать в виде

$$y(t) = C_1 \operatorname{ch} 2t + C_2 \operatorname{sh} 2t.$$

Возвратившись к переменной x, получим

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch}(2 \operatorname{arch} x) + C_2 \operatorname{sh}(2 \operatorname{arch} x) =$$

$$= C_1[2\operatorname{ch}^2(\operatorname{arch} x) - 1] + C_2 2\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)\operatorname{ch}(\operatorname{arch} x) =$$
$$= C_1(x^2 - 1) + 2C_2 x\sqrt{x^2 - 1}.$$

Вычислив

$$y'(x) = 4xC_1 + 2C_2\sqrt{x^2 - 1} + 2C_2\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

и подставив $y(x)$ и $y'(x)$ в начальные условия, получим систему

$$(4 - 1)C_1 - 2\sqrt{2}C_2 = 1,$$
$$4\sqrt{2}C_1 + 2C_2 + 4C_2 = 0$$

или

$$3C_1 + 2\sqrt{2}C_2 = 1,$$
$$4\sqrt{2}C_1 + 6C_2 = 0,$$

откуда $C_1 = 3$, $C_2 = -2\sqrt{2}$. Решение задачи Коши имеет вид

$$y(x) = 3(x^2 - 1) - 4\sqrt{2}x\sqrt{x^2 - 1}.$$

ГЛАВА 5

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

22. Общие понятия и определения

Зачастую прикладные задачи физики, биологии, экономики и др. приводят к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, в которые входят несколько неизвестных функций от одной и той же переменной и производные этих функций. Общий вид таких уравнений

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(m_1)}, x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m_n)}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_l(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(m_1)}, x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m_n)}) = 0. \end{cases} \tag{22.1}$$

Если в системе (22.1) $l = n$ и её можно разрешить относительно старших производных, то она примет вид

$$\begin{aligned} &x_1^{(m_1)}(t) = f_1(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(m_1-1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m_n-1)}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &x_n^{(m_n)}(t) = f_n(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(m_1-1)}, \ldots, x_n, x_n', \ldots, x_n^{(m_n-1)}). \end{aligned} \tag{22.2}$$

♦ Форма (22.2) называется *канонической формой* системы (22.1), а сумма $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ — её порядком.

♦ При $m_1 = m_2 = \ldots = 1$ каноническая система (22.2) называется *нормальной системой* (или *в форме Коши*) и имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n}. \tag{22.3}$$

Система вида

$$\frac{dx_1}{\varphi_1(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{\varphi_2(t, x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{\varphi_n(t, x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dt}{\varphi_0(t, x_1, \ldots, x_n)} \tag{22.4}$$

называется системой дифференциальных уравнений в симметричной (или симметрической) форме.

♢ Если функция $\varphi_0(t, x_1, \ldots, x_n)$ в некоторой точке $(t^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ отлична от нуля, то в окрестности этой точки систему (22.4) можно заменить нормальной системой

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\varphi_1}{\varphi_0}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\varphi_2}{\varphi_0}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \frac{\varphi_n}{\varphi_0}.$$

Напротив, всякую нормальную систему (22.3) можно записать в симметричной форме:

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{dt}{1}.$$

♦ *Решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений* (22.1) на промежутке $[\alpha, \beta]$ называется совокупность n функций $x_i = \varphi_i(t)$, подстановка которых в это уравнение обращает его в тождество:

$$\Phi_i(t, \varphi_1(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_1^{(m_1)}(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \varphi_n'(t), \ldots, \varphi_n^{(m_n)}(t)) = 0$$

в случае (22.3)

$$\frac{d\varphi_i(t)}{dx} = f_i(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)), \quad i = \overline{1, n}.$$

◊ При решении системы в симметричной форме полезно использовать свойство равных дробей: если $k_1, \ldots, k_n$ — заданные величины, то

$$\frac{dx_1}{f_1} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{k_1 dx_1 + \ldots + k_n dx_n}{k_1 f_1 + \ldots + k_n}.$$

◊ Достаточно общие системы обыкновенных дифференциальных уравнений (разрешённые относительно старших производных всех неизвестных функций) сводятся к нормальным системам дифференциальных уравнений.

В дальнейшем мы будем уделять основное внимание нормальным системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Положим

$$\vec{x} = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)^\intercal,$$
$$\vec{f}(t, \vec{x}) = (f_1(t, \vec{x})\ f_2(t, \vec{x}),\ \ldots,\ f_n(t, \vec{x}))^\intercal.$$

Тогда (22.3) можно переписать в векторной форме

$$\vec{x}\,' = \vec{f}(t, \vec{x}), \tag{22.5}$$

а решение системы (22.3) записать в виде вектор-функции

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(t). \tag{22.6}$$

♦ Если вектор-функция $\vec{f}$ в (22.5) не содержит явно независимую переменную t, то система (22.5) называется *автономной* (или *консервативной*, или *динамической*) нормальной системой

$$\vec{x}\,' = \vec{f}(\vec{x}). \tag{22.7}$$

◊ Всякую систему (22.5) можно свести к автономной, если увеличить число неизвестных функций на единицу. Обозначим в (22.5) $t = x_{n+1}$, тогда

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(x_{n+1}, \vec{x});$$
$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1,$$

и мы получим автономную систему с $n + 1$ неизвестной функцией.

◊ Решение системы (22.5) — вектор-функция $\vec{x} = \vec{x}(t)$ — определяет в $(n+1)$-мерном пространстве некоторую кривую, называемую интегральной. Тот факт, что функция $\vec{x}$ удовлетворяет уравнению (22.6), можно геометрически интерпретировать следующим образом: касательной к интегральной кривой (22.6) в точке $(t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))$ является прямая L:

$$\frac{\vec{x} - \vec{x}(t_0)}{t - t_0} = \vec{f}(t_0, \vec{x}(t_0)). \tag{22.8}$$

Здесь t и $\vec{x}$ обозначают текущие координаты на прямой L. Поэтому задачу нахождения решения системы (22.5) можно геометрически интерпретировать следующим образом.

В некоторой области G пространства $(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ задано «поле направлений», т.е. в каждой точке этой области задано некоторое направление, которое можно представить подобно тому, как это делалось для обыкновенных дифференциальных уравнений, в виде небольшого отрезка прямой, проходящей через эту точку.

◊ Найти интегральную кривую (22.6) значит найти такую линию, касательная к которой в каждой точке имеет заданное направление.

Возможна и другая интерпретация решения $\vec{x}(t)$, особенно удобная для автономных систем.

В пространстве с прямоугольными координатами $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ решение $\vec{x} = \vec{x}(t)$ определяет параметрический закон движения по некоторой траектории в зависимости от изменения параметра t, который при такой интерпретации мы будем считать временем. Тогда $\vec{x}\,'$ будет вектором скорости движения точки. При этом пространство с координатами $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ называется фазовым, а кривая $\vec{x} = \vec{x}(t)$ — фазовой траекторией (или просто траекторией).

◊ Интегральная кривая (22.6) определена в $(n+1)$-мерном пространстве$\mathbb{R}^{n+1}_{t,\vec{x}}$ а фазовая траектория — в пространстве $\mathbb{R}^n_{\vec{x}}$, являясь проекцией интегральной кривой в пространстве $\mathbb{R}^n_{\vec{x}}$ параллельно оси Ot. Каждая фазовая траектория даёт меньше информации, чем интегральная кривая (которая даёт полную информацию), но, тем не менее, для многих задач её достаточно, а для некоторых задач она просто более наглядна.

♦ Система уравнений (отличная от тождественного нуля)

$$\Phi_i(t, \vec{x}) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \tag{22.9}$$

или

$$\vec{\Phi}(t, \vec{x}) = 0$$

называется *интегралом системы* (22.5), если она сохраняет своё значение на решениях системы (22.5).

♦ Система уравнений

$$\vec{\Phi}(t, \vec{x}, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0 \tag{22.10}$$

называется *общим интегралом системы в некоторой области G пространства* $(t, \vec{x})$, если, выбрав соответствующим образом постоянные $C_1, \ldots, C_n$, можно получить любую интегральную кривую системы (22.5), проходящую в G.

♦ Интеграл частного вида (22.10)

$$\Phi_1(t, \vec{x}, C_1) = 0$$

называется *первым интегралом системы.*

Если известны n независимых интегралов

$$\Phi_i(t, \vec{x}, C_i) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

то их совокупность эквивалентна общему интегралу (22.10), т.е. определяет общее решение. Если же известны $k < n$ первых интегралов, то порядок системы можно понизить до $n - k$.

23. Задача Коши. Теорема существования и единственности

♦ Задача Коши для системы уравнений (22.5)

$$\vec{x}\,' = \vec{f}(t, \vec{x}) \tag{23.1}$$

состоит в отыскании решения системы (23.1), удовлетворяющего следующим условиям:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0, \tag{23.2}$$

где $\vec{x}_0$ — произвольный вектор. Условия (23.2) называются начальными.

Докажем теперь теорему Коши, обобщённую на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 23.1 (Коши для системы ОДУ). *Пусть в дифференциальном уравнении*
$$\vec{x}\,' = \vec{f}(t, \vec{x}) \tag{23.3}$$
функция $\vec{f}(t, \vec{x})$ *непрерывна в* n*-мерном параллелепипеде* $\mathbb{D}$*:* $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$, $x_k \in [x_0^k - b_k, x_0^k + b_k]$*;* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ *и удовлетворяет в этом параллелепипеде условию Липшица*
$$|f_i(t, \vec{x}) - f_i(t, \vec{z})| \leqslant N \sum_{k=1}^{n} |x_k(x) - z_k(x)|, \quad N = \mathrm{const}\,.$$
Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений (23.3) *имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям*
$$\vec{x}\big|_{t=t_0} = \vec{x}_0 \tag{23.4}$$
на отрезке $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$*, где* h *— некоторая постоянная:*
$$h < a, \quad h < \frac{b_k}{M}, \quad k = \overline{1, n}, \quad h < \frac{1}{N}.$$

Доказательство. Рассмотрим пространство $\widetilde{C}$ непрерывных вектор-функций $\vec{x}(t)$, определённых на $[t_0 - h, t_0 + h]$ и таких, что $|x_k(t) - x_{k0}| \leqslant hM < b_k$, $M = \max\limits_{x\in\mathbb{D}} f(t, \vec{x})$. Проинтегрируем уравнение (23.3) в пределах от t_0 до $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ с учётом (23.4):
$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \vec{x}(\tau))d\tau. \tag{23.5}$$
Это уравнение эквивалентно уравнению (23.3) с начальными условиями (23.4).

Рассмотрим оператор $\widehat{A}$, который ставит в соответствие функции $\vec{x} = \vec{x}(t)$ функцию $\vec{u} = \vec{u}(t)$:
$$\vec{u} = \widehat{A}\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \bar{f}(\tau, \vec{x}(\tau))d\tau.$$
Уравнение (23.5) можно рассматривать как задачу на стационарные решения оператора $\widehat{A}$.

Определим расстояние ρ между двумя функциями из $\widetilde{C}$ по правилу
$$\rho(\vec{x}, \vec{z}) = \sum_{k=1}^{n} \max_{t_0 - h < t < t_0 + h} |x_k(t) - z_k(t)|. \tag{23.6}$$
Нетрудно убедиться, что функция $\rho(\vec{x}, \vec{z})$ является метрикой (см. Приложение A). Пространство $\widetilde{C}$ полно, так как оно является замкнутым подпространством полного пространства непрерывных функций, определённых на $[t_0 - h, t_0 + h]$ (см. Приложение A). Проверим, является ли оператор $\widehat{A}$ сжимающим относительно метрики (23.6). Для этого запишем
$$\rho(\widehat{A}x, \widehat{A}z) = \max_{t_0 - h < t \leqslant t_0 + h} \sum_{k=1}^{n} \left| \int\limits_{t_0}^{t} [f_k(\tau, \vec{x}(\tau)) - f_k(\tau, \vec{z}(\tau))]d\tau \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0 + h} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{t} \big| f_k(\tau, \vec{x}(\tau)) - f_k(\tau, \vec{z}(\tau)) \big| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h} N\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{n}\left|x_j(\tau)-z_j(\tau)\right|d\tau \leqslant nN\rho(\vec{x},\vec{z})\max_{t_0-h\leqslant t\leqslant t_0+h}\left|\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\right|.$$

С учётом (23.6) и оценки

$$\max_{[t_0-h,t_0+h]}\left|\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\right|\leqslant h$$

получим

$$\rho(\widehat{A}\vec{x},\widehat{A}\vec{z})\leqslant\alpha\rho(\vec{x},\vec{z}),$$

где $\alpha = nNh$.

Таким образом, при $h < 1/(nN)$ оператор $\widehat{A}$ является сжимающим. Следовательно, оператор $\widehat{A}$ имеет единственную стационарную точку для таких h, а задача Коши (23.3), (23.4) — единственное решение, что и требовалось доказать.

24. Метод исключения для решения нормальной системы дифференциальных уравнений

Один из основных методов интегрирования систем дифференциальных уравнений заключается в приведении этих систем к одному уравнению n-го порядка. Интегрируя это уравнение n-го порядка, находят одну из неизвестных функций, а остальные определяют из исходных уравнений и уравнений, полученных в результате их дифференцирования.

Пусть дана система уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i=\overline{1,n}, \tag{24.1}$$

где f_i имеют непрерывные частные производные до $(n-1)$-го порядка включительно по всем аргументам.

Продифференцируем первое (можно любое) уравнение

$$x_1' = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) = f_1(t,\vec{x}(t))$$

по t:

$$x_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}f_i$$

и обозначим правую часть через $F_2(t,\vec{x})$. Тогда

$$x_1'' = F_2(t,\vec{x}).$$

Снова продифференцируем полученное тождество:

$$x_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial x_i}x_i' = \frac{\partial F_2}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_2}{\partial x_i}f_i.$$

Обозначим правую часть через $F_3(t,\vec{x})$, тогда

$$x_1''' = F_3(t,\vec{x}).$$

Проведя процедуру дифференцирования до n-го порядка включительно, получим

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t,\vec{x}),\\ x_1'' = F_2(t,\vec{x}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_1^{(n-1)} = F_{n-1}(t,\vec{x}) \end{cases} \tag{24.2}$$

и

$$x_1^{(n)} = F_n(t, \vec{x}). \tag{24.3}$$

Предположим, что в рассматриваемой области изменения переменных якобиан

$$\Delta = \frac{\partial(f_1, F_2, F_3, \ldots, F_{n-1})}{\partial(x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)} \neq 0. \tag{24.4}$$

Тогда систему (24.2) можно разрешить относительно $x_2, x_3, \ldots, x_n$, выразив их через переменные $t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}$, т.е. найти

$$x_i = \varphi_i(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{(n-1)}), \quad i = \overline{2, n}. \tag{24.5}$$

Подставив (24.4) в (24.3), получим уравнение n-го порядка

$$x_1^{(n)} = \Phi(t, x_1, x_1', x_1'', \ldots, x_1^{(n-1)}). \tag{24.6}$$

Таким образом, мы показали, что если $\vec{x} = (x_1(t) \ \ldots \ x_n(t))^\intercal$ есть решение системы (24.1), то при условии (24.4) функция $x_1(t)$ удовлетворяет уравнению (24.6). Справедливо и обратное утверждение, т.е. если $x_1(t)$ — решение уравнения (24.6), а функции $x_i(t)$, $i = \overline{2, n}$, определяются из (24.5), то вектор

$$\vec{x}(t) = (x_1(t) \ \ldots \ x_n(t))^\intercal$$

является решением системы дифференциальных уравнений (24.1).

Пример 24.1. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = y^2 + \sin t, \\ y' = \dfrac{x}{2y}. \end{cases}$$

Решение. Продифференцировав обе части первого уравнения по t, получим

$$x'' = 2yy' + \cos t. \tag{24.7}$$

Из второго уравнения находим, что $2yy' = x$. Подставив это выражение в (24.7), получим

$$x'' - x = \cos t.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.$$

Из первого уравнения системы находим

$$y^2 = x' - \sin t = C_1 e^t - C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

Пример 24.2. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 1 - \dfrac{1}{y}; \\ y' = \dfrac{1}{x - t}. \end{cases}$$

Решение. Продифференцировав обе части первого уравнения, получим

$$x'' = \frac{1}{y^2}y'. \tag{24.8}$$

Найдём из исходной системы дифференциальных уравнений y и y' как функции от t, x, x'. Из первого уравнения получим

$$\frac{1}{y^2} = (1 - x')^2,$$

из второго

$$y' = \frac{1}{x - t}.$$

Подставив эти выражения в (24.8), найдём

$$x'' = \frac{1}{x - t}(x' - 1)^2.$$

Перепишем полученное уравнение в виде

$$\frac{d(x' - 1)/dt}{x' - 1} = \frac{x' - 1}{x - t}$$

или

$$\frac{d}{dt}\ln|x' - 1| = \frac{d}{dt}\ln|x - t|,$$

откуда

$$x' - 1 = C_1(x - t), \quad C_1 \neq 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}(x - t) = C_1(x - t),$$

т.е.

$$\frac{d}{dt}\ln(x - t) = C_1.$$

Отсюда

$$x = t + C_2 e^{C_1 t}, \quad C_2 \neq 0.$$

Из первого уравнения системы найдём

$$y = \frac{1}{1 - x'}.$$

Окончательно получим

$$y = -\frac{1}{C_1 C_2}e^{-C_1 t}.$$

25. Метод интегрируемых комбинаций

Систему уравнений

$$\vec{x}\,' = \vec{f}(t, \vec{x}) \tag{25.1}$$

можно решить методом интегрируемых комбинаций. Сущность метода состоит в том, что с помощью арифметических операций из уравнений данной системы получают так называемые интегрируемые комбинации.

♦ *Интегрируемой комбинацией* называется дифференциальное уравнение, являющееся следствием уравнений (25.1), но уже легко интегрирующееся, например уравнение вида

$$d\Phi(t, \vec{x}) = 0$$

или уравнение, сводящееся заменой переменных к какому-либо интегрируемому типу уравнений с одной неизвестной функцией.

Одна интегрируемая комбинация даёт возможность получить одно конечное уравнение
$$\Phi_1(t,\vec{x}) = C_1, \tag{25.2}$$
связывающее неизвестные функции и независимые переменные и называемое *первым интегралом.*

♦ *Первым интегралом* системы дифференциальных уравнений (25.1) называется функция $\Psi(x_1,\ldots,x_n,t)$, не равная тождественно постоянной, но сохраняющая постоянное значение на решениях $\vec{x} = \vec{x}(t)$ системы (25.1), т.е. $\Psi(x_1(t),\ldots,x_n(t),t) = C$.

Геометрически первый интеграл $\Phi(t,\vec{x}) = C$ при фиксированном C можно интерпретировать как n-мерную поверхность в $(n+1)$-мерном пространстве $(t,\vec{x})$, обладающую тем свойством, что каждая интегральная кривая, имеющая общую точку с этой поверхностью, целиком лежит на поверхности.

Если известен один первый интеграл системы, то, разрешив уравнение (25.2) относительно одной из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, например x_n:
$$x_n = \Psi(t, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, C), \tag{25.3}$$
и подставив выражение (25.3) в первые $n-1$ уравнение системы, получим систему уравнений, в которой число неизвестных функций на единицу меньше, чем в исходной системе уравнений.

Пример 25.1. Решить систему дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' = x^2 y, \\ y' = \dfrac{y}{t} - xy^2. \end{cases}$$

Решение. Умножив обе части первого уравнения на y, а второго на x и сложив, имеем
$$yx' + xy' = \frac{xy}{t}$$
или
$$\frac{d}{dt}(xy) = \frac{xy}{t},$$
или
$$\frac{d(xy)}{xy} = \frac{dt}{t}.$$
Отсюда
$$xy = C_1 t$$
или
$$y = \frac{C_1 t}{x}.$$
Подставив в первое уравнение, получим
$$x' = xC_1 t,$$
т.е.
$$x = C_2 \exp\Big\{\frac{1}{2}C_1 t^2\Big\}$$
и
$$y = \frac{C_1}{C_2} t \exp\Big\{-\frac{1}{2}C_1 t^2\Big\}.$$

26. Системы линейных дифференциальных уравнений

♦ *Линейной системой дифференциальных уравнений* называется система вида

$$\vec{x}\,' = A(t)\vec{x} + \vec{f}(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [\alpha, \beta], \tag{26.1}$$

где $A(t)$ – квадратная $n \times n$-матрица, элементы которой $a_{ij}(t) \in \mathcal{C}_{[\alpha,\beta]}$, $i, j = \overline{1, n}$.

◊ Если $\vec{f} \equiv 0$, то система называется однородной, в противном случае — неоднородной.

Прежде чем заняться непосредственно уравнением (26.1), введём некоторые понятия, касающиеся матриц.

Пусть $A(t) = \|a_{ij}(t)\|$ — произвольная матрица. Если $a_{ij} \in \mathcal{C}_{[\alpha,\beta]}$, то можно ввести понятие производной от матрицы: это матрица, состоящая из производных от элементов исходной матрицы

$$A'(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \|a'_{ij}(t)\|. \tag{26.2}$$

Аналогично введём понятие интеграла от матрицы:

$$\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)d\tau = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} a_{ij}(\tau)d\tau \right\|, \tag{26.3}$$

который обладает свойствами обычных интегралов от функций.

26.1. Свойства производных и интегралов от матриц

Свойство 1. Если $C_{n\times n} = \text{const}$, то $C'_{n\times n} = 0_{n\times n}$, где $0_{n\times n}$ — нулевая $n \times n$-матрица.

Доказательство следует непосредственно из определения производной от матрицы (26.2).

Свойство 2. Если $A(t)$ и $B(t)$ – матрицы $n \times m$, то

$$[A(t) + B(t)]' = A'(t) + B'(t).$$

Доказательство следует непосредственно из определения суммы матриц и определения производной от матрицы (26.2).

Свойство 3. Если $C(t) = A(t)B(t)$, то

$$\frac{d}{dt}C(t) = [A(t)B(t)]' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Доказательство следует непосредственно из определения произведения матриц и определения производной от матрицы (26.2).

Свойство 4. Если $A^{-1}A = A(t)A^{-1}(t) = \mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ — единичная матрица, то

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)A'(t)A^{-1}(t).$$

Действительно, так как $AA^{-1} = \mathbb{I}$, а $\mathbb{I} = \mathrm{const}$, то, продифференцировав правую и левую части:

$$\frac{d}{dt}[AA^{-1}] = \frac{d}{dt}\mathbb{I} = 0,$$

получим

$$A'A^{-1} + A(A^{-1})' = 0,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}[A^{-1}] = -A^{-1}A'A^{-1}.$$

Свойство 5. Справедливо соотношение

$$\frac{1}{\det A(t)}\frac{d}{dt}[\det A(t)] = \mathrm{Sp}\,\Big(\Big[\frac{d}{dt}A(t)\Big]A^{-1}(t)\Big).$$

Свойство 6. Если матрицы $F(t)$ и $\Phi(t)$ связаны соотношением $F(t) = \Phi'(t)$, то

$$\int\limits_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau = \Phi(t) - \Phi(t_0).$$

Непосредственно следует из формулы Ньютона–Лейбница и определения интеграла от матриц (26.3).

26.2. Свойства решений однородных систем дифференциальных уравнений

С помощью рассмотренных выше свойств производных и интегралов от матриц нетрудно получить ряд свойств решений систем однородных дифференциальных уравнений

$$\vec{x}\,' = A(t)\vec{x}(t), \tag{26.4}$$

т.е. при $\vec{f}(t) = 0$.

Свойство 1. Если $\vec{x}\,' = A(t)\vec{x}$ и $\vec{y}\,' = A(t)\vec{y}$ — решения однородной системы дифференциальных уравнений (26.4), то их сумма также является решением этой системы.

Действительно, по определению

$$\frac{d(\vec{x}+\vec{y})}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{d\vec{y}}{dt} = A(t)\vec{x} + A(t)\vec{y} = A(t)(\vec{x}+\vec{y}),$$

что и требовалось показать.

Свойство 2. Если $\vec{x}\,' = A(t)\vec{x}$, то вектор $C\vec{x}$, где $C = \mathrm{const}$, также решение системы (26.4).

Справедливость утверждения проверяется прямой подстановкой:

$$\frac{d(C\vec{x})}{dt} = C\frac{d\vec{x}}{dt} = CA(t)\vec{x} = A(t)C\vec{x}.$$

Свойство 3. Если $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_m(t)$ — решения системы дифференциальных уравнений (26.4), а $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — произвольные постоянные, то вектор

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{m} C_k\vec{x}_k(t)$$

также является решением системы (26.4).

Справедливость последнего утверждения непосредственно следует из первых двух.

♦ Система из n вектор-функций $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ называется *линейно независимой на интервале* $]\alpha, \beta[$, если из равенства

$$C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + \ldots + C_n\vec{x}_n(t) \equiv 0, \quad t \in]\alpha, \beta[\subset \mathbb{R}, \tag{26.5}$$

следует, что $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$.

♦ Определитель

$$W(t) = W[\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)] = \det \|x_{ij}(t)\|, \quad i, j = \overline{1, n}, \tag{26.6}$$

системы n вектор-функций

$$\vec{x}_i(t) = \begin{pmatrix} x_{i1}(t) \\ x_{i2}(t) \\ \ldots \\ x_{in}(t) \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{26.7}$$

называется *определителем Вронского* (или *вронскианом*) этой системы.

Так как векторное уравнение (26.5) эквивалентно системе

$$\begin{cases} C_1x_{11}(t) + \ldots + C_nx_{n1}(t) = 0, \\ C_1x_{12}(t) + \ldots + C_nx_{n2}(t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_1x_{1n}(t) + \ldots + C_nx_{nn}(t) = 0, \end{cases}$$

то из определения линейной зависимости непосредственно следует справедливость утверждения.

Лемма 26.1. *Если вектор-функции* (26.7) *линейно зависимы, то их вронскиан* (26.6) *тождественно равен нулю, т.е.* $W(t) \equiv 0$.

♢ Равенство нулю вронскиана (26.6) является необходимым, но не достаточным условием линейной зависимости системы (26.7). Например, вектор-функции

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} \tag{26.8}$$

линейно независимы, поскольку линейно независимы их вторые компоненты t и t^2, хотя вронскиан этих вектор-функций тождественно равен нулю:

$$W[\vec{x}_1, \vec{x}_2] = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ t & t^2 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Лемма 26.2. *Если вронскиан* (26.6) *системы вектор-функций* (26.7) *отличен от нуля хотя бы в одной точке* $t_0 \in I$, *то эти вектор-функции линейно независимы на* I.

Доказательство. Предположим противное: вектор-функции (26.7) линейно зависимы. Тогда существуют постоянные C_i, $i = \overline{1, n}$, не равные нулю одновременно и такие, что равенство (26.5) выполняется тождественно для всех $t \in I$ и, в частности, в $t = t_0$:

$$C_1\vec{x}_1(t_0) + C_2\vec{x}_2(t_0) + \ldots + C_n\vec{x}_1n(t_0) \equiv 0. \tag{26.9}$$

Но по условию леммы $W(t_0) \neq 0$. Это означает, что векторы $\vec{x}_1(t_0), \ldots, \vec{x}_n(t_0)$ линейно независимы и потому все постоянные C_i, $i = \overline{1, n}$, равны нулю. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Далее от систем произвольных вектор-функций мы перейдём к системам вектор-функций, являющихся решениями однородной системы (26.4). Для них леммы 26.1 и 26.2 остаются справедливыми, и, кроме того, справедливо ещё одно утверждение.

Лемма 26.3. *Пусть вектор-функции* (26.7) *являются решениями однородной системы* (26.4). *Если их вронскиан* (26.6) *обращается в нуль хотя бы в одной точке* $t_0 \in I$, *то эти вектор-функции линейно зависимы.*

Доказательство. Поскольку $W(t_0) = 0$, то существуют постоянные C_i, $i = \overline{1,n}$, не равные нулю одновременно и такие, что выполняется тождество (26.9). Рассмотрим вектор-функцию

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + \ldots + C_n\vec{x}_n(t), \tag{26.10}$$

которая удовлетворяет однородному уравнению (26.4) и нулевым начальным условиям $\vec{x}(t_0) = 0$ в силу тождества (26.9). Но однородному уравнению и нулевым начальным условиям удовлетворяет и нулевой вектор $\vec{0}$, а тогда, согласно теореме о единственности решения задачи Коши можно записать

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + \ldots + C_n\vec{x}_n(t) \equiv 0,$$

откуда и следует линейная зависимость системы решений (26.7).

♦ Система из n линейно независимых на $[\alpha, \beta] = I$ решений системы дифференциальных уравнений (26.4) $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ называется фундаментальной системой решений системы (26.4).

♦ Матрицу $X(t)$, столбцами которой являются решения, образующие фундаментальную систему, называют *фундаментальной матрицей* (или *интегральной матрицей*, или *матрицей Вронского*). Если $X(t_0) = \mathbb{I}$, то $X_{t_0}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)$ называют *матрицантом* (в точке t_0).

Теорема 26.1. *Если* $X(t)$ *— фундаментальная матрица системы, то она удовлетворяет матричному уравнению*

$$X'(t) = A(t)X(t). \tag{26.11}$$

Доказательство следует непосредственно из того, что каждый столбец матрицы $X(t)$ является решением системы (26.4).

Справедлива и обратная

Теорема 26.2. *Если матрица* $X(t) = \|x_{ij}(t)\|$ *удовлетворяет матричному уравнению* (26.11) *и*

$$W(t) = \det|X(t)| \neq 0, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

то $X(t)$ *— фундаментальная матрица системы дифференциальных уравнений* (26.1).

Доказательство очевидным образом следует из лемм 26.2 и 26.3.

Теорема 26.3 (формула Лиувилля–Остроградского). *Если* $\vec{x}_1(t), ..., \vec{x}_m(t)$ *— решения системы дифференциальных уравнений* (26.4), *а* $W(t)$ *— их вронскиан, то справедлива формула Лиувилля–Остроградского*

$$W(t) = W(t_0)\exp\Big\{\int\limits_{t_0}^{t} \operatorname{Sp} A(\tau)d\tau\Big\}. \tag{26.12}$$

Доказательство. Если $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_m(t)$ линейно зависимы, то $W(t) = 0$ и формула (26.12) очевидна. Если же решения линейно независимы, то их фундаментальная матрица $X(t)$, согласно теореме 26.1, удовлетворяет уравнению

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t).$$

Согласно свойству 5 производных от матриц и с учётом равенства $W(t) = \det X(t)$ имеем

$$\frac{[\det X(t)]'}{\det X(t)} = \mathrm{Sp}\left\{\left[\frac{dX(t)}{dt}\right]X^{-1}(t)\right\} = \mathrm{Sp}\{A(t)X(t)X^{-1}(t)\} = \mathrm{Sp}\,A(t).$$

Проинтегрировав это выражение, приходим к (26.12).

Теорема 26.4 (о структуре общего решения однородной системы). *Если $\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ — фундаментальная система решений системы дифференциальных уравнений* (26.4) *на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *то вектор-функция*

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + \ldots + C_n\vec{x}_n(t), \quad C_i = \mathrm{const}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{26.13}$$

является общим решением этой системы.

Доказательство. Сумма (26.13) удовлетворяет уравнению (26.4) в силу свойства 3 однородного уравнения. Теперь мы должны показать, что из решения (26.12) можно выделить частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$. Положив в (26.13) $t = t_0$, получим алгебраическую неоднородную систему

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = C_1\vec{x}_1(t_0) + \ldots + C_n\vec{x}_n(t_0),$$

Поскольку матрицей этой системы является фундаментальная матрица $X(t_0)$, а её определитель — вронскиан $W(t_0) \neq 0$, то система имеет единственное нетривиальное решение C_i, $i = \overline{1, n}$, при любом ненулевом $\vec{x}_0$. Все это вместе и означает, что (26.12) является общим решением неоднородной системы (26.4).

Если обозначить $\vec{C} = (C_1 \ldots C_n)^{\intercal}$, то общее решение (26.13) системы (26.4) можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}. \tag{26.14}$$

♦ Общее решение однородной системы (26.4) в виде

$$\vec{x}(t) = X_E(t)\vec{C} = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{C} \tag{26.15}$$

называется *общим решением в форме Коши.*

◊ Общее решение в форме Коши удобно для применения, так как если уравнение (26.4) дополнить начальными условиями $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$, то из (26.15) можно сразу найти произвольные постоянные, поскольку

$$\vec{x}(t)\Big|_{t=t_0} = \vec{x}_0 = X_E(t_0)\vec{C} = \mathbb{I}\vec{C} = \vec{C}, \quad \vec{C} = \vec{x}_0.$$

Если общее решение в форме Коши записать как

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0, \tag{26.16}$$

то из (26.16) можно по необходимости сразу найти или решение задачи Коши, или общее решение при произвольных значениях $\vec{x}_0$.

Пример 26.1. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Решение. *1-й способ.* Так как $(\cos t)' = -\sin t$, а $(\sin t)' = \cos t$, то очевидно, что

$$x_1 = \sin t, \quad y_1 = \cos t,$$

а также

$$x_2 = -\cos t, \quad y_2 = \sin t$$

являются решениями системы. Эти решения линейно независимы, так как

$$W(t) = \begin{vmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \sin t - C_2 \cos t, \\ y(t) &= C_1 \cos t + C_2 \sin t. \end{aligned} \tag{26.17}$$

2-й способ. В симметричной форме система имеет вид

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x},$$

позволяющий найти один первый интеграл

$$\int x\,dx = -\int y\,dy$$

или

$$x^2 + y^2 = C_1.$$

Выразив отсюда $y = \pm\sqrt{C_1 - x^2}$ и подставив его в первое уравнение исходной системы, получим

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{C_1 - x^2}$$

или

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1 - x^2}} = \pm dt.$$

Интегрирование даёт

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{C_1}} = \pm t + C_2$$

или

$$x(t) = \sqrt{C_1}\sin(\pm t + C_2). \tag{26.18}$$

Из (26.18) найдём два частных решения: $x_1(t) = \sin t$ при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ и $x_2(t) = \cos t$ при $C_1 = 1$, $C_2 = \pi/2$. Соответствующие функции $y_1(t)$ и $y_2(t)$ находятся из первого уравнения системы:

$$y_1(t) = x_1'(t) = \cos t, \qquad y_2(t) = x_2'(t) = -\sin t.$$

Это даёт два решения исходной системы

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}; \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \tag{26.19}$$

являющихся линейно независимыми, поскольку

$$W[\vec{x}_1, \vec{x}_2] = \begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Составим фундаментальную матрицу

$$X(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix} \tag{26.20}$$

и вычислим обратную ей матрицу:

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}.$$

Теперь, согласно (26.16), можно записать общее решение в форме Коши

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} \sin t \sin t_0 + \cos t \cos t_0 & \sin t \cos t_0 - \cos t \sin t_0 \\ \cos t \sin t_0 - \sin t \cos t_0 & \cos t \cos t_0 + \sin t \sin t_0 \end{pmatrix} \vec{x}_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad (26.21)$$

или

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \cos(t-t_0) + y_0 \sin(t-t_0) \\ -x_0 \sin(t-t_0) + y_0 \cos(t-t_0) \end{pmatrix}. \qquad (26.22)$$

Сравнив два решения (26.17) и (26.22), отметим, что если заданную систему дополнить начальным условием, например $x(\pi/4) = 1$, $y(\pi/4) = 3$, то из (26.22) мы сразу имеем решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos\Big(t - \frac{\pi}{4}\Big) + 3\sin\Big(t - \frac{\pi}{4}\Big), \\ y(t) &= 3\cos\Big(t - \frac{\pi}{4}\Big) - \sin\Big(t - \frac{\pi}{4}\Big), \end{aligned} \qquad (26.23)$$

тогда как для (26.1) необходимо решить ещё систему

$$\begin{aligned} C_1 \sin\frac{\pi}{4} - C_2 \cos\frac{\pi}{4} &= 1, \\ C_1 \cos\frac{\pi}{4} + C_2 \sin\frac{\pi}{4} &= 3. \end{aligned}$$

Подставив решения этой системы $C_1 = 2\sqrt{2}$ и $C_2 = \sqrt{2}$ в (26.17), получим решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\sqrt{2}\sin t - \sqrt{2}\cos t, \\ y(t) &= 2\sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}\sin t, \end{aligned}$$

которое после преобразования совпадёт с (26.23).

Кроме того, здесь полезно отметить, что фундаментальная матрица (26.21) получается из (26.20) сдвигом аргумента $t \to t - t_0$, т.е. $X(t) \to X(t-t_0)$. Это характерно для систем с постоянными коэффициентами, которые мы рассмотрим ниже, а именно к ним относится заданная система.

26.3. Свойства решений систем неоднородных дифференциальных уравнений

Рассмотрим теперь неоднородное уравнение (26.1). Как и для линейных дифференциальных уравнений, справедливы следующие теоремы.

Теорема 26.5 (принцип суперпозиции). *Пусть $\vec{x}_1(t)$ — решение системы уравнений*

$$\vec{x}\,'(t) - A\vec{x}(t) = \vec{f}_1(t),$$

а $\vec{x}_2(t)$ — решение системы

$$\vec{x}\,'(t) - A\vec{x}(t) = \vec{f}_2(t),$$

тогда вектор-функция $\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t)$ является решением системы

$$\vec{x}\,'(t) - A\vec{x}(t) = \vec{f}_1(t) + \vec{f}_2(t).$$

Доказательство очевидным образом вытекает из цепочки равенств

$$\vec{x}\,'(t) = \vec{x}_1{}'(t) + \vec{x}_2{}'(t) = A\vec{x}_1(t) + \vec{f}_1(t) + A\vec{x}_1(t) + \vec{f}_2(t) =$$
$$= A[\vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t)] + \vec{f}_1(t) + \vec{f}_2(t) = A\vec{x}(t) + \vec{f}_1(t) + \vec{f}_2(t).$$

Следствие 26.5.1. Принцип суперпозиции справедлив для любого числа решений $\vec{x}_i(t)$.

Следствие 26.5.2. Если $\vec{x}_1(t)$ — решение системы (26.1), а $\vec{x}^0(t)$ — решение соответствующей однородной системы (26.4), то их сумма $\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}^0(t)$ также будет решением системы (26.1).

Теорема 26.6. *Пусть дана система* (26.1)*, где* $a_{ij} \in \mathcal{C}_{[\alpha,\beta]}$*,* $f_i \in \mathcal{C}_{[\alpha,\beta]}$*,* $i, j = \overline{1,n}$*. Тогда если* $\vec{x}^0(t)$ *— общее решение системы* (26.4)*, а* $\vec{x}^*(t)$ *— какое-либо частное решение уравнения* (26.1)*, то вектор-функция*

$$\vec{x}(t) = \vec{x}^0(t) + \vec{x}^*(t) \tag{26.24}$$

является общим решением системы (26.1)*.*

Доказательство. Сумма (26.24) является решением (26.1) в силу следствия 26.5.2. Теперь мы должны показать, что из решения (26.24) можно выделить частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0. \tag{26.25}$$

Для этого воспользуемся общим решением однородного уравнения в виде (26.14):

$$\vec{x}^0(t) = X(t)\vec{C},$$

тогда

$$\vec{x} = X(t)\vec{C} + \vec{x}^*(t).$$

Положив здесь $t = t_0$, имеем

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 = X(t_0)\vec{C} + \vec{x}^*(t),$$

откуда

$$X(t_0)\vec{C} = \vec{x}_0 - \vec{x}^*(t_0).$$

Поскольку матрицей этой системы является фундаментальная матрица, а её определитель — вронскианом, то система имеет единственное нетривиальное решение при любых $\vec{x}_0$. Все это вместе и означает, что (26.14) — общее решение неоднородного уравнения (26.1).

27. Методы Лагранжа и Коши

Если известно общее решение однородного уравнения (26.4), а частное решение неоднородного неизвестно, то систему (26.1) можно решить методом Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных) или методом Коши.

Пусть известно общее решение однородной системы (26.4)

$$\vec{x}^0(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k\vec{x}_k(t) = X(t)\vec{C},$$

где $\{\vec{x}_k(t)\}_{k=1}^n$ — линейно независимые решения (фундаментальная система решений).

Метод Лагранжа

Общее решение системы (26.1) ищем в виде

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\vec{x}_k(t) = X(t)\vec{C}(t). \tag{27.1}$$

Подставим (27.1) в уравнение (26.1). Для этого найдём

$$\vec{x}\,' = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)\vec{x}_k{}' + \sum_{k=1}^{n} C_k'(t)\vec{x}_k,$$

но $\vec{x}_k' = A\vec{x}_k$, тогда

$$\vec{x}\,' = \sum_{k=1}^{n} C_k(t)A(t)\vec{x}_k + \sum_{k=1}^{n} C_k'\vec{x}_k = A(t)\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\vec{x}_k + \sum_{k=1}^{n} C_k'\vec{x}_k$$

или

$$A\sum_{k=1}^{n} C_k(t)\vec{x}_k + \sum_{k=1}^{n} C_k'\vec{x}_k = A\sum_{k=1}^{n} C_k\vec{x}_k + \vec{f}(t),$$

т.е.

$$\sum_{k=1}^{n} C_k'\vec{x}_k(t) = \vec{f}(t). \tag{27.2}$$

Пусть $X(t) = (\vec{x}_1(t)\ \vec{x}_2(t)\ \ldots\ \vec{x}_n(t))$ — фундаментальная матрица системы, а $\vec{C} = (C_1\ C_2\ \ldots\ C_n)^{\intercal}$. Тогда уравнение (27.2) эквивалентно линейному уравнению

$$X(t)\vec{C}\,' = \vec{f}(t). \tag{27.3}$$

Определитель системы алгебраических уравнений (определитель Вронского) не равен нулю, и, следовательно, существует отличное от нуля решение системы (27.3)

$$\vec{C}_i = \varphi_i(t)$$

и

$$C_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi_i(\tau)\,d\tau + \bar{C}_i.$$

Подставив в (27.1), найдём общее решение.

Метод Коши

Частное решение системы (27.3) можно записать в виде

$$\vec{C}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau,$$

тогда частное решение $\vec{x}^*(t)$ из (27.1) можно найти как

$$\vec{x}^*(t) = X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau. \tag{27.4}$$

С учётом этого и (26.16) общее решение неоднородного уравнения (26.1) можно записать в форме Коши:

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau. \tag{27.5}$$

Пример 27.1. Найти общее решение системы уравнений

$$x' = y, \tag{27.6}$$
$$y' = -x + \operatorname{tg} t. \tag{27.7}$$

Решение. *1-й способ.* Запишем систему в виде

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{f},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg} t \end{pmatrix}.$$

Решение однородной системы мы нашли в предыдущем примере:

$$\vec{x}^0 = C_1 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2.$$

Проварьируем постоянные

$$\vec{x} = \vec{x}_1 C_1(t) + \vec{x}_2 C_2(t).$$

Для C_k' из (27.2) получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1' \sin t - C_2' \cos t = 0, \\ C_1' \cos t + C_2' \sin t = \operatorname{tg} t. \end{cases}$$

Вычислим определители этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin t & -\cos t \\ \cos t & \sin t \end{vmatrix} = 1; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -\cos t \\ \operatorname{tg} t & \sin t \end{vmatrix} = \cos t \operatorname{tg} t = \sin t;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \operatorname{tg} t \end{vmatrix} = \sin t \operatorname{tg} t = \frac{\sin^2 t}{\cos t} = \frac{1 - \cos^2 t}{\cos t} = \frac{1}{\cos t} - \cos t$$

и по правилу Крамера найдём

$$C_1' = \sin t, \qquad C_2' = \frac{1}{\cos t} - \cos t.$$

Интегрирование этого выражения даёт

$$\begin{aligned} C_1 &= \int \sin t\, dt = -\cos t + \bar{C}_1; \\ C_2 &= \int \Big(\frac{1}{\cos t} - \cos t\Big) dt = \ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big| - \sin t + \bar{C}_2, \end{aligned} \tag{27.8}$$

а, следовательно, и общее решение

$$x(t) = \bar{C}_1 \sin t - \bar{C}_2 \cos t - \cos t \ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big|,$$
$$y(t) = \bar{C}_1 \cos t + \bar{C}_2 \sin t + \sin t \ln\Big|\operatorname{tg}\Big(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big| - 1.$$

2-й способ. Воспользуемся решением Коши в виде (27.5). Поскольку $X(t)$ и $X^{-1}(t)$, а также первое слагаемое (решение однородного уравнения) найдены в примере 26.1, задача сводится к вычислению интеграла

$$\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \sin\tau & \cos\tau \\ \cos\tau & -\sin\tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{tg}\tau \end{pmatrix} d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \cos\tau \operatorname{tg}\tau \\ -\sin\tau \operatorname{tg}\tau \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} \sin\tau \\ -\dfrac{\sin^2\tau}{\cos\tau} \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \int\limits_{t_0}^{t} \sin\tau\, d\tau \\ -\int\limits_{t_0}^{t} \dfrac{\sin^2\tau}{\cos\tau} d\tau \end{pmatrix}.$$

Эти интегралы вычислены ранее (см. формулы (27.8)), следовательно,

$$\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} \cos t_0 - \cos t \\ -\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| + \sin t - \sin t_0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, второе слагаемое (27.5) равно

$$X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau = \begin{pmatrix} \sin(t-t_0) - \cos t \ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| \\ \cos(t-t_0) - 1 + \sin t \ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| \end{pmatrix}. \tag{27.9}$$

И, следовательно, общее решение имеет вид

$$\vec{x} = \vec{x}^0(t) + \vec{x}^*(t),$$

где общее решение однородного уравнения

$$\vec{x}^0(t) = \begin{pmatrix} x_0\cos(t-t_0) + y_0\sin(t-t_0) \\ -x_0\sin(t-t_0) + y_0\cos(t-t_0) \end{pmatrix}$$

найдено в предыдущем примере, а частное решение $\vec{x}^*(t)$ следует из (27.9):

$$\vec{x}^*(t) = \begin{pmatrix} \sin(t-t_0) - \cos t \ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| \\ \cos(t-t_0) - 1 + \sin t \ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{t_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\right| \end{pmatrix}.$$

Из явного вида $\vec{x}^0(t)$ и $\vec{x}^*(t)$ убеждаемся, что $\vec{x}^0(t_0) = \vec{x}_0$, а $\vec{x}^*(t_0) = 0$.

ГЛАВА 6

Системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

28. Общие замечания

Перейдём к изучению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае в системе (22.1) все коэффициенты являются постоянными и её можно записать в виде

$$A(D)\vec{x}(t) = \vec{f}(t). \tag{28.1}$$

Если $\vec{x}(t) = 0$, уравнение (22.1) называется однородным и примет вид

$$A(D)\vec{x}(t) = 0. \tag{28.2}$$

Здесь матрица-оператор

$$A(D) = \begin{pmatrix} a_{11}(D) & \ldots & a_{1n}(D) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n1}(D) & \ldots & a_{nn}(D) \end{pmatrix} \tag{28.3}$$

состоит из линейных дифференциальных операторов $a_{ij}(D)$ заданного (в частности, нулевого) порядка с постоянными коэффициентами. Постоянство коэффициентов обеспечивает коммутативность операторов $a_{ij}(D)$, т.е. выполнение равенства

$$a_{ij}(D)a_{kl}(D) - a_{kl}(D)a_{ij}(D) = 0. \tag{28.4}$$

◊ Если в матрице $A(D)$ диагональные операторы $a_{ii}(D)$ являются операторами первого порядка, т.е. $a_{ii}(D) = D - a_{ii}$, где $i = \overline{1,n}$, а a_{ii} и все остальные a_{ij} $(i \neq j)$ — операторами нулевого порядка, т.е. числами $(a_{ij}(D) = a_{ij} = \text{const})$, то система (28.1) сводится к нормальной системе

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} + \vec{f}(t) \quad \text{или} \quad (D - A)\vec{x} = \vec{f}(x), \tag{28.5}$$

где A — обычная $n \times n$ числовая матрица; $\vec{f}$ — непрерывная на $[\alpha, \beta]$ вектор-функция.

Рассмотрение начнём с однородной системы общего вида (28.2) и её частного случая — нормальной системы

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \quad \text{или} \quad (D - A)\vec{x} = 0, \tag{28.6}$$

поскольку, если известно общее решение однородной системы, то можно найти общее решение неоднородной.

Отметим, что все результаты, полученные для систем линейных уравнений с переменными коэффициентами, остаются справедливыми и для систем (28.1), (28.2) с постоянными коэффициентами. Кроме того, вектор-решение систем с постоянными коэффициентами обладает рядом свойств, присущих решению одного (скалярного) уравнения с постоянными коэффициентами.

В связи с этим обобщим понятие сдвига функции.

♦ Вектор-функция $\tilde{\vec{x}}(t)$ называется *сдвигом* вектор-функции $\vec{x}(t)$ на постоянную t_0, если $\tilde{\vec{x}}(t) = \vec{x}(t - t_0)$.

Лемма 28.1. *Если вектор-функция $\vec{x}(t)$ является решением однородной системы* (28.2), *то вектор-функция, полученная из $\vec{x}(t)$ сдвигом на произвольную постоянную t_0, также является решением системы* (28.2).

Доказательство аналогично доказательству леммы 16.1.

Следствие 28.1.1. Если $X_0(t)$ — матрицант системы (28.2), нормированный в точке $t = 0$, то матрицант $X_{t_0}(t)$, нормированный в точке $t = t_0$, является его сдвигом на постоянную t_0, т.е. $X_{t_0}(t) = X_0(t - t_0)$.

♢ В связи с этим индекс 0 у $X_0(t)$ — матрицанта системы с постоянными коэффициентами (28.6) — можно опустить, положив $X_0(t) = X(t)$ и, соответственно, $X_{t_0}(t) = X(t - t_0)$.

Следствие 28.1.2. Пусть решением задачи Коши для однородной системы (28.2) с начальным условием $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ является вектор-решение

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{x}_0.$$

Тогда решение задачи Коши для (28.2) со смещённым начальным условием $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ имеет вид

$$\vec{x}(t) = X(t - t_0)\vec{x}_0. \tag{28.7}$$

♢ Формула (28.7) заменяет формулу (26.16), полученную для произвольной системы дифференциальных уравнений.

Пример 28.1. Получить формулу Лиувилля–Остроградского для системы с постоянными коэффициентами (28.2).

Решение. Воспользуемся формулой (26.12), доказанной для произвольной линейной системы. Постоянство коэффициентов матрицы A позволяет провести интегрирование, в результате чего получим

$$W(t) = W(t_0)e^{(t-t_0)\operatorname{Sp} A}.$$

29. Операторный (символический) метод

Рассмотрим метод решения систем общего вида (28.2), называемый операторным или символическим (не путать с операционным методом, использующим интегральные операторы). Смысл метода состоит в следующем.

Решение $\vec{x}(t)$ системы (28.2) ищем в виде

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{n1}(D) \\ A_{n2}(D) \\ \dots \\ A_{nn}(D) \end{pmatrix} V(t), \tag{29.1}$$

где $A_{n1}(D), A_{n2}(D), \ldots, A_{nn}(D)$ — алгебраические дополнения матрицы-оператора (28.3) к элементам n-й строки.

Подставив (29.1) в (28.2), получим

$$\begin{pmatrix} a_{11}(D) & \dots & a_{1n}(D) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(D) & \dots & a_{nn}(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{n1}(D) \\ \dots \\ A_{nn}(D) \end{pmatrix} V(t) = 0. \tag{29.2}$$

Рассмотрим произведение первой строки и столбца из (29.2):

$$[a_{11}(D)A_{n1}(D) + \ldots + a_{1n}(D)A_{nn}(D)]V(t) = 0.$$

Произведение первой строки некоторой матрицы на алгебраические дополнения другой строки этой же матрицы, согласно свойствам определителей, равно нулю. Это приводит к тождеству $0 \cdot V(t) \equiv 0$. По этой же причине произведения остальных строк, за исключением последней, на столбец из (29.2) будут обращаться в нуль для любой $V(t)$. Однако произведение n-й строки на тот же столбец даст уравнение

$$[a_{n1}(D)A_{n1}(D) + \ldots + a_{nn}(D)A_{nn}(D)]V(t) = \det A(D)V(t) = 0, \tag{29.3}$$

которое и определит явный вид функции $V(t)$. Определив функцию $V(t)$ как решение дифференциального уравнения (29.3) с постоянными коэффициентами, по формуле (29.1) найдём решение $\vec{x}(t)$ исходной задачи.

◊ Результат не изменится, если вместо n-й строки взять любую другую.

◊ Решение (29.1), вообще говоря, может оказаться частным (см. примеры 35.3–35.5).

Пример 29.1. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} -3x' + 9x + y'' - 2y' + 3y = 0,\\ x'' + 2x' - 3x + y' - y = 0. \end{aligned} \tag{29.4}$$

Решение. Запишем систему (29.4) в форме (28.2):

$$A(D)\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = 0,$$

где матрица-оператор

$$A(D) = \begin{pmatrix} a_{11}(D) & a_{12}(D)\\ a_{21}(D) & a_{22}(D)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3D+9 & D^2-2D+3\\ D^2+2D-3 & D-1\end{pmatrix}. \tag{29.5}$$

Найдём алгебраические дополнения к элементам второй строки:

$$\begin{aligned} A_{21}(D) &= -a_{12}(D) = -(D^2-2D+3),\\ A_{22}(D) &= a_{11}(D) = -3D+9. \end{aligned}$$

Решение системы (29.4), согласно (29.1), ищем в виде

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{21}(D)\\ \widehat{A}_{22}(D)\end{pmatrix} V(t) = \begin{pmatrix} -(D^2-2D+3)\\ -3D+9\end{pmatrix} V(t),$$

т.е.

$$\begin{aligned} x(t) &= -(D^2-2D+3)V = -(V''-2V'+2V),\\ y(t) &= (-3D+9)V = -3V''+9V, \end{aligned} \tag{29.6}$$

где функция $V(t)$ является решением уравнения (29.3). Из (29.5) имеем

$$\det A(D) = (-3D+9)(D-1) - (D^2-2D+3)(D^2+2D-3) =$$
$$= -3D^2+12D-9-[D^4-(2D-3)^2] = -D^2(D^2-1) = -D^2(D-1)(D+1).$$

Следовательно, функция $V(t)$ является решением уравнения

$$D^2(D-1)(D+1)V(t) = 0. \tag{29.7}$$

Из явного вида уравнения (29.7) найдём характеристические числа: двукратное $\lambda_1 = 0$ и простые $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$. Соответственно, общее решение уравнения (29.7) имеет вид

$$V(t) = C_1 + C_2t + C_3e^t + C_4e^{-t}. \tag{29.8}$$

Подставив (29.8) в (29.6), найдём общее решение исходной системы

$$\begin{aligned} x(t) &= -(V''-2V'+3V) = -3C_1+2C_2-3C_2t-2C_3e^t-6C_4e^{-t},\\ y(t) &= -3V'+9V = 9C_1-3C_2+9C_2t+6C_3e^t-12C_4e^{-t}. \end{aligned}$$

Операторный метод можно применять и для решения нормальных систем, что проиллюстрируем следующим примером.

Пример 29.2. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 2y, \\ y' &= -4x - y. \end{aligned} \tag{29.9}$$

Решение. Систему (29.9) запишем в виде (28.2):

$$A(D)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

где матрица-оператор имеет вид

$$A(D) = \begin{pmatrix} a_{11}(D) & a_{12}(D) \\ a_{21}(D) & a_{22}(D) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D-5 & -2 \\ 4 & D+1 \end{pmatrix}.$$

Найдём алгебраические дополнения к элементам второй строки:

$$\begin{aligned} A_{21}(D) &= -a_{12}(D) = 2, \\ A_{22}(D) &= a_{11}(D) = D - 5. \end{aligned}$$

Решение системы (29.9) ищем в виде

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21}(D) \\ A_{22}(D) \end{pmatrix} V(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ D-5 \end{pmatrix} V(t),$$

т.е.

$$\begin{aligned} x(t) &= 2V(t), \\ y(t) &= (D-5)V(t) = V'(t) - 5V(t), \end{aligned} \tag{29.10}$$

где функция $V(t)$ является решением уравнения (29.3):

$$\det A(D)V(t) = \begin{vmatrix} D-5 & -2 \\ 4 & D+1 \end{vmatrix} V(t) = [(D-5)(D+1)+8]V(t) =$$
$$(D^2 - 4D + 3)V(t) = (D-1)(D-3)V(t) = 0.$$

Из явного вида последнего уравнения найдём характеристические числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, и, соответственно, общее решение

$$V(t) = \frac{C_1}{2}e^t + \frac{C_2}{2}e^{3t},$$

где C_2, C_2 — произвольные постоянные (множитель $1/2$ выбран из соображений удобства). С помощью $V(t)$ по формулам (29.10) найдём

$$\begin{aligned} x(t) &= 2V(t) = C_1e^t + C_2e^{3t}, \\ y(t) &= V'(t) - 5V(t) = -2C_1e^t - C_2e^{3t}. \end{aligned}$$

30. Метод исключения

Методом исключения неизвестных, рассмотренным ранее для нормальных систем дифференциальных уравнений, можно привести исходную систему уравнений (28.6) к одному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами.

◊ Метод исключения для систем уравнений с постоянными коэффициентами можно рассматривать как один из вариантов операторного метода для нормальных систем, когда в качестве функции $V(t)$ выбирается, например, функция $x_1(t)$, а остальные определяются через неё (сравни решения примеров 29.2 и 30.1).

Пример 30.1. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 2y, \\ y' &= -4x - y \end{aligned} \tag{30.1}$$

методом исключения.

Решение. Продифференцировав первое уравнение (30.1), имеем

$$x'' = 5x' + 2y'.$$

Подставив производные x' и y' из (30.1) в полученное соотношение, найдём

$$x'' = 5(5x + 2y) + 2(-4x - y) = 17x + 8y. \tag{30.2}$$

Выразив из первого уравнения (30.1) функцию $y(t)$:

$$y = \frac{x' - 5x}{2} \tag{30.3}$$

и подставив её в (30.2), получим уравнение второго порядка для функции $x(t)$:

$$x'' - 4x' + 3x = 0. \tag{30.4}$$

Характеристическое уравнение для (30.4)

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \tag{30.5}$$

имеет два действительных различных корня

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 3.$$

Тогда общее решение уравнения (30.4) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \tag{30.6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Функция $y(t)$ находится подстановкой (30.6) в (30.3):

$$y(t) = -2C_1 e^t - C_2 e^{3t}.$$

Таким образом, мы получили общее решение системы (30.1)

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^t + C_2 e^{3t}, \\ y(t) &= -2C_1 e^t - C_2 e^{3t}, \end{aligned} \tag{30.7}$$

совпадающее с полученным в примере 29.2.

Для вектор-функции

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

решение (30.7) можно представить как

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ -2C_1 e^t - C_2 e^{3t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}. \tag{30.8}$$

С помощью двух векторов

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{30.9}$$

можно записать фундаментальную систему решений однородной системы (30.1)

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}_1 e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t, \quad \vec{x}_2(t) = \vec{g}_2 e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}, \tag{30.10}$$

позволяющую представить общее решение (30.8) линейной комбинацией

$$\vec{x} = C_1 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2. \tag{30.11}$$

Пример 30.2. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} x' &= x - y, \\ y' &= x + 3y, \end{aligned} \tag{30.12}$$

методом исключения.

Решение. Продифференцируем первое уравнение из (30.12):

$$x'' = x' - y'.$$

Подставив x' и y' из (30.12) в полученное соотношение, найдём

$$x'' = x - y - x - 3y = -4y. \tag{30.13}$$

Выразив из первого уравнения (30.12) функцию $y(t)$:

$$y = x - x' \tag{30.14}$$

и подставив её в (30.12), получим уравнение второго порядка для функции $x(t)$:

$$x'' - 4x' + 4x = 0. \tag{30.15}$$

Характеристическое уравнение для (30.15)

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

имеет действительный двукратный корень $\lambda_{1,2} = 2$ $(r = 2)$, следовательно, общее решение (30.15) имеет вид

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}, \tag{30.16}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Функция $y(t)$ находится подстановкой (30.16) в (30.14):

$$y(t) = x(t) - x'(t) = -(C_1 + C_2 - C_2 t)e^{2t}.$$

Таким образом, мы получили общее решение системы (30.12)

$$\begin{aligned} x(t) &= (C_1 + C_2 t)e^{2t}, \\ y(t) &= -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t}. \end{aligned} \tag{30.17}$$

Для вектор-функции

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

решение (30.17) можно представить как

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 t)e^{2t} \\ -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t} \end{pmatrix} = \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \right\} e^{2t}. \tag{30.18}$$

С помощью двух векторов

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

можно записать фундаментальную систему решений однородной системы (30.12)

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}_1 e^{2t}, \qquad \vec{x}_2(t) = (\vec{g}_1 t + \vec{g}_2)e^{2t}. \tag{30.19}$$

Тогда общее решение (30.18) можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = C_1 \vec{x}_1(t) + C_2 \vec{x}_2(t).$$

$\Diamond$ Сравнив линейно независимые решения $\vec{x}_1(t)$, $\vec{x}_2(t)$ из (30.19) и $x_1(t), x_2(t)$ из (17.21), видим, что фундаментальные решения для системы уравнений первого порядка (т.е. вектора $\vec{x}(t)$) и одного уравнения n-го порядка (т.е. скаляра $x(t)$), характеристические уравнения которых имеют кратные корни, различаются по структуре. Если скалярное уравнение имеет корень λ кратности, например, два, то из фундаментального решения $x_1(t) = e^{\lambda t}$ второе получается умножением его на t: $x_2(t) = x_1(t)t = e^{\lambda t}t$. Для систем уравнений подобная операция не позволяет получить второе линейно независимое решение. Действительно, если из (30.19) мы имеем решение

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t},$$

то вектор-функция

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}_1(t)t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}t$$

является линейно зависимой с $\vec{x}_1(t)$, поскольку вронскиан равен нулю:

$$W[\vec{x}_1(t), \vec{x}_2(t)] = \begin{vmatrix} e^{2t} & e^{2t}t \\ -e^{2t} & -e^{2t}t \end{vmatrix} = 0.$$

Как следует из (30.19), второе линейно независимое решение получается по правилу

$$\vec{x}_2(t) = \vec{x}_1(t)t + \vec{g}_2 e^{2t},$$

т.е. с помощью дополнительного слагаемого $\vec{g}_2 e^{2t}$, смысл которого мы выясним позднее.

Пример 30.3. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y - z, \\ y' &= 3y - z, \\ z' &= y + z \end{aligned} \tag{30.20}$$

методом исключения.

Решение. Продифференцировав первое уравнение системы (30.20), имеем

$$x'' = 2x' + y' - z'.$$

Подставив два последних равенства системы (30.20) в полученное соотношение, найдём

$$x'' = 2x' + (3y - z) = (y + z) = 2x' + 2(y - z). \tag{30.21}$$

Выразим из первого уравнения разность $y - z$:

$$y - z = x' - 2x. \tag{30.22}$$

Теперь подставим (30.22) в (30.21) и получим уравнение 2-го порядка для функции $x(t)$:

$$x'' = 2x' + 2(x' - 2x) = 4x' - 4x$$

или

$$x'' - 4x' + 4x = 0. \tag{30.23}$$

Характеристическое уравнение для (30.23)

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

имеет действительный корень $\lambda = 2$ кратности $r = 2$. Стало быть, общее решение уравнения (30.23) имеет вид

$$x(t) = (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 t)e^{2t}, \tag{30.24}$$

где $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ — произвольные постоянные.

Теперь продифференцируем второе уравнение из (30.20):

$$y'' = 3y' - z'$$

и подставим в полученное выражение третье уравнение из системы (30.20):

$$y'' = 3y' - z' = 3y' - y - z. \tag{30.25}$$

Чтобы исключить из этого уравнения функцию z, выразим её из второго уравнения (30.20):

$$z = 3y - y' \tag{30.26}$$

и подставим в (30.25). Тогда

$$y'' = 3y' - y - (3y - y') = 4y' - 4y$$

или

$$y'' - 4y' + 4y = 0. \tag{30.27}$$

Это уравнение аналогично уравнению (30.23) и, следовательно, имеет общее решение

$$y(t) = (\bar{C}_3 + \bar{C}_4 t)e^{2t}, \tag{30.28}$$

где $\bar{C}_3$ и $\bar{C}_4$ — ещё одна пара произвольных постоянных.

Теперь функция $z(t)$ определится подстановкой в (30.26) $y(t)$ и $y'(t)$:

$$z(t) = (\bar{C}_3 - \bar{C}_4 + \bar{C}_4 t)e^{2t}. \tag{30.29}$$

Таким образом, можно записать общее решение системы (30.20)

$$\begin{aligned} x(t) &= (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 t)e^{2t}, \\ y(t) &= (\bar{C}_3 + \bar{C}_4 t)e^{2t}, \\ z(t) &= (\bar{C}_3 - \bar{C}_4 + \bar{C}_4 t)e^{2t}. \end{aligned} \tag{30.30}$$

Поскольку в (30.30) вместо трех произвольных постоянных присутствуют четыре, чтобы установить связь между ними, подставим решения (30.30) в первое уравнение системы (30.20) и получим

$$(\bar{C}_2 + 2\bar{C}_1 + 2\bar{C}_2 t)e^{2t} = (2\bar{C}_1 + 2\bar{C}_2 t + \bar{C}_3 + \bar{C}_4 t - \bar{C}_3 + \bar{C}_4 + \bar{C}_4 t)e^{2t}$$

или

$$\bar{C}_2 = \bar{C}_4.$$

С учётом этого равенства общее решение (30.30) примет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 t)e^{2t}, \\ y(t) &= (\bar{C}_3 + \bar{C}_1 t)e^{2t}, \\ z(t) &= (\bar{C}_3 - \bar{C}_2 + \bar{C}_2 t)e^{2t}. \end{aligned} \tag{30.31}$$

Пример 30.4. Найти общее решение системы

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \tag{30.32}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \tag{30.33}$$

методом исключения.

Решение. Положим

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}. \tag{30.34}$$

Тогда систему (30.32) можно записать в явном виде:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + 2z, \\ y' &= 5x - 3y + z, \\ z' &= -x - 2z. \end{aligned} \tag{30.35}$$

Продифференцировав первое уравнение системы (30.35), имеем

$$x'' = 2x' - y' + 2z'.$$

Заменив первые производные в правой части согласно (30.35), получим

$$x'' = -3x + y - 3z. \tag{30.36}$$

Уравнение (30.36) продифференцируем ещё раз с последующей заменой первых производных из системы (30.35). Тогда

$$x''' = -3x' + y' - 3z' = 2x + 3z. \tag{30.37}$$

Из первого уравнения системы (30.35) и уравнения (30.36) найдём

$$\begin{aligned} y &= -2x'' - 3x', \\ z &= -x'' - x' - x. \end{aligned} \tag{30.38}$$

Подставив второе уравнение из (30.38) в (30.37), получим уравнение третьего порядка

$$x''' + 3x'' + 3x' + x = 0. \tag{30.39}$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

есть кубическое уравнение

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

с корнем $\lambda = -1$ кратности $r = 3$. Следовательно, общее решение уравнения (30.39) имеет вид

$$x(t) = \Big(C_1 + C_2 t + C_3 \frac{t^2}{2}\Big) e^{-t}. \tag{30.40}$$

Теперь из (30.38) определим

$$\begin{aligned} y(t) &= \Big[C_1 + C_2 - 2C_3 + (C_2 + C_3)t + C_3\frac{t^2}{2}\Big]e^{-t} \\ z(t) &= \Big[(-C_1 + C_2 - C_3) + (-C_2 + C_3)t - C_3\frac{t^2}{2}\Big]e^{-t}. \end{aligned} \tag{30.41}$$

Тогда общее решение в матричной форме запишется как

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2t + C_3\dfrac{t^2}{2} \\ C_1 + C_2 - 2C_3 + (C_2 + C_3)t + C_3\dfrac{t^2}{2} \\ -C_1 + C_2 - C_3 + (-C_2 + C_3)t - C_3\dfrac{t^2}{2} \end{pmatrix} e^{-t}, \tag{30.42}$$

где C_i – произвольные постоянные.

◊ Системы уравнений из примеров 30.3 и 30.4 сходны тем, что их решения определяются одним трехкратным характеристическим числом. Однако структура их общих решений существенно различна. Общее решение (30.31) линейно по t, тогда как общее решение (30.42) по t квадратично. Такое различие станет понятным после рассмотрения метода Эйлера.

Пример 30.5. Найти общее решение системы

$$\vec{x}\,' = A\vec{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \tag{30.43}$$

методом исключения.

Решение. Положив

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \tag{30.44}$$

систему можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 10y, \\ y' &= -2x - 3y. \end{aligned} \tag{30.45}$$

Продифференцируем первое равенство в (30.45):

$$x'' = 5x' + 10y'.$$

Подставив второе равенство из (30.45) в полученное соотношение, найдём

$$x'' = 5x' + 10(-2x - 3y) = 5x' - 20x - 30y.$$

Подставим сюда функцию $y(t)$, найденную из первого уравнения (30.45):

$$y = (x' - 5x)/10, \tag{30.46}$$

и получим уравнение второго порядка для функции $x(t)$:

$$x'' - 2x' + 5x = 0.$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \tag{30.47}$$

имеет пару комплексных корней $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, и, следовательно, общее решение имеет вид

$$x(t) = e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t), \tag{30.48}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Функция $y(t)$ находится подстановкой (30.48) в (30.46):

$$\begin{aligned} x(t) &= e^t(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t), \\ y(t) &= \frac{1}{5}e^t[(-2C_1 + C_2)\cos 2t - (C_1 + 2C_2)\sin 2t]. \end{aligned} \tag{30.49}$$

Пример 30.6. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{30.50}$$

методом исключения.

Решение. Положив

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}, \tag{30.51}$$

систему (30.50) можно переписать так:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ x_3' &= x_4, \\ x_4' &= -x_1 - 2x_3. \end{aligned} \tag{30.52}$$

Продифференцировав первое уравнение из (30.52)

$$x_1'' = x_2'$$

и подставив в него второе, найдём

$$x_1'' = x_3. \tag{30.53}$$

Продифференцировав это уравнение

$$x_1''' = x_3'$$

и подставив в него третье уравнение из (30.52), получим

$$x_1''' = x_4'. \tag{30.54}$$

Продифференцировав (30.54)

$$x_1''' = x_4'$$

и подставив в него четвертое уравнение из (30.52), имеем

$$x_1^{(4)} = -x_1 - 2x_3. \tag{30.55}$$

Заменив теперь в (30.55) $x_3(t)$, согласно (30.53), получим уравнение четвертого порядка для одной переменной $x_1(t)$:

$$x_1^{(4)} + 2x_1'' + x_1 = 0. \tag{30.56}$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

имеет пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$ кратности два. Поэтому фундаментальная система решений уравнения (30.56) имеет вид

$$x_1^{(1)}(t) = \cos t, \quad x_1^{(2)}(t) = t\cos t, \quad x_1^{(3)}(t) = \sin t, \quad x_1^{(4)}(t) = t\sin t,$$

а общее решение является их линейной комбинацией с произвольными постоянными $\bar{C}_i$, $i = \overline{1,4}$,

$$x_1(t) = \bar{C}_1 x_1^{(1)}(t) + \bar{C}_2 x_1^{(2)}(t) + \bar{C}_3 x_1^{(3)}(t) + \bar{C}_4 x_1^{(4)}(t)$$

или

$$x_1(t) = (\bar{C}_1 + t\bar{C}_2)\cos t + (\bar{C}_3 + t\bar{C}_4)\sin t. \tag{30.57}$$

Функция $x_2(t)$ находится из первого уравнения системы (30.52):

$$x_2(t) = x_1'(t) = (\bar{C}_2 + \bar{C}_3 + \bar{C}_4 t)\cos t + (\bar{C}_4 - \bar{C}_1 - \bar{C}_2 t)\sin t. \tag{30.58}$$

Функция $x_3(t)$ находится из второго уравнения системы (30.52):

$$x_3(t) = x_2'(t) = (2\bar{C}_4 - \bar{C}_1 + \bar{C}_2 t)\cos t + (-2\bar{C}_2 - \bar{C}_3 - \bar{C}_4 t)\sin t. \tag{30.59}$$

Наконец, функция $x_3(t)$ находится из уравнения (30.53):

$$x_4(t) = (-3\bar{C}_2 - \bar{C}_3 - \bar{C}_4 t)\cos t + (-3\bar{C}_4 + \bar{C}_1 + \bar{C}_2 t)\sin t. \tag{30.60}$$

Таким образом, вектор $\vec{x}(t)$ (30.51), удовлетворяющий уравнению (30.50), имеет вид

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \bar{C}_1 \\ \bar{C}_2 + \bar{C}_3 \\ -\bar{C}_1 + 2\bar{C}_4 \\ -3\bar{C}_2 - \bar{C}_3 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} \bar{C}_2 \\ \bar{C}_4 \\ -\bar{C}_2 \\ -\bar{C}_4 \end{pmatrix} t\cos t + \begin{pmatrix} \bar{C}_3 \\ -\bar{C}_1 + t\bar{C}_4 \\ -2\bar{C}_2 - \bar{C}_3 \\ \bar{C}_1 - 3\bar{C}_4 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} \bar{C}_4 \\ -\bar{C}_2 \\ -\bar{C}_4 \\ \bar{C}_2 \end{pmatrix} t\sin t. \tag{30.61}$$

Пример 30.7. Найти общее решение системы

$$\vec{x}' = A\vec{x}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \tag{30.62}$$

методом исключения.

Решение. Положив

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \tag{30.63}$$

систему (30.62) можно переписать:

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 7y - 5z, \\ y' &= -4x + 5y, \\ z' &= x + 9y - 4z. \end{aligned} \tag{30.64}$$

Продифференцировав первое уравнение из (30.64)

$$x'' = 4x' + 7y' - 5z'$$

и подставив в него второе и третье, найдём

$$x'' = 4x' - 33x - 10y + 20z. \tag{30.65}$$

Продифференцировав это уравнение

$$x''' = 4x'' - 33x' - 10y' + 20z'$$

и снова подставив в него второе и третье уравнения из системы (30.64), получим

$$x''' = 4x'' - 33x' + 60x + 130y - 80z. \tag{30.66}$$

Теперь, выразив из первого уравнения (30.64) и (30.65)

$$\begin{aligned} y &= (x'' + 17x)/18, \\ z &= (7x'' - 18x' + 191x)/90 \end{aligned} \tag{30.67}$$

и подставив их в (30.66), получим уравнение третьего порядка

$$x''' - 5x'' + 17x' - 13x = 0. \tag{30.68}$$

Его характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$. Поэтому фундаментальная система решений уравнения (30.68) запишется как

$$x_1(t) = e^t, \qquad x_2(t) = 3e^{2t}\cos 3t, \qquad x_3 = 3e^{2t}\sin 3t,$$

а общее решение — их линейной комбинацией с произвольными постоянными $\bar{C}_i$, $i = 1, 2, 3$ (множители вида 3 выбраны для удобства)

$$x(t) = \bar{C}_1 e^t + 3e^{2t}(\bar{C}_2\cos 3t + \bar{C}_3\sin 3t). \tag{30.69}$$

Подстановка (30.69) в (30.67) даёт

$$\begin{aligned} y &= \bar{C}_1 e^t + 2e^{2t}[(\bar{C}_2 + \bar{C}_3)\cos 3t + (-\bar{C}_2 + \bar{C}_3)\sin 3t], \\ z &= 2\bar{C}_1 e^t + e^{2t}[(4\bar{C}_2 + \bar{C}_3)\cos 3t + (-\bar{C}_2 + 4\bar{C}_3)\sin 3t]. \end{aligned} \tag{30.70}$$

31. Метод Эйлера

Решение однородной нормальной системы (28.6) ищем в виде

$$\vec{x}(t) = \vec{g}e^{\lambda t}, \quad \vec{g} \in \mathcal{L}_n, \tag{31.1}$$

где $\vec{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — постоянный вектор, подлежащий определению, а $\mathcal{L}_n$ — n-мерное линейное пространство. Подставив (31.1) в систему (28.6) и разделив на общий множитель $e^{\lambda t}$, получим

$$\lambda\vec{g} = A\vec{g}$$

или

$$A_\lambda\vec{g} = [A - \lambda\mathbb{I}]\vec{g} = 0, \tag{31.2}$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица. Таким образом, задача интегрирования системы (28.6) сводится к решению линейной алгебраической системы (31.2), т.е. к задаче на собственные значения и собственные векторы матрицы (оператора) A (см. в [9] разд. «Собственные векторы и собственные значения линейного оператора»).

♦ Отличный от тождественного нуля вектор $\vec{g} \in \mathcal{L}_n$ ($\vec{g} \neq 0$) называется *собственным вектором* матрицы A, если справедливо равенство (31.2). Число λ называется *собственным значением* матрицы A.

◊ Собственное значение λ может быть как вещественным, тогда $\lambda \in \mathbb{R}$, так и комплексным, тогда $\lambda \in \mathbb{C}$.

Для того чтобы система (31.2) имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\det A_\lambda = \det \|(A - \lambda\mathbb{I})\| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{31.3}$$

Из этого уравнения определим λ.

♦ Уравнение (31.3) называется *характеристическим уравнением нормальной системы* (28.6).

Левая часть (31.3) есть полином степени n, который, согласно основной теореме алгебры (см. [2]), имеет ровно n нулей.

♦ Пусть собственное значение λ_k встречается среди корней характеристического уравнения p_k раз. Число p_k называется *алгебраической кратностью собственного значения* λ_k.

♦ Пусть $r_k = \operatorname{rang}(A - \lambda_k\mathbb{I})$. Число $s_k = n - r_k$ называется *геометрической кратностью собственного значения* λ_k.

◊ Таким образом, каждому λ_k отвечает s_k линейно независимых собственных векторов $\vec{g}_{j_k}$, $j_k = \overline{1, s_k}$.

♦ Вектор $\vec{g}^{(m)}$ называется *присоединенным вектором* матрицы A, отвечающим собственному значению λ, если для некоторого $m \geqslant 1$ справедливы соотношения

$$(A - \lambda\mathbb{I})^{m-1}\vec{g}^{(m)} \neq 0, \qquad (A - \lambda\mathbb{I})^m\vec{g}^{(m)} = 0. \tag{31.4}$$

Число m называется *порядком присоединенного вектора*, или *весом вектора*.

◊ Из определения следует, что если $\vec{g}^{(m)}$ — присоединенный вектор порядка m, отвечающий собственному значению λ, то вектор $\vec{y} = (A - \lambda\mathbb{I})^{m-1}\vec{g}^{(m)}$ — собственный вектор матрицы A с тем же собственным значением.

◊ Из определения следует, что собственный вектор $\vec{g}$ есть присоединенный вектор первого порядка: $\vec{g} = \vec{g}^{(1)}$.

Пусть l — число различных собственных значений матрицы A ($l \leqslant n$). Тогда общее число линейно независимых собственных векторов этой матрицы равно $s = \sum\limits_{j=1}^{l} s_j$, где s_j — геометрическая кратность собственных значений λ_j. Нетрудно заметить, что $s \geqslant l$.

Пусть $\{\vec{g}_j^{(1)}\}_{j=1}^{s}$ — линейно независимые собственные векторы матрицы A. Присвоим собственным значениям матрицы A те же номера j, что и отвечающим им линейно независимым собственным векторам $\vec{g}_j^{(1)}$, так что

$$A\vec{g}_j^{(1)} = \lambda_j \vec{g}_j^{(1)}, \quad j = \overline{1, s},$$

независимо от того, совпадают значения λ_j и λ_k или нет (так как собственных чисел может быть меньше, чем линейно независимых собственных векторов).

Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 31.1 (Жордана). *Пусть A — матрица размера $n \times n$. Существует базис в линейном пространстве $\mathcal{L}_n$*

$$\{\vec{g}_j^{(m_j)}\}, \qquad j = \overline{1, s}, \quad m_j = \overline{1, n_j}, \quad \sum_{i=1}^{s} n_i = n, \tag{31.5}$$

образованный линейно независимыми собственными $\vec{g}_j^{(1)}$ и присоединенными $\vec{g}_j^{(m_j)}$ ($m_j = \overline{2, n_j}$) векторами, которые определены следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} A\vec{g}_j^{(1)} = \lambda_j \vec{g}_j^{(1)}, \\ A\vec{g}_j^{(m_j)} = \lambda_k \vec{g}_j^{(m_j)} + \vec{g}_j^{(m_j-1)}, \quad m_j = \overline{2, n_j}. \end{gathered} \tag{31.6}$$

Здесь через $(n_j - 1)$ обозначено число присоединенных векторов $\vec{g}_j^{(m_j)}$, отвечающих собственному вектору $\vec{g}_j^{(1)}$.

♦ Система уравнений (31.6), определяющая собственные и присоединенные векторы $\vec{g}_j^{(m_j)}$, называется *жордановой цепочкой.*

Ниже мы рассмотрим возможную структуру решений системы (28.6) в зависимости от алгебраической и геометрической кратностей собственных значений матрицы этой системы.

31.1. Случай действительных различных корней

Если все корни характеристического уравнения (31.3) действительны и различны, из (31.2) найдём n собственных векторов $\vec{g}_j$, $j = \overline{1, n}$, и, подставив их в (31.1), получим n решений

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \vec{x}_2(t) = \vec{g}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad \vec{x}_n(t) = \vec{g}_n e^{\lambda_n t}. \tag{31.7}$$

Эти решения линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений системы (28.6). Тогда ее общее решение имеет вид

$$\vec{x}(t) = \sum_{l=1}^{n} C_l \vec{x}_l(t), \tag{31.8}$$

где C_l — произвольные постоянные.

Пример 31.1. Найти общее решение системы (30.1) методом Эйлера.

Решение. Исходную систему (30.1) запишем в матричной форме

$$\vec{x}\,' = A\vec{x}, \tag{31.9}$$

где

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее системе (31.9) характеристическое уравнение есть

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = 0, \tag{31.10}$$

где

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}. \tag{31.11}$$

В развернутом виде задача на собственные значения и собственные векторы матрицы A запишется как

$$\begin{aligned} (5-\lambda)g_1 + 2g_2 &= 0, \\ -4g_1 + (-1-\lambda)g_2 &= 0. \end{aligned} \tag{31.12}$$

Однородная система (31.12) имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда найдём уравнение для определения собственных значений λ

$$(5-\lambda)(-1-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0,$$

совпадающее с найденным ранее (30.5) и имеющее корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

Поочередно подставив эти значения в (31.9), найдём два линейно независимых собственных вектора $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$. Действительно, подстановка $\lambda_1 = 1$ даёт

$$\begin{aligned} 4g_1^1 + 2g_2^1 &= 0, \\ -4g_1^1 - 2g_2^1 &= 0, \end{aligned} \tag{31.13}$$

откуда $g_2^1 = -2g_1^1$ и

$$\vec{g}_1 = g_1^1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Выбрав $g_1^1 = 1$, имеем собственный вектор

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \tag{31.14}$$

Подставив $\lambda_2 = 3$ в (31.12), получим

$$\begin{aligned} 2g_1^2 + 2g_2^2 &= 0, \\ -4g_1^2 - 4g_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

откуда $g_2^2 = -g_1^2$ и

$$\vec{g}_2 = g_1^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Выбрав $g_1^2 = 1$, имеем второй собственный вектор

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{31.15}$$

Таким образом, собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует собственный вектор (31.14), а собственному значению $\lambda_2 = 3$ — собственный вектор (31.15). В результате имеем фундаментальную систему решений

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t, \quad \vec{x}_2(t) = \vec{g}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

совпадающую с найденной ранее (30.10) и позволяющую записать общее решение исходной системы дифференциальных уравнений (31.9) линейной комбинацией

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

совпадающей с (30.8).

В этом случае получение фундаментальной системы решений не представляет трудностей, поэтому мы ограничимся одним примером и перейдём к следующему случаю.

31.2. Случай кратных корней, алгебраическая и геометрическая кратность которых совпадают

Пусть λ_i — корень кратности p_i. Если уравнение

$$A_{\lambda_i}\vec{g} = (A - \lambda_i \mathbb{I})\vec{g} = 0 \tag{31.16}$$

имеет p_i линейно независимых векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \ldots, \vec{g}_{p_i}$, обращающих (31.16) в тождество, то геометрическая кратность корня s_i совпадает с его алгебраической кратностью p_i и присоединённые векторы отсутствуют.

Тогда p_i линейно независимых решений, отвечающих корню λ_i, имеют вид

$$\vec{x}_1^{(i)} = \vec{g}_1 e^{\lambda_i t}, \quad \vec{x}_2^{(i)} = \vec{g}_2 e^{\lambda_i t}, \quad \ldots, \quad \vec{x}_{p_i}^{(1)} = \vec{g}_{p_i} e^{\lambda_i t}.$$

Пример 31.2. Методом Эйлера решить систему

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2 + x_3, \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_3' = x_1 + x_2 + 2x_3. \end{cases} \tag{31.17}$$

Решение. Данной системе соответствует характеристическое уравнение

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = 0, \tag{31.18}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}. \tag{31.19}$$

Запишем систему (31.18) в развёрнутом виде:

$$\begin{aligned} (2-\lambda)g_1 + g_2 + g_3 = 0, \\ g_1 + (2-\lambda)g_2 + g_3 = 0, \\ g_1 + g_2 + (2-\lambda)g_3 = 0. \end{aligned} \tag{31.20}$$

Однородная система (31.20) имеет нетривиальное решение при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 1] - (2-\lambda-1) + (1-2+\lambda) = (\lambda-4)(1-\lambda)^2 = 0,$$

т.е. при $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Для простого корня $\lambda_1 = 4$ система (31.18) запишется как $A_{\lambda_1=4}\vec{g} = (A - 4\mathbb{I})\vec{g} = 0$ или, согласно (31.20),

$$\begin{aligned} -2g_1 + g_2 + g_3 &= 0, \\ g_1 - 2g_2 + g_3 &= 0, \\ g_1 + g_2 - 2g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Выпишем матрицу этой системы и выполним указанные элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{S_2-S_3}{\overset{S_1+S_2+S_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{S_3-S_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $r_1 = \operatorname{rang} A_{\lambda_1=4} = 2$, $s_1 = n - r_1 = 3 - 2 = 1$ и простому корню $\lambda_1 = 4$ соответствует один собственный вектор (для простого корня геометрическая и алгебраическая кратности всегда совпадают)

$$\vec{g}_1 = g_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

равный

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (31.21)$$

если выбрать $g_3 = 1$.

Второй корень $\lambda_2 = 1$ имеет алгебраическую кратность $p_2 = 2$, и для него система (31.18) запишется как

$$A_{\lambda_2=1}\vec{g} = (A - \mathbb{I})\vec{g} = 0$$

или, согласно (31.20),

$$\begin{aligned} g_1 + g_2 + g_3 &= 0, \\ g_1 + g_2 + g_3 &= 0, \\ g_1 + g_2 + g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что ранг этой системы равен единице, т.е. $r_2 = \operatorname{rang} A_{\lambda_2=1} = 1$. Это соответствует геометрической кратности корня, равной двум ($s_2 = n - r_2 = 3 - 1 = 2$). Таким образом, для корня $\lambda_1 = 1$ имеем два собственных вектора

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} -g_2 - g_3 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix},$$

которые можно записать как

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

если положить $g_2 = -1$, $g_3 = 0$, и

$$\vec{g}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

если положить $g_2 = 0$, $g_3 = -1$.

Найдя три собственных вектора $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$, $\vec{g}_3$, можно записать фундаментальную систему решений

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}_1 e^{4t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}, \quad \vec{x}_2(t) = \vec{g}_2 e^{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}, \quad \vec{x}_3(t) = \vec{g}_3 e^{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t},$$

линейная комбинация которых с произвольными постоянными C_1, C_2, C_3 определяет общее решение системы (31.17)

$$\vec{x} = C_1 \vec{g}_1 e^{4t} + (C_2 \vec{g}_2 + C_3 \vec{g}_3) e^{t}$$

или

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 e^{4t} + (C_2 + C_3) e^{t}; \\ x_2(t) &= C_1 e^{4t} - C_2 e^{t}; \\ x_3(t) &= C_1 e^{4t} - C_3 e^{t}. \end{aligned}$$

31.3. Случай кратных корней, геометрическая кратность которых меньше алгебраической

Пусть λ_i — корень характеристического уравнения $\det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$ с алгебраической кратностью p_i, а уравнению

$$(A - \lambda_i \mathbb{I}) \vec{g} = 0$$

удовлетворяют $s_i < p_i$ линейно независимых векторов $\vec{g}_j = \vec{g}_j^{\,(1)}$, $j = \overline{1, s_i}$. Тогда, согласно теореме Жордана 31.1, из них можно выбрать такую совокупность линейно независимых собственных векторов $\vec{g}_j^{\,(1)}$, $j = \overline{1, s_i}$, которую можно достроить до p_i-мерного базиса $(p_i - s_i)$ присоединёнными векторами $\vec{g}_j^{(m)}$, $m = \overline{2, n_j}$ (здесь $n_j - 1$ — число присоединенных векторов собственного вектора $\vec{g}_j^{\,(1)}$). Напомним, что векторы $\vec{g}_j^{(m_j)}$ удовлетворяют системе уравнений (31.6), называемой жордановой цепочкой, которую можно записать в виде

$$(A - \lambda_j \mathbb{I})^k \vec{g}_j^{\,(m)} = \begin{cases} \vec{g}_j^{(m-k)}, & k < m, \quad m = \overline{1, n_j}; \\ 0, & k \geqslant m, \quad k = \overline{1, \infty}. \end{cases} \tag{31.22}$$

С учётом этого линейно независимую систему из s решений, отвечающих собственным векторам $\vec{g}_j^{\,(1)}$ с собственными значениями λ_j вида

$$\vec{x}_j^{\,(1)}(t) = \vec{g}_j^{\,(1)} e^{\lambda_j t}, \quad j = \overline{1, s_i}, \tag{31.23}$$

можно дополнить до n линейно независимых решений. Непосредственной проверкой убеждаемся, что фундаментальную систему решений уравнения (28.6) можно записать в виде

$$\{\vec{x}_j^{\,(m_j)}(t)\}, \quad j = \overline{1, s}, \quad m_j = \overline{1, n_j}, \quad \sum_{i=1}^{s} n_i = n, \tag{31.24}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{x}_j^{(1)}(t) &= \vec{g}_j^{(1)} e^{\lambda_j t}; \\ \vec{x}_j^{(2)}(t) &= \Big[\vec{g}_j^{(1)} \frac{t}{1!} + \vec{g}_j^{(2)}\Big] e^{\lambda_j t}; \end{aligned}$$

$$\vec{x}_j^{(3)}(t) = \Big[\vec{g}_j^{(1)}\frac{t^2}{2!} + \vec{g}_j^{(2)}\frac{t}{1!} + \vec{g}_j^{(3)}\Big]e^{\lambda_j t};\tag{31.25}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\vec{x}_j^{(n_j)}(t) = \Big[\vec{g}_j^{(1)}\frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} + \vec{g}_j^{(2)}\frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} + \ldots + \vec{g}_j^{(n_j)}\Big]e^{\lambda_j t}.$$

Действительно, подставив $\vec{x}_j^{\,(2)}$ в уравнение (28.6), получим

$$[\vec{x}^{\,(2)}]' = \lambda_j[\vec{g}_j^{\,(1)}t + \vec{g}_j^{\,(2)}]e^{\lambda_j t} + \vec{g}_j^{\,(1)}e^{\lambda_j t} = A\vec{x}_j^{\,(2)} =$$
$$= A[\vec{g}_j^{\,(1)}t + \vec{g}_j^{\,(2)}]e^{\lambda_j t} = t\lambda_j\vec{g}_j^{\,(1)}e^{\lambda_j t} + \lambda_j\vec{g}_j^{\,(2)}e^{\lambda_j t} + \vec{g}_j^{\,(1)}e^{\lambda_j t}.$$

Таким образом, $\vec{x}_j^{\,(2)}(t)$ является решением системы (28.6). Доказательство для $m_j \geqslant 2$ аналогично.

Соотношения (31.25) коротко можно записать как

$$\vec{x}_j^{\,(m_j)}(t) = \sum_{k=0}^{m_j-1}\frac{t^k}{k!}\vec{g}_j^{(m_j-k)}e^{\lambda_j t}, \quad m_j = \overline{1, n_j}.\tag{31.26}$$

◊ Рассмотрим частный случай, когда фундаментальную систему решений (31.24) можно записать в более привычной форме.

Пусть λ_j, $j = \overline{1, l}$ — собственные значения матрицы A, имеющие алгебраическую и геометрическую кратности p_j и s_j, соответственно ($\sum\limits_{j=1}^{l} p_j = n$). Введем обозначение $m_j = \sum\limits_{i=1}^{j-1} p_i$, тогда, в частности, $m_1 = 0$, $m_l = n - p_l$. Обозначим через $\vec{q}_{\mu_j+i}$ собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_j:

$$A\vec{q}_{\mu_j+i} = \lambda_j\vec{q}_{\mu_j+i}, \quad i = \overline{1, s_j}, \quad \mu_j = \sum_{k=1}^{j-1} s_k, \quad j = \overline{1, l}.$$

Пусть для собственных значений λ_j все присоединенные векторы $\vec{g}_j^{(m_j)}$ отвечают единственному из собственных векторов $\vec{q}_{\mu_j+i}$ (отметим, что при $p_j \leqslant 3$ только такой вариант и возможен). Присвоим этому собственному вектору номер $\mu_{j+1} = \mu_j + s_j$, т.е. $\vec{g}_{\mu_{j+1}}^{(1)} = \vec{q}_{\mu_{j+1}}$. Тогда фундаментальную систему решений системы (28.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\vec{x}_{m_j+k}(t) = \vec{q}_{\mu_j+k}e^{\lambda_j t}, \quad k = \overline{1, s_j};\\ &\vec{x}_{m_j+s_i+\nu}(t) = e^{\lambda_j t}\sum_{i=0}^{\nu}\frac{t^i}{i!}\vec{g}_{\mu_{j+1}}^{(\nu+1-i)}, \quad \nu = \overline{1, p_j - s_j}.\end{aligned}\tag{31.27}$$

Пример 31.3. Найти общее решение системы (30.12) методом Эйлера.

Решение. Исходную систему (30.12) запишем в матричной форме

$$\vec{x}\,' = A\vec{x},$$

где

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Этой системе соответствует уравнение

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = 0, \tag{31.28}$$

где

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

В развернутом виде задача (31.28) на собственные значения и собственные векторы матрицы A запишется как

$$\begin{aligned} (1-\lambda)g_1 - g_2 = 0, \\ g_1 + (3-\lambda)g_2 = 0. \end{aligned} \tag{31.29}$$

Эта однородная система имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение является квадратным:

$$(\lambda - 2)^2 = 0$$

и имеет один корень $\lambda = 2$ кратности $p = 2$.

Подстановка единственного собственного значения в матрицу $A - \lambda\mathbb{I}$ приведёт её к виду

$$A - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{31.30}$$

С учетом этого система (31.29) запишется как

$$\begin{aligned} -g_1 - g_2 = 0, \\ g_1 + g_2 = 0. \end{aligned}$$

Ранг этой системы равен единице ($r = \mathrm{rang}(A - 2\mathbb{I}) = 1$), и, следовательно, она имеет фундаментальную систему решений, состоящую из одного собственного вектора ($s = n - r = 2 - 1 = 1$)

$$\vec{g}_1 = g_1^{(1)} = \begin{pmatrix} g_1 \\ -g_1 \end{pmatrix} = g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

если положить $g_1 = 0$. Этот собственный вектор можно дополнить присоединённым вектором, который мы для простоты обозначим через $\vec{g}_2$ (вместо $\vec{g}_1^{(2)}$). Он находится из уравнения

$$(A - 2\mathbb{I})\vec{g}_2 = \vec{g}_1. \tag{31.31}$$

Положив

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} g_{21} \\ g_{22} \end{pmatrix},$$

из (31.31) имеем

$$\begin{aligned} -g_{21} - g_{22} = 1, \\ g_{21} + g_{22} = -1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} g_{21} \\ -1 - g_{21} \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

если положить $g_{21} = 0$.

Зная собственный вектор $\vec{g}_1$ и присоединённый вектор $\vec{g}_2$, запишем, согласно (31.27), фундаментальную систему решений

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}_1 e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \vec{x}_2(t) = (\vec{g}_1 t + \vec{g}_2)e^{2t} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} e^{2t}. \quad (31.32)$$

Их линейная комбинация даёт общее решение исходной системы (30.12)

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} e^{2t}$$

или в координатной форме

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{array}{l} x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t}, \\ y(t) = (-C_1 - C_2 - C_2 t)e^{2t}. \end{array}$$

Оно совпадает с решением (30.17), найденным методом исключения.

$\Diamond$ Можно убедиться, что матрица $A - 2\mathbb{I}$ является нильпотентной с нулевым квадратом

$$(A - 2\mathbb{I})^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 0.$$

Пример 31.4. Найти общее решение системы (30.20) методом Эйлера.

Решение. Исходную систему (30.20) запишем в матричной форме

$$\vec{x}\,' = A\vec{x},$$

где

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этой системе соответствует уравнение

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = 0, \quad (31.33)$$

где

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}. \quad (31.34)$$

В явном виде задача на собственные значения и собственные векторы матрицы A запишется как

$$\begin{aligned} (2 - \lambda)g_1 + g_2 - g_3 &= 0, \\ (3 - \lambda)g_2 - g_3 &= 0, \\ g_2 + (1 - \lambda)g_3 &= 0. \end{aligned} \quad (31.35)$$

Однородная система (31.35) (она же (31.33)) имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение является кубическим:

$$(\lambda-2)^3=0,$$

имеющим один корень $\lambda=2$ кратности $p=3$.

Подстановка единственного собственного значения $\lambda=2$ в матрицу $A-\lambda\mathbb{I}$ приводит её к виду

$$(A-\lambda\mathbb{I})_{\lambda=2}=(A-2\mathbb{I})=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}. \qquad (31.36)$$

С учётом этого система (31.35) записывается как

$$\begin{gathered}g_2-g_3=0,\\ g_2-g_3=0,\\ g_2-g_3=0.\end{gathered} \qquad (31.37)$$

Так как ранг матрицы системы (31.37) равен единице ($r=\operatorname{rang}(A-\lambda\mathbb{I})_{\lambda=2}=1$), то эта система имеет фундаментальную систему решений, состоящую из двух собственных векторов, поскольку $s=p-r=3-1=2$. Напомним, что эта разность равна геометрической кратности корня, имеющего алгебраическую кратность $p=3$. Собственные векторы $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ с учётом соотношения

$$g_2=g_3 \qquad (31.38)$$

можно получить из столбца

$$\vec{g}=\begin{pmatrix}g_1\\g_2\\g_2\end{pmatrix}, \qquad (31.39)$$

задав g_1 и g_2 так, чтобы векторы $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ были линейно независимыми.

Из теоремы Жордана 31.1 (см. также [9]) известно, что два собственных вектора можно дополнить до трехмерного базиса третьим вектором, который называется присоединённым и который мы обозначим как $\vec{g}_1^{(2)}=(g_1^{(2)}\ g_2^{(2)}\ g_3^{(2)})^\intercal$, положив с учётом (31.39) $\vec{g}_1=\vec{g}_1^{(1)}=(g_1^{(1)}\ g_2^{(1)}\ g_3^{(1)})^\intercal$. Присоединённый вектор $\vec{g}_1^{(2)}$ и собственный вектор $\vec{g}_1^{(1)}$ связаны соотношением

$$(A-2\mathbb{I})\vec{g}_1^{(2)}=\vec{g}_1^{(1)},$$

которое с учётом (31.36) и согласно введённым обозначениям имеет вид

$$\begin{gathered}g_2^{(2)}-g_3^{(2)}=g_1^{(1)},\\ g_2^{(2)}-g_3^{(2)}=g_2^{(1)},\\ g_2^{(2)}-g_3^{(2)}=g_2^{(1)}.\end{gathered} \qquad (31.40)$$

Поскольку матрица системы (31.40) совпадает с матрицей системы (31.37), имеющей ранг, равный единице, то нетривиальное решение (31.40) возможно только при условии $g_1^{(1)}=g_2^{(1)}$, т.е. для вектора

$$\vec{g}_1^{(1)}=\begin{pmatrix}g_1^{(1)}\\g_1^{(1)}\\g_1^{(1)}\end{pmatrix}=g_1^{(1)}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g}_1^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad (31.41)$$

если выбрать $g_1^{(1)} = 1$. Но тогда присоединённый вектор определится из системы

$$\begin{aligned} g_2^{(2)} - g_3^{(2)} &= 1, \\ g_2^{(2)} - g_3^{(2)} &= 1, \\ g_2^{(2)} - g_3^{(2)} &= 1 \end{aligned}$$

как

$$\vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} g_1^{(2)} \\ 1 + g_3^{(2)} \\ g_3^{(2)} \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (31.42)$$

если положить $g_1^{(2)} = g_3^{(2)} = 0$.

Итак, в процессе нахождения присоединённого вектора (31.42) мы определили из (31.39) один собственный вектор $\vec{g}_1^{(1)}$ как (31.41). Положив теперь в (31.39), например, $g_1 = 1$, а $g_2 = 0$, найдём второй собственный вектор

$$\vec{g}_2 = \vec{g}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (31.43)$$

линейно независимый с $\vec{g}_1^{(1)}$.

Таким образом, матрица A системы дифференциальных уравнений (30.20) имеет собственное значение $\lambda = 2$ с алгебраической кратностью, равной 3, и геометрической кратностью, равной 2. Это соответствует существованию двух собственных векторов (31.41), (31.43) и одного присоединённого вектора (31.42). Фундаментальная система решений для (30.20) имеет вид

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}_1^{(1)} e^{2t}, \qquad \vec{x}_2(t) = \vec{g}_2^{(1)} e^{2t}, \qquad \vec{x}_3(t) = (t\vec{g}_1^{(1)} + \vec{g}_1^{(2)}) e^{2t}. \qquad (31.44)$$

Нетрудно убедиться, что каждый из векторов (31.44) является решением исходной системы (30.20) и все три вектора образуют линейно независимую систему векторов.

Таким образом, общее решение исходной системы дифференциальных уравнений (30.20) является линейной комбинацией векторов фундаментальной системы решений (31.44):

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + C_3\vec{x}_3(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные. В развернутом виде оно запишется так:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right\} e^{2t} \qquad (31.45)$$

или

$$\begin{aligned} x(t) &= (C_1 + C_2 + C_3 t) e^{2t}, \\ y(t) &= (C_1 + C_3 + C_3 t) e^{2t}, \\ z(t) &= (C_1 + C_3 t) e^{2t}. \end{aligned} \qquad (31.46)$$

Переопределив произвольные постоянные $\bar{C}_i$ в полученном ранее решении (30.31) через новые произвольные постоянные C_i:

$$\bar{C}_1 = C_1 + C_2, \qquad \bar{C}_2 = C_3, \qquad \bar{C}_3 = C_1 + C_3,$$

убеждаемся, что это решение переходит в решение (31.46).

◊ Единственность присоединённого вектора следует также из равенства

$$A^2_{\lambda=2} = (A - 2\mathbb{I})^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0.$$

Пример 31.5. Найти общее решение системы (30.32) методом Эйлера.

Решение. Уравнение системы (30.32) есть

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = 0, \tag{31.47}$$

где $\vec{g} = (g_1 \quad g_2 \quad g_3)^{\intercal}$. В развернутом виде задача (31.47) на собственные значения и собственные векторы матрицы A (30.34) запишется как

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} (2-\lambda)g_1 - g_2 + 2g_3 &= 0, \\ 5g_1 + (-3-\lambda)g_2 + 3g_3 &= 0, \\ -g_1 + (-2-\lambda)g_3 &= 0. \end{aligned} \tag{31.48}$$

Эта однородная система имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 5 & -3-\lambda & 3 \\ -1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} - (3+\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

которое даёт кубическое уравнение

$$(\lambda + 1)^3 = 0,$$

имеющее один корень $\lambda = -1$ кратности $p = 3$.

Подстановка единственного собственного значения $\lambda = -1$ в матрицу $A - \lambda\mathbb{I}$ приводит её к виду

$$(A - \lambda\mathbb{I})_{\lambda=-1} = (A + \mathbb{I}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{31.49}$$

С учётом этого система (31.48) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} 3g_1 - g_2 + 2g_3 &= 0, \\ 5g_1 - 2g_2 + 3g_3 &= 0, \\ -g_1 - g_3 &= 0. \end{aligned} \tag{31.50}$$

Если первое уравнение системы (31.50) умножить на два и вычесть из второго, то получим

$$\begin{aligned} 3g_1 - g_2 + 2g_3 &= 0, \\ -g_1 - g_3 &= 0, \\ -g_1 - g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что ранг матрицы $(A - \lambda\mathbb{I})_{\lambda=-1}$ равен двум. Это означает, что система (31.50) допускает только один собственный вектор. В силу теоремы Жордана единственный собственный вектор можно дополнить двумя присоединёнными векторами.

Итак, из (31.50) имеем

$$g_3 = -g_1, \qquad g_2 = g_1$$

т.е.

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_1 \\ -g_1 \end{pmatrix} = g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{31.51}$$

если выбрать $g_1 = 1$. Если собственный вектор $\vec{g}$ (31.51) мы переобозначим как $\vec{g}^{(1)}$, то под $\vec{g}^{(2)}$ и $\vec{g}^{(3)}$ будем понимать присоединённые векторы, определяемые цепочкой равенств (31.6)

$$\begin{aligned} (A - \lambda\mathbb{I})|_{\lambda=-1}\vec{g}^{(2)} &= \vec{g}^{(1)}, \\ (A - \lambda\mathbb{I})|_{\lambda=-1}\vec{g}^{(3)} &= \vec{g}^{(2)}. \end{aligned} \tag{31.52}$$

Представим вектор $\vec{g}^{(2)}$ в виде

$$\vec{g}^{(2)} = \begin{pmatrix} g_1^{(2)} \\ g_2^{(2)} \\ g_3^{(2)} \end{pmatrix}. \tag{31.53}$$

Тогда его компоненты $g_i^{(2)}$ определятся системой уравнений

$$\begin{aligned} 3g_1^{(2)} - g_2^{(2)} + 2g_3^{(2)} &= 1, \\ 5g_1^{(2)} - 2g_2^{(2)} + 3g_3^{(2)} &= 1, \\ -g_1^{(2)} - g_3^{(2)} &= -1. \end{aligned} \tag{31.54}$$

Расширенная матрица этой системы имеет ранг, совпадающий с рангом матрицы $(A - \lambda\mathbb{I})_{\lambda=-1}$, т.е. матрицы однородной системы (31.50). Действительно, выписав расширенную матрицу системы (31.54) и проведя указанные элементарные преобразования, найдём

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \overset{S_2-2S_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{S_3-S_2}{\overset{S_1+2S_2}{\sim}} \\ &\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned} \tag{31.55}$$

Отсюда следует, что $r = \operatorname{rang}(A - \lambda\mathbb{I})_{\lambda=-1} = \operatorname{rang} A^{(0)} = 2$, и, кроме того, найдём

$$\vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} g_1^{(2)} \\ 1 + g_1^{(2)} \\ 1 - g_1^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{31.56}$$

если положить $g_1^{(2)} = 0$.

Представим теперь второй присоединённый вектор так:

$$\vec{g}^{(3)} = \begin{pmatrix} g_1^{(3)} \\ g_2^{(3)} \\ g_3^{(3)} \end{pmatrix}. \tag{31.57}$$

Чтобы найти его компоненты из (31.52), имеем систему

$$\begin{aligned} 3g_1^{(3)} - g_2^{(3)} + 2g_3^{(3)} &= 0, \\ 5g_1^{(3)} - 2g_2^{(3)} + 3g_3^{(3)} &= 1, \\ -g_1^{(3)} - g_3^{(3)} &= 1. \end{aligned} \tag{31.58}$$

Выписав расширенную матрицу этой системы и проведя указанные элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{S_2-2S_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{S_3-S_2}{\overset{S_1+2S_2}{\sim}} \\ &\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \end{aligned} \tag{31.59}$$

Отсюда следует, что ранг расширенной матрицы системы (31.58) совпадает с рангом системы (31.54), ранг которой, в свою очередь, совпадает с рангом матрицы $(A - \lambda\mathbb{I})_{\lambda=-1}$. Следовательно,

$$\vec{g}^{(3)} = \begin{pmatrix} g_1^{(3)} \\ -2 + g_1^{(3)} \\ -1 - g_1^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \vec{g}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{31.60}$$

если положить $g_1^{(3)} = 0$.

Таким образом, система (31.47) имеет одно действительное собственное значение $\lambda = -1$ кратности $p = 3$ и соответствующий ему собственный вектор $\vec{g}^{(1)}$, который совместно с присоединёнными векторами образует линейно независимую систему векторов (базис)

$$\vec{g}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

С учётом этого фундаментальная система решений для исходной системы дифференциальных уравнений, согласно (31.24), имеет вид

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}^{(1)}, \qquad \vec{x}_2(t) = t\vec{g}^{(1)} + \vec{g}^{(2)}, \qquad \vec{x}_3(t) = \frac{t^2}{2}\vec{g}^{(1)} + t\vec{g}^{(2)} + \vec{g}^{(3)}. \tag{31.61}$$

Тогда общее решение можно записать как их линейную комбинацию:

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + C_3\vec{x}_3(t),$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, или в развернутом виде

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \left\{ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \right.$$

$$+ C_3 \left[\frac{t^2}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]\Bigg\}e^{-t}, \tag{31.62}$$

что совпадает с формулой (30.42), полученной ранее.

$\Diamond$ В системе (31.52) умножение второго уравнения на $(A-\lambda\mathbb{I})_{\lambda=-1}$ приводит его к виду

$$(A-\lambda\mathbb{I})^2_{\lambda=-1}\vec{g}^{(3)} = \vec{g}^{(1)}. \tag{31.63}$$

Это соотношение позволяет выразить второй присоединённый вектор $\vec{g}^{(3)}$ непосредственно через собственный вектор $\vec{g}^{(1)}$:

$$(A+\mathbb{I})^2\vec{g}^{(3)} = \begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

поскольку

$$(A+\mathbb{I})^2 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix} \neq 0,$$

тогда как

$$(A+\mathbb{I})^3 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 5 & -2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix} = 0.$$

Эти равенства указывают на то, что векторы $\vec{g}^{(1)}$, $\vec{g}^{(2)}$, $\vec{g}^{(3)}$ выбраны корректно.

Пример 31.6. Непосредственной проверкой убедиться, что вектор-функции (31.61) образуют фундаментальную систему решений для системы дифференциальных уравнений (30.32). Найти фундаментальную матрицу этой системы.

Решение. В развернутом виде решения (31.61) записываются так

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t}, \qquad \vec{x}_2(t) = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]e^{-t},$$

$$\vec{x}_3(t) = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix}\right]e^{-t}$$

или

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t}, \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix}t\\1+t\\1-t\end{pmatrix}e^{-t}, \quad \vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix}t^2/2\\-2+t+t^2/2\\-1+t-t^2/2\end{pmatrix}e^{-t}. \tag{31.64}$$

Подставив поочередно векторы (31.64) в исходную систему (30.32), получим три тождества

$$\vec{x}_1{}'(t) = -\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} =$$

$$= A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{-t} \equiv -\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{-t},$$

$$\vec{x}_2{}'(t) = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}t\\1+t\\1-t\end{pmatrix}\right]e^{-t} = \begin{pmatrix}1-t\\-t\\-2+t\end{pmatrix}e^{-t} =$$

$$= A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ 1-t \end{pmatrix} e^{-t} \equiv \begin{pmatrix} 1-t \\ -t \\ -2+t \end{pmatrix} e^{-t},$$

$$\vec{x}_3{}'(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^2/2 \\ -2+t+t^2/2 \\ -1+t-t^2/2 \end{pmatrix} \right] e^{-t} = \begin{pmatrix} t - t^2/2 \\ 3 - t^2/2 \\ 2 - 2t + t^2/2 \end{pmatrix} e^{-t} =$$

$$= A\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ -2+t+t^2/2 \\ -1+t-t^2/2 \end{pmatrix} e^{-t} \equiv \begin{pmatrix} t - t^2/2 \\ 3 - t^2/2 \\ 2 - 2t + t^2/2 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Это означает, что каждый из векторов (31.64) является решением исходной системы.

Далее из решений (31.64) составим матрицу

$$X(t) = \begin{pmatrix} -1 & t & t^2/2 \\ -1 & 1+t & -2+t+t^2/2 \\ 1 & 1-t & -1+t-t^2/2 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{31.65}$$

Так как

$$\det X(t) = \begin{vmatrix} -1 & t & t^2/2 \\ -1 & 1+t & -2+t+t^2/2 \\ 1 & 1-t & -1+t-t^2/2 \end{vmatrix} e^{-t} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & t-1 \\ 0 & 2 & -3+2t \\ -1 & 1-t & -1+t-t^2/2 \end{vmatrix} e^{-t} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & t-1 \\ 2 & -3+2t \end{vmatrix} e^{-t} = e^{-t} \neq 0,$$

то вронскиан решений (31.64) отличен от нуля для всех $t \in \mathbb{R}$, т.е. матрица (31.65) является фундаментальной матрицей исходной системы дифференциальных уравнений (30.32), а решения (31.64) – её фундаментальной системой решений.

31.4. Случай комплексных корней

При решении предыдущих примеров мы нигде не использовали вещественность λ и вектора $\vec{g}$. Поэтому комплексным корням λ_1 и $\lambda_2 = \lambda_1^*$ отвечает решение

$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \vec{g}_1 e^{\lambda_1 t}, \\ \vec{x}_2 = \vec{g}_2^* e^{\lambda_1^* t}. \end{cases} \tag{31.66}$$

Если матрица системы вещественна: $A = A^*$, то действительная и мнимая части решений (31.66) также являются решениями. Следовательно, имеем два действительных линейно независимых решения, отвечающих комплексным корням λ_1 и λ_1^*:

$$\tilde{\vec{x}}_1 = \operatorname{Re} \vec{x}_1, \quad \tilde{\vec{x}}_2 = \operatorname{Im} \vec{x}_1,$$

т.е. случай кратных комплексных корней аналогичен случаю кратных действительных корней.

Пример 31.7. Найти общее решение системы (30.43) методом Эйлера.

Решение. Соответствующая системе (30.43) задача на собственные векторы и собственные значения имеет вид

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = 0, \tag{31.67}$$

где

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

В развернутом виде задача (31.67) запишется так:

$$\begin{aligned} (5-\lambda)g_1 + 10g_2 = 0, \\ -2g_1 + (-3-\lambda)g_2 = 0. \end{aligned} \tag{31.68}$$

Эта однородная система имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 10 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0,$$

т.е. при $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ (сравнить с (30.47)).

Найдём собственный вектор $\vec{g}_1$, соответствующий комплексному корню $\lambda_1 = 1 + 2i$. Подставив это значение в (31.68), получим

$$\begin{aligned} (4-2i)g_1 + 10g_2 = 0, \\ -2g_1 + (-4-2i)g_2 = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (2-i)g_1 + 5g_2 = 0, \\ g_1 + (2+i)g_2 = 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения, как и следовало ожидать, линейно зависимы: первое уравнение можно получить из второго умножением на $(2-i)$. Воспользовавшись первым уравнением, найдём $g_2 = -(2-i)g_1/5$. Тогда собственный вектор запишется как

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} g_1 \\ \dfrac{-2+i}{5} g_1 \end{pmatrix}$$

или

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2+i \end{pmatrix}, \tag{31.69}$$

если положить $g_1 = 5$.

Таким образом, система (30.43) имеет одно комплексное решение вида

$$\begin{aligned} \tilde{\vec{x}}_1(t) = \vec{g}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2+i \end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \\ = e^t \begin{pmatrix} 5 \\ -2+i \end{pmatrix} e^{2it} = e^y \begin{pmatrix} 5\cos 2t + i5\sin 2t \\ -2\cos 2t - \sin 2t + i(\cos 2t - 2\sin 2t) \end{pmatrix} = \\ = e^t \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ -2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} + ie^t \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{31.70}$$

Второе комплексное решение можно получить, подставив в (31.68) второй комплексный корень $\lambda_2 = 1 - 2i$, или непосредственно из (31.70), применив операцию комплексного сопряжения. Удобнее, однако, воспользоваться свойствами линейных однородных уравнений, а именно: действительная и мнимая части решения (31.70) сами являются решениями исходной системы. Поскольку эти решения линейно независимы, то их можно рассматривать как фундаментальную систему решений исходной системы:

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ -2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} e^t, \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix} e^t. \tag{31.71}$$

С её помощью общее решение (31.70) запишется линейной комбинацией

$$\vec{x}(t) = \bar{C}_1\vec{x}_1(t) + \bar{C}_2\vec{x}_2(t),$$

которая в развернутом виде запишется как

$$\vec{x}(t) = \bar{C}_1 \begin{pmatrix} 5\cos 2t \\ -2\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} e^t + \bar{C}_2 \begin{pmatrix} 5\sin 2t \\ \cos 2t - 2\sin 2t \end{pmatrix} e^t$$

или

$$\begin{aligned} x(t) &= (5\bar{C}_1\cos 2t + 5\bar{C}_2\sin 2t)e^t, \\ y(t) &= [(-2\bar{C}_1 + \bar{C}_2)\cos 2t - (\bar{C}_1 + 2\bar{C}_2)\sin 2t]e^t. \end{aligned}$$

Переопределив произвольные постоянные $\bar{C}_1$ и $\bar{C}_2$ через новые соотношениями $\bar{C}_1 = C_1/5$ и $\bar{C}_2 = C_2/5$, получим решение (30.49), найденное ранее.

Пример 31.8. Решить систему дифференциальных уравнений (30.50) методом Эйлера.

Решение. Соответствующая системе (30.50) задача на собственные значения и собственные векторы имеет вид

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = 0, \tag{31.72}$$

где

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}.$$

В координатной форме задача (31.72) запишется так:

$$\begin{aligned} -\lambda g_1 + g_2 &= 0, \\ -\lambda g_2 + g_3 &= 0, \\ -\lambda g_3 + g_4 &= 0, \\ -g_1 - 2g_3 - \lambda g_4 &= 0. \end{aligned} \tag{31.73}$$

Эта однородная система имеет нетривиальное решение при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2+1)^2 = 0.$$

Последнее уравнение имеет пару комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$ кратности $p = 2$.

Найдём собственный вектор $\vec{g}_1$, соответствующий комплексному корню $\lambda_1 = i$. Подставив это значение в (31.73), получим

$$\begin{aligned} -ig_1 + g_2 &= 0, \\ -ig_2 + g_3 &= 0, \\ -ig_3 + g_4 &= 0, \\ -g_1 - 2g_3 - ig_4 &= 0. \end{aligned}$$

Поскольку ранг матрицы этой системы равен трем ($r_1 = \operatorname{rang}(A - i\mathbb{I}) = 3$, $s_1 = n - r_1 = 4 - 4 = 1$), то четвертое уравнение есть линейная комбинация первых трёх, из которых следует

$$g_2 = ig_1, \quad g_3 = -g_1, \quad g_4 = -ig_1$$

или

$$\vec{g}_1 = g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Положив $g_1 = 1$, получим

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}. \tag{31.74}$$

Таким образом, одно комплексное решение системы имеет вид

$$\tilde{\vec{x}}_1(t) = \vec{g}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}. \tag{31.75}$$

Поскольку алгебраическая кратность рассматриваемого корня $\lambda_1 = i$ равна двум, а геометрическая равна единице, то для него можно найти ещё и присоединённый вектор, который мы обозначим как $\vec{q}_1$ (вместо $\vec{g}_1^{(2)}$). Если $\vec{q}_1 = (q_1\ q_2\ q_3\ q_4)^\intercal$, то его компоненты находятся из уравнения

$$(A - \lambda \mathbb{I})|_{\lambda_1 = i} \vec{q}_1 = \vec{g}_1$$

или

$$\begin{aligned} -iq_1 + q_2 &= 1, \\ -iq_2 + q_3 &= i, \\ -iq_3 + q_4 &= -1, \\ -q_1 - 2q_3 - iq_4 &= -i. \end{aligned}$$

Выписав расширенную матрицу этой системы и произведя указанные элементарные преобразования:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & -i & -i \end{array}\right) \underset{S_4 + iS_3 + S_2 + iS_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} -i & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -i & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

видим, что ранг расширенной матрицы равен трем. Это означает, что четвертое уравнение есть линейная комбинация первых трех, из которых следует

$$q_2 = 1 + iq_1, \quad q_3 = 2i - q_1, \quad q_4 = -3 - iq_1$$

или

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 + iq_1 \\ 2i - q_1 \\ -3 - iq_1 \end{pmatrix}.$$

Положив $q_1 = 0$, получим

$$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2i \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{31.76}$$

Теперь с помощью (31.75) и присоединённого вектора (31.76) можно записать второе комплексное решение

$$\tilde{\vec{x}}_2(t) = (\vec{g}_1 t + \vec{q}_1)e^{\lambda_1 t} = \vec{g}_1 t e^{\lambda_1 t} + \vec{q}_1 e^{\lambda_1 t} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} t + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} t + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ -2\sin t \\ -3\cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \sin t \\ 2\cos t \\ -3\sin t \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} t\cos t \\ -t\sin t + \cos t \\ -t\cos t - 2\sin t \\ t\sin t - 3\cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} t\sin t \\ -t\cos t + \sin t \\ -t\sin t - 2\cos t \\ -t\cos t - 3\sin t \end{pmatrix}. \tag{31.77}$$

Комплексные решения, отвечающие корню $\lambda_2 = -i$, можно получить из (31.75) и (31.77) комплексным сопряжением. Но мы воспользуемся свойством линейных однородных систем, а именно: действительная и мнимая части любого решения этой системы сами являются её решениями.

Таким образом, вычислив действительные и мнимые части решений (31.75) и (31.77), получим четыре действительных решения исходной системы, которые в силу их линейной независимости образуют её фундаментальную систему решений:

$$\vec{x}_1(t) = \operatorname{Re} \vec{g}_1 e^{it} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2(t) = \operatorname{Im} \vec{g}_1 e^{it} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \tag{31.78}$$

$$\vec{x}_3(t) = \operatorname{Re}\{(\vec{g}_1 t + \vec{q}_1)e^{it}\} = \begin{pmatrix} t\cos t \\ -t\sin t + \cos t \\ -t\cos t - 2\sin t \\ t\sin t - 3\cos t \end{pmatrix},$$
$$\vec{x}_4(t) = \operatorname{Im}\{(\vec{g}_1 t + \vec{q}_1)e^{it}\} = \begin{pmatrix} t\sin t \\ -t\cos t + \sin t \\ -t\sin t - 2\cos t \\ -t\cos t - 3\sin t \end{pmatrix}. \tag{31.79}$$

С её помощью общее решение исходной системы запишется линейной комбинацией

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + C_3\vec{x}_3(t) + C_4\vec{x}_4(t)$$

или в развернутом виде:

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} t\cos t \\ -t\sin t + \cos t \\ -t\cos t - 2\sin t \\ t\sin t - 3\cos t \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} t\sin t \\ -t\cos t + \sin t \\ -t\sin t - 2\cos t \\ -t\cos t - 3\sin t \end{pmatrix}, \tag{31.80}$$

где C_i, $i = \overline{1,4}$, — произвольные постоянные. Если в полученном ранее общем решении (30.61) вместо произвольных постоянных $\bar{C}_i$ ввести постоянные C_i соотношениями $\bar{C}_1 = C_1$, $\bar{C}_2 = C_3$, $\bar{C}_3 = C_2$, $\bar{C}_4 = C_4$, то оно примет вид (31.80). Кроме того, если через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ обозначить действительную и мнимую части собственного вектора $\vec{g}_1$:

$$\vec{e}_1 = \operatorname{Re} \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \operatorname{Im} \vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{31.81}$$

а через $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ — присоединённого вектора $\vec{q}_1$:

$$\vec{e}_3 = \operatorname{Re}\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_4 = \operatorname{Im}\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{31.82}$$

то с их помощью фундаментальную систему решений (31.78), (31.79) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\vec{x}_1(t) = \vec{e}_1 \cos t - \vec{e}_2 \sin t, \\ &\vec{x}_2(t) = \vec{e}_1 \sin t - \vec{e}_2 \cos t, \\ &\vec{x}_3(t) = (\vec{e}_1 t + \vec{e}_3) \cos t - (\vec{e}_2 t + \vec{e}_4) \sin t, \\ &\vec{x}_4(t) = (\vec{e}_2 t + \vec{e}_4) \cos t - (\vec{e}_1 t + \vec{e}_3) \sin t. \end{aligned} \tag{31.83}$$

$\Diamond$ Все рассмотренные выше системы дифференциальных уравнений характеризуются собственными числами различной кратности, которые были или только вещественными, или только комплексными. Следующий пример показывает, что если система допускает одновременно вещественные и комплексные собственные значения (что возможно только для систем не ниже третьего порядка), то это не приводит к каким-либо дополнительным трудностям.

Пример 31.9. Найти общее решение системы (30.62) методом Эйлера.

Решение. Соответствующая системе (30.62) задача на собственные значения и собственные векторы имеет вид

$$(A - \lambda \mathbb{I})\vec{g} = 0, \tag{31.84}$$

где $\vec{g} = (g_1 \quad g_2 \quad g_3)^{\intercal}$. В координатной форме задача (31.84) запишется так:

$$\begin{aligned} (4-\lambda)g_1 + 7g_2 - 5g_3 &= 0, \\ -4\lambda g_1 + (5-\lambda)g_2 &= 0, \\ g_1 + 9g_2 + (-4-\lambda)g_3 &= 0. \end{aligned} \tag{31.85}$$

Однородная система (31.85) имеет нетривиальные решения при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 7 & -5 \\ -4 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 9 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 17\lambda + 13 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0.$$

Это уравнение имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$ и $\lambda_3 = 2 - 3i$.

Подставив значение первого корня в (31.85), получим систему

$$\begin{aligned} 3g_1 + 7g_2 - 5g_3 &= 0, \\ -4g_1 + 4g_2 &= 0, \\ g_1 + 9g_2 - 5g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Выписав матрицу этой системы и произведя указанные элементарные преобразования

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -4 & 4 & 0 \\ 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \overset{S_2/4}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} \underset{S_3 - S_2 - 2S_1}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

найдём $g_2 = g_1$, $g_3 = 2g_1$. Отсюда, положив $g_1 = 1$, получим собственный вектор $\vec{g}_1$ для корня $\lambda_1 = 1$:

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{31.86}$$

и первое решение из фундаментальной системы

$$\vec{x}_1(t) = \vec{g}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t. \tag{31.87}$$

Найдём теперь комплексное решение для корня $\lambda_2 = 2 + 3i$. Подставив это значение в (31.85), имеем

$$\begin{aligned} (2-3i)g_1 + 7g_2 - 5g_3 = 0, \\ -4g_1 + (3-3i)g_2 = 0, \\ g_1 + 9g_2 + (-6-3i)g_3 = 0. \end{aligned}$$

Выписав матрицу этой системы и произведя указанные элементарные преобразования:

$$\begin{pmatrix} 2-3i & 7 & -5 \\ -4 & 3(1-i) & 0 \\ 1 & 9 & -3(2+i) \end{pmatrix} \underset{S_3-(2-i)S_1/3}{\sim} \begin{pmatrix} 2-3i & 7 & -5 \\ -4 & 3(1-i) & 0 \\ \dfrac{4(1-2i)}{3} & 1+3i & 0 \end{pmatrix} \underset{S_3+(1-2i)S_2/3}{\sim}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2-3i & 7 & -5 \\ -4 & 3(1-i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

найдём $g_2 = 4g_1/3(1-i)$, $g_3 = (4+i)g_1/3$. Отсюда, положив $g_1 = 3(1-i)$, получим собственный вектор $\vec{g}_2$ для корня $\lambda_1 = 2 + 3i$:

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 3-3i \\ 4 \\ 5-3i \end{pmatrix} \tag{31.88}$$

и комплексное решение, соответственно,

$$\vec{g}_2 e^{\lambda_2 t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 3-3i \\ 4 \\ 5-3i \end{pmatrix} (\cos 3t + \sin 3t) =$$
$$= e^{2t} \left\{ \begin{pmatrix} 3\cos 3t + 3\sin 3t \\ 4\cos 3t \\ 5\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -3\cos 3t + 3\sin 3t \\ 4\sin 3t \\ -3\cos 3t + 5\sin 3t \end{pmatrix} \right\}. \tag{31.89}$$

Вычислив действительную и мнимую части (31.89), получим ещё два действительных решения

$$\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 3\cos 3t + 3\sin 3t \\ 4\cos 3t \\ 5\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix} -3\cos 3t + 3\sin 3t \\ 4\sin 3t \\ -3\cos 3t + 5\sin 3t \end{pmatrix}, \tag{31.90}$$

которые совместно с (31.88) образуют фундаментальную систему решений матричного уравнения (30.62). Таким образом, введя произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, его общее решение можно записать как

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + e^{2t} \left\{ C_2 \begin{pmatrix} 3\cos 3t + 3\sin 3t \\ 4\cos 3t \\ 5\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} -3\cos 3t + 3\sin 3t \\ 4\sin 3t \\ -3\cos 3t + 5\sin 3t \end{pmatrix} \right\}$$

или

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1e^t + 3e^{2t}[(C_2 - C_3)\cos 3t + (C_2 + C_3)\sin 3t], \\ y(t) &= C_1e^t + 4e^{2t}[C_2\cos 3t + C_3\sin 3t], \\ z(t) &= 2C_1e^t + e^{2t}[(5C_2 - 3C_3)\cos 3t + (3C_2 + 5C_3)\sin 3t]. \end{aligned} \tag{31.91}$$

Если в полученном ранее решении (30.69), (30.70) выразить постоянные $\bar{C}_k$ через постоянные C_k: $\bar{C}_1 = C_1$, $\bar{C}_2 = C_2 - C_3$, $\bar{C}_3 = C_2 + C_3$, придём к (31.91).

31.5. Общий случай

Полученные выше результаты можно представить в следующей форме, позволяющей в ряде случаев уменьшить количество промежуточных вычислений.

Пусть λ_j — корень характеристического уравнения $\det A_\lambda = 0$, $A_\lambda = A - \lambda\mathbb{I}$, с алгебраической кратностью p_j. Тогда соответствующее ему вектор-решение имеет вид

$$\vec{x}_j(t) = \Big\{\mathbb{I} + A_{\lambda_j}\frac{t}{1!} + A^2_{\lambda_j}\frac{t^2}{2!} + \ldots + A^{p_j-1}_{\lambda_j}\frac{t^{p_j-1}}{(p_j-1)!}\Big\}\vec{G}_j e^{\lambda_j t}. \tag{31.92}$$

где матрица $A_{\lambda_j} = A - \lambda_j\mathbb{I}$, а вектор $\vec{G}_j$ является решением уравнения

$$A^{p_j}_{\lambda_j}\vec{G}_j = 0. \tag{31.93}$$

Что $\vec{x}_j$, определяемый формулой (31.92), — решение уравнения (31.2), легко проверить непосредственной подстановкой. А поскольку уравнение (31.93) имеет p_j линейно независимых решений, $\vec{x}_j$ содержит p_j произвольных постоянных.

$\Diamond$ Формула (31.92) справедлива и для простого корня, т.е. для $p_j = 1$. В этом случае

$$\vec{x}_j(t) = \vec{G}_j e^{\lambda_j t}, \tag{31.94}$$

где вектор $\vec{G}_j$ определяется из (31.93) при $s_j = 1$:

$$(A - \lambda_j\mathbb{I})\vec{G}_j = 0,$$

т.е. является собственным вектором матрицы A для простого корня λ_j.

$\Diamond$ Для пары комплексно сопряжённых корней λ_j и λ_j^* имеем вектор-решения

$$\vec{u}_j(t) = \operatorname{Re}\vec{x}_j(t), \qquad \vec{v}_j(t) = \operatorname{Im}\vec{x}_j(t), \tag{31.95}$$

где $\vec{x}_j(t)$ определяется формулой (31.94) для простой пары и формулой (31.92) для комплексной пары кратности p_j. Определив вектор-решения (31.92) для каждого λ_j, общее решение получим, записав их линейную комбинацию.

Пример 31.10. Найти общее решение системы (30.12) методом Эйлера.

Решение. В примере 31.3 мы нашли решение этой системы, вычислив присоединённый вектор. Получим теперь решение этой же системы с помощью формулы (31.92).

Итак, характеристическое уравнение системы имеет действительный корень $\lambda = 2$ с алгебраической кратностью $p = 2$ и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_{\lambda=2} = A - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{31.96}$$

Поскольку

$$A^2_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (31.97)$$

то из уравнения

$$A^2_{\lambda=2}\vec{G} = 0$$

следует, что вектор $\vec{G}$ произволен, т.е. имеет вид

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \qquad (31.98)$$

где g_1 и g_2 — произвольные постоянные. Подставив (31.96) и (31.98) в формулу (31.92), найдём общее решение системы

$$\vec{x}(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t\right] \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} g_1 - (g_1 + g_2)t \\ g_1 + (g_1 + g_2)t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Определив произвольные постоянные $C_1 = g_1$, $C_2 = -g_1 - g_2$, придём к решению

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -C_1 - C_2 - C_2 t \end{pmatrix} e^{2t},$$

полученному в примере 31.3.

$\Diamond$ Отметим, что в этом примере мы нашли общее решение системы дифференциальных уравнений, не прибегая к решению алгебраических систем, тогда как в примере 31.3 нам нужно было решить две алгебраические системы для определения собственного и присоединённого векторов.

Пример 31.11. Найти общее решение системы (30.20) методом Эйлера.

Решение. В примере 31.4 мы нашли решение этой системы методом Эйлера, вычислив собственные и присоединённый векторы. Получим теперь решение этой же системы с помощью формулы (31.92).

Характеристическое уравнение системы имеет действительный корень $\lambda = 2$ с алгебраической кратностью $p = 3$ и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_{\lambda=2} = A - 2\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (31.99)$$

Поскольку

$$A^2_{\lambda=2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0, \qquad A^3_{\lambda=2} = 0, \qquad (31.100)$$

то из уравнения

$$A^3_{\lambda=2}\vec{G} = 0$$

следует, что вектор $\vec{G}$ произволен, т.е. имеет вид

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}, \qquad (31.101)$$

где g_1, g_2, g_3 — произвольные постоянные. Подставив (31.99)–(31.101) в формулу (31.92), найдём общее решение системы

$$\vec{x}(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} t\right] \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} g_1 + (g_2 - g_3)t \\ g_2 + (g_2 - g_3)t \\ g_3 + (g_2 - g_3)t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Переопределив произвольные постоянные как $g_1 = C_1 + C_2$, $g_2 = C_1 + C_3$, $g_3 = C_1$, придём к решению

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 + C_3 t \\ C_1 + C_3 + C_3 t \\ C_1 + C_3 t \end{pmatrix} e^{2t},$$

полученному в примере 31.4.

Пример 31.12. Найти общее решение системы (30.32) методом Эйлера.

Решение. В примере 31.5 мы нашли решение этой системы методом Эйлера, вычислив собственные и присоединённый векторы. Получим теперь решение этой же системы с помощью формулы (31.92).

Система имеет действительный характеристический корень $\lambda = -1$ с алгебраической кратностью $p = 3$ и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad A_{\lambda=-1} = A + \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{31.102}$$

Поскольку

$$A^2_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{31.103}$$

и

$$A^3_{\lambda=-1} = A^2_{\lambda=-1}A_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0, \tag{31.104}$$

то из уравнения

$$A^3_{\lambda=-1}\vec{G} = 0$$

следует, что вектор $\vec{G}$ произволен, т.е. имеет вид

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}, \tag{31.105}$$

где g_1, g_2, g_3 — произвольные постоянные. Подставив (31.102), (31.103) и (31.105) в формулу (31.92), найдём общее решение системы

$$\vec{x}(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2}\right]\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}e^{-t} =$$
$$= \begin{pmatrix} g_1 + (3g_1 - g_2 + 2g_3)t + (2g_1 - g_2 + g_3)t^2/2 \\ g_2 + (5g_1 - 2g_2 + 3g_3)t + (2g_1 - g_2 + g_3)t^2/2 \\ g_3 + (-g_1 - g_3)t - (2g_1 - g_2 + g_3)t^2/2 \end{pmatrix}e^{-t}.$$

Переопределив произвольные постоянные как $C_1 = g_1$, $C_2 = 3g_1 - g_2 + 2g_3$, $C_3 = 2g_1 - g_2 + g_3$, придём к решению, полученному в примере 31.5.

Таким образом, из последних примеров следует, что при наличии присоединённых векторов, т.е. при выполнении условия $A^p_\lambda = 0$, формула (31.92) существенно упрощает процедуру нахождения общего решения нормальной однородной системы (28.6). В противном случае, чтобы найти общее решение, следует, как и ранее, вычислить собственные векторы, т.е. решить соответствующие алгебраические системы. Это же замечание справедливо и для комплексных корней. Сказанное иллюстрируют два следующих примера.

Пример 31.13. Найти общее решение системы (31.17) методом Эйлера.

Решение. В примере 31.2 было установлено, что характеристическое уравнение системы имеет два корня: простой $\lambda_1 = 4$ и двукратный $\lambda_2 = 1$. Им соответствуют две матрицы:

$$A_{\lambda=4} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \tag{31.106}$$

и

$$A_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{квадрат которой равен} \quad A^2_{\lambda=1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}. \qquad (31.107)$$

Характеристическому корню $\lambda_1 = 4$ с матрицей (31.106) соответствует собственный вектор, удовлетворяющий уравнению

$$A_{\lambda=4}\vec{G}_1 = 0$$

и, как следует из примера 31.2, равный

$$\vec{G}_1 = g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где g_1 — произвольная постоянная, а следовательно, вектор-функция

$$\vec{x}_1(t) = g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

есть решение системы (31.17). Характеристическому корню $\lambda_2 = 1$, согласно (31.92), соответствует решение

$$\vec{x}_2(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} t \right\} \vec{G}_2 e^t,$$

где вектор $\vec{G}_2$ находится из уравнения

$$A^2_{\lambda=1}\vec{G}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{G}_2 = 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{G}_2 = 0$$

и, как следует из примера 31.2, равный

$$\vec{G}_2 = \begin{pmatrix} -g_2 - g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix},$$

где g_2 и g_3 — произвольные постоянные. С учётом этого

$$\vec{x}_2(t) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} t \right\} \begin{pmatrix} -g_2 - g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} -g_2 - g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} e^t,$$

и тогда общее решение запишется как

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t) = g_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} -g_2 - g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} e^t.$$

Переобозначив произвольные постоянные: $g_1 = C_1$, $g_2 = -C_2$, $g_3 = -C_3$, придём к решению, полученному в примере 31.2.

Пример 31.14. Решить систему дифференциальных уравнений (30.50) методом Эйлера.

Решение. В примере 31.8 было установлено, что характеристическое уравнение системы имеет комплексно-сопряжённую пару корней $\lambda = \pm i$ кратности $p = 2$. Корню $\lambda = i$ соответствует матрица

$$A_{\lambda=i} = A - i\mathbb{I} = \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -i \end{pmatrix} \tag{31.108}$$

квадрат которой равен

$$A^2_{\lambda=i} = \begin{pmatrix} -1 & -2i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2i & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -2i \\ 2i & -1 & 4i & -3 \end{pmatrix}, \tag{31.109}$$

и, согласно (31.92), комплексный вектор

$$\vec{x}_1(t) = \{\mathbb{I} + A_{\lambda=i}t\}\vec{G}_1 e^{it} \tag{31.110}$$

является решением системы (30.50). Комплексный вектор $\vec{G}_1$ находится из уравнения

$$A^2_{\lambda=i}\vec{G}_1 = 0. \tag{31.111}$$

Выполнив над матрицей $A^2_{\lambda=i}$ (31.111) элементарные преобразования

$$\begin{pmatrix} -1 & -2i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2i & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -2i \\ 2i & -1 & 4i & -3 \end{pmatrix} \underset{S_4+iS_1+iS_3}{\sim} = \begin{pmatrix} -1 & -2i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2i & 1 \\ -1 & 0 & -3 & -2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{S_3-S_1}{\sim}$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & -2i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2i & 1 \\ 0 & 2i & -4 & -2i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{S_3+2iS_2}{\sim} = \begin{pmatrix} -1 & -2i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и положив

$$\vec{G}_1 = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix},$$

можно записать уравнение (31.111) в равносильной форме:

$$\begin{gathered} -g_1 - 2ig_2 + g_3 = 0, \\ -g_2 - 2ig_3 + g_4 = 0, \end{gathered}$$

откуда найдём

$$\vec{G}_1 = \begin{pmatrix} -2ig_2 + g_3 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_2 + 2ig_3 \end{pmatrix},$$

где g_2, g_3 — произвольные комплексные постоянные. Если эти комплексные постоянные записать в алгебраической форме $g_2 = q_1 + iq_3$, $g_3 = q_2 + iq_4$ через действительные постоянные q_i, $i = \overline{1,4}$, то вектор $\vec{G}$ (31.110) также можно представить в алгебраической форме:

$$\vec{G}_1 = \vec{l}_1 + i\vec{l}_2, \tag{31.112}$$

где $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ — действительные векторы

$$\vec{l}_1 = \begin{pmatrix} q_2 + 2q_3 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_1 - 2q_4 \end{pmatrix}, \qquad \vec{l}_2 = \begin{pmatrix} -2q_1 + q_4 \\ q_3 \\ q_4 \\ 2q_2 + q_3 \end{pmatrix}. \tag{31.113}$$

Таким образом, вектор-решение (31.110) можно записать в виде произведения трёх комплексных величин:

$$\vec{x}_1(t) = \{\mathbb{I} + (A - i\mathbb{I})t\}(\vec{l}_1 + i\vec{l}_2)(\cos t + i\sin t),$$

которое можно представить в алгебраической форме

$$\vec{x}_1(t) = (\vec{H}_1\cos t - \vec{H}_2\sin t) + i(\vec{H}_1\sin t + \vec{H}_2\cos t). \tag{31.114}$$

Здесь векторы

$$\vec{H}_1 = B_1\vec{l}_1 - B_2\vec{l}_2, \qquad \vec{H}_2 = B_1\vec{l}_2 + B_2\vec{l}_1 \tag{31.115}$$

выражаются через действительные матрицы

$$B_1 = \mathbb{I} + At, \qquad B_2 = -\mathbb{I}t. \tag{31.116}$$

Это позволяет, согласно (31.95), представить комплексное решение (31.114) двумя действительными решениями

$$\vec{x}_{11}(t) = \operatorname{Re}\vec{x}_1(t), \qquad \vec{x}_{12}(t) = \operatorname{Im}\vec{x}_1(t).$$

Поскольку векторы $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ уже содержат четыре произвольных постоянных q_i, $i = \overline{1,4}$, то общее решение системы можно записать в виде простой суммы

$$\begin{gathered}\vec{x}(t) = \operatorname{Re}\vec{x}_1(t) + \operatorname{Im}\vec{x}_1(t) = (\vec{H}_1 + \vec{H}_2)\cos t + (\vec{H}_1 - \vec{H}_2)\sin t = \\ = \left\{\begin{pmatrix} -q_1 - q_2 - q_3 + q_4 \\ -q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \\ q_1 + q_2 + q_3 - q_4 \\ q_1 - q_2 - q_3 - q_4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2q_1 + q_2 + 2q_3 + q_4 \\ q_1 + q_3 \\ q_2 + q_4 \\ q_1 + 2q_2 + q_3 - 2q_4 \end{pmatrix}\right\}\cos t + \\ = \left\{\begin{pmatrix} -q_1 + q_2 + q_3 + q_4 \\ q_1 + q_2 + q_3 - q_4 \\ q_1 - q_2 - q_3 + q_4 \\ -q_1 - q_2 - q_3 + q_4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2q_1 + q_2 + 2q_3 - q_4 \\ q_1 - q_3 \\ q_2 - q_4 \\ q_1 - 2q_2 - q_3 - 2q_4 \end{pmatrix}\right\}\sin t.\end{gathered} \tag{31.117}$$

Переопределив произвольные постоянные как $C_1 = -2q_1 + q_2 + 2q_3 + q_4$, $C_2 = 2q_1 + q_2 + 2q_3 - q_4$, $C_4 = -q_1 - q_2 - q_3 + q_4$, $C_4 = -q_1 - q_2 - q_3 + q_4$, придём к решению, полученному в примере 31.8.

◊ Сравнив решения данного примера и примера 31.8, заключаем, что для кратных комплексных корней решение проще найти, вычислив присоединённый вектор, нежели используя формулы (31.92).

32. Метод неопределённых коэффициентов

Метод неопределённых коэффициентов можно рассматривать как некоторую комбинацию метода Эйлера и метода исключения. Как и в методе Эйлера, выписываем характеристическое уравнение системы $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$ и находим его корни.

Для простого корня λ_k решение ищем в виде вектора

$$\vec{x}_k(t) = \vec{\alpha}e^{\lambda_k t} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} e^{\lambda_k t} \tag{32.1}$$

с неизвестными компонентами (неопределёнными коэффициентами) α_l, $l = \overline{1,n}$, подлежащими определению после подстановки (32.1) в исходное уравнение.

Для простой пары комплексно сопряжённых корней $\lambda_k = \nu_k + i\omega_k$, $\lambda_k^* = \nu_k - i\omega_k$ решения ищем в виде

$$\vec{x}_k(t) = e^{\nu_k t}(\vec{\alpha}\cos\omega_k t + \vec{\beta}\sin\omega_k t) = e^{\nu_k t}\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \ldots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\cos\omega_k t + \begin{pmatrix}\beta_1\\ \ldots\\ \beta_n\end{pmatrix}\sin\omega_k t\right\}, \quad (32.2)$$

где α_l, β_l — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Для действительного корня λ_k алгебраической кратности λ_k следует определить его геометрическую кратность. Для этого необязательно вычислять собственные и присоединённые векторы. В рамках данного метода достаточно выписать матрицу $A_{\lambda_k} = A - \lambda_k \mathbb{I}$. Если $n - \operatorname{rang} A_{\lambda_k} = r_k$, т.е. геометрическая кратность корня совпадает с алгебраической, то матрица A_{λ_k} не имеет присоединённых векторов и соответствующее корню λ_k вектор-решение по-прежнему имеет вид (32.1).

В противном случае, т.е. при наличии присоединённых векторов, решение ищем в виде

$$\vec{x}_k(t) = e^{\lambda_k t}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}t + \ldots + \vec{\gamma}t^{m_k}), \quad (32.3)$$

где векторы $\vec{\alpha} = (\alpha_1 \ \ldots \ \alpha_n)^\intercal$, $\vec{\beta} = (\beta_1 \ \ldots \ \beta_n)^\intercal$, $\vec{\gamma} = (\gamma_1 \ \ldots \ \gamma_n)^\intercal$ состоят из неизвестных величин, а число $m_k = \operatorname{rang} A_{\lambda_k}$ определяет количество присоединённых векторов ($A_{\lambda_k}^{m_k} \neq 0$, но $A_{\lambda_k}^{m_k+1} = 0$).

Если характеристическое уравнение имеет кратные комплексные корни, поступаем аналогично с учётом (32.2).

Далее записываем решение исходного уравнения

$$\vec{x}(t) = \sum_k \vec{x}_k(t) \quad (32.4)$$

как сумму частных решений, отвечающих каждому корню r_k характеристического уравнения с учётом его характера. Подставив (32.4) в исходное уравнение и потребовав обращения его в тождество, найдём все неизвестные коэффициенты.

Смысл метода проиллюстрируем следующими примерами.

Пример 32.1. Найти общее решение системы (30.1) методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Исходя из того, что корни характеристического уравнения, как следует из примера 31.1, действительны и различны: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ (присоединённые векторы отсутствуют), решение уравнения (30.1) ищем в виде

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} = \vec{\alpha}e^t + \vec{\beta}e^{3t} = \begin{pmatrix}\alpha_1 e^t + \beta_1 e^{3t}\\ \alpha_2 e^t + \beta_2 e^{3t}\end{pmatrix}. \quad (32.5)$$

Подставив (32.5) в (30.1), получим

$$\begin{pmatrix}\alpha_1 e^t + \beta_1 e^{3t}\\ \alpha_2 e^t + \beta_2 e^{3t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(5\alpha_1 + 2\alpha_2)e^t + (5\beta_1 + 2\beta_2)e^{3t}\\ (-4\alpha_1 - \alpha_2)e^t + (-4\beta_1 - \beta_2)e^{3t}\end{pmatrix},$$

откуда, приравняв коэффициенты при e^t и e^{3t}, запишем

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 5\alpha_1 + 2\alpha_2, & 3\beta_1 &= 5\beta_1 + 2\beta_2,\\ \alpha_2 &= -4\alpha_1 - \alpha_2, & 3\beta_2 &= -4\beta_1 - \beta_2.\end{aligned}$$

Из первой строки найдём

$$\alpha_2 = -2\alpha_1, \qquad \beta_2 = -\beta. \tag{32.6}$$

Поскольку вторая строка является следствием первой, то решение (32.5), согласно (32.6), можно записать как

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^t + \beta_1 e^{3t} \\ -2\alpha_1 e^t - \beta_1 e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Обозначив параметры α_1 и β_1 через C_1 и C_2, соответственно, получим общее решение в виде (30.8):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{3t} \\ -2C_1 e^t - C_2 e^{3t} \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

совпадающее с (30.7).

Пример 32.2. Решить систему (31.17) методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Как следует из примера 31.2, характеристическое уравнение системы имеет два действительных корня: простой $\lambda_1 = 4$ и двукратный $\lambda_2 = 1$. Для простого корня частное решение ищем в виде (32.1):

$$\vec{x}_1(t) = \vec{\alpha} e^{4t} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Для двукратного корня $\lambda_2 = 1$ выпишем матрицу

$$A_{\lambda=1} = A - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\operatorname{rang} A_{\lambda=1} = 1$, то геометрическая кратность корня, равная $3 - 1 = 2$, совпадает с его алгебраической кратностью, т.е. присоединённые векторы отсутствуют. Поэтому решение, как и для первого корня, ищем в виде

$$\vec{x}_2(t) = \vec{\beta} e^t = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} e^t.$$

В результате можно записать

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_1(t) + \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} e^t. \tag{32.7}$$

Подставив (32.7) в (31.17), получим

$$4 \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ \beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 \\ \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 \end{pmatrix} e^t.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых экспонентах e^{4t} и e^t, имеем

$$\begin{aligned} 4\alpha_1 &= 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, & \beta_1 &= 2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3,\\ 4\alpha_2 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, & \beta_2 &= \beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3,\\ 4\alpha_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, & \beta_3 &= \beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3. \end{aligned} \tag{32.8}$$

Первый столбец (32.8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0,\\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 0,\\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

откуда найдём (см. пример 31.2)

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix}. \tag{32.9}$$

Второй столбец в (32.8) равносилен (см. пример 31.2) строке

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0,$$

откуда получим

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -\beta_2 - \beta_3\\ \beta_2\\ \beta_3 \end{pmatrix}. \tag{32.10}$$

Подставив (32.9), (32.10) в (32.7), получим общее решение системы (31.17)

$$\vec{x}(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} -\beta_2 - \beta_3\\ \beta_2\\ \beta_3 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{4t} - (\beta_2 + \beta_3) e^t\\ \alpha_1 e^{4t} + \beta_2 e^t\\ \alpha_1 e^{4t} + \beta_3 e^t \end{pmatrix}.$$

Переобозначив произвольные постоянные: $\beta_1 = C_1$, $\beta_2 = -C_2$, $\beta_3 = -C_3$, придём к решению, полученному в примере 31.2.

Пример 32.3. Решить систему дифференциальных уравнений (30.12) методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Запишем характеристическое уравнение (см. пример 31.3):

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1\\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Так как

$$\operatorname{rang}(A - \lambda \mathbb{I})|_{\lambda = -2} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} -1 & -1\\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

то характеристическая система для уравнения (30.12) имеет один присоединённый вектор и её решение, согласно (32.3), ищем в виде

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t) \end{pmatrix} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta} t) e^{2t} = \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \beta_1 t) e^{2t}\\ (\alpha_2 + \beta_2 t) e^{2t} \end{pmatrix}. \tag{32.11}$$

Подставив (32.11) в (30.12), получим

$$\begin{aligned}(2\alpha_1 + 2\beta_1 t + \beta_1)e^{2t} &= (\alpha_1 + \beta_1 t - \alpha_2 - \beta_2 t)e^{2t},\\ (2\alpha_2 + 2\beta_2 t + \beta_2)e^{2t} &= (\alpha_1 + \beta_1 t + 3\alpha_2 + 3\beta_2 t)e^{2t},\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}&2\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \qquad &&\alpha_2 = -\alpha_1 - \beta_1,\\ &2\beta_1 = \beta_1 - \beta_2, &&\beta_2 = -\beta_1,\end{aligned}$$

где α_1 и β_1 — произвольные постоянные. Обозначим $C_1 = \alpha_1$, $C_2 = \beta_1$. Окончательно получим решение

$$\begin{cases} x = (C_1 + C_2 t)e^{2t};\\ y = -(C_1 + C_2 + C_2 t)e^{2t},\end{cases}$$

совпадающее с (30.17).

Пример 32.4. Найти общее решение системы (30.20) методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Исходя из того, что (см. пример 31.4) собственное значение характеристического уравнения (30.20) единственно, действительно и имеет алгебраическую кратность $r = 3$ и геометрическую кратность $s = 2$, решение исходной системы уравнений ищем, согласно (32.3), в виде произведения $e^{\lambda t}$ на вектор — полином первого порядка по t:

$$\vec{x} = (\vec{\alpha} + \vec{\beta} t)e^{2t} = \begin{pmatrix}\alpha_1 + \beta_1 t\\ \alpha_2 + \beta_2 t\\ \alpha_3 + \beta_3 t\end{pmatrix} e^{2t}. \tag{32.12}$$

Подставив (32.12) в исходное уравнение, получим

$$\begin{pmatrix}\beta_1 + 2\alpha_1 + 2\beta_1 t\\ \beta_2 + 2\alpha_2 + 2\beta_2 t\\ \beta_3 + 2\alpha_3 + 2\beta_3 t\end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix}2(\alpha_1 + \beta_1 t) + (\alpha_2 + \beta_2 t) - (\alpha_3 + \beta_3 t)\\ 3(\alpha_2 + \beta_2 t) - (\alpha_3 + \beta_3 t)\\ (\alpha_2 + \beta_2 t) + (\alpha_3 + \beta_3 t)\end{pmatrix} e^{2t}$$

или

$$\begin{pmatrix}\beta_1 + 2\alpha_1\\ \beta_2 + 2\alpha_2\\ \beta_3 + 2\alpha_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\beta_1\\ 2\beta_2\\ 2\beta_3\end{pmatrix} t = \begin{pmatrix}2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3\\ 3\alpha_2 - \alpha_3\\ \alpha_2 + \alpha_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\beta_1 + \beta_2 - \beta_3\\ 3\beta_2 - \beta_3\\ \beta_2 + \beta_3\end{pmatrix} t.$$

Приравняв векторы при одинаковых степенях t, запишем шесть уравнений

$$\begin{aligned}&\beta_1 + 2\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \qquad &&2\beta_1 = 2\beta_1 + \beta_2 - \beta_3,\\ &\beta_2 + 2\alpha_2 = 3\alpha_2 - \alpha_3, &&2\beta_2 = 3\beta_2 - \beta_3,\\ &\beta_3 + 2\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3, &&2\beta_3 = \beta_2 + \beta_3,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}&\alpha_1 = \alpha_1, \qquad &&\beta_1 = \beta_3,\\ &\alpha_2 = \alpha_3 + \beta_3, &&\beta_2 = \beta_3,\\ &\alpha_3 = \alpha_3; &&\beta_3 = \beta_3,\end{aligned}$$

где α_1, α_3 и β_3 — произвольные постоянные. Переопределив их через новые произвольные постоянные C_1, C_2 и C_3 соотношениями $\alpha_1 = C_1 + C_2$, $\alpha_3 = C_1$, $\beta_3 = C_3$, запишем

$$\begin{aligned}&\alpha_1 = C_1 + C_2, \qquad &&\beta_1 = C_3,\\ &\alpha_2 = C_1 + C_3, &&\beta_2 = C_3,\\ &\alpha_3 = C_1; &&\beta_3 = C_3.\end{aligned} \tag{32.13}$$

Подставив (32.13) в (32.12), получим общее решение

$$
\begin{aligned}
x(t) &= (C_1 + C_2 + C_3 t)e^{2t},\\
y(t) &= (C_1 + C_3 + C_3 t)e^{2t},\\
z(t) &= (C_1 + C_3 t)e^{2t},
\end{aligned}
$$

совпадающее с решением (31.46).

Пример 32.5. Найти общее решение системы (30.32) методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Исходя из того, что собственное значение $\lambda = -1$ характеристического уравнения (31.47) единственно, действительно и имеет алгебраическую кратность $r = 3$ и геометрическую кратность $s = 1$, решение исходной системы уравнений ищем в виде произведения e^{-t} на вектор – полином второго порядка по t (ср. с полиномом (33.50) для корня геометрической кратности $s = 2$):

$$
\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2/2 \\ \alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2/2 \\ \alpha_3 + \beta_3 t + \gamma_3 t^2/2 \end{pmatrix} e^{-t} \tag{32.14}
$$

с коэффициентами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, подлежащими определению. Их можно найти, подставив (32.14) в дифференциальное уравнение (30.32):

$$
\begin{pmatrix} \beta_1 + \gamma_1 t + (\alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2/2) \\ \beta_2 + \gamma_2 t + (\alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2/2) \\ \beta_3 + \gamma_3 t + (\alpha_3 + \beta_3 t + \gamma_3 t^2/2) \end{pmatrix} e^{-t} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} 2(\alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2/2) - (\alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2/2) + 2(\alpha_3 + \beta_3 t + \gamma_3 t^2/2) \\ 5(\alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2/2) - 3(\alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2/2) + 3(\alpha_3 + \beta_3 t + \gamma_3 t^2/2) \\ -(\alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2/2) - 2(\alpha_3 + \beta_3 t + \gamma_3 t^2/2) \end{pmatrix} e^{-t}.
$$

Приравняв векторы при одинаковых степенях t, получим девять уравнений:

$$
t^2 \quad \left|\begin{aligned} -\gamma_1 &= 2\gamma_1 - \gamma_2 + 2\gamma_3, \\ -\gamma_2 &= 5\gamma_1 - 3\gamma_2 + 3\gamma_3, \\ -\gamma_3 &= -\gamma_1 - 2\gamma_3 \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \begin{aligned} 3\gamma_1 - \gamma_2 + 2\gamma_3 &= 0, \\ 5\gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3 &= 0, \\ -\gamma_1 - \gamma_3 &= 0; \end{aligned} \tag{32.15}
$$

$$
t \quad \left|\begin{aligned} \gamma_1 - \beta_1 &= 2\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3, \\ \gamma_2 - \beta_2 &= 5\beta_1 - 3\beta_2 + 3\beta_3, \\ \gamma_3 - \beta_3 &= -\beta_1 - 2\beta_3 \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \begin{aligned} 3\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 &= \gamma_1, \\ 5\beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3 &= \gamma_2, \\ -\beta_1 - \beta_3 &= \gamma_3; \end{aligned} \tag{32.16}
$$

$$
t^0 \quad \left|\begin{aligned} \beta_1 - \alpha_1 &= 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3, \\ \beta_2 - \alpha_2 &= 5\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3\alpha_3, \\ \beta_3 - \alpha_3 &= -\alpha_1 - 2\alpha_3 \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \begin{aligned} 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= \beta_1, \\ 5\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= \beta_2, \\ -\alpha_1 - \alpha_3 &= \beta_3; \end{aligned} \tag{32.17}
$$

Система (32.15) совпадает с системой (31.50), и, следовательно, её решение имеет вид

$$
\gamma_1 = \gamma_1, \qquad \gamma_2 = \gamma_1, \qquad \gamma_3 = -\gamma_1. \tag{32.18}
$$

Подставив (32.18) в (32.16), получим систему

$$
\begin{aligned}
3\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3 &= \gamma_1,\\
5\beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3 &= \gamma_1,\\
-\beta_1 - \beta_3 &= -\gamma_1,
\end{aligned}
$$

аналогичную (31.54). Выписав расширенную матрицу этой системы и проведя над ней элементарные преобразования, как и в (31.55), получим

$$A^{(0)} = \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & \gamma_1 \\ 5 & -2 & 3 & \gamma_1 \\ -1 & 0 & -1 & -\gamma_1 \end{array}\right) \overset{S_2-2S_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 2 & \gamma_1 \\ -1 & 0 & -1 & -\gamma_1 \\ -1 & 0 & -1 & -\gamma_1 \end{array}\right) \underset{S_3-S_2}{\overset{S_1+2S_2}{\sim}}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & -\gamma_1 \\ -1 & 0 & -1 & -\gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда найдём решения системы (32.16):

$$\beta_1 = \beta_1, \qquad \beta_2 = \gamma_1 + \beta_1, \qquad \beta_3 = \gamma_1 - \beta_1. \tag{32.19}$$

Теперь, подставив (32.19) в (32.17), получим систему

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 &= \beta_1, \\ 5\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &= \gamma_1 + \beta_1, \\ -\alpha_1 - \alpha_3 &= \gamma_1 - \beta_1, \end{aligned}$$

аналогичную предыдущей. Выполнив для расширенной матрицы этой системы те же самые элементарные преобразования

$$A^{(0)} = \left(\begin{array}{rrr|c} 3 & -1 & 2 & \beta_1 \\ 5 & -2 & 3 & \gamma_1 + \beta_1 \\ -1 & 0 & -1 & \gamma_1 - \beta_1 \end{array}\right) \overset{S_2-2S_1}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|c} 3 & -1 & 2 & \beta_1 \\ -1 & 0 & -1 & \gamma_1 - \beta_1 \\ -1 & 0 & -1 & \gamma_1 - \beta_1 \end{array}\right) \underset{S_3-S_2}{\overset{S_1+2S_2}{\sim}}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & 0 & 2\gamma_1 - \beta_1 \\ -1 & 0 & -1 & \gamma_1 - \beta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

найдём нетривиальные решения системы

$$\alpha_1 = \alpha_1, \qquad \alpha_2 = \alpha_1 - \beta_1 - 2\gamma_1, \qquad \alpha_3 = -\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1. \tag{32.20}$$

Теперь, подставив коэффициенты (32.18)–(32.20) в (32.14), получим общее решение системы дифференциальных уравнений (30.32)

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2/2 \\ \alpha_1 - \beta_1 - 2\gamma_1 + (\beta_1 + \gamma_1)t + \gamma_1 t^2/2 \\ -\alpha_1 + \beta_1 - \gamma_1 + (-\beta_1 + \gamma_1)t + \gamma_1 t^2/2 \end{pmatrix} e^{-t}, \tag{32.21}$$

где α_1, β_1 и γ_1 — произвольные постоянные. Переопределив их через новые произвольные постоянные C_1, C_2 и C_3 соотношениями $\alpha_1 = C_1$, $\beta_1 = C_2$, $\gamma_1 = C_3$, получим общее решение, совпадающее с решением (30.42).

Пример 32.6. Найти общее решение системы (30.43) методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Поскольку характеристическое уравнение имеет два простых (кратности $r = 1$) комплексных корня $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$, решение исходного уравнения ищем в виде

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos 2t + \beta_1 \sin 2t \\ \alpha_2 \cos 2t + \beta_2 \sin 2t \end{pmatrix} e^{t}. \tag{32.22}$$

Подставив (30.49) в (30.43), найдём

$$\begin{pmatrix}(\alpha_1+2\beta_1)\cos 2t+(\beta_1-2\alpha_1)\sin 2t\\(\alpha_2+2\beta_2)\cos 2t+(\beta_2-2\alpha_2)\sin 2t\end{pmatrix}e^t=$$
$$=\begin{pmatrix}(5\alpha_1+10\alpha_2)\cos 2t+(5\beta_1+10\beta_2)\sin 2t\\(-2\alpha_1-3\alpha_2)\cos 2t+(-2\beta_1-3\beta_2)\sin 2t\end{pmatrix}e^t.$$

Отсюда, приравняв коэффициенты при $\cos 2t$ и $\sin 2t$, получим

$$\begin{array}{ll}\alpha_1+2\beta_1=5\alpha_1+10\alpha_2, & \beta_1-2\alpha_1=5\beta_1+10\beta_2,\\ \alpha_2+2\beta_2=-2\alpha_1-3\alpha_2, & \beta_2-2\alpha_2=-2\beta_1-3\beta_2.\end{array}\tag{32.23}$$

Выразив из уравнений первой строки

$$\alpha_1=\frac{\beta_1-5\alpha_2}{2},\qquad \beta_1=\frac{-\alpha_1-5\beta_2}{2}$$

и подставив их в уравнения второй строки, запишем

$$\begin{aligned}\alpha_2-2\beta_1&=\beta_1,\\2\alpha_2+\beta_1&=-\alpha_1.\end{aligned}$$

Поскольку определитель этой системы

$$\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=5,$$

то по правилу Крамера

$$\alpha_2=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}\beta_1&-2\\-\alpha_1&1\end{vmatrix}=\frac{\beta_1-2\alpha_1}{5}$$

и

$$\beta_2=\frac{1}{5}\begin{vmatrix}1&\beta_1\\2&-\alpha_1\end{vmatrix}=\frac{-\alpha_1-2\beta_1}{5}.$$

С учётом этого решение (32.22) примет вид

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\cos 2t+\beta_1\sin 2t\\\frac{1}{5}(-2\alpha_1+\beta_1)\cos 2t-\frac{1}{5}(\alpha_1+2\beta_1)\sin 2t\end{pmatrix}e^t,$$

где α_1,β_1 — произвольные постоянные. Введя обозначения $\alpha_1=C_1$, $\beta_1=C_2$, получим решение в форме (30.49).

Пример 32.7. Решить систему дифференциальных уравнений (30.50) методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Исходя из того, что характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряжённых корня $\lambda_{1,2}=\pm i$ кратности $r=2$, решение системы ищем в виде

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\\x_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha_1+\beta_1t)\cos t+(\gamma_1+\delta_1t)\sin t\\(\alpha_2+\beta_2t)\cos t+(\gamma_2+\delta_2t)\sin t\\(\alpha_3+\beta_3t)\cos t+(\gamma_3+\delta_3t)\sin t\\(\alpha_4+\beta_4t)\cos t+(\gamma_4+\delta_4t)\sin t\end{pmatrix}.\tag{32.24}$$

Подстановка (32.24) в (30.50) даёт

$$\begin{pmatrix}(\beta_1+\gamma_1+\delta_1 t)\cos t+(\delta_1-\alpha_1-\beta_1 t)\sin t\\ (\beta_2+\gamma_2+\delta_2 t)\cos t+(\delta_2-\alpha_2-\beta_2 t)\sin t\\ (\beta_3+\gamma_3+\delta_3 t)\cos t+(\delta_3-\alpha_3-\beta_3 t)\sin t\\ (\beta_4+\gamma_4+\delta_4 t)\cos t+(\delta_4-\alpha_4-\beta_4 t)\sin t\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(\alpha_2+\beta_2 t)\cos t+(\gamma_2+\delta_2 t)\sin t\\ (\alpha_3+\beta_3 t)\cos t+(\gamma_3+\delta_3 t)\sin t\\ (\alpha_4+\beta_4 t)\cos t+(\gamma_4+\delta_4 t)\sin t\\ [-\alpha_1-2\alpha_3-(\beta_1+2\beta_3)t]\cos t+[-\gamma_1-2\gamma_3-(\delta_1+2\delta_3)t]\sin t\end{pmatrix}.$$

Приравняв коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ из правой и левой частей равенства, получим восемь уравнений для определения неизвестных α_i, β_i, γ_i, δ_i:

$$\begin{aligned}
&\beta_1+\gamma_1+\delta_1 t=\alpha_2+\beta_2 t, && \delta_1-\alpha_1-\beta_1 t=\gamma_2+\delta_2 t,\\
&\beta_2+\gamma_2+\delta_2 t=\alpha_3+\beta_3 t, && \delta_2-\alpha_2-\beta_2 t=\gamma_3+\delta_3 t,\\
&\beta_3+\gamma_3+\delta_3 t=\alpha_4+\beta_4 t, && \delta_3-\alpha_3-\beta_3 t=\gamma_4+\delta_4 t,\\
&\beta_4+\gamma_4+\delta_4 t=-\alpha_1-2\alpha_3-(\beta_1+2\beta_3)t, && \delta_4-\alpha_4-\beta_4 t=-\gamma_1-2\gamma_3-(\delta_1+2\delta_3)t.
\end{aligned}$$

Теперь приравняем в каждом столбце коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$t^1\quad\left|\begin{array}{ll}\delta_1=\beta_2, & -\beta_1=\delta_2,\\ \delta_2=\beta_3, & -\beta_2=\delta_3,\\ \delta_3=\beta_4, & -\beta_3=\delta_4,\\ \delta_4=-(\beta_1+2\beta_3), & -\beta_4=-(\delta_1+2\delta_3),\end{array}\right. \tag{32.25}$$

$$t^0\quad\left|\begin{array}{ll}\beta_1+\gamma_1=\alpha_2, & \delta_1+\alpha_1=\gamma_2,\\ \beta_2+\gamma_2=\alpha_3, & \delta_2+\alpha_2=\gamma_3,\\ \beta_3+\gamma_3=\alpha_4, & \delta_3+\alpha_3=\gamma_4,\\ \beta_4+\gamma_4=-\alpha_1-2\alpha_3, & \delta_4+\alpha_4=-\gamma_1-2\gamma_3.\end{array}\right. \tag{32.26}$$

Из первых трех уравнений обоих столбцов найдём

$$\beta_2=\delta_1,\quad \beta_3=-\beta_1,\quad \beta_4=-\delta_1,\quad \delta_2=-\beta_1,\quad \delta_3=-\delta_1,\quad \delta_4=\beta_1. \tag{32.27}$$

Два последних уравнения (32.25) при этом обращаются в тождества.

Аналогично первые три строки из (32.26) дадут

$$\begin{array}{ll}\alpha_2=\beta_1+\gamma_1, & \gamma_2=\delta_1-\alpha_1,\\ \alpha_3=2\delta_1-\alpha_1, & \gamma_3=-2\beta_1-\gamma_1,\\ \alpha_4=-3\beta_1-\gamma_1, & \gamma_4=-3\delta_1+\alpha_1.\end{array} \tag{32.28}$$

Подставив (32.27) и (32.28) в (32.24), получим

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(\alpha_1+\beta_1 t)\cos t+(\gamma_1+\delta_1 t)\sin t\\ (\beta_1+\gamma_1+\delta_1 t)\cos t+(\delta_1-\alpha_1-\beta_1 t)\sin t\\ (2\delta_1-\alpha_1-\beta_1 t)\cos t+(-2\beta_1-\gamma_1-\delta_1 t)\sin t\\ (-3\beta_1-\gamma_2-\delta_1 t)\cos t+(-3\delta_1+\alpha_1+\beta_1 t)\sin t\end{pmatrix}. \tag{32.29}$$

Переобозначив в (32.29) произвольные постоянные $\alpha_1=C_1$, $\beta_1=C_2$, $\gamma_1=C_3$, $\delta_1=C_4$, получим решение в форме (31.80).

Пример 32.8. Найти общее решение системы (30.62) методом неопределённых коэффициентов.

Решение. Исходя из того, что все корни характеристического уравнения простые: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\lambda_3 = 2 - 3i$, решение системы ищем в виде

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^t + e^{2t}(\beta_1 \cos 3t + \gamma_1 \sin 3t) \\ \alpha_2 e^t + e^{2t}(\beta_2 \cos 3t + \gamma_2 \sin 3t) \\ \alpha_3 e^t + e^{2t}(\beta_3 \cos 3t + \gamma_3 \sin 3t) \end{pmatrix}. \tag{32.30}$$

Подстановка (32.30) в (30.62) даёт

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 e^t + e^{2t}[(2\beta_1 + 3\gamma_1)\cos 3t + (2\gamma_1 - 3\beta_1)\sin 3t] \\ \alpha_2 e^t + e^{2t}[(2\beta_2 + 3\gamma_2)\cos 3t + (2\gamma_2 - 3\beta_2)\sin 3t] \\ \alpha_3 e^t + e^{2t}[(2\beta_3 + 3\gamma_3)\cos 3t + (2\gamma_3 - 3\beta_3)\sin 3t] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (4\alpha_1 + 7\alpha_2 - 5\alpha_3)e^t + e^{2t}[(4\beta_1 + 7\beta_2 - 5\beta_3)\cos 3t + (4\gamma_1 + 7\gamma_2 - 5\gamma_3)\sin 3t] \\ (-4\alpha_1 + 5\alpha_2)e^t + e^{2t}[(-4\beta_1 + 5\beta_3)\cos 3t + (-4\gamma_1 + 5\gamma_2)\sin 3t] \\ (\alpha_1 + 9\alpha_2 - 4\alpha_3)e^t + e^{2t}[(\beta_1 + 9\beta_2 - 4\beta_3)\cos 3t + (\gamma_1 + 9\gamma_2 - 4\gamma_3)\sin 3t] \end{pmatrix}.$$

Приравняв коэффициенты при e^t из правой и левой частей равенства, получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 4\alpha_1 + 7\alpha_2 - 5\alpha_3, \\ \alpha_2 &= -4\alpha_1 + 5\alpha_3, \\ \alpha_3 &= \alpha_1 + 9\alpha_2 - 4\alpha_3, \end{aligned} \tag{32.31}$$

а приравняв коэффициенты при $e^{2t}\cos 3t$ и $e^{2t}\sin 3t$, соответственно

$$\begin{aligned} 2\beta_1 + 3\gamma_1 &= 4\beta_1 + 7\beta_2 - 5\beta_3, & 2\gamma_1 - 3\beta_1 &= 4\gamma_1 + 7\gamma_2 - 5\gamma_3, \\ 2\beta_2 + 3\gamma_2 &= -4\beta_1 + 5\beta_2, & 2\gamma_2 - 3\beta_2 &= -4\gamma_1 + 5\gamma_2, \\ 2\beta_3 + 3\gamma_3 &= \beta_1 + 9\beta_2 - 4\beta_3, & 2\gamma_3 - 3\beta_3 &= \gamma_1 + 9\gamma_2 - 4\gamma_3. \end{aligned} \tag{32.32}$$

Из уравнений (32.31) найдём $\alpha_2 = \alpha_1$, $\alpha_3 = 2\alpha_1$, где α_1 – произвольная постоянная. Из второй строки (32.32) получим $\beta_2 = 2(\beta_1 + \gamma_1)/3$, $\gamma_2 = 2(-\beta_1 - \gamma_1)/3$. Подставив их в уравнения первой строки, определим $\beta_3 = (4\beta_1 + \gamma_1)/3$, $\gamma_3 = (4\gamma_1 - \beta_1)/3$, где β_1 и γ_1 также являются произвольными постоянными. Подстановка найденных значений в последнюю строку уравнений (32.31) и (32.32) обращает их в тождества, а подстановка в (32.30) даёт общее решение в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= \alpha_1 e^t + e^{2t}(\beta_1 \cos t + \gamma_1 \sin t), \\ y(t) &= \alpha_1 e^t + e^{2t}\Big(\frac{2\beta_1 + 2\gamma_1}{3}\cos 3t + \frac{-2\beta_1 + 2\gamma_1}{3}\sin 3t\Big), \\ z(t) &= 2\alpha_1 e^t + e^{2t}\Big(\frac{4\beta_1 + \gamma_1}{3}\cos 3t + \frac{4\gamma_1 - \beta_1}{3}\sin 3t\Big). \end{aligned}$$

Положив здесь $\alpha_1 = \bar{C}_1$, $\beta_1 = 3\bar{C}_2$, $\gamma_1 = 3\bar{C}_3$, получим (30.69), (30.70).

33. Матричный метод

♦ *Экспонентой e^A матрицы A* называется сумма ряда

$$e^A = \mathbb{I} + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j, \tag{33.1}$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица.

Свойства матричной экспоненты:

1. Если $AB = BA$, то

$$\text{а)}\ e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A,$$
$$\text{б)}\ Be^A = e^A B.$$

2. Если $A = SBS^{-1}$, то
$$e^A = Se^B S^{-1}. \tag{33.2}$$

Действительно, поскольку
$$A^k = (SBS^{-1})^k = \underbrace{SBS^{-1} \cdot SBS^{-1} \cdots SBS^{-1}}_{k \text{ раз}} = SB\mathbb{I} \cdot B\mathbb{I} \cdots BS^{-1} = SB^k S^{-1},$$
то
$$e^A = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{SB^j S^{-1}}{j!} = S\bigg(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}\bigg) S^{-1} = Se^B S^{-1}.$$

3. Матрица
$$X(t) = e^{At} \tag{33.3}$$
является фундаментальной матрицей (матрицантом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x} = A\vec{x}$, т.е.
$$X' = AX, \quad X(0) = \mathbb{I}.$$

Доказательство непосредственно следует из соотношений
$$X(0) = e^0 = \mathbb{I} + 0 = \mathbb{I}.$$
$$X' = e^{At} A = Ae^{At} = AX.$$

Пример 33.1. Матричным методом найти матрицант системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases} \tag{33.4}$$

Решение. Систему (33.4) можно записать в виде
$$\vec{x}\,' = A\vec{x}, \quad \text{где} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда из (33.3) найдём
$$X(t) = \exp\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \frac{1}{n!} t^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2k} \frac{1}{(2k)!} t^{2n} + \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \frac{1}{(2k+1)!} t^{2k+1}.$$

Вычислив
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\mathbb{I}, \quad \mathbb{I}^3 = -\mathbb{I}A = -A, \quad A^4 = -AA = \mathbb{I}, \quad A^5 = A,$$

видим, что
$$A^{2k} = (-1)^k \mathbb{I}, \quad A^{2k+1} = (-1)^k A. \tag{33.5}$$
Тогда
$$X(t) = \mathbb{I} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}.$$
Окончательно запишем
$$X(t) = \mathbb{I} \cos t + A \sin t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

◊ Решение системы (33.4) удалось найти только благодаря соотношениям (33.5), позволившим просуммировать ряд (33.1).

Для произвольной матрицы A найти явный вид матрицы A^n удаётся далеко не всегда. Однако ряд (33.1) можно просуммировать практически для любой неособой матрицы, если воспользоваться её жордановой формой. Процедура приведения матрицы A к жордановой форме изложена в приложениях А2, А3.

Запишем задачу на собственные значения и собственные векторы матрицы (оператора) A системы обыкновенных дифференциальных уравнений (28.6):
$$(A - \lambda \mathbb{I})\vec{g} = 0.$$

Пусть λ_j — собственные значения (характеристические числа) с алгебраической кратностью r_j, $j = \overline{1, l}$; $r_1 + r_2 + \ldots + r_l = n$, а $\vec{e}_k$, $k = \overline{1, n}$, — n-мерный базис, состоящий из собственных векторов, которые при необходимости дополняются присоединёнными векторами (см. приложение А3.1).

Обладая этой информацией, мы можем просто записать общее решение системы дифференциальных уравнений, используя метод Эйлера. Однако матричный метод позволяет непосредственно вычислить матрицант (33.3) системы ОДУ (28.6) и, как следствие, записать общее решение в форме Коши.

Формула (33.3) матрицанта $X(t)$ предполагает вычисление матричной экспоненты, т.е. суммирование ряда (33.1). Эту задачу можно решить, если от матрицы A соотношением (33.2) перейти к матрице J_A, алгебраические степени J_A^n которой легко вычисляются.

Здесь мы воспользуемся известным из линейной алгебры способом представления неособой матрицы A её нормальной жордановой формой J_A посредством соотношения
$$A = S J_A S^{-1}, \tag{33.6}$$
где S — квадратная матрица, состоящая из координат собственных и присоединённых векторов $\vec{e}_k$, $k = \overline{1, n}$, матрицы A, т.е.
$$S = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \end{pmatrix}. \tag{33.7}$$

Матрица J_A имеет блочно-диагональную форму
$$J_A = \begin{pmatrix} J_{r_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & 0 & \ldots & \\ & & & J_{r_l}(\lambda_l) \end{pmatrix}, \tag{33.8}$$
где $J_{r_j}(\lambda_j)$, $j = \overline{1, l}$, — квадратные матрицы размера r_j, т.е. кратности корня λ_j. Это позволяет вычислить степени J_A как
$$J_A^n = \begin{pmatrix} J_{r_1}^n(\lambda_1) & & & 0 \\ & J_{r_2}^n(\lambda_2) & & \\ & 0 & \ldots & \\ & & & J_{r_l}^n(\lambda_l) \end{pmatrix}. \tag{33.9}$$

Но тогда, согласно (33.1), можно записать

$$e^{J_A} = \Big\{\mathbb{I}+J_A+\frac{1}{2!}J_A^2+\ldots+\frac{1}{n!}J_A^n\Big\} = \begin{pmatrix} e^{J_{r_1}(\lambda_1)} & & & \\ & e^{J_{r_2}(\lambda_2)} & & 0 \\ & 0 & \ldots & \\ & & & e^{J_{r_l}(\lambda_l)} \end{pmatrix}, \quad (33.10)$$

где под $e^{J_{r_j}(\lambda_j)}$, $j=\overline{1,l}$, подразумевается квадратная матрица размера r_j, определяемая равенством (33.1).

◊ Если через $\mathbb{I}_{r_j}$ обозначить единичную матрицу размера r_j, т.е.

$$\mathbb{I}_{r_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}_{r_j\times r_j},$$

то (33.10) можно записать в виде

$$e^{J_A} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{r_1}e^{J_{r_1}(\lambda_1)} & & & \\ & \mathbb{I}_{r_2}e^{J_{r_2}(\lambda_2)} & & 0 \\ & 0 & \ldots & \\ & & & \mathbb{I}_{r_l}e^{J_{r_l}(\lambda_l)} \end{pmatrix}. \quad (33.11)$$

Размер матрицы e^{J_A} равен n, так как $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_l$.

А теперь с учётом (33.10) и согласно приложению A2 имеем

$$e^A = Se^{J_A}S^{-1} = S\begin{pmatrix} e^{J_{r_1}(\lambda_1)} & & & \\ & e^{J_{r_2}(\lambda_2)} & & 0 \\ & 0 & \ldots & \\ & & & e^{J_{r_l}(\lambda_l)} \end{pmatrix}S^{-1}. \quad (33.12)$$

Таким образом, вычисление матричной экспоненты (33.3), определяющей матрицант системы (28.6), согласно (33.12):

$$e^{At} = Se^{J_At}S^{-1} = S\begin{pmatrix} e^{J_{r_1}(\lambda_1)t} & & & \\ & e^{J_{r_2}(\lambda_2)t} & & 0 \\ & 0 & \ldots & \\ & & & e^{J_{r_l}(\lambda_l)t} \end{pmatrix}S^{-1}, \quad (33.13)$$

сводится к вычислению матричных экспонент вида $e^{J_{r_j}(\lambda_j)t}$, $j=\overline{1,l}$. Матрицы-блоки $J_{r_j}(\lambda_j)$ обладают специфической структурой, позволяющей легко вычислить $e^{J_{r_j}(\lambda_j)t}$, а именно: $[J_{r_j}(\lambda_j)-\lambda_j\mathbb{I}_{r_j}]^{r_j}=0$.

Отметим, что с помощью матрицы S (33.7) мы можем непосредственно из (33.6) вычислить матрицу J_A (и тем самым $J_{r_j}(\lambda_j)$) как

$$J_A = S^{-1}AS. \quad (33.14)$$

Ниже вычислим J_A для конкретных матриц A. Начнём с действительных и различных корней.

I. Если λ_j — простой корень, то его кратность $r_j=1$. Это означает, во-первых, что ему соответствует единственный собственный вектор $\vec{e}_j$, а во-вторых, что матрица $J_1(\lambda_j)$ — квадратная матрица первого порядка, т.е. число $J_1(\lambda_j) = \lambda_j$. С учётом этого

$$e^{J_1(\lambda_j)t} = e^{\lambda_j t}. \tag{33.15}$$

II. Если λ_j — корень кратности два ($r_j = 2$), то матрица $J_2(\lambda_j)$ является квадратной матрицей второго порядка. При этом, если корню λ_j соответствуют два собственных вектора (геометрическая и алгебраическая кратности совпадают), то она имеет вид

$$J_2(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j \mathbb{I}_2, \tag{33.16}$$

а если ему соответствуют один собственный вектор и один присоединённый (геометрическая кратность меньше алгебраической), то она имеет вид

$$J_2(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j \mathbb{I}_2 + \varepsilon_1, \tag{33.17}$$

где матрица

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{33.18}$$

является нильпотентной матрицей с нулевым квадратом:

$$\varepsilon_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{33.19}$$

С учётом этого для матрицы (33.16) имеем

$$e^{J_2(\lambda_j)t} = e^{\lambda_j t \mathbb{I}_2} = \mathbb{I}_2 e^{\lambda_j t}, \tag{33.20}$$

а для матрицы (33.17) с учётом (33.19) и того факта, что единичная матрица коммутирует с любой, запишем

$$\begin{gathered} e^{J_2(\lambda_j)t} = e^{\lambda_j t \mathbb{I}_2 + t\varepsilon_1} = e^{\lambda_j t \mathbb{I}_2} e^{t\varepsilon_1} = e^{\lambda_j t} \mathbb{I}_2 (\mathbb{I}_2 + t\varepsilon_1) = e^{\lambda_j t} T_1, \\ T_1 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{33.21}$$

III. Если λ_j — корень кратности три ($r_j = 3$), то матрица $J_3(\lambda_j)$ является квадратной матрицей третьего порядка. При этом, если корню λ_j соответствуют три линейно независимых собственных вектора, то она имеет вид

$$J_3(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j \mathbb{I}_3. \tag{33.22}$$

Если корню λ_j соответствуют два собственных вектора и один присоединённый, то она имеет вид

$$J_3(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(\lambda_j) & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{pmatrix}, \tag{33.23}$$

где $J_2(\lambda_j)$ определена равенством (33.17). Если же корню λ_j соответствуют один собственный вектор и два присоединённых, то

$$J_3(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j \mathbb{I}_3 + \varepsilon_2, \tag{33.24}$$

где матрица

$$\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{33.25}$$

является нильпотентной матрицей с отличным от нуля квадратом:

$$\varepsilon_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{33.26}$$

и нулевым кубом:

$$\varepsilon_1^3 = \varepsilon_1^2 \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{33.27}$$

С учётом этого для матрицы (33.22) имеем

$$e^{J_3(\lambda_j)t} = e^{\lambda_j t \mathbb{I}_3} = e^{\lambda_j t}\mathbb{I}_3, \tag{33.28}$$

а для матрицы (33.24) с учётом (33.21), соответственно,

$$e^{J_3(\lambda_j)t} = e^{\begin{pmatrix} J_2(\lambda_j)t & 0 \\ 0 & \lambda_j t \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{J_2(\lambda_j)t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33.29}$$

и, наконец, для матрицы (33.25) с учётом (33.26), (33.27) можем записать

$$e^{J_3(\lambda_j)t} = e^{(\lambda_j t \mathbb{I}_3 + t\varepsilon_2)t} = e^{\lambda_j t \mathbb{I}_3} e^{\varepsilon_2 t} = e^{\lambda_j t}\mathbb{I}_3 \Big(\mathbb{I}_3 + t\varepsilon_2 + \frac{t^2}{2!}\varepsilon_2^2\Big) = e^{\lambda_j t} T_2,$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{T_1} & \begin{matrix} t^2/2! \\ t \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2! \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{33.30}$$

Полученные результаты обобщаются на случай корня любой кратности.

Пусть λ_j — корень кратности l ($r_j = l$). Это означает, что матрица $J_l(\lambda_j)$ является квадратной матрицей размера l:

а) все векторы собственные, т.е. присоединённые векторы отсутствуют

$$e^{J_l(\lambda_j)t} = e^{\lambda_j t}\mathbb{I}_l; \tag{33.31}$$

б) имеется k присоединённых векторов ($1 \leqslant k \leqslant l - k$) ($k$ единиц над главной диагональю в жордановом блоке)

$$e^{J_l(\lambda_j)t} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} T_k & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{l-k-1} \end{pmatrix}; \tag{33.32}$$

в) один собственный вектор, т.е. $l - 1$ присоединённый вектор

$$e^{J_l(\lambda_j)t} = e^{\lambda_j t} T_{l-1}. \tag{33.33}$$

Здесь

$$T_k = \begin{pmatrix} 1 & t & \ldots & t^k/k! \\ 0 & 1 & \ldots & t^{k-1}/(k-1)! \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & t \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}. \tag{33.34}$$

Рассмотрим далее случай, когда корни характеристического уравнения **действительны и различны**.

Если характеристическое уравнение системы (28.6) имеет n различных корней λ_j, $j=\overline{1,n}$, то матрица J_A запишется следующим образом:

$$J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}. \tag{33.35}$$

Поскольку каждому корню соответствует один собственный вектор, то, согласно (33.31),

$$e^{J_At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1t} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2t} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_nt}\end{pmatrix},$$

и матрицант системы определяется соотношением

$$X(t)=S\begin{pmatrix}e^{\lambda_1t} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & e^{\lambda_2t} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_nt}\end{pmatrix}S^{-1}. \tag{33.36}$$

Пример 33.2. Найти общее решение системы (30.1) матричным методом.

Решение. В примере 31.1 эта система была решена методом Эйлера. Из результатов этого примера следует, что характеристическое уравнение имеет два действительных различных корня $\lambda_1=1$ и $\lambda_2=3$, которым соответствуют два собственных вектора

$$\vec g_1=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad \vec g_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

и матрица

$$S=(\vec g_1\quad \vec g_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Вычислив

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix},$$

по формуле (33.36) найдём матрицант системы:

$$X(t)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t & 0\\ 0 & e^{3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-e^t+2e^{3t} & -e^t+2e^{3t}\\ 2e^t-2e^{3t} & 2e^t-e^{3t}\end{pmatrix}. \tag{33.37}$$

Несложно проверить, что

$$X(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Пусть

$$\vec x_0=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$$

— некоторый произвольный вектор. Тогда система (30.1) имеет общее решение в форме Коши

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0(-e^t + 2e^{3t}) + y_0(-e^t + 2e^{3t}) \\ x_0(2e^t - 2e^{3t}) + y_0(2e^t - e^{3t}) \end{pmatrix}. \tag{33.38}$$

Если $\vec{x}_0$ задаёт начальные условия, т.е.

$$\vec{x}(t)\big|_{t=0} = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{33.39}$$

то (33.38) определяет решение задачи Коши для (30.1) с начальными условиями (33.39).

Если же произвольные постоянные переопределить как $-(x_0 + y_0) = C_1$ и $2x_0 + y_0 = C_2$, то (33.39) перейдёт в общее решение (30.8), полученное ранее.

$\Diamond$ Для матрицы системы (30.1)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

мы воспользовались её жордановой формой, вытекающей из (33.35):

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Этот же результат можно получить, исходя из равенства (33.14):

$$J_A = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Случай кратных корней без присоединённых векторов. Пусть характеристическое уравнение системы (26.4) имеет действительные корни λ_j кратности r_j, $j = \overline{1, l}$, причём $r_1 + r_2 + \ldots + r_l = n$, и каждому из них соответствует собственный вектор $\vec{g}_{r_j}$. Это означает, что присоединённые векторы отсутствуют и матрица J_A имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbb{I}_{r_1} & & 0 \\ & \lambda_2\mathbb{I}_{r_2} & \\ 0 & \ldots & \\ & & \lambda_l\mathbb{I}_{r_l} \end{pmatrix}. \tag{33.40}$$

Ввиду отсутствия присоединённых векторов и согласно (33.31) имеем

$$e^{J_A t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\mathbb{I}_{r_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t}\mathbb{I}_{r_2} & \\ 0 & \ldots & \\ & & e^{\lambda_l t}\mathbb{I}_{r_l} \end{pmatrix},$$

откуда матрицант системы определится произведением

$$X(t) = S\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t}\mathbb{I}_{r_1} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t}\mathbb{I}_{r_2} & \\ 0 & \ldots & \\ & & e^{\lambda_l t}\mathbb{I}_{r_l} \end{pmatrix}S^{-1}. \tag{33.41}$$

Пример 33.3. Найти общее решение системы (31.17) матричным методом.

Решение. В примере 31.2 эта система была решена методом Эйлера. Из результатов этого примера следует, что характеристическое уравнение системы имеет два действительных корня: простой $\lambda_1 = 4$ ($r_1 = 1$) и двукратный $\lambda_2 = 1$ ($r_2 = 2$). Им соответствуют три собственных вектора

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

и матрица

$$S = (\vec{g}_1 \quad \vec{g}_2 \quad \vec{g}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, согласно (33.40), можем записать

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{33.42}$$

и соответственно

$$e^{J_A t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Вычислив

$$S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

по формуле (33.41) найдём матрицант системы

$$X(t) = \begin{pmatrix} \tau_1(t) & \tau(t) & \tau(t) \\ \tau(t) & \tau_1(t) & \tau(t) \\ \tau(t) & \tau(t) & \tau_1(t) \end{pmatrix}, \tag{33.43}$$

где

$$\tau_1(t) = \frac{e^{4t} + 2e^t}{3}, \qquad \tau(t) = \frac{e^{4t} - e^t}{3}.$$

Несложно проверить, что

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поскольку $\tau_1(0) = 1$, $\tau(0) = 0$.

Пусть теперь

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix}$$

— некоторый произвольный вектор. Тогда общее решение системы (31.17) в форме Коши имеет вид

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = X(t)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10}\tau_1(t) + x_{20}\tau(t) + x_{30}\tau(t) \\ x_{10}\tau(t) + x_{20}\tau_1(t) + x_{30}\tau(t) \\ x_{10}\tau(t) + x_{20}\tau(t) + x_{30}\tau_1(t) \end{pmatrix}. \tag{33.44}$$

Решение задачи Коши для (31.17) с начальными условиями

$$\vec{x}(t)|_{t=0} = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{pmatrix} \tag{33.45}$$

можно представить в виде

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} (x_{10} + x_{20} + x_{30})e^{4t} + (2x_{10} - x_{20} - x_{30})e^{t} \\ (x_{10} + x_{20} + x_{30})e^{4t} + (-x_{10} + 2x_{20} - x_{30})e^{t} \\ (x_{10} + x_{20} + x_{30})e^{4t} + (-x_{10} - x_{20} + 2x_{30})e^{t} \end{pmatrix}.$$

Переопределив произвольные постоянные: $x_{10}+x_{20}+x_{30} = C_1$, $x_{10}-2x_{20}+x_{30} = C_2$, $x_{10}+x_{20}-2x_{30} = C_3$, придём к решению, полученному ранее в примере 31.2.

$\Diamond$ Для матрицы системы (31.17)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

мы воспользовались жордановой формой (33.42), частным случаем (33.40). Этот же результат можно получить из (33.14):

$$J_A = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай кратных корней с присоединёнными векторами. В этом случае в зависимости от количества присоединённых векторов матрица $e^{J_A t}$ будет содержать по меньшей мере одну блочную матрицу вида (33.32) или (33.33). Записать матрицант в общем виде в этом случае — достаточно трудоёмкая задача, поэтому выпишем его для конкретных примеров.

Пример 33.4. Найти общее решение системы (30.12) матричным методом.

Решение. В примере 31.3 было показано, что системе (30.12) соответствует один двукратный характеристический корень $\lambda = 2$ с собственным

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

и присоединённым

$$\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

векторами.

В этом базисе построим матрицу

$$S = (\vec{g}_1 \quad \vec{g}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

и вычислим обратную ей:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{33.46}$$

системы (30.12) её жорданова форма имеет вид (33.17):

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{33.47}$$

то $e^{J_A t}$ найдётся как (33.21):

$$e^{J_A t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрицант — как (33.13):

$$X(t) = Se^{J_A t}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}.$$

Несложно проверить, что

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

— некоторый произвольный вектор. Тогда система (30.12) имеет общее решение в форме Коши

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0(1-t) + y_0 t \\ x_0 t + y_0(1+t) \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{33.48}$$

Если $\vec{x}_0$ задаёт начальные условия

$$\vec{x}(t)|_{t=0} = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{33.49}$$

то (33.48) определяет решение задачи Коши для (30.12) с начальными условиями (33.49).

Переписав решение (33.48) в виде

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0 - (x_0 + y_0)t \\ y_0 + (x_0 + y_0)t \end{pmatrix} e^{2t}$$

и переобозначив произвольные постоянные: $x_0 = C_1$, $x_0 + y_0 = C_2$, приходим к решению, полученному ранее в примере 31.3.

♢ Для матрицы (33.46) мы воспользовались её жордановой формой (33.47), вытекающей из (33.17). Этот же результат можно получить, исходя из равенства (33.14):

$$J_A = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 33.5. Найти общее решение системы (30.20) матричным методом.

Решение. В примере 31.4 было показано, что система (30.20) с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет один трёхкратный характеристический корень, которому соответствует базис (31.41)–(31.43):

$$\vec{g}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{33.50}$$

причём $\vec{g}_1^{(2)}$ является присоединённым собственному вектору $\vec{g}_1^{(1)}$. По базису (33.50) составим матрицу

$$S = (\vec{g}_1^{(1)}\ \vec{g}_1^{(2)}\ \vec{g}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим обратную ей

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Чтобы записать матрицу J_A, можно воспользоваться формулой (33.23), соответствующей трёхкратному корню с одним присоединённым вектором, или соотношением (33.14):

$$J_A = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{33.51}$$

Как и следовало ожидать, результат совпадает с (33.23) при $\lambda = 2$ (одна единица вне главной диагонали в (33.51) указывает на один присоединённый вектор).

Теперь с учётом (33.29) имеем

$$e^{J_A t} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{33.52}$$

Отсюда

$$X(t) = Se^{J_A t}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & 1+t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ 0 & 1+t & -t \\ 0 & t & 1-t \end{pmatrix}. \tag{33.53}$$

Нетрудно убедиться, что

$$X(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\mathbb{I}.$$

Пусть

$$\vec{x}_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$$

— некоторый произвольный вектор. Тогда для системы (30.12) с помощью этого вектора и матрицы (33.53) общее решение в форме Коши запишется так:

$$\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}=X(t)\vec{x}_0=e^{2t}\begin{pmatrix}x_0+(y_0-z_0)t\\y_0+(y_0-z_0)t\\z_0+(y_0-z_0)t\end{pmatrix} \qquad (33.54)$$

Соотношение (33.54) определяет решение задачи Коши для системы (30.12) с начальными условиями

$$\vec{x}(t)|_{t=0}=\vec{x}_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}. \qquad (33.55)$$

Переопределив в (33.54) произвольные постоянные: $x_0=C_1+C_2$, $y_0=C_1+C_3$ и $z_0=C_1$, получим общее решение, совпадающее с ранее найденным решением (31.46).

Пример 33.6. Найти общее решение системы (30.32) матричным методом.

Решение. В примере 31.5 было показано, что система (30.32) с матрицей

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$$

имеет трёхкратный характеристический корень $\lambda=-1$, которому соответствует базис

$$\vec{g}_1^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad \vec{g}_1^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\qquad \vec{g}_1^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \qquad (33.56)$$

состоящий из одного собственного $\vec{g}_1^{(0)}$ и двух присоединённых $\vec{g}_1^{(1)}$ и $\vec{g}_1^{(2)}$ векторов.

По базису (33.56) построим матрицу

$$S=(\vec{g}_1^{(0)}\ \vec{g}_1^{(1)}\ \vec{g}_1^{(2)})=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&-2\\-1&1&-1\end{pmatrix}$$

и вычислим обратную ей:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&-1&2\\2&-1&1\end{pmatrix}.$$

Чтобы записать матрицу J_A, можно воспользоваться формулой (33.24), соответствующей трёхкратному корню с двумя присоединёнными векторами, или соотношением (33.14):

$$J_A = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{33.57}$$

Как и следовало ожидать, результат совпадает с (33.24) при $\lambda = -1$ (две единицы вне главной диагонали в (33.57) указывают на два присоединённых вектора).

Теперь с учётом (33.30) имеем

$$e^{J_A t} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$X(t) = Se^{J_A t}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= e^{-t} \begin{pmatrix} 1 + 3t + t^2 & -t - t^2/2 & 2t + t^2/2 \\ 5t + t^2 & 1 - 2t - t^2/2 & 3t + t^2/2 \\ -t - t^2 & t^2/2 & 1 - t - t^2/2 \end{pmatrix}. \tag{33.58}$$

Нетрудно проверить, что

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}.$$

Пусть

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

— некоторый произвольный вектор. Тогда для системы (30.32) общее решение в форме Коши запишется как

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = X(t)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 + (3x_0 - y_0 + z_0)t + (2x_0 - y_0 + z_0)t^2/2 \\ y_0 + (5x_0 - y_0 + 3z_0)t + (2x_0 - y_0 + z_0)t^2/2 \\ z_0 + (-x_0 - z_0)t + (-2x_0 + y_0 - z_0)t^2/2 \end{pmatrix} e^{-t}. \tag{33.59}$$

Переопределив произвольные постоянные: $x_0 = C_1$, $y_0 = C_1 + C_2 - 2C_3$ и $z_0 = -C_1 + C_2 - C_3$, получим общее решение, совпадающее с полученным ранее решением (30.42), а также (32.21).

Случай комплексных корней. От рассмотрения вещественных характеристических корней λ_j перейдём к рассмотрению комплексных корней. Из предположения о вещественности коэффициентов характеристического уравнения

$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$ следует, что если характеристический корень λ_j является комплексным числом, т.е. $\lambda_j = \nu_j + i\omega_j$, то комплексно сопряжённый ему $\lambda_j^* = \nu_j - i\omega_j$ также является корнем характеристического уравнения.

Если учесть, что при вычислении матриванта системы вещественность характеристических корней нигде явно не используется, то простую пару комплексно сопряжённых корней λ_j и λ_j^* можно рассматривать как два различных корня. Действительно, в матрице A им будет соответствовать матричный блок

$$J_2(\lambda_j, \lambda_j^*) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 \\ 0 & \lambda_j^* \end{pmatrix}, \quad \lambda_j = \nu_j + i\omega_j, \quad \lambda_j^* = \nu_j - i\omega_j, \tag{33.60}$$

которому соответствует матричная экспонента

$$e^{J_2(\lambda_j, \lambda_j^*)t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_j^* t} \end{pmatrix} = e^{\nu_j t} \begin{pmatrix} e^{i\omega_j t} & 0 \\ 0 & e^{-\omega_j t} \end{pmatrix}. \tag{33.61}$$

Пример 33.7. Найти общее решение системы (30.43) матричным методом.

Решение. В примере 31.7 было показано, что системе (30.43) соответствует задача на собственные числа и собственные векторы матрицы (оператора) A

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = 0, \qquad \vec{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

которая в координатной форме имеет вид (31.68):

$$\begin{aligned} (5 - \lambda)g_1 + 10g_2 = 0, \\ -2g_1 + (-3 - \lambda)g_2 = 0. \end{aligned} \tag{33.62}$$

В том же примере показано, что характеристическое уравнение $\det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$ имеет пару комплексно сопряжённых корней: $\lambda_1 = 1 + 2i$, $\lambda_2 = \lambda_1^* = 1 - 2i$. Подстановка их в (33.62) даёт два комплексно сопряжённых собственных вектора

$$\vec{g}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 + i \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 - i \end{pmatrix}. \tag{33.63}$$

По базису (33.63) построим комплексную матрицу

$$S = (\vec{g}_1 \; \vec{g}_2) = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 + i & -2 - i \end{pmatrix} \tag{33.64}$$

и вычислим обратную ей:

$$S^{-1} = \frac{i}{10} \begin{pmatrix} -2 - i & -5 \\ 2 - i & 5 \end{pmatrix}.$$

Жорданова форма матрицы A в комплексном базисе (33.63) имеет вид (33.60):

$$J_2(\lambda_1, \lambda_1^*) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2i & 0 \\ 0 & 1 - 2i \end{pmatrix}. \tag{33.65}$$

Эту же жорданову форму можно получить из соотношения (33.14):

$$J_2(\lambda_1, \lambda_1^*) = S^{-1}AS = \frac{i}{10} \begin{pmatrix} -2 - i & -5 \\ 2 - i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2 + i & -2 - i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5i & -5-10i \\ -5i & 5-10i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2+i & -2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}.$$

Теперь, согласно (33.61), имеем

$$e^{J_2(\lambda_1,\lambda_1^*)t} = \begin{pmatrix} e^{(1+2i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-2i)t} \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{pmatrix}. \tag{33.66}$$

Теперь по формуле (33.13) найдём матрицант системы (30.43)

$$X(t) = Se^{J_2(\lambda_1,\lambda_1^*)t}S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -2+i & -2-i \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} e^{2it} & 0 \\ 0 & e^{-2it} \end{pmatrix} \frac{i}{10} \begin{pmatrix} -2-i & -5 \\ 2-i & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{i}{10} \begin{pmatrix} 5[-2(e^{2it}-e^{-2it}) - i(e^{2it}+e^{-2it})] & -25(e^{2it}-e^{-2it}) \\ 5(e^{2it}-e^{-2it}) & 5[2(e^{2it}-e^{-2it}) - i(e^{2it}+e^{-2it})] \end{pmatrix} e^t =$$

$$= \frac{i}{10} \begin{pmatrix} -20i\sin 2t - 10i\cos 2t & -50i\sin 2t \\ 10i\sin 2t & 20i\sin 2t - 10i\cos 2t \end{pmatrix} e^t =$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 2\sin 2t + \cos 2t & 5\sin 2t \\ -\sin 2t & -2\sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix}. \tag{33.67}$$

Составив из произвольных постоянных x_0, y_0 вектор

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

общее решение в форме Коши исходной системы (30.43) запишем как произведение матриціанта (33.67) и вектора $\vec{x}_0$:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t)\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0\cos 2t + (2x_0+5y_0)\sin 2t \\ y_0\cos 2t - (x_0+2y_0)\sin 2t \end{pmatrix} e^t. \tag{33.68}$$

Если в (33.68) переопределить произвольные постоянные: $x_0 = C_1$, $y_0 = (C_2 - 2C_1)/5$, то получим ранее найденное решение (30.49).

Как видим, решение в случае комплексных корней является, как и следовало ожидать, вещественным. Однако использование комплексного базиса создаёт ряд неудобств. Как известно из курса линейной алгебры, комплексный базис можно заменить действительным, в котором жорданова форма матрицы A также является вещественной.

Пусть корню λ_j из простой пары комплексно сопряженных корней λ_j, λ_j^* соответствует собственный комплексный вектор $\vec{g}_j$. Тогда в качестве составляющих базиса можно выбрать два линейно независимых вектора

$$\vec{e}_j = \operatorname{Re}\vec{g}_j, \qquad \vec{e}_{j+1} = \operatorname{Im}\vec{g}_j. \tag{33.69}$$

В этом случае матрица S, связывающая матрицы A и J_A, вещественна, а следовательно, вещественна и блочная матрица $J_2(\lambda_j, \lambda_j^*)$, равная, как известно из курса линейной алгебры,

$$J_2(\lambda_j, \lambda_j^*) = \begin{pmatrix} \nu_j & \omega_j \\ -\omega_j & \nu_j \end{pmatrix}, \tag{33.70}$$

где

$$\nu_j = \operatorname{Re}\lambda_j, \qquad \omega_j = \operatorname{Im}\lambda_j. \tag{33.71}$$

С учётом (33.70) можем записать

$$e^{J_2(\lambda_j,\lambda_j^*)t} = e^{\left(\begin{smallmatrix}\nu_j & \omega_j\\ -\omega_j & \nu_j\end{smallmatrix}\right)t} = e^{\nu_j\mathbb{I}_2 t+\omega_j\mathbf{I}_2 t} = \mathbb{I}_2 e^{\nu_j t}e^{\omega_j t\mathbf{I}_2}, \tag{33.72}$$

где

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \tag{33.73}$$

и по-прежнему

$$\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Согласно определению (33.1), матричную экспоненту в (33.72) представляет ряд

$$e^{\omega_j t\mathbf{I}_2} = \mathbb{I}_2 + \frac{\omega_j t}{1!}\mathbf{I}_2 + \frac{(\omega_j t)^2}{2!}\mathbf{I}_2^2 + \ldots + \frac{(\omega_j t)^n}{n!}\mathbf{I}_2^n + \ldots. \tag{33.74}$$

Вычислив

$$\mathbf{I}_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}^2 = -\mathbb{I}_2, \quad \mathbf{I}_2^3 = -\mathbb{I}_2\mathbf{I}_2 = -\mathbf{I}_2, \quad \mathbf{I}_2^4 = \mathbb{I}_2, \quad \mathbf{I}_2^5 = \mathbf{I}_2,$$

видим, что

$$\mathbf{I}_2^{2m} = (-1)^m\mathbb{I}_2, \qquad \mathbf{I}_2^{2m+1} = (-1)^m\mathbf{I}_2, \quad m=\overline{1,\infty}. \tag{33.75}$$

Возвратившись к (33.74), с учётом (33.75) имеем

$$\begin{aligned} e^{\omega_j t\mathbf{I}_2} &= \Big[\mathbb{I}_2\Big(1 - \frac{(\omega_j t)^2}{2!} + \frac{(\omega_j t)^4}{4!} + \ldots + (-1)^m\frac{(\omega_j t)^{2m}}{(2m)!} + \ldots\Big) + \\ &+ \mathbf{I}_2\Big(\omega_j t - \frac{(\omega_j t)^3}{3!} + \frac{(\omega_j t)^5}{5!} + \ldots + (-1)^m\frac{(\omega_j t)^{2m+1}}{(2m+1)!} + \ldots\Big)\Big] = \\ &= \mathbb{I}_2\cos\omega_j t + \mathbf{I}_2\sin\omega_j t = \begin{pmatrix}\cos\omega_j t & 0\\ 0 & \cos\omega_j t\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin\omega_j t\\ -\sin\omega_j t & 0\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}\cos\omega_j t & \sin\omega_j t\\ -\sin\omega_j t & \cos\omega_j t\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{33.76}$$

Тогда из (33.72) найдём

$$e^{J_2(\lambda_j,\lambda_j^*)t} = e^{\left(\begin{smallmatrix}\nu_j & \omega_j\\ -\omega_j & \nu_j\end{smallmatrix}\right)t} = e^{\nu_j t}\begin{pmatrix}\cos\omega_j t & \sin\omega_j t\\ -\sin\omega_j t & \cos\omega_j t\end{pmatrix}. \tag{33.77}$$

Таким образом, в вещественном базисе вместо (33.61) будем использовать (33.77).

$\Diamond$ В примере 33.1 матрица $A = -\mathbf{I}^2$, что и позволило получить решение системы (30.43) с помощью соотношений (33.75).

Пример 33.8. Найти общее решение системы (30.43) матричным методом, заменив комплексный базис вещественным.

Решение. В примере 33.7 было показано, что характеристическое уравнение системы (30.43) имеет пару комплексно сопряжённых корней: $\lambda_1 = 1+2i$, $\lambda_1^* = 1-2i$ с комплексным базисом (33.63). Заменим этот комплексный базис вещественным

$$\vec{e}_1 = \operatorname{Re}\vec{g}_1 = \begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \operatorname{Im}\vec{g}_1 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}. \tag{33.78}$$

С его помощью составим вещественную матрицу

$$S = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{33.79}$$

и вычислим обратную ей:

$$S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вещественную жорданову форму J_A матрицы A можно найти либо из (33.70), либо из соотношения

$$J_A = S^{-1}AS = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Естественно, что этот результат совпадает с (33.70) при $\nu = \operatorname{Re}\lambda = 1$, $\omega = \operatorname{Im}\lambda = 2$.

Теперь в силу (33.77) можем записать матричную экспоненту

$$e^{J_A t} = e^{J_2(\lambda,\lambda^*)t} = e^t\begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix},$$

а следовательно, и матрицант

$$X(t) = Se^{J_A t}S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} e^t \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= e^t\begin{pmatrix} \cos 2t + 2\sin 2t & 5\sin 2t \\ -\sin 2t & -2\sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix},$$

который совпадает с матрицантом (33.67), найденным в предыдущем примере.

$\Diamond$ Сравнив решения примеров 33.7 и 33.8, можно заключить, что предпочтительнее использовать вещественную жорданову форму матрицы системы, нежели комплексную.

Перейдём теперь к кратным корням. Решение системы с кратными комплексными корнями проводится по той же схеме, что и для кратных действительных корней. Следует лишь иметь в виду, что в вещественном базисе все блочные квадратные матрицы $J_{r_j}(\lambda_j, \lambda_j^*)$ будут иметь чётные порядки, т.е. $r_j = 2m_j$. А, кроме того, блочные матрицы первого порядка — числа λ_j и 1 из схемы для действительных кратных корней — следует заменить матрицами второго порядка

$$\begin{aligned} \lambda_j &\Rightarrow \begin{pmatrix} \nu_j & \omega_j \\ -\omega_j & \nu_j \end{pmatrix}, \\ 1 &\Rightarrow \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{33.80}$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 33.9. Решить систему дифференциальных уравнений (30.50) матричным методом.

Решение. Пусть $X(t)$ – матрицант системы (30.50), т.е. её фундаментальная матрица, удовлетворяющая задаче Коши

$$X'(t) = AX(t), \qquad X(0) = \mathbb{I}. \tag{33.81}$$

Как известно, её решение определяется матричной экспонентой

$$X(t) = e^{At} = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n. \tag{33.82}$$

При решении системы (30.50) методом Эйлера мы установили, что матрица A (31.72) имеет двукратные комплексные корни $\lambda_{1,2} = \pm i$. Для корня $\lambda_1 = i$ мы также определили его собственный $\vec{g}_1$ (31.74) и присоединённый $\vec{p}_1$ (31.76) векторы. Их действительные и мнимые части (31.81), (31.82):

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{33.83}$$

можно выбрать в качестве базиса, в котором вещественная жорданова форма матрицы A будет иметь вид

$$J_A = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda_1 & \operatorname{Im}\lambda_1 & 1 & 0 \\ -\operatorname{Im}\lambda_1 & \operatorname{Re}\lambda_1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \operatorname{Re}\lambda_1 & \operatorname{Im}\lambda_1 \\ 0 & 0 & -\operatorname{Im}\lambda_1 & \operatorname{Re}\lambda_1 \end{pmatrix}$$

т.е.

$$J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(i,-i) & \mathbb{I}_2 \\ 0 & J_2(i,-i) \end{pmatrix}, \tag{33.84}$$

поскольку $\lambda_1 = i$.

В этом можно убедиться непосредственно, вычислив произведение матриц

$$J_A = S^{-1} A S, \tag{33.85}$$

где S — матрица, составленная из векторов базиса (33.83):

$$S = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3 \quad \vec{e}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{33.86}$$

и имеющая обратную матрицу

$$S^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{33.87}$$

Возвратившись к (33.85), с учётом (33.86) и (33.87)

$$J_A = S^{-1} A S = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

убеждаемся в справедливости (33.84).

Теперь с учётом того, что $A^n = SJ_A^n S^{-1}$, решение (33.82) можем записать в виде

$$X(t) = e^{At} = Se^{J_A t}S^{-1}. \tag{33.88}$$

Далее воспользуемся тем, что матрицу J_A (33.84) можно представить как сумму

$$J_A = J_1 + J_2$$

коммутирующих матриц

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \tag{33.89}$$

и

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{33.90}$$

и поэтому можно записать

$$e^{J_A t} = e^{J_1 t}e^{J_2 t}. \tag{33.91}$$

Тогда

$$e^{J_1 t} = e^{\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} e^{\mathbf{I}_2 t} & 0 \\ 0 & e^{\mathbf{I}_2 t} \end{pmatrix}.$$

Экспонента $e^{\mathbf{I}_2 t}$ с матрицей $\mathbf{I}_2$ найдена в примере 33.7 (см. формулу (33.77)):

$$e^{\mathbf{I}t} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

Поэтому можно записать

$$e^{J_1 t} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \tag{33.92}$$

Теперь, приняв во внимание, что матрица J_2 является нильпотентной с нулевым квадратом ($J_2^2 = 0$), имеем

$$e^{J_2 t} = \mathbb{I} + J_2 t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{33.93}$$

Подставив (33.92) и (33.93) в (33.91), получим

$$e^{J_A t} = e^{J_1 t}e^{J_2 t} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & t\cos t & t\sin t \\ -\sin t & \cos t & -t\sin t & t\cos t \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

а с учётом

$$
Se^{J_At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & t\cos t & t\sin t \\ -\sin t & \cos t & -t\sin t + \cos t & t\cos t + \sin t \\ -\cos t & -\sin t & -t\cos t - 2\sin t & -t\sin t + 2\cos t \\ \sin t & -\cos t & t\sin t - 3\cos t & -t\cos t - 3\sin t \end{pmatrix}
$$

и матрицант

$$
X(t) = Se^{J_At}S^{-1} =
$$
$$
= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4\cos t + 2t\sin t & 6\sin t - 2t\cos t & 2t\sin t & 2\sin t - 2t\cos t \\ -2\sin t + 2t\cos t & 4\cos t + 2t\sin t & 2\sin t + 2t\cos t & 2t\sin t \\ -2t\sin t & -2\sin t + 2t\cos t & 4\cos t - 2t\sin t & 2\sin t + 2t\cos t \\ -2\sin t - 2t\cos t & -2t\sin t & -6\sin t - 2t\cos t & 4\cos t - 2t\sin t \end{pmatrix}. \tag{33.94}
$$

Из (33.94) легко проверить, что

$$
X(0) = \mathbb{I}.
$$

Составив из произвольных постоянных x_{j0} вектор $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})^{\intercal}$, общее решение $\vec{x}(t)$ системы (30.50) запишем произведением матриканта (33.94) и вектора $\vec{x}_0$:

$$
\vec{x} = X(t)\vec{x}_0 =
$$
$$
= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} [4x_{10} - 2(x_{20} + x_{40})t]\cos t + [2(3x_{20} + x_{40}) + 2(x_{10} + x_{30})t]\sin t \\ [4x_{20} + 2(x_{10} + x_{30})t]\cos t + [2(-x_{10} + x_{30}) + 2(x_{20} + x_{40})t]\sin t \\ [4x_{30} + 2(x_{20} + x_{40})t]\cos t + [2(-x_{20} + x_{40}) - 2(x_{10} + x_{30})t]\sin t \\ [4x_{40} - 2(x_{10} + x_{30})t]\cos t + [-2(x_{10} + 3x_{30}) - 2(x_{20} + x_{40})t]\sin t \end{pmatrix}. \tag{33.95}
$$

Выразив постоянные $\{x_{j0}\}_{j=1}^4$ через постоянные $\{C_i\}_{i=1}^4$ по правилу $x_{10} = C_1$, $x_{20} = C_2 + C_3$, $x_{30} = 2C_4 - C_1$, $x_{40} = -4C_2 - C_3$, из (33.95) получим решение (31.80).

Отметим, что при получении матриканта $X(t)$ мы воспользовались базисом (33.83) и вещественной жордановой формой (33.84) матрицы A. Как и в примере 33.6, вычислив для второго корня $k_2 = -i$ его собственный вектор $\vec{g}_2$ и присоединённый вектор $\vec{p}_2$, получим комплексный базис $\vec{g}_1, \vec{p}_1, \vec{g}_2, \vec{p}_2$. Записав в этом базисе матрицу $\tilde{S}$ и воспользовавшись комплексной жордановой формой $\tilde{J}_A$ для матрицы A, по формуле

$$
X(t) = \tilde{S}e^{\tilde{J}_At}\tilde{S}^{-1}
$$

получим (33.94).

Пример 33.10. Найти общее решение системы (30.62) матричным методом.

Решение. При решении системы (30.62) методом Эйлера (см. пример 31.9) мы нашли собственные значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2+3i$ и $\lambda_3 = 2-3i$ матрицы A (30.62), которые являются простыми корнями. Для действительного корня $\lambda_1 = 1$ мы определили собственный вектор $\vec{g}_1$ (31.86), а для одного из комплексных корней ($\lambda_2 = 2+3i$) — комплексный собственный вектор $\vec{g}_2$ (31.88). Теперь аналогичным образом можно найти ещё один комплексный собственный вектор $\vec{g}_3$ и получить комплексный базис $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$. Удобнее, однако, воспользоваться действительным базисом $\vec{e}_1 = \vec{g}_1$, $\vec{e}_2 = \operatorname{Re}\vec{g}_2$, $\vec{e}_3 = \operatorname{Im}\vec{g}_2$, т.е.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{33.96}$$

Известно, что в этом базисе вещественная жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}\lambda_2 & \operatorname{Im}\lambda_2 \\ 0 & -\operatorname{Im}\lambda_2 & \operatorname{Re}\lambda_2 \end{pmatrix}$$

или

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \tag{33.97}$$

поскольку $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2 + 3i$.

В справедливости (33.97) можно убедиться непосредственно, вычислив произведение матриц

$$J_A = S^{-1}AS, \tag{33.98}$$

где S — матрица, составленная из векторов базиса (33.96):

$$S = (\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \tag{33.99}$$

и имеющая обратную матрицу

$$S^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 & -6 & 12 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{33.100}$$

Возвратившись к (33.98), с учётом (33.99) и (33.100):

$$J_A = S^{-1}AS = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 & -6 & 12 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -12 & -6 & 12 \\ -3 & 9 & -3 \\ -15 & -7 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

убеждаемся в справедливости (33.97).

Теперь с учётом (33.2) можем записать

$$X(t) = e^{At} = Se^{J_A t}S^{-1}. \tag{33.101}$$

Чтобы вычислить матричную экспоненту из (33.101), запишем её в блочном виде

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J_2(2+3i, 2-3i) \end{pmatrix},$$

где

$$J_2(2+3i, 2-3i) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{33.102}$$

Тогда

$$e^{J_A t} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos 3t & e^{2t}\sin 3t \\ 0 & -e^{2t}\sin 3t & e^{2t}\cos 3t \end{pmatrix}. \tag{33.103}$$

Здесь мы воспользовались формулой (33.77).

Теперь, поскольку

$$Se^{J_A t} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos 3t & e^{2t}\sin 3t \\ 0 & -e^{2t}\sin 3t & e^{2t}\cos 3t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^t & 3e^{2t}(\cos 3t + \sin 3t) & 3e^{2t}(-\cos 3t + \sin 3t) \\ e^t & 4e^{2t}\cos 3t & 4e^{2t}\sin 3t \\ 2e^t & e^{2t}(5\cos 3t + 3\sin 3t) & e^{2t}(-3\cos 3t + 5\sin 3t) \end{pmatrix},$$

то, согласно (33.101),

$$X(t) = Se^{J_A t}S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2e^t + 3e^{2t}\cos 3t & -e^t + e^{2t}(\cos 3t + \sin 3t) & 2e^t + e^{2t}(-2\cos 3t - \sin 3t) \\ -2e^t + e^{2t}(2\cos 3t - 2\sin 3t) & -e^t + e^{2t}(2\cos 3t + \dfrac{2}{3}\sin 3t) & 2e^t + e^{2t}(-2\cos 3t + \dfrac{2}{3}\sin 3t) \\ -4e^t + e^{2t}(4\cos 3t - \sin 3t) & -2e^t + e^{2t}(2\cos 3t + \dfrac{7}{3}\sin 3t) & 4e^t + e^{2t}(-3\cos 3t - \dfrac{2}{3}\sin 3t) \end{pmatrix}. \tag{33.104}$$

Из (33.104) легко проверить, что

$$X(0) = \mathbb{I}.$$

Составив из произвольных постоянных x_{j0} вектор $\vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})^\intercal$, общее решение $\vec{x}(t)$ системы (30.62) запишем произведением матрицанта (33.104) и вектора $\vec{x}_0$:

$$\vec{x} = X(t)\vec{x}_0 = e^t \begin{pmatrix} -2x_{10} - x_{20} + 2x_{30} \\ -2x_{10} - x_{20} + 2x_{30} \\ -4x_{10} - 2x_{20} + 4x_{30} \end{pmatrix} +$$

$$+e^{2t} \begin{pmatrix} (3x_{10} + x_{20} - 2x_{30})\cos 3t + (2x_{20} - x_{30})\sin 3t \\ (2x_{10} + 2x_{20} - 2x_{30})\cos 3t + \left(-2x_{10} + \dfrac{2}{3}x_{20} + \dfrac{2}{3}x_{30}\right)\sin 3t \\ (4x_{10} + 2x_{20} - 3x_{30})\cos 3t + \left(-x_{10} + \dfrac{7}{3}x_{20} - \dfrac{2}{3}x_{30}\right)\sin 3t. \end{pmatrix}. \tag{33.105}$$

Переопределив в ранее найденном решении (30.70) произвольные постоянные: $C_1 = -2x_{10} - x_{20} + 2x_{30}$, $C_2 = (x_{10} + x_{20} - x_{30})/2$, $C_3 = (-3x_{10} + x_{20} + x_{30})/6$, получим (33.105). Напомним (см. пример 31.9), что этот же результат можно получить, воспользовавшись комплексной жордановой формой матрицы A.

34. Метод Даламбера

Существуют и другие методы интегрирования систем с постоянными коэффициентами, менее распространённые, чем рассмотренные выше. Так, метод интегрируемых комбинаций, применённый к системам с постоянными коэффициентами и называемый в этом случае методом Даламбера, можно проиллюстрировать следующим примером.

Пример 34.1. Проинтегрировать методом Даламбера систему уравнений

$$\begin{aligned} x' &= x + y + z, \\ y' &= 3x - y + z, \\ z' &= 2x + 2y - z. \end{aligned} \tag{34.1}$$

Решение. Умножив уравнения системы (34.1) на числа α, β, γ соответственно и сложив, получим

$$\begin{gathered} \alpha x' + \beta y' + \gamma z' = (\alpha x + \beta y + \gamma z)' = \\ = (\alpha + 3\beta + 2\gamma)x + (\alpha - \beta + 2\gamma)y + (\alpha + \beta - \gamma)z. \end{gathered} \tag{34.2}$$

Если коэффициенты α, β, γ подчинить условиям

$$\begin{aligned} (\alpha + 3\beta + 2\gamma) &= \lambda\alpha, \\ (\alpha - \beta + 2\gamma) &= \lambda\beta, \\ (\alpha + \beta - \gamma) &= \lambda\gamma, \end{aligned} \tag{34.3}$$

то уравнение (34.2) сведётся к уравнению с разделяющимися переменными для линейной комбинации $\alpha x + \beta y + \gamma z$:

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)' = \frac{d(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{dt} = \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma z). \tag{34.4}$$

Интегрирование (34.4) даёт

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = Ce^{\lambda t}. \tag{34.5}$$

Система (34.3) имеет нетривиальные решения при условии

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. при $(\lambda-3)(\lambda+2)^2 = 0$. Это уравнение имеет два корня: один простой ($\lambda_1 = 3$) и один ($\lambda_2 = -2$) кратности два. Положив в (34.3) $\lambda = \lambda_1 = 3$, имеем

$$\frac{\alpha}{14} = \frac{\beta}{8} = \frac{\gamma}{5},$$

откуда, например, $\alpha = 14$, $\beta = 6$, $\gamma = 5$. Положив в (34.3) $\lambda = \lambda_2 = -2$, получим

$$\begin{aligned} 14x + 6y + 5z &= C_1 e^{3t}, \\ x - y &= C_2 e^{-2t}, \end{aligned} \tag{34.6}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Выразив из (34.6)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{20}(-5z + C_1 e^{3t} + 6C_2 e^{-2t}), \\ y(t) &= \frac{1}{20}(-5z + C_1 e^{3t} - 14C_2 e^{-2t}) \end{aligned} \tag{34.7}$$

и подставив их в третье уравнение исходной системы (34.1), получим линейное уравнение для функции $z(t)$:

$$z' + 2z = \frac{1}{5}(C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-2t}),$$

решением которого является

$$z(t) = \frac{1}{5}(5C_1 e^{3t} - 4C_2 t e^{-2t} + C_3 e^{-2t}), \tag{34.8}$$

где C_3 — третья произвольная постоянная.

Таким образом, формулы (34.7), (34.8) дают решение системы (34.1).

Пример 34.2. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x'' &= y, \\ y'' &= -x - 2y \end{aligned} \tag{34.9}$$

методом Даламбера.

Решение. Умножив уравнения системы (34.9) на числа α и β, соответственно, и сложив, получим

$$\alpha x'' + \beta y'' = (\alpha x - \beta y)'' = -\beta x + (\alpha - 2\beta)y. \tag{34.10}$$

Если эти числа подчинить условиям

$$-\beta = \lambda\alpha, \qquad \alpha - 2\beta = \lambda\beta, \tag{34.11}$$

то из (34.10) получим

$$(\alpha x - \beta y)'' = \lambda(\alpha x + \beta y). \tag{34.12}$$

Переписав (34.11) в виде

$$\begin{aligned} -\lambda\alpha - \beta &= 0, \\ \alpha - (2 + \lambda) &= 0, \end{aligned} \tag{34.13}$$

придём к однородной системе уравнений, имеющей нетривиальное решение при условии

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $(\lambda + 1)^2 = 0$, т.е. получили уравнение 2-го порядка (а не 4-го, как ранее, например уравнение (30.50)) и, следовательно, один двукратный корень $\lambda = -1$. С учётом этого корня из (34.13) найдём, что $\alpha = \beta$, а значит

$$(x + y)'' = -(x + y).$$

Рассматривая сумму $(x+y)$ как одну функцию $w = x+y$, имеем уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$w'' + w = 0.$$

Его характеристическое уравнение λ^2+1 имеет комплексно сопряжённые корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ и, следовательно, общее решение

$$w = x + y = a_1 \cos t + a_2 \sin t, \tag{34.14}$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные.

Теперь, подставив в (34.14) выражение для y из первого уравнения (34.9) (или для x из второго), получим

$$x'' + x = a_1 \cos t + a_2 \sin t. \tag{34.15}$$

Это — неоднородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого легко находится:

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + \Big(-\frac{a_2}{2}\cos t + \frac{a_1}{2}\sin t\Big)t, \tag{34.16}$$

где C_1, C_2 – ещё одна пара произвольных постоянных. Зная $x(t)$, из (34.14) получим

$$\begin{gathered} y(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t - x(t) = \\ = (a_1 - C_1)\cos t + (a_2 - C_2)\sin t + \Big(\frac{a_2}{2}\cos t - \frac{a_1}{2}\sin t\Big)t. \end{gathered} \tag{34.17}$$

Формулы (34.16), (34.17) дают общее решение исходной системы. Если в них постоянные a_1, a_2 переопределить через другие: $a_1 = 2C_4$, $a_2 = -2C_3$, то получим решение в виде

$$\begin{aligned} &x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + (C_3 \cos t + C_4 \sin t)t, \\ &y(t) = (-C_1 + 2C_4)\cos t + (-C_2 - 2C_3)\sin t + (-C_3 \cos t - C_4 \sin t)t. \end{aligned} \tag{34.18}$$

35. Примеры решений систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Мы подробно рассмотрели методы интегрирования систем линейных нормальных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, поскольку их можно использовать ещё и как основу для интегрирования систем других классов. Приведённые ниже примеры иллюстрируют возможность применения этих методов к системам, представленным как каноническими, так и симметричными формами, а также к некоторым системам с переменными коэффициентами.

Пример 35.1. Решить систему

$$\begin{aligned} x' &= 2x - 3y, \\ y' &= 3x + 2y. \end{aligned} \tag{35.1}$$

Решение. Так как правые части (35.1) удовлетворяют условиям Коши–Римана $(2x-3y)_x = (3x+2y)_y = 2$, $(2x-3y)_y = -(3x+2y)_x = -3$, то, умножив второе уравнение (35.1) на i и сложив оба уравнения, получим

$$\begin{aligned} &x' + iy' = (x+iy)' = \frac{d(x+iy)}{dt} = \\ &\qquad = (2+3i)x + (-3+2i)y = (2+3i)x + i(2+3i)y = (2+3i)(x+iy) \end{aligned}$$

или

$$\frac{d(x+iy)}{dt} = (2+3i)(x+iy).$$

Интегрирование этого уравнения даёт

$$x + iy = Ce^{(2+3i)t} = e^{2t}(C_1 + iC_2)(\cos 3t + i\sin 3t) =$$
$$= e^{2t}[(C_1\cos 3t - C_2\sin 3t) + i(C_1\sin 3t + C_2\cos 3t)],$$

где C_1 и C_2 — две действительные произвольные постоянные.

Отсюда

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\{Ce^{(2+3i)t}\} = e^{2t}(C_1\cos 3t - C_2\sin 3t),\\ y(t) &= \mathrm{Im}\{Ce^{(2+3i)t}\} = e^{2t}(C_1\sin 3t - C_2\cos 3t). \end{aligned} \tag{35.2}$$

Пример 35.2. Решить систему дифференциальных уравнений (34.9).

Решение. Эта система является системой четвертого порядка и записана в канонической форме. Заменой

$$u = x', \qquad v = y' \tag{35.3}$$

перейдём от канонической формы к нормальной

$$x' = u, \quad u' = y, \quad y' = v, \quad v' = -x - 2y. \tag{35.4}$$

Из (35.4) можно заметить, что, переобозначив

$$x = x_1, \quad u = x_2, \quad y = x_3, \quad v = x_4, \tag{35.5}$$

систему (35.4) можно переписать в виде

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3, \quad x_3' = x_4, \quad x_4' = -x_1 - 2x_3. \tag{35.6}$$

Таким образом, мы пришли к системе, решение которой рассмотрено в примерах 30.6, 31.8, 32.7, 33.9, найдено четырьмя способами и выражено формулами (30.61), (31.80), (32.29), (33.95). Отметим, что в отличие от первых трёх четвертая формула получена матричным способом и является общим решением в форме Коши.

1. Решение методом Эйлера приводит к формуле (31.80), которая имеет вид

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ u(t)\\ y(t)\\ v(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1\cos t + C_2\sin t + C_3 t\cos t + C_4 t\sin t\\ -C_1\sin t + C_2\cos t + C_3(\cos t - t\sin t) + C_4(\sin t - t\cos t)\\ -C_1\cos t - C_2\sin t + C_3(-2\sin t - t\cos t) + C_4(-2\cos t - t\sin t)\\ -C_1\sin t - C_2\cos t + C_3(-3\cos t + t\sin t) + C_4(-3\sin t - t\cos t)\end{pmatrix}. \tag{35.7}$$

Искомые функции $x(t)$ и $y(t)$ определяются первой и третьей строками этого равенства и совпадают с (34.18). Обратим внимание, что вторая и четвертая строки представляют собой производные искомых функций в силу соотношений $u(t) = x_2(t) = x_1'(t) = x'(t)$, $v(t) = x_4(t) = x_3'(t) = y'(t)$ и могут быть использованы для нахождения произвольных постоянных C_i при решении задачи Коши.

2. Решение матричным методом приводит к формуле (33.95). Согласно этой формуле,

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t)\\ u(t)\\ y(t)\\ v(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} [4x_{10} - 2(x_{20} + x_{40})t]\cos t + [2(3x_{20} + x_{40}) + 2(x_{10} + x_{30})t]\sin t \\ [4x_{20} + 2(x_{10} + x_{30})t]\cos t + [2(-x_{10} + x_{30}) + 2(x_{20} + x_{40})t]\sin t \\ [4x_{30} + 2(x_{20} + x_{40})t]\cos t + [2(-x_{20} + x_{40}) - 2(x_{10} + x_{30})t]\sin t \\ [4x_{40} - 2(x_{10} + x_{30})t]\cos t + [-2(x_{10} + 3x_{30}) - 2(x_{20} + x_{40})t]\sin t \end{pmatrix}. \quad (35.8)$$

В дополнение к методу Даламбера, использованному в примере 35.2, найдём решение этой же задачи операторным методом.

3. Операторный метод

С помощью дифференциального оператора $D = d/dt$ систему (34.9) запишем в виде (28.2):

$$A(D)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 0,$$

где матрица-оператор $A(D)$ имеет вид

$$A(D) = \begin{pmatrix} D & -1 \\ 1 & D^2 + 2 \end{pmatrix}.$$

Согласно общей схеме операторного метода, решение ищем в виде (28.3):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21}(D) \\ A_{22}(D) \end{pmatrix} V(t),$$

где $A_{21}(D), A_{22}(D)$ — алгебраические дополнения к элементам второй строки матрицы A, а функция $V(t)$ — решение уравнения (29.3):

$$\det A(D)V(t) = [D^2(D^2 + 2) + 1]V(t) = (D^2 + 1)^2 V(t) = 0. \quad (35.9)$$

Характеристическое уравнение, отвечающее (35.9), имеет пару двукратных комплексно сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$, и соответственно, общее решение (35.9) есть функция

$$V(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + (C_3\cos t + C_4\sin t)t, \quad (35.10)$$

где C_i, $i = \overline{1,4}$, — произвольные постоянные. Так как $A_{21}(D) = 1$, $A_{22}(D) = D^2$, то

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ D^2 \end{pmatrix} V(t)$$

или

$$x(t) = V(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + (C_3\cos t + C_4\sin t)t,$$
$$y(t) = V''(t) = (-C_1 + 2C_4)\cos t + (-C_2 - 2C_3)\sin t + (-C_3\cos t - C_4\sin t)t.$$

Это решение совпадает с найденными ранее, например с (34.18).

Пример 35.3. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &x'' - x' + 6x + y'' - y' + 2y = 0, \\ &2x'' + x' + 3x + y'' + y = 0. \end{aligned} \quad (35.11)$$

Решение. Вычтя из второго уравнения последовательно сначала первое уравнение, а затем его же, умноженное на два, придём к канонической системе 4-го порядка:

$$\begin{aligned} &x'' = -2x' + 3x - y' + y, \\ &y'' = 3x' - 9x + 2y' - 3y. \end{aligned} \quad (35.12)$$

Заменой

$$x' = u, \quad y' = v \tag{35.13}$$

от канонической формы системы перейдём к нормальной

$$\begin{aligned} &x' = u,\\ &y' = v,\\ &u' = 3x + y - 2u - v,\\ &v' = -9x - 3y + 3u + 2v. \end{aligned} \tag{35.14}$$

Эту систему мы можем решить шестью методами: методом сведения системы к одному уравнению n-го порядка (4-го в данном случае), методом неопределённых коэффициентов, методами Даламбера и Эйлера и, наконец, операторным методом. Суть каждого метода, их преимущества и недостатки подробно рассмотрены выше. Исходя из этого, решение нормальной системы мы найдём методом Эйлера как наиболее экономичным и матричным методом, который позволяет достаточно просто из общего решения найти решение задачи Коши. Отметим, что в данном случае операторный метод удобнее применить к системе в канонической форме, что мы и сделаем.

1. Метод Эйлера

Систему (35.14) с помощью вектора

$$\vec{x} = (x \quad y \quad u \quad v)^{\intercal} \tag{35.15}$$

и матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2 & -1\\ -9 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{35.16}$$

запишем в матричной форме:

$$\vec{x}' = A\vec{x}. \tag{35.17}$$

Задача на собственные значения матрицы A (35.16) имеет вид

$$(A - \lambda\mathbb{I})\vec{g} = 0. \tag{35.18}$$

Здесь компоненты вектора $\vec{g}$ обозначим через g_k, т.е.

$$\vec{g} = (g_1 \quad g_2 \quad g_3 \quad g_4)^{\intercal}.$$

Система (35.18) в координатной форме запишется так:

$$\begin{aligned} -\lambda g_1 + g_3 &= 0,\\ -\lambda g_2 + g_4 &= 0,\\ 3g_1 + g_2 + (-2 - \lambda)g_3 - g_4 &= 0,\\ -9g_1 - 3g_2 + 3g_3 + (2 - \lambda)g_4 &= 0. \end{aligned} \tag{35.19}$$

Однородная система имеет нетривиальное решение только при условии

$$\det(A - \lambda\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 0 & 1\\ 3 & 1 & -2-\lambda & -1\\ -9 & -3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложение этого определителя, например, по первой строке даёт

$$\det(A-\lambda\mathbb{I}) = -\lambda\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ -3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -9 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= -\lambda\{-\lambda[-(2+\lambda)(2-\lambda)+3]+3-3(2+\lambda)\} + \lambda[3(2-\lambda)-9] =$$
$$= -\lambda(-\lambda^3-2\lambda-3)+\lambda(-3\lambda-3) = \lambda^2(\lambda^2-1) = 0.$$

Это уравнение имеет один двукратный корень $\lambda_1 = 0$ и простые корни $\lambda_2 = 1$ и $\lambda_3 = -1$.

Подставив первый корень $\lambda_1 = 0$ в (35.19), найдём

$$\begin{aligned} g_3 &= 0, \\ g_4 &= 0, \\ 3g_1 + g_2 - 2g_3 - g_4 &= 0, \\ -9g_1 - 3g_2 + 3g_3 + 2g_4 &= 0, \end{aligned}$$

откуда $g_2 = -g_1$, $g_3 = g_4 = 0$.

Это означает, что собственный вектор (обозначим его $\vec{g}_1^{(0)}$), соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 0$, при условии $g_1 = 1$ имеет вид

$$\vec{g}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{35.20}$$

Присоединённый вектор $\vec{g}_1^{(1)} = (p_1 \;\; p_2 \;\; p_3 \;\; p_4)^\intercal$, отвечающий корню $\lambda_1 = 0$, найдём из соотношения

$$(A-\lambda\mathbb{I})\vec{g}_1^{(1)} = \vec{g}_1^{(0)}.$$

Отсюда с учётом (35.20) имеем

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ -9 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} p_3 &= 1, \\ p_4 &= -3, \\ 3p_1 + p_2 - 2p_3 - p_4 &= 0, \\ -9p_1 - 3p_2 + 3p_3 + 2p_4 &= 0, \end{aligned}$$

следовательно, $p_2 = -1 - 3p_1$, $p_3 = 1$, $p_4 = -3$. Положив $p_1 = 0$, найдём присоединённый вектор $\vec{g}_1^{(1)}$:

$$\vec{g}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{35.21}$$

Подставив в (34.10) второй корень $\lambda_2 = 1$, найдём

$$-g_1 + g_3 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
-g_2 + g_4 &= 0,\\
3g_1 + g_2 - 3g_3 - g_4 &= 0,\\
-9g_1 - 3g_2 + 3g_3 + g_4 &= 0,
\end{aligned}
$$

откуда $g_2 = -3g_1$, $g_3 = g_1$, $g_4 = -3g_1$.

Это означает, что собственный вектор (обозначим его $\vec{g}_2$), соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 1$, при условии $g_1 = 1$ имеет вид

$$
\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. \tag{35.22}
$$

Наконец, подставив в (34.10) третий корень $\lambda_3 = -1$, найдём

$$
\begin{aligned}
g_1 + g_3 &= 0,\\
g_2 + g_4 &= 0,\\
3g_1 + g_2 - g_3 - g_4 &= 0,\\
-9g_1 - 3g_2 + 3g_3 + 3g_4 &= 0,
\end{aligned}
$$

откуда $g_2 = -2g_1$, $g_3 = -g_1$, $g_4 = 2g_1$.

Это означает, что собственный вектор (обозначим его $\vec{g}_3$), соответствующий собственному значению $\lambda_3 = -1$, при условии $g_1 = 1$ имеет вид

$$
\vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}. \tag{35.23}
$$

Теперь можем записать фундаментальную систему решений (35.16):

$$
\vec{x}_1 = \vec{g}_1^{(0)} e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = (\vec{g}_1^{(1)} + \vec{g}_1^{(0)} t) e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} t \\ -1-3t \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},
$$

$$
\vec{x}_3 = \vec{g}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^t, \quad \vec{x}_4 = \vec{g}_3 e^{\lambda_3 t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}, \tag{35.24}
$$

линейная комбинация которых даёт общее решение

$$
\vec{x} = C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2 + C_3\vec{x}_3 + C_4\vec{x}_4 =
$$
$$
= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \right] + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^t + C_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}
$$

или

$$
\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + C_3 e^t + C_4 e^{-t} \\ -3C_1 - C_2 - 3C_2 t - 3C_3 e^t - 2C_4 e^{-t} \\ C_2 + C_3 e^t - C_4 e^{-t} \\ -3C_2 - 3C_3 e^t + 2C_4 e^{-t} \end{pmatrix}, \tag{35.25}
$$

где C_i, $i=\overline{1,4}$, — произвольные постоянные. Первые две строки в (35.25) дают общее решение $x(t)$ и $y(t)$ исходной системы (35.16), а две последние строки могут быть полезны при нахождении частного решения, поскольку они задают необходимые для этого $x'(t)$, $y'(t)$.

2. Матричный метод

Общее решение системы (35.16) ищем в виде произведения

$$\vec{x}(t)=X(t)\vec{x}_0, \tag{35.26}$$

где вектор $\vec{x}_0$ состоит из произвольных постоянных x_{i0}, $i=\overline{1,4}$:

$$\vec{x}_0=(x_{10}\,x_{20}\,x_{30}\,x_{40})^{\intercal},$$

а $X(t)$ — матрицант системы, являющийся решением задачи Коши

$$X'(t)=AX(t), \qquad X(0)=\mathbb{I}, \tag{35.27}$$

и определяемый матричной экспонентой

$$X(t)=e^{At}=\mathbb{I}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n. \tag{35.28}$$

Векторы (35.20)–(35.23), найденные при решении системы методом Эйлера, можно выбрать в качестве базиса, в котором жорданова форма матрицы A будет иметь вид

$$J_A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{35.29}$$

В этом можно убедиться и непосредственно, вычислив произведение матриц

$$J_A=S^{-1}AS, \tag{35.30}$$

где S — матрица, составленная из векторов (35.20)–(35.23):

$$S=\begin{pmatrix}\vec{g}_1^{(0)} & \vec{g}_1^{(1)} & \vec{g}_2 & \vec{g}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ -3 & -1 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -3 & 2\end{pmatrix}. \tag{35.31}$$

Поскольку указанные векторы линейно независимы, то матрица S является невырожденной и имеет обратную. Найдём её методом элементарных преобразований. Для этого выпишем матрицу Γ_S (см. [9]) и проведём с ней указанные элементарные преобразования:

$$\Gamma_S=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & -1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{S_4+3S_3}{\overset{S_2+3S_1}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1\end{array}\right)\underset{S_3+S_2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1\end{array}\right)\underset{(-1)S_4}{\overset{(-1)S_1}{\sim}}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1\end{array}\right)\overset{\substack{S_1-S_4\\ S_2+S_4}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \overset{S_1 - S_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right).$$

Таким образом, обратная матрица S^{-1} имеет вид

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}. \tag{35.32}$$

Вернувшись к (35.30), с учётом (35.31) и (35.32):

$$J_A = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

убеждаемся в справедливости (35.29).

С учётом того, что $A^n = SJ_A^nS^{-1}$, можем записать

$$X(t) = Se^{J_At}S^{-1}. \tag{35.33}$$

Для вычисления матричной экспоненты (35.33) матрицу J_A представим в блочной форме

$$J_A = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{35.34}$$

где

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$e^{J_At} = \begin{pmatrix} e^{\varepsilon_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\varepsilon_2 t} \end{pmatrix},$$

а поскольку

$$e^{\varepsilon_1 t} = (\mathbb{I} + \varepsilon_1 t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{\varepsilon_2 t} = \left(\mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_2^n \frac{t^n}{n!}\right) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

то

$$e^{J_At} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{35.35}$$

С учётом того, что

$$Se^{J_At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & t & e^t & e^{-t} \\ -3 & -3t-1 & -3e^t & -2e^{-t} \\ 0 & 1 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & -3 & -3e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix},$$

и, согласно (35.33), найдём

$$X(t) = Se^{J_A t}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t & e^t & e^{-t} \\ -3 & -3t-1 & -3e^t & -2e^{-t} \\ 0 & 1 & e^t & -e^{-t} \\ 0 & -3 & -3e^t 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2-3t+3e^t & -1-t+e^t & 2-3t+e^t-3e^{-t} & 1-t-e^{-t} \\ 9+9t-9e^t & 4+3t-3e^t & -3+3t-3e^t+6e^{-t} & -2+3t+2e^{-t} \\ -3+3e^t & -1+e^t & -3+e^t+3e^{-t} & -1+e^{-t} \\ 9-9e^t & 3-3e^t & 9-3e^t-6e^{-t} & 3-2e^{-t} \end{pmatrix}. \tag{35.36}$$

Из (35.36) легко проверить, что

$$X(0) = \mathbb{I}.$$

Теперь найдём общее решение $\vec{x}(t)$ в форме Коши для системы (35.15), согласно (35.26):

$$X(t)\vec{x}_0 = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_{10} - x_{20} + 2x_{30} + x_{40} \\ 9x_{10} + 4x_{20} - 3x_{30} - 2x_{40} \\ -3x_{10} - x_{20} - 3x_{30} - x_{40} \\ 9x_{10} + 3x_{20} + 9x_{30} + 3x_{40} \end{pmatrix} +$$

$$+t\begin{pmatrix} -3x_{10} - x_{20} - 3x_{30} - x_{40} \\ 9x_{10} + 3x_{20} + 3x_{30} + 3x_{40} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix} 3x_{10} + x_{20} + x_{30} \\ -9x_{10} - 9x_{20} - 3x_{30} \\ 3x_{10} + x_{20} + x_{30} \\ -9x_{10} - 3x_{20} - 3x_{30} \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} -3x_{30} - x_{40} \\ 6x_{30} + 2x_{40} \\ 3x_{30} + x_{40} \\ -6x_{30} - 2x_{40} \end{pmatrix}. \tag{35.37}$$

Переопределив в ранее найденном решении (35.25) произвольные постоянные $C_1 = -2x_{10} - x_{20} + 2x_{30} + x_{40}$, $C_2 = -3x_{10} - x_{20} - 3x_{30} - x_{40}$, $C_3 = 3x_{10} + x_{20} + x_{30}$, $C_4 = -3x_{30} - x_{40}$, получим выражение (35.37), представляющее собой общее решение в форме Коши, поскольку

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0.$$

3. Операторный метод

Из соображений удобства вернёмся от нормальной формы (35.14) системы к канонической (35.12), которую с помощью оператора $D = d/dt$ можно записать в виде (28.2):

$$A(D) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = 0,$$

где матрица-оператор имеет вид

$$\begin{pmatrix} D^2 + 2D - 3 & D - 1 \\ -3D + 9 & D^2 - 2D + 3 \end{pmatrix}. \tag{35.38}$$

Согласно общей схеме операторного метода, решение ищем в виде (28.3):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{21}(D) \\ A_{22}(D) \end{pmatrix} V(t), \tag{35.39}$$

где $A_{21}(D), A_{22}(D)$ — алгебраические дополнения к элементам второй строки матрицы A, а функция $V(t)$ — решение уравнения

$$\begin{aligned}\det A(D)V(t) = [(D^2+2D-3)(D^2+2D-3)+3(D-1)(D-1)]V(t) = \\ = D^2(D^2-1)^2V(t) = 0. \qquad (35.40)\end{aligned}$$

Уравнение (35.40) однозначно определяет корни характеристического многочлена: действительный двукратный $\lambda_1 = 0$ и два простых действительных $\lambda_{2,3} = \pm 1$, которым соответствует фундаментальная система решений

$$V_1(t) = 1, \quad V_2(t) = t, \quad V_3(t) = e^t, \quad V_4(t) = e^{-t}, \qquad (35.41)$$

определяющая общее решение уравнения (35.40)

$$V(t) = a_1V_1(t) + a_2V_2(t) + a_3V_3(t) + a_4V_4(t) = a_1 + a_2t + a_3e^t + a_4e^{-t}. \qquad (35.42)$$

Так как

$$A_{21}(D) = -(D-1), \qquad A_{22}(D) = D^2 - 2D - 3 = (D+3)(D-1),$$

то из (35.39) найдём

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(D-1) \\ (D+3)(D-1) \end{pmatrix} V(t)$$

или

$$\begin{aligned} x(t) &= -(D-1)V(t), \\ y(t) &= (D+3)(D-1)V(t). \end{aligned} \qquad (35.43)$$

Примем во внимание, что

$$\begin{aligned}(D-1)V(t) = (D-1)[a_1V_1(t) + a_2V_2(t) + a_3V_3(t) + a_4V_4(t)] = \\ = (D-1)[a_1V_1(t) + a_2V_2(t) + a_4V_4(t)] + (D-1)V_3(t) = \\ = (D-1)[a_1V_1(t) + a_2V_2(t) + a_4V_4(t),\end{aligned}$$

поскольку

$$(D-1)a_3V_3(t) = (D-1)a_3e^t = a_3[(e^t)' - e^t] = 0.$$

Следовательно, вектор (35.43) не является общим решением, так как он содержит только три произвольные постоянные a_1, a_2, a_4 вместо четырёх ввиду отсутствия a_3.

Восстановить эту «потерянную» произвольную постоянную можно, заменив алгебраические дополнения к элементам второй строки матрицы $A(D)$ на алгебраические дополнения к элементам первой строки, т.е. вместо (35.39) считать

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}(D) \\ A_{12}(D) \end{pmatrix} V(t). \qquad (35.44)$$

Тогда

$$\begin{aligned} x(t) &= A_{11}V(t) = (D^2 - 2D + 3)V(t), \\ y(t) &= A_{12}V(t) = (3D - 9)V(t) = 3(D-3)V(t), \end{aligned} \qquad (35.45)$$

Замена (35.39) на (35.44) фактически соответствует замене строк в матрице $A(D)$ (35.38), которая не меняет абсолютную величину $\det A(D)$, а следовательно, не меняет уравнение (35.40) и общее решение $V(t)$ (35.42).

Подстановка $V(t)$ (35.42) в (35.45) даёт уже общее решение

$$\begin{aligned} x(t) &= 3a_1 - 2a_2 + 3a_2 t + 2a_3 e^t + 6a_4 e^{-t}, \\ y(t) &= -9a_1 + 3a_2 - 9a_2 t - 6a_3 e^t - 12a_4 e^{-t}, \end{aligned} \tag{35.46}$$

которое совпадает с найденным ранее решением (35.25), если произвольные постоянные переопределить по правилу $a_1 = (3C_1 + 2C_2)/9$, $a_2 = C_2/3$, $a_3 = C_3/2$ и $a_4 = C_4/6$ (и с решением примера 29.1, если заменить $a_1 = -C_1$, $a_2 = -C_2$, $a_3 = -C_3$, $a_4 = -C_4$).

Пример 35.4. Решить систему уравнений

$$\begin{gathered} x''' - x'' - x' + x - y'' + 3y' - 2y - z' - z = 0, \\ 3x'' - 6x' + 3x - y'' + 4y' - 3y + 2z' - 2z = 0, \\ x'' - 2x' + x + y' - y + z' - z = 0. \end{gathered} \tag{35.47}$$

Решение. Система уравнений является системой шестого порядка. Найдём решение операторным методом, поскольку решение другими методами связано с вычислением матриц и определителей шестого порядка.

Запишем исходную систему в операторном виде

$$\begin{aligned} &(D^3 - D^2 - D + 1)x + (-D^2 + 3D - 2)y + (D - 1)z = 0, \\ &3(D^2 - 2D + 1)x + (-D^2 + 4D - 3)y + 2(D - 1)z = 0, \\ &(D^2 - 2D + 1)x + (D - 1)y + (D - 1)z = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &(D + 1)(D - 1)^2 x - (D - 2)(D - 1)y + (D - 1)z = 0, \\ &3(D - 1)^2 x - (D - 3)(D - 1)y + 2(D - 1)z = 0, \\ &(D - 1)^2 + (D - 1)y + (D - 1)z = 0. \end{aligned} \tag{35.48}$$

Вычтя из 2-го уравнения (35.48) третье, получим

$$\begin{aligned} &(D + 1)(D - 1)^2 x - (D - 2)(D - 1)y + (D - 1)z = 0, \\ &2(D - 1)^2 x - (D - 2)(D - 1)y + 2(D - 1)z = 0, \\ &(D - 1)^2 + (D - 1)y + (D - 1)z = 0. \end{aligned} \tag{35.49}$$

Теперь вычтя в системе (35.49) из первого уравнения второе, а из второго — третье, запишем

$$\begin{aligned} &(D - 1)^3 x = 0, \\ &2(D - 1)^2 x - (D - 1)^2 y = (D - 1)^2 (x - y) = 0, \\ &(D - 1)[(D - 1)x + y + z] = 0. \end{aligned} \tag{35.50}$$

Первому уравнению в (35.50) соответствует характеристическое уравнение с действительным трехкратным корнем $\lambda = 1$, и, следовательно, общее решение для функции $x(t)$ имеет вид

$$x(t) = \Big(C_1 + C_2 t + C_3 \frac{t^2}{2}\Big) e^t, \tag{35.51}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Аналогично из второго уравнения (35.50) найдём

$$[x(t) - y(t)] = (\bar{C}_4 + \bar{C}_5 t)e^t, \tag{35.52}$$

где $\bar{C}_4, \bar{C}_5$ – ещё две произвольные постоянные. Из (35.52) с учётом (35.51) найдём функцию $y(t)$:

$$y(t) = x(t) - (\bar{C}_4 + \bar{C}_5 t)e^t = \Big[(C_1 - \bar{C}_4) + (C_2 - \bar{C}_5)t + C_3\frac{t^2}{2}\Big]e^t$$

или

$$y(t) = \Big(C_4 + C_5 + C_3\frac{t^2}{2}\Big)e^t, \tag{35.53}$$

если обозначить $C_1 - \bar{C}_4 = C_4$ и $C_2 - \bar{C}_5 = C_5$, т.е. C_4 и C_5 — также произвольные постоянные.

Наконец, из третьего уравнения (35.50) имеем

$$(D - 1)x + y + z = \bar{C}_6 e^t$$

с произвольной постоянной $\bar{C}_6$.

Отсюда

$$z(t) = \bar{C}_6 e^t - y - (D - 1)x = \bar{C}_6 + y - x' + x = \Big[(\bar{C}_6 - C_2 - C_4) - (C_3 + C_5)t - C_3\frac{t^2}{2}\Big]e^t$$

или

$$z(t) = \Big[C_6 - (C_3 + C_5)t + C_3\frac{t^2}{2}\Big]e^t, \tag{35.54}$$

если переопределить $\bar{C}_6 - C_2 - C_4$ как новую постоянную C_6.

Таким образом, общее решение системы (35.47) определяется формулами (35.51), (35.53) и (35.54) с шестью произвольными постоянными C_i, $i = \overline{1,6}$.

◊ В некоторых случаях полезен и другой подход к определению функций $y(t)$ и $z(t)$. Действительно, подействовав на второе уравнение (35.50) оператором $(D - 1)$, получим

$$(D - 1)^3 x + (D - 1)^3 y = 0,$$

откуда с учётом первого уравнения следует

$$(D - 1)^3 y = 0. \tag{35.55}$$

Это уравнение совершенно аналогично первому уравнению из (35.50) и, следовательно, имеет общее решение вида

$$y(t) = \Big(C_4 + C_5 + C_6\frac{t^2}{2}\Big)e^t \tag{35.56}$$

с произвольными постоянными C_4, C_5, C_6. Однако необходимо помнить, что решения $x(t)$ и $y(t)$ являются решениями первых двух уравнений из (35.50), представляющих вместе систему пятого порядка, и, следовательно, должны содержать пять произвольных постоянных, а не шесть. Легко заметить, что шестая постоянная появилась в силу дополнительного действия на второе уравнение из (35.50) оператором $(D-1)$, что и привело к уравнению третьего порядка (35.55). Для того чтобы установить связь между C_i, $i = \overline{1,6}$, подставим решения $x(t)$ и $y(t)$ в виде (35.51) и (35.56) во второе уравнение системы (35.50).

Это с учётом соотношений

$$(D-1)^2 x(t) = C_3 e^t,$$
$$(D-1)^2 y(t) = C_6 e^t$$

даёт

$$(D-1)^2[x(t) - y(t)] = (C_3 - C_6)e^t = 0.$$

Отсюда $C_3 = C_6$, и, следовательно, решение (35.56) примет вид

$$y(t) = \Big(C_4 + C_5 t + C_3 \frac{t^2}{2}\Big)e^t. \tag{35.57}$$

Чтобы найти функцию $z(t)$, на третье уравнение системы (35.50) подействуем оператором $(D-1)^2$ и получим

$$(D-1)^3[(D-1)x+y+z] = (D-1)^4 x + (D-1)^3 y + (D-1)^3 z = (D-1)^3 z = 0, \tag{35.58}$$

поскольку $(D-1)^4 x = (D-1)^3 y = 0$.

Уравнение (35.58) для $z(t)$ совершенно аналогично уравнениям для $x(t)$ и $y(t)$, и, следовательно, $z(t)$ может быть записано в виде

$$z(t) = \Big(C_6 + C_7 t + C_8 \frac{t^2}{2}\Big)e^t. \tag{35.59}$$

Как и для функции $y(t)$, необходимо помнить, что функция $z(t)$ изначально определена третьим уравнением системы (35.50), которое является уравнением первого порядка относительно $z(t)$. Это означает, что ранее введённые произвольные постоянные можно дополнить только одной новой, а не тремя. Следовательно, другие две должны выражаться через уже введённые ранее. Чтобы их найти, подставим все три функции $x(t)$ (35.51), $y(t)$ (35.57) и $z(t)$ (35.59) в третье уравнение (35.50). Тогда

$$(D-1)^2 x(t) + (D-1)y(t) + (D-1)z(t) = [C_3 + (C_5 + C_3 t) + (C_7 + C_8 t)]e^t = 0,$$

и, следовательно, $C_3 + C_5 + C_7 = 0$, $C_3 + C_8 = 0$. С учётом этого $C_7 = -(C_3 + C_5)$, $C_8 = -C_3$ и решение (35.58) примет вид

$$z(t) = \Big[C_6 - (C_3 + C_5)t - C_3 \frac{t^2}{2}\Big]. \tag{35.60}$$

Формулы (35.51), (35.59) и (35.60), содержащие в итоге шесть произвольных постоянных, определяют общее решение системы дифференциальных уравнений шестого порядка (35.47).

Пример 35.5. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} &5x'' + 5x + 3y'' + 3y + 8z'' + 8z = 0,\\ &x'' + 4x + 3y'' + 12y + 3z'' + 12z = 0,\\ &x'' - 2x - 2y'' - 11y - 9z = 0. \end{aligned} \tag{35.61}$$

Решение. Система (35.61) является системой дифференциальных уравнений шестого порядка. Проще всего решение находится операторным методом, поскольку решение другими методами связано с вычислением матриц и определителей шестого порядка.

Запишем исходную систему в операторно-матричном виде:

$$A(D)\vec{x}(t) = 0, \tag{35.62}$$

где на вектор

$$\vec{x}(t) = (x(t) \quad y(t) \quad z(t))^{\intercal} \tag{35.63}$$

действует матричный оператор

$$A(D) = \begin{pmatrix} 5(D^2+1) & 3(D^2+1) & 8(D^2+1) \\ (D^2+4) & 3(D^2+4) & 3(D^2+4) \\ (D^2-2) & (-2D^2-11) & -9 \end{pmatrix}, \tag{35.64}$$

в котором обозначено $D = d/dt$ и, соответственно, $D^2 = d^2/dt^2$.

Согласно общей схеме метода, вспомогательная функция $V(t)$, через которую выражаются компоненты вектора $\vec{x}(t)$, находится из уравнения

$$\begin{aligned} \det AV(t) &= \begin{vmatrix} 5(D^2+1) & 3(D^2+1) & 8(D^2+1) \\ (D^2+4) & 3(D^2+4) & 3(D^2+4) \\ (D^2-2) & (-2D^2-11) & -9 \end{vmatrix} V(t) = \\ &= -(D+1)^2(D^2+4)V(t) = 0. \end{aligned} \tag{35.65}$$

Его характеристическое уравнение (или характеристический полином) $(\lambda^2 + 1)^2(\lambda^2+4) = 0$ имеет комплексные корни $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_{3,4} = \pm 2i$, причём $\lambda_{1,2}$ — двукратные корни, $\lambda_{3,4}$ — простые. Следовательно, $V(t)$ имеет вид

$$V(t) = A_1 \sin(t+\varphi_1) + tA_2 \sin(t+\varphi_2) + A_3 \sin(2t+\varphi_3), \tag{35.66}$$

где A_i, φ_i, $i = 1, 2, 3,$ — шесть произвольных постоянных.

Выразим искомые функции x, y, z через функцию w с помощью алгебраических дополнений матрицы $\widehat{A}(D)$ (35.64):

$$\begin{aligned} x(t) &= A_{13}(D)V(t) = \begin{vmatrix} 3(D^2+1) & 8(D^2+1) \\ 3(D^2+4) & 3(D^2+4) \end{vmatrix} V(t) = -15(D^2+1)(D^2+4)V(t), \\ y(t) &= A_{23}(D)V(t) = -\begin{vmatrix} 5(D^2+1) & 8(D^2+1) \\ (D^2+4) & 3(D^2+4) \end{vmatrix} V(t) = -7(D^2+1)(D^2+4)V(t), \\ z(t) &= A_{33}(D)V(t) = \begin{vmatrix} 5(D^2+1) & 3(D^2+1) \\ (D^2+4) & 3(D^2+4) \end{vmatrix} V(t) = 12(D^2+1)(D^2+4)V(t). \end{aligned} \tag{35.67}$$

К сожалению, подстановка $V(t)$ (35.66) в выражения (35.67) даёт только частное решение, а не общее, поскольку операторы (D^2+1) и (D^2+4) вырезают из решений произвольные постоянные A_1, φ_1 и A_3, φ_3. Поскольку перестановка строк в матрице (35.64) ситуацию не улучшает, то, чтобы найти общее решение, в данном случае поступим следующим образом. Перепишем исходную систему в виде

$$(D^2+1)(5x+3y+8z) = (D^2+1)v_1 = 0, \tag{35.68а}$$

$$(D^2+4)(x+3y+3z) = (D^2+4)v_2 = 0, \tag{35.68б}$$

$$(D^2-2)x - (2D^2+11)y - 9z = 0. \tag{35.68в}$$

Характеристическое уравнение для (35.68*а*) имеет пару простых комплексно-сопряжённых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$, поэтому функция $v_1 = 5x + 3y + 8z$ имеет вид

$$v_1(t) = 5x + 3y + 8z = a_1 \cos t + b_1 \sin t = A_1 \sin(t + \varphi_1). \tag{35.69}$$

Характеристическое уравнение для (35.68*б*) также имеет пару простых комплексных корней $\lambda_{3,4} = \pm 2i$, и, следовательно, для функции $v_2 = x + 3y + 3z$ можно записать

$$v_2(t) = x + 3y + 3z = a_2\cos 2t + b_2\sin 2t = A_2\sin(2t + \varphi_2). \tag{35.70}$$

В формулах (35.69), (35.70) a_i, b_1, $i = 1, 2$, — произвольные постоянные; там же для удобства введены произвольные постоянные A_i, φ_i которые известным образом выражаются через a_i, b_i: $A_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_i = a_i/b_i$.

Так как, согласно (35.69) и (35.70),

$$\begin{aligned}5x + 3y &= -8z + A_1\sin(t + \varphi_1) = -8z + v_1,\\ x + 3y &= -3z + A_2\sin(2t + \varphi_2) = -3z + v_2,\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{4}(-5z + v_1 - v_2),\\ y(t) &= \frac{1}{12}(-7z - v_1 + 5v_2).\end{aligned} \tag{35.71}$$

Подставив (35.71) в (35.68*в*) и учтя, что, согласно (35.69) и (35.70),

$$D^2v_1 = -v_1, \qquad D^2v_2 = -4v_2, \tag{35.72}$$

для функции $z(t)$ получим уравнение

$$z'' + z = 3v_2. \tag{35.73}$$

Поскольку частным решением этого уравнения является функция $-v_2(t)$, а общим решением соответствующего однородного уравнения – функция $A_3\sin(t+\varphi_3)$, то их сумма представляет собой общее решение уравнения (35.73):

$$z(t) = A_3\sin(t + \varphi_3) - v_2(t). \tag{35.74}$$

Подставив (35.74) в (35.71) и записав v_1 и v_2 в явном виде, получим общее решение исходной системы

$$\begin{aligned}4x(t) &= A_1\sin(t + \varphi_1) + 4A_2\sin(2t + \varphi_2) - 5A_3\sin(t + \varphi_3),\\ 12y(t) &= -A_1\sin(t + \varphi_1) + 12A_2\sin(2t + \varphi_2) - 7A_3\sin(t + \varphi_3),\\ z(t) &= -A_2\sin(2t + \varphi_2) + A_3\sin(t + \varphi_3),\end{aligned}$$

содержащее шесть произвольных постоянных A_i, φ_i, $i = 1, 2, 3$.

36. Неоднородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Ранее мы уже рассматривали некоторые методы интегрирования неоднородных систем. Так, были рассмотрены метод исключения, метод Лагранжа (метод вариации произвольных постоянных) и метод Коши. Все они используются и при интегрировании систем уравнений с постоянными коэффициентами. Более того, поскольку матрица системы постоянна, то схемы этих методов упрощаются.

Действительно, общее решение в форме Коши линейной неоднородной системы (26.1) с произвольной матрицей A определяется как (27.5)

$$\vec{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\vec{x}_0 + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(\tau)\vec{f}(\tau)d\tau,$$

где $X(t)X^{-1}(t_0)$ — фундаментальная матрица соответствующей (26.1) однородной системы (26.4), нормированная в точке t_0.

Если матрица A системы (26.1) постоянна, то мы приходим к системе с постоянными коэффициентами (28.5) и в этом случае нам не требуется вычислять матрицу $X^{-1}(t)$, поскольку, согласно лемме 28.1,

$$X(t)X^{-1}(t_0) = X(t - t_0),$$

и тогда

$$\vec{x}(t) = X(t - t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} X(t - \tau)\vec{f}(\tau)d\tau. \tag{36.1}$$

Если теперь учесть, что матрицант однородной системы с постоянными коэффициентами (28.6), согласно (33.3), можно записать как

$$X(t) = e^{At},$$

то решение (36.1) примет вид

$$\vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)d\tau. \tag{36.2}$$

Это решение представляет собой обобщение решения одного (скалярного) линейного уравнения первого порядка (3.16) и удовлетворяет условию $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$.

♦ Функция $K(t - \tau) = e^{A(t-\tau)}$ называется *функцией Коши*.

Помимо рассмотренных ранее методов решения неоднородных систем линейных уравнений, к системам с постоянными коэффициентами применяется ещё метод неопределённых коэффициентов, который мы уже применяли при решении скалярного уравнения с постоянными коэффициентами. Действительно, если решением одного уравнения с постоянными коэффициентами является квазиполином, то решением системы таких уравнений будет векторный квазиполином вида (16.4):

$$g(t) = e^{\lambda_1 t}\vec{P}_{k_1}(t) + \ldots + e^{\lambda_m t}\vec{P}_{k_m}(t), \tag{36.3}$$

где $\vec{P}_{k_j}(t)$, $j = \overline{1, m}$, — вектор-функции, компонентами которых являются полиномы (многочлены) степени не выше, чем k_j.

Это означает, что если вектор-функция $\vec{f}(t)$ является векторным квазиполиномом, т.е.

$$\vec{f}(t) = e^{\alpha t}\vec{P}_m(t), \tag{36.4}$$

то частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\vec{x}^*(t) = e^{\alpha t}\vec{Q}_{m+s}(t), \tag{36.5}$$

где $s = 0$, если α не совпадает ни с одним действительным собственным значением матрицы A; если же α совпадает с каким-либо действительным собственным значением матрицы A, то величина s выбирается равной его кратности. Компонентами векторного полинома $\vec{Q}_{m+s}(t)$ являются полиномы степени $m+s$ с неизвестными коэффициентами, которые определяются путём подстановки (36.5) в неоднородную систему (28.5) и сравнения коэффициентов при подобных слагаемых.

Аналогично определяются степени вектор-полиномов в том случае, когда

$$\vec{f}(t) = e^{\alpha t}[\vec{P}_m(t)\cos\beta t + \vec{P}_l(t)\sin\beta t], \tag{36.6}$$

а комплексное число $\alpha \pm i\beta$ не совпадает или совпадает с комплексным собственным значением матрицы A кратности s.

Пример 36.1. Найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{aligned} x'(t) &= 5x(t) + 2y(t) + t, \\ y'(t) &= -4x(t) - y(t) + e^{2t}. \end{aligned} \tag{36.7}$$

Решение. Найдём решение этой системы различными способами, о которых было упомянуто выше.

1. Метод исключения

В примере 30.1 методом исключения была решена соответствующая (36.7) однородная система. Следуя приведённой в этом примере общей схеме метода исключения, продифференцируем первое уравнение из (36.7):

$$x'' = 5x' + 2y' + 1.$$

Подставив сюда оба равенства (36.7), найдём

$$x'' = 17x + 8y + 5t + 2e^{2t}. \tag{36.8}$$

Выразив из первого уравнения (36.7) функцию $y(t)$:

$$y = \frac{x' - 5x - t}{2} \tag{36.9}$$

и подставив её в (36.8), получим уравнение 2-го порядка для функции $x(t)$:

$$x'' - 4x' + 3x = t + 2e^{2t} + 1. \tag{36.10}$$

Как следует из результатов примера 30.1, решение $x_0(t)$ однородного уравнения, соответствующего (36.10), имеет вид

$$x_0(t) = C_1e^t + C_2e^{3t}, \tag{36.11}$$

что соответствует двум действительным характеристическим корням $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$.

Чтобы найти частное решение неоднородного уравнения (36.10), его правую представим суммой $f_1(t) + f_2(t)$, где

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t = P_1(t)e^{0\cdot t} \\ f_2(t) &= 2e^{2t} = P_0(t)e^{2t}. \end{aligned} \tag{36.12}$$

Это позволяет искать частное решение $x^*(t)$ неоднородного уравнения (36.10) также в виде суммы

$$x^*(t) = x_1^*(t) + x_2^*(t), \tag{36.13}$$

где $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} &(x_1^*)'' - 4(x_1^*)' + 3(x_1^*) = t, \\ &(x_2^*)'' - 4(x_2^*)' + 3(x_2^*) = 2e^{2t}. \end{aligned} \tag{36.14}$$

Поскольку правые части уравнений (36.14) являются квазиполиномами, их решения можно найти методом неопределённых коэффициентов. Частные решения ищем в виде

$$x_1^*(t) = A_0 + A_1 t, \tag{36.15}$$

$$x_2^*(t) = Be^{2t}, \tag{36.16}$$

где A_0, A_1, B — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Подставив (36.15) и (36.16) в (36.14), получим

$$\begin{gathered} -4A_1 + 3(A_0 + A_1 t) = t, \\ 4Be^{2t} - 8Be^{2t} + 3Be^{2t} = 2e^{2t}, \end{gathered}$$

откуда $A_0 = 7/9$, $A_1 = 1/3$, $B = -2$ и, соответственно,

$$\begin{aligned} x_1^*(t) &= \frac{7}{9} + \frac{1}{3}t, \\ x_2^*(t) &= -2e^{2t}, \\ x^*(t) = x_1^*(t) + x_2^*(t) &= \frac{7}{9} + \frac{1}{3}t - 2e^{2t}. \end{aligned} \tag{36.17}$$

Таким образом, общее решение (36.10) с учётом (36.11) и (36.17) примет вид

$$x(t) = x_0(t) + x^*(t) = C_1e^t + C_2e^{3t} + \frac{7}{9} + \frac{1}{3}t - 2e^{2t}. \tag{36.18}$$

Функцию $y(t)$ найдём, подставив (36.18) в (36.9):

$$y(t) = -2C_1e^t - C_2e^{3t} - \frac{16}{9} - \frac{4}{3}t + 3e^{2t}.$$

Таким образом, решение системы можно записать как

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{x}^0(t) + \vec{x}^*(t), \tag{36.19}$$

где

$$\vec{x}^0(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} \tag{36.20}$$

совпадает с решением (30.8), найденным в примере 30.1 для однородной системы, а

$$\vec{x}^*(t) = \vec{Q}_1(t) + \vec{\bar{Q}}_0(t)e^{3t} = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{9} + \dfrac{1}{3}t \\ -\dfrac{16}{9} - \dfrac{4}{3}t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t}. \tag{36.21}$$

2. Метод Лагранжа

Фундаментальная система решений (см. (36.20)) однородного уравнения имеет вид

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t, \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}. \tag{36.22}$$

Поэтому решение неоднородной системы (36.7), согласно методу Лагранжа, представим в форме (27.1):

$$\vec{x}(t) = C_1(t)\vec{x}_1(t) + C_2(t)\vec{x}_2(t). \tag{36.23}$$

Тогда функции $C_1'(t)$, $C_2'(t)$ найдём из системы

$$C_1'(t)\vec{x}_1 + C_2'(t)\vec{x}_2 = \vec{f}(t)$$

или

$$\begin{aligned} C_1'e^t + C_2'e^{3t} &= t, \\ -2C_1'e^t - C_2'e^{3t} &= e^{2t}. \end{aligned} \tag{36.24}$$

Сложив уравнения в (36.24), запишем

$$C_1'(t) = -te^{-t} - e^t. \tag{36.25}$$

Подставив (36.25) в первое уравнение (36.24), получим

$$C_2' = e^{-t} + 2te^{-3t}. \tag{36.26}$$

Проинтегрировав (36.25) и (36.26), найдём

$$\begin{aligned} C_1(t) &= (t+1)e^{-t} - e^t + \bar{C}_1, \\ C_2(t) &= -e^{-t} - \frac{2}{3}\Big(t + \frac{1}{3}\Big)e^{-3t} + \bar{C}_2, \end{aligned} \tag{36.27}$$

где $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ — произвольные постоянные. Подстановка (36.27) в (36.23) определяет общее решение

$$\vec{x}(t) = [\bar{C}_1 + (t+1)e^{-t} - e^t]\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + \Big[\bar{C}_2 - e^{-t} - \frac{2}{3}\Big(t + \frac{1}{3}\Big)e^{-3t}\Big]\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{C}_1e^t + \bar{C}_2e^{3t} + \dfrac{7}{9} + \dfrac{1}{3}t - 2e^{2t} \\ -2\bar{C}_1e^t - \bar{C}_2e^{3t} - \dfrac{16}{9} - \dfrac{4}{3}t + 3e^{2t} \end{pmatrix},$$

совпадающее с найденным ранее (36.19).

3. Метод Коши

В этом случае общее решение системы (36.7) определяется формулой (36.2). Первое слагаемое этой формулы задаёт общее решение $\vec{x}^0(t)$ однородной системы, а второе — частное решение $\vec{x}^*(t)$ неоднородной системы (36.7).

Матрицант $X(t) = e^{At}$ однородной системы (36.7) получен в примере 33.2 и имеет вид

$$X(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} -e^t + 2e^{3t} & -e^t + 2e^{3t} \\ 2e^t - 2e^{3t} & 2e^t - e^{3t} \end{pmatrix}. \tag{36.28}$$

Тогда

$$X(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}=\begin{pmatrix}-e^{t-t_0}+2e^{3(t-t_0)} & -e^{t-t_0}+2e^{3(t-t_0)}\\ 2e^{t-t_0}-2e^{3(t-t_0)} & 2e^{t-t_0}-e^{3(t-t_0)}\end{pmatrix},$$

и если $\vec{x}^0(t_0)=\vec{x}_0$, то

$$\vec{x}^0(t)=X(t-t_0)\vec{x}_0 \tag{36.29}$$

даёт общее решение однородной системы в форме Коши.

Частное решение $\vec{x}^*(t)$ неоднородной системы задаётся интегралом

$$\vec{x}^*(t)=\int\limits_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)d\tau=\int\limits_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}-e^{t-\tau}+2e^{3(t-\tau)} & -e^{t-\tau}+2e^{3(t-\tau)}\\ 2e^{t-\tau}-2e^{3(t-\tau)} & 2e^{t-\tau}-e^{3(t-\tau)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ e^{2\tau}\end{pmatrix}d\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}\int\limits_{t_0}^{t}[(-e^{t-\tau}+2e^{3(t-\tau)})\tau+(-e^{t-\tau}+e^{3(t-\tau)})e^{2\tau}]d\tau\\ \int\limits_{t_0}^{t}[(2e^{t-\tau}-2e^{3(t-\tau)})\tau+(2e^{t-\tau}-e^{3(t-\tau)})e^{2\tau}]d\tau\end{pmatrix}. \tag{36.30}$$

После вычисления интегралов

$$e^t\int\limits_{t_0}^{t}e^{-\tau}\tau\,d\tau=e^{t-t_0}(t_0+1)-(t+1);$$

$$e^{3t}\int\limits_{t_0}^{t}e^{-3\tau}\tau\,d\tau=\frac{1}{3}e^{3(t-t_0)}-\frac{1}{3}\Big(t+\frac{1}{3}\Big);$$

$$e^t\int\limits_{t_0}^{t}e^{\tau}d\tau=e^{2t}-e^{t+t_0};$$

$$e^{3t}\int\limits_{t_0}^{t}e^{-\tau}d\tau=e^{3t-t_0}-e^{2t}$$

частное решение можно записать как

$$\vec{x}^*(t)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{3}t+\dfrac{7}{9}-2e^{2t}\\ -\dfrac{4}{3}t-\dfrac{16}{9}+3e^{2t}\end{pmatrix}+[e^{t_0}-e^{-t_0}(t_0+1)]\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}e^t+$$

$$+\Big[e^{-t_0}+e^{-3t_0}\Big(t_0+\frac{1}{3}\Big)\Big]\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{3t}. \tag{36.31}$$

Первое слагаемое в (36.31) даёт частное решение, совпадающее с решением (36.21), полученным ранее. Второе слагаемое имеет структуру общего решения однородного уравнения (как и (36.20)) и после его объединения с $\vec{x}^0(t)$ (36.29) и переопределения произвольных постоянных в $\vec{x}_0=(x_0\ y_0)^\intercal$ также приводит к найденному уже решению (36.20). Наличие второго слагаемого объясняется тем, что что метод Коши даёт общее решение системы в форме Коши, когда частное решение $\vec{x}^*(t)$ должно удовлетворять нулевому начальному условию $\vec{x}^*(t_0)=0$, которому и удовлетворяет (36.31) за счёт второго слагаемого.

4. Метод неопределённых коэффициентов

Как уже отмечалось, этот метод позволяет избежать операции интегрирования, присущей трём уже рассмотренным методам. Однако он может быть использован только в том случае, если правая часть неоднородной системы является векторным квазиполиномом.

Правая часть системы (36.7) является как раз таким квазиполиномом, поскольку

$$\vec{f}(t) = \vec{f}_1(t) + \vec{f}_2(t), \tag{36.32}$$

где

$$\begin{aligned} \vec{f}_1(t) &= \vec{P}_1(t)e^{(\alpha_1+i\beta_1)t} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{f}_2(t) &= \vec{P}_2(t)e^{(\alpha_2+i\beta_2)t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}. \end{aligned} \tag{36.33}$$

Это позволяет найти частное решение $\vec{x}^*(t)$ в виде суммы

$$\vec{x}^*(t) = \vec{x}_1^*(t) + \vec{x}_2^*(t), \tag{36.34}$$

слагаемые которой являются решениями следующих неоднородных систем:

$$\begin{aligned} [\vec{x}_1^*(t)]' &= A\vec{x}_1^*(t) + \vec{f}_1(t), \\ [\vec{x}_2^*(t)]' &= A\vec{x}_2^*(t) + \vec{f}_2(t). \end{aligned} \tag{36.35}$$

В формулах (36.33) $\vec{P}_1(t)$ и $\vec{P}_0(t)$ — векторные полиномы первого и нулевого порядков, а числа $\alpha_1+i\beta_1 = 0$ и $\alpha_2+i\beta_2 = 0$ не совпадают с характеристическими числами $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Поэтому частные решения (36.35) ищем в виде

$$\begin{aligned} \vec{x}_1^*(t) &= \vec{Q}_1(t) = \begin{pmatrix} q_0 + q_1 t \\ \bar{q}_0 + \bar{q}_1 t \end{pmatrix}, \\ \vec{x}_2^*(t) &= \vec{Q}_0(t)e^{2t} = \begin{pmatrix} q_3 \\ \bar{q}_3 \end{pmatrix} e^{2t}. \end{aligned} \tag{36.36}$$

Подставив (36.36) в (36.35), получим алгебраические системы для определения коэффициентов q_j, $\bar{q}_j$, $j = \overline{1,3}$:

$$\begin{aligned} q_1 &= 5(q_0 + q_1 t) + 2(\bar{q}_0 + \bar{q}_1 t) + t, \\ \bar{q}_1 &= -4(q_0 + q_1 t) - (\bar{q}_0 + \bar{q}_1 t) \end{aligned} \tag{36.37}$$

и

$$\begin{aligned} 2q_3 &= 5q_3 + 2\bar{q}_3, \\ 2\bar{q}_3 &= -4q_3 - \bar{q}_3 + 1. \end{aligned} \tag{36.38}$$

Приравняем в (36.37) коэффициенты при одинаковых степенях t:

$$\text{при } t: \begin{array}{l} 5q_1 + 2\bar{q} + 1 = 0, \\ -4q_1 - \bar{q}_1 = 0; \end{array} \tag{36.39}$$

$$\text{при } t^0: \begin{array}{l} q_1 = 5q_0 + 2\bar{q}_0, \\ \bar{q}_1 = -4q_0 - \bar{q}_0. \end{array} \tag{36.40}$$

Из системы (36.39) найдём $q_1 = 1/3$, $\bar{q}_1 = -4/3$. Подставив их в (36.40), получим $q_0 = 7/9$, $\bar{q}_0 = -16/9$. Решение системы (36.38) даёт $q_3 = -2$, $\bar{q}_3 = 3$. С учётом этого частные решения примут вид

$$\vec{x}_1^*(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{9} + \dfrac{1}{3}t \\ -\dfrac{16}{9} - \dfrac{4}{3}t \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2^*(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t},$$

и, соответственно, частное решение неоднородной системы (36.7)

$$\vec{x}^*(t) = \vec{x}_1^*(t) + \vec{x}_2^*(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{7}{9} + \dfrac{1}{3}t - 2e^{2t} \\ -\dfrac{16}{9} - \dfrac{4}{3}t + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

совпадает с (36.21).

Пример 36.2. Найти решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x' &= 5x + 10y, \\ y' &= -2x - 3y + e^t\cos 2t; \end{aligned} \qquad (36.41)$$

$$x(\pi/4) = 1, \quad y(\pi/4) = 1. \qquad (36.42)$$

Решение. Общее решение однородной системы, соответствующей (36.41), получено в примере 30.5, а её матрицант — в примере 33.7. Правая часть (неоднородность) системы (36.41) является векторным квазиполиномом. Поскольку его параметр $\alpha + i\beta = 1 + 2i$ совпадает с одним из характеристических чисел $\lambda_1 = 1 + 2i$, частное решение уравнения (36.41) следует искать в виде

$$\vec{x}^*(t) = \begin{pmatrix} (A_0 + A_1 t)\cos 2t + (\bar{A}_0 + \bar{A}_1 t)\sin 2t \\ (B_0 + B_1 t)\cos 2t + (\bar{B}_0 + \bar{B}_1 t)\sin 2t \end{pmatrix} e^t.$$

Чтобы найти восемь коэффициентов $A_j, \bar{A}_j, B_j, \bar{B}_j$, потребуются громоздкие вычисления. В данном случае проще использовать метод Коши, тем более, что необходимо найти не просто общее решение, а решение задачи Коши, которое, согласно (36.2), определяется как

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \vec{x}^0(t) + \vec{x}^*(t), \qquad (36.43)$$

где

$$\vec{x}^0(t) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0, \qquad (36.44)$$

$$\vec{x}^*(t) = \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\vec{f}(\tau)d\tau. \qquad (36.45)$$

Учтя, что $t_0 = \pi/4$ и

$$\vec{x}\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t\cos 2t \end{pmatrix},$$

а матрицант e^{At} найден в примере 33.7:

$$X(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} 2\sin 2t + \cos 2t & 5\sin 2t \\ -\sin 2t & -2\sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix} e^t, \qquad (36.46)$$

то

$$\vec{x}^0(t) = X\Big(x - \frac{\pi}{4}\Big) = \begin{pmatrix} 7\sin 2t + \cos 2t \\ -3\sin 2t + \cos 2t \end{pmatrix} e^{t-\pi/4} = \begin{pmatrix} \sin 2t - 7\cos 2t \\ \sin 2t - 3\cos 2t \end{pmatrix} e^{t-\pi/4} \qquad (36.47)$$

и

$$\vec{x}^*(t) = \int\limits_{\pi/4}^{t} X(t-\tau)\begin{pmatrix} 0 \\ e^{\tau}\cos 2\tau \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{t} \begin{pmatrix} 5\sin 2(t-\tau)e^{t-\tau}e^{\tau}\cos 2\tau \\ [-2\sin 2(t-\tau)+\cos 2(t-\tau)]e^{t-\tau}e^{\tau}\cos 2\tau \end{pmatrix} d\tau =$$

$$= \begin{pmatrix} 5e^t\int\limits_{\pi/4}^{t}\sin(2t-2\tau)\cos 2\tau\, d\tau \\ -2e^t\int\limits_{\pi/4}^{t}\sin(2t-2\tau)\cos 2\tau\, d\tau + e^t\int\limits_{\pi/4}^{t}\cos(2t-2\tau)\cos 2\tau\, d\tau \end{pmatrix}. \qquad (36.48)$$

Вычислив интегралы

$$e^t\int\limits_{\pi/4}^{t}\sin(2t-2\tau)\cos 2\tau\, d\tau = \frac{1}{2}e^t\int\limits_{\pi/4}^{t}[\sin 2t+\sin(2t-4\tau)]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}e^t\Big\{\Big(t-\frac{\pi}{4}\Big)\sin 2t + \frac{1}{4}\Big[\cos 2t - \cos 2\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\Big\} = \frac{1}{2}e^t\Big[\Big(t-\frac{\pi}{4}\Big)\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\Big],$$

$$e^t\int\limits_{\pi/4}^{t}\cos(2t-2\tau)\cos 2\tau\, d\tau = \frac{1}{2}e^t\int\limits_{\pi/4}^{t}[\cos 2t+\cos(2t-4\tau)]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}e^t\Big\{\Big(t-\frac{\pi}{4}\Big)\cos 2t + \frac{1}{4}\Big[\sin 2t + \sin 2\Big(t-\frac{\pi}{2}\Big)\Big]\Big\} = \frac{1}{2}e^t\Big(t-\frac{\pi}{4}\Big)\cos 2t,$$

найдём, что

$$\vec{x}^*(t) = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\Big[\Big(t-\frac{\pi}{4}\Big)\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\Big] \\ \Big(t-\frac{\pi}{4}\Big)\Big(-\sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t\Big) - \frac{1}{2}\cos 2t \end{pmatrix} e^t. \qquad (36.49)$$

Сумма (36.47) и (36.49) даёт решение задачи Коши (36.41), (36.42).

37. Системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

Среди систем линейных уравнений существует важный класс систем, свойства которых в определённом смысле близки к свойствам систем уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}, \qquad \vec{x}\in\mathbb{R}^n, \qquad A(t+T) = A(t) = \|A_{jk}\|_{n\times n}. \qquad (37.1)$$

Наряду с уравнениями (37.1) будем рассматривать матричное уравнение

$$\dot{X} = A(t)X, \qquad (37.2)$$

где X — $n\times n$-матрица. Нетрудно убедиться, что столбцы матрицы X являются решениями системы (37.1).

♦ $n\times n$-Матрица $X(t)$, удовлетворяющая уравнению (37.2), называется *фундаментальной матрицей* системы (37.1), если она не вырождена ($\det X(t)\neq 0$, $t\in[0,T]$).

♦ $n\times n$-Матрица $X(t)$, удовлетворяющая уравнению (37.2) и начальному условию $X(0)=\mathbb{I}_{n\times n}=\|\delta_{ij}\|_{n\times n}$, называется *матрицантом*, или *матрицей Коши*, системы уравнений (37.1).

Свойства матрицанта

Свойство 1. Матрицант системы уравнений (37.1) удовлетворяет следующему условию:

$$X(t+T)=X(t)X(T). \tag{37.3}$$

Доказательство. Обе части соотношения (37.3) удовлетворяют уравнению (37.2) и при $t=0$ совпадают. В силу единственности решения задачи Коши утверждение доказано.

Свойство 2. Пусть $X(t)$ — $n\times n$ невырожденная матрица, коэффициенты которой — непрерывные и интегрируемые на $[0,T]$ функции, а сама матрица удовлетворяет при всех t условию (37.3). Тогда $X(t)$ является матрицантом некоторого уравнения с T-периодическими коэффициентами.

Доказательство. Обозначим через

$$A(t)=\dot X(t)X^{-1}(t)$$

$n\times n$-матрицу. Поскольку $X(t)$ — невырожденная непрерывная матрица с интегрируемыми на $[0,T]$ коэффициентами, то $A(t)$ также обладает этими свойствами. Очевидно, что $X(t)$ удовлетворяет матричному уравнению (37.2). Покажем, что $A(t)$ — T-периодические матрицы:

$$A(t+T)=\dot X(t+T)X^{-1}(t+T)=\dot X(t)X(T)\big[X(t)X(T)\big]^{-1}=A(t),$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3. Матрицант системы (37.1) удовлетворяет условию

$$X^{-1}(T)=X(-T). \tag{37.4}$$

Доказательство. Положим в соотношении (37.3) $\tau=-T$ и получим

$$\mathbb{I}=X(0)=X(T)X(-T).$$

Свойство 4. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения

$$\dot{\vec x}=A(t)\vec x+\vec f(t),\qquad \vec x\big|_{t=s}=\vec x_0 \tag{37.5}$$

имеет вид

$$\vec x(t)=X(t,s)\vec x_0+\int\limits_s^t X(t,\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

где $X(t,s)$ — матрицант системы (37.1) в точке s (см. (27.5)).

Свойство 5. Если матрица $A(t)$ не зависит от времени явно, то матрицант системы (37.1) имеет вид

$$X(t)=e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k. \tag{37.6}$$

Доказательство. Продифференцировав (37.6) по t, получим (37.2), т.е. для (37.6) справедливо уравнение (37.2), и при $t=0$ это соотношение обращается в тождество. В силу единственности решения задачи Коши утверждение доказано.

Свойство 6. Для матриціанта системы (37.1) справедливо следующее представление:

$$X(t) = T\exp\Big[\int\limits_0^t A(\tau)\,d\tau\Big] = \mathbb{I} + \int\limits_0^t d\tau_1\,A(\tau_1) + \int\limits_0^t d\tau_1\,A(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2\,A(\tau_2) +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau_1\,A(\tau_1)\int\limits_0^{\tau_1} d\tau_2\,A(\tau_2)\int\limits_0^{\tau_2} d\tau_2\,A(\tau_2) + \ldots \qquad (37.7)$$

Доказательство. Проинтегрировав уравнение (37.2) от нуля до t, получим интегральное уравнение

$$X(t) = \mathbb{I} + \int\limits_0^t A(\tau)X(\tau)\,d\tau,$$

из которого методом итераций найдем (37.7) (см. разд. «Интегральные уравнения» [4]).

♦ Матрица $X(T)$ называется *матрицей монодромии* T-периодической системы (37.1).

Рассмотрим задачу на собственные значения матрицы монодромии

$$X(T)\vec{a} = \rho\vec{a}. \qquad (37.8)$$

Представим собственные значения матрицы монодромии в виде

$$\rho_k = e^{iT\Omega_k}, \qquad k = \overline{1, m}, \quad m < n. \qquad (37.9)$$

♦ Собственные значения матрицы монодромии ρ_k называются *мультипликаторами Флоке*, а Ω_k — *показателями Флоке*. Совокупность мультипликаторов называется *спектром системы* (37.1).

♢ Мультипликаторы системы (37.1) удовлетворяют уравнению

$$\det\,[X(T) - \rho\mathbb{I}] = 0. \qquad (37.10)$$

Уравнение (37.10) называется характеристическим.

Свойство 7. Каждому мультипликатору ρ_k отвечает решение уравнения (37.1), удовлетворяющее условию

$$\vec{x}_k(t+T) = \rho_k\vec{x}(t). \qquad (37.11)$$

♦ Задача о нахождении решения системы (37.1), удовлетворяющих условию (37.11), называется *задачей Флоке*, а сами решения — *решениями Флоке*.

Доказательство. Пусть $\vec{a}_k$ — собственный вектор матрицы монодромии, удовлетворяющие собственному значению ρ_k. Сопоставим ему решение системы (37.1) по правилу

$$\vec{x}_k(t) = X(t)\vec{a}_k.$$

Тогда, согласно (37.3),

$$\vec{x}_k(t+T) = X(t+T)\vec{a}_k = X(t)X(T)\vec{a}_k = X(t)\rho_k\vec{a}_k = \rho_k\vec{x}_k(t),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 37.1 (Флоке–Ляпунова). *Матрицант системы дифференциальных уравнений* (37.1) *с T-периодическими коэффициентами представим в виде*

$$X(t) = F(t)e^{tK}, \qquad (37.12)$$

где $F(t)$ — периодическая матрица-функция с периодом T размера $n\times n$, неособая и непрерывная для всех значений t и удовлетворяющая условию $F(0) = \mathbb{I}$, а K — постоянная $n\times n$-матрица.

Доказательство. Обозначим
$$K = \frac{1}{T}\ln X(T),$$
где под $\ln X$ понимается одно из значений матричного логарифма. Поскольку $\det X(T) \neq 0$, то $\ln X(T)$ существует.

Введем обозначение
$$F(t) = X(t)e^{-tK},$$
тогда
$$F(t+T) = X(t+T)e^{-TK}e^{tK} = X(t)e^{TK}e^{-TK}e^{tK} = F(t).$$
Таким образом, матрицант уравнения (37.1) представим в виде (37.11). Нетрудно заметить, что матрица-функция $F(t)$ неособая, непрерывная и $F(0) = \mathbb{I}_{n\times n}$, т.е. теорема доказана.

Теорема 37.2. *Пусть $F(t)$ — $n\times n$-матрица, удовлетворяющая условиям предыдущей теоремы, а K – произвольная постоянная матрица. Тогда матрица $X(t)$* (37.12) *является матрицантом некоторой системы дифференциальных уравнений* (37.1) *с периодическими коэффициентами.*

Доказательство. Из (37.12) следует
$$X(t+T) = F(t+T)e^{(t+T)K} = F(t)e^{tT}e^{TK} = X(t)X(T),$$
т.е. матрица $X(t)$ удовлетворяет условию (37.3).

В дальнейшем мы будем предполагать, что система уравнений (37.1) является линейной гамильтоновой системой. В этом случае матрицу системы можно представить в виде
$$A(t) = JB(t),$$
где J – единичная симплектическая матрица, а матрица $B^+ = B$ эрмитова.

◊ Примером линейных гамильтоновых систем является система в вариациях
$$\dot a = J\mathcal{H}'_{zz}a, \tag{37.13}$$
где $\mathcal{H}_{zz}$ – $2n\times 2n$-матрица вторых производных от функции Гамильтона.

♦ Решения системы (37.13) называются *сопряженными друг другу*, если их кососкалярное произведение не равно нулю:
$$\{a_1, a_2\} = \langle a_2, Ja_1\rangle \neq 0.$$

◊ Не уменьшая общности, будем считать, что кососкалярное произведение двух сопряженных векторов равно единице.

Свойства решения системы в вариациях с периодическими коэффициентами

Свойство 1. Если гамильтониан классической системы не зависит от времени явно $E = \mathcal{H}(z)$, то векторы $\dot Z(t)$, $\partial Z/\partial E$ являются сопряженными решениями системы в вариациях
$$\Big\{\dot Z(t), \frac{\partial Z}{\partial E}\Big\} = 1. \tag{37.14}$$

Доказательство. Пусть $z = Z(t,\alpha)$ — некоторое решение системы Гамильтона
$$\dot z = J\mathcal{H}_z(z). \tag{37.15}$$
Продифференцировав уравнение (37.15) по времени, получим
$$\ddot z = J\mathcal{H}_{zz}(t)\dot z,$$
т.е. $a = \dot Z$ – решение системы в вариациях. Продифференцируем уравнение (37.15) по параметру α:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial Z}{\partial\alpha} = J\mathcal{H}_{zz}\frac{\partial Z}{\partial\alpha},$$
т.е. производная от системы Гамильтона по параметру является решением системы в вариациях; в частности, можно положить $\alpha = E$.

Соотношение $E = \mathcal{H}(z)$ продифференцируем по E:
$$1 = \Big\langle \mathcal{H}_z, \frac{\partial Z}{\partial E}\Big\rangle = \Big\langle (-J\dot Z), \frac{\partial Z}{\partial E}\Big\rangle = \Big\langle \dot Z, J\frac{\partial Z}{\partial E}\Big\rangle = \Big\{\dot Z, \frac{\partial Z}{\partial E}\Big\}.$$

Свойство 2 (теорема Ляпунова–Пуанкаре). Характеристическое уравнение

$$\det[X(T) - \rho\mathbb{I}_{2n\times 2n}] = 0 \tag{37.16}$$

для линейной гамильтоновой системы (системы в вариациях) является возвратным, т.е. если ρ — корень характеристического уравнения, то ρ^{-1} — также его корень.

Доказательство. Пусть $a_k(t)$ — некоторое решение Флоке системы в вариациях с показателем ρ_k, а $a_{k+n}(t)$ — сопряжённые ему решения Флоке. Тогда их кососкалярное произведение отлично от нуля $[\{a_k(t), a_{k+n}(t)\} = \text{const} \neq 0]$. По определению, для решений Флоке справедливо

$$\{a_k(t+T), a_{k+n}(t+T)\} = \rho_k\rho_{k+n}\{a_k(t), a_{k+n}(t)\}.$$

Поскольку кососкалярное произведение от времени не зависит, то $\rho_k\rho_{k+n} = 1$, что и требовалось доказать.

Свойство 3. Любые два решения Флоке

$$a_k(t+T) = \rho_k a_k(t), \qquad k = \overline{1,m}, \quad m \leqslant n,$$

а также присоединённые к ним векторы

$$\tilde{a}_k(t+T) = \rho\tilde{a}_k(t) + \tilde{a}_{k-1}(t)$$

косоортогональны.

Доказательство непосредственно следует из условия

$$\{a_k(t+T), a_j(t+T)\} = \{a_k(t), a_j(t)\}.$$

Свойство 4. Пусть $a(t)$ — решение системы в вариациях с периодическими коэффициентами, тогда

$$\lim_{t\to\infty} a(t) \neq 0.$$

Доказательство непосредственно следует из свойства 3:

$$a(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k a_k(t) = \sum_{k=1}^{2n} c_k e^{\beta_k t}\tilde{a}_k,$$

где $\tilde{a}_k$ периодические.

♦ Классическая траектория $Z(t+T) = Z(t)$ называется *устойчивой в линейном приближении*, если её матрица монодромии не имеет присоединённых векторов и все её показатели Флоке вещественны: $\rho_k = e^{i\Omega_k T}$.

ГЛАВА 7

Приложения дифференциальных уравнений

Составить дифференциальное уравнение, описывающее изучаемый эволюционный процесс или зависимость между характеристиками исследуемого явления, зачастую оказывается не проще, чем решить это уравнение. Универсального метода составления дифференциальных уравнений не существует. Во многих случаях зависимость между искомой величиной, независимой переменной и производными искомой функции определяется на основании закона или экспериментального факта, установленного в той или иной области естествознания. При этом, в частности, используются геометрический смысл производной (тангенс угла наклона касательной) и её физический смысл (скорость протекания процесса; вторая производная – ускорение).

38. Приложение дифференциальных уравнений к физическим задачам

Пример 38.1. Из эксперимента известно, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству вещества. Найти полупериод распада этого вещества.

Решение. Пусть $x(t)$ — количество радиоактивного вещества в момент времени t, причём $x(0) = x_0$. Указанный экспериментальный факт означает, что

$$\frac{dx}{dt} = -kx, \qquad k > 0. \tag{38.1}$$

Отсюда

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt, \quad \ln x = -kt + \ln C, \quad x = Ce^{-kt},$$

а так как $x(0) = x_0$, то $x = x_0e^{-kt}$.

Время T, через которое распадается половина вещества, определится из уравнения

$$\frac{x_0}{2} = x_0e^{-kT},$$

т.е.

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

Это время не зависит от начального количества вещества.

Рассмотрим несколько простейших механических задач, приводящих к дифференциальным уравнениям.

Пример 38.2. Тело массы m падает вертикально вниз с некоторой высоты. Сила трения, действующая на тело, пропорциональна скорости

$$F_{\text{тр}} = -\alpha v,$$

где $\alpha > 0$ — коэффициент трения. Найти зависимость скорости от времени.

Решение. Пусть $v(t)$ — скорость тела в момент времени t. На тело действуют две противоположно направленные силы: сила тяжести $F_{\text{т}} = mg$ и сила трения $F_{\text{тр}} = -\alpha v$.

Согласно второму закону Ньютона,

$$ma = F = F_{\text{т}} + F_{\text{тр}},$$

т.е.

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v.$$

Разделив обе части уравнения на m, получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v + g$$

с начальным условием $v(0) = 0$, решением которого будет

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t/m}).$$

Пример 38.3. Материальная точка массы m движется вдоль оси Oy и на неё в каждый момент времени действует сила, пропорциональная отклонению точки от начала координат и направленная к нему. Найти закон движения точки, если в момент времени $t = t_0$ она имела ординату y_0 и скорость v_0.

Решение. Обозначим ординату движущейся точки в момент времени t через $y(t)$. Тогда d^2y/dt^2 — ускорение точки в этот момент. Согласно второму закону Ньютона,

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2},$$

где F — сила, действующая на материальную точку. По условию

$$F = -\gamma y(t), \qquad \gamma > 0.$$

Тогда функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -\gamma y(t).$$

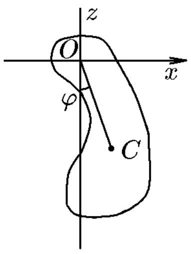


Рис. 40

Обозначив $\gamma/m = k^2$, получим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = 0,$$

решением которого будет

$$y = y_0\cos k(t - t_0) + \frac{v_0}{k}\sin k(t - t_0).$$

В качестве ещё одного примера рассмотрим физический маятник.

Физическим маятником называется абсолютно твердое тело, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр тяжести C (рис. 40).

Рассмотрим сечение данного тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения и проходящей через центр тяжести. Точку пересечения оси вращения с данной плоскостью обозначим через O. Положение маятника будем характеризовать углом φ, под которым пересекаются оси Oz и OC. Воспользуемся вторым законом Ньютона применительно к вращательному движению. Пренебрегая силами сопротивления, запишем

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgd\sin\varphi, \tag{38.2}$$

где I — момент инерции тела относительно оси вращения, d — расстояние OC. Уравнение (38.2) нелинейно. В случае малых колебаний $\varphi \ll 1$, $\sin\varphi \approx \varphi$, и, воспользовавшись первым замечательным пределом, получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0, \qquad \omega^2 = \frac{mgd}{I}. \tag{38.3}$$

Как легко убедиться, характеристическое уравнение $k^2+\omega^2 = 0$ имеет два корня $k_{1,2} = \pm i\omega$, т.е.

$$\varphi(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

При учёте сил сопротивления, пропорциональных угловой скорости, и внешней вынуждающей силы $F(t)$ уравнение (38.3) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda\frac{d\varphi}{dt} + \omega^2\varphi = F(t). \tag{38.4}$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 + \lambda k + \omega^2 = 0, \quad \lambda > 0$$

или

$$\Big(k + \frac{\lambda}{2}\Big)^2 + \omega^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0$$

имеет два корня

$$k_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \omega^2}.$$

Для уравнения (38.3) поставим задачу Коши:

$$y\Big|_{t=0} = y_0, \quad y'\Big|_{t=0} = y'_0. \tag{38.5}$$

Рассмотрим однородное уравнение $F(t) = 0$. Исследуем различные случаи.

а)
$$\frac{\lambda^2}{4} - \omega^2 > 0.$$

Физически это соответствует достаточно сильному трению. Оба корня $k_{1,2}$ действительны, различны и отрицательны. Частными решениями будут

$$y_1 = e^{k_1t}, \qquad y_2 = e^{k_2t},$$

и общее решение однородного уравнения запишется как

$$y = C_1e^{k_1t} + C_2e^{k_2t}.$$

Для определения C_1 и C_2 получим систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = y_0, \\ C_1k_1 + C_2k_2 = y'_0. \end{cases}$$

Так как $k_1 \neq k_2$, определитель системы отличен от нуля и

$$y = \frac{k_2y_0 - y'_0}{k_2 - k_1}e^{k_1t} + \frac{k_1y_0 - y'_0}{k_1 - k_2}e^{k_2t}.$$

Полученные решения с ростом t приближаются к положению равновесия $y = 0$, так как $k_1 < 0$, $k_2 < 0$.

б)
$$\frac{\lambda^2}{4} - \omega^2 < 0.$$

Физически это соответствует слабому сопротивлению среды. В этом случае $k_1 = k_2^*$:

$$k_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i\sqrt{4\omega^2 - \lambda^2} = \frac{\lambda}{2} \pm i\Omega, \quad \Omega = \sqrt{4\omega^2 - \lambda^2}.$$

$$y = e^{-\lambda t/2}(C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t).$$

С учётом начальных условий (38.5) запишем

$$\begin{cases} C_1 = y_0, \\ -\dfrac{\lambda}{2}C_1 + \Omega C_2 = y_0', \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{1}{\Omega}\Big(y_0' + \frac{\lambda}{2}y_0\Big).$$

Таким образом,

$$y = \Big\{y_0 \cos \Omega t + \frac{1}{\Omega}\Big(y_0' + \frac{\lambda}{2}\Big) \sin \Omega t\Big\} e^{-\lambda t/2}.$$

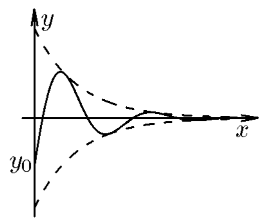


Рис. 41

Решение описывает затухающий колебательный процесс (рис. 41). Колебания затухают по закону $e^{-\lambda/2}$. Если $\lambda = 0$, затухание отсутствует: $\Omega = \omega$, то получим периодические колебания с частотой ω:

$$y = y_0 \cos \omega t + \frac{y_0'}{\omega} \sin \omega t.$$

в)
$$\frac{\lambda^2}{4} - \omega^2 = 0.$$

В этом случае общее решение имеет вид

$$y = e^{-\lambda t/2}(C_1 + C_2 t).$$

С учётом начальных условий (38.5) запишем

$$\begin{cases} C_1 = y_0, \\ -\dfrac{\lambda}{2}C_1 + C_2 = y_0', \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = y_0' + \frac{\lambda}{2}y_0,$$

т.е.

$$y = e^{-\lambda t/2}\Big\{y_0 + \Big(y_0' + \frac{\lambda}{2}\Big)t\Big\}.$$

Практически k_1 и k_2 не бывают равны, но такое решение описывает математическую идеализацию, соответствующую случаю близких k_1 и k_2.

Рассмотрим теперь колебания под действием вынуждающей силы $F = F_0 \cos \tilde{\omega} t$, где F_0 и $\tilde{\omega}$ — постоянные. Общее решение однородного уравнения известно, найдём частное решение неоднородного

$$\bar{y} = A \cos \tilde{\omega} t + B \sin \tilde{\omega} t,$$

т.е.

$$\bar{y} = \frac{F_0(\omega^2 \tilde{\omega}^2)}{(\omega^2 - \tilde{\omega}^2) + \lambda^2 \tilde{\omega}^2} \cos \tilde{\omega} t + \frac{F_0 \lambda \tilde{\omega}}{(\omega^2 - \tilde{\omega}^2) + \lambda^2 \tilde{\omega}^2} \sin \tilde{\omega} t.$$

Тогда общее решение примет вид

а) $y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t} + \bar{y}(t), \quad k_1, k_2 < 0;$

б) $y = e^{-\lambda t/2}(C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t) + \bar{y}(t), \quad k_1 = k_2^*;\ k_1 \neq k_2;$

в) $y = e^{-\lambda t/2}(C_1 + C_2 t) + \bar{y}(t), \quad k_1 = k_2.$

Видно, что с ростом t все слагаемые, кроме $\bar{y}(t)$ затухают и остаются только вынужденные колебания.

Заметим, что решение $\bar{y}(t)$ теряет смысл, если нет силы трения ($\lambda = 0$) и частота вынуждающей силы равна частоте собственных колебаний $\omega = \tilde{\omega}$ (случай резонанса), в этом случае амплитуда обращается в бесконечность.

Пример 38.4. Записать в нормальной форме уравнение движения точечной частицы массы m.

Решение. Рассмотрим частицу массы m, движущуюся под действием заданной силы $\vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}\,')$. В соответствии с законом Ньютона и механическим смыслом второй производной функция $\vec{r}(t)$ должна удовлетворять уравнению движения

$$m\vec{r}\,'' = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{r}\,'). \tag{38.6}$$

Если считать неизвестными не только координаты, но и проекции скорости $\vec{r}\,' = (x', y', z') = \vec{v}$, то мы получим систему из шести уравнений первого порядка

$$\vec{r}\,' = \vec{v}, \quad m\vec{v}\,' = \vec{F}(t, \vec{v}, \vec{r}). \tag{38.7}$$

Если ввести в рассмотрение 6-мерный вектор

$$\vec{z}(t) = (\vec{v}(t), \vec{x}(t)),$$

то уравнения (38.6) и (38.7) эквивалентны одному векторному уравнению

$$m\vec{z}\,' = \vec{\Phi}(t, \vec{z})$$

в шестимерном фазовом пространстве, причём вектор $\vec{\Phi}$ определяется как

$$\vec{\Phi} = \Big(\frac{1}{m}F_x, \frac{1}{m}F_y, \frac{1}{m}F_z, v_x, v_y, v_z\Big).$$

Таким образом, физические задачи приводят нас к необходимости рассматривать нормальные системы дифференциальных уравнений.

39. Дифференциальные уравнения в классической механике

Существует несколько подходов к описанию физических объектов в рамках классической механики. Наиболее распространёнными из них являются формализм Лагранжа и формализм Гамильтона. В формализме Лагранжа классической системе сопоставляется функция Лагранжа и построенный по ней функционал действия. В гамильтоновом подходе классической системе сопоставляется функция Гамильтона. И в том и в другом подходе эволюция классической системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Кратко рассмотрим эти уравнения.

♦ Число величин, задание которых необходимо для однозначного определения положения механической системы, называется *числом степеней свободы.*

♢ Например, для определения положения системы N материальных точек в пространстве нужно задать N радиус-векторов, т.е. $3N$ координат. Следовательно, число степеней свободы равно $3N$.

♦ Любые n величин $q_1, \ldots, q_n = \vec{q} \in E \subset \mathbb{R}^n$, полностью задающих положение механической системы с n степенями свободы, называют её *обобщенными координатами*, а производные q_j', $j = \overline{1, n}$, — её *обобщенными скоростями.* Пространство $\mathbb{R}^n$ называют *конфигурационным пространством.*

♢ Положение частицы на плоскости можно задавать декартовыми координатами $\vec{x} = (x_1, x_2)$ или полярными координатами $\vec{q} = (r, \varphi)$, $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$. И те и другие являются обобщенными координатами частиц.

Принцип Гамильтона (принцип наименьшего действия). *Движения механической системы на промежутке времени от t_0 до t_1 совпадают с экстремалями функционала*

$$S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{x}\,', t)dt.$$

♦ Функционал

$$v[q(t)] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L(q, q', t)\, dt, \qquad (39.1)$$

в классической механике принято называть *действием* и обозначать $S = v[q(t)]$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 39.1. *Если функционал*

$$v[\vec{q}] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(q, \vec{q}\,', t)dt \qquad (39.2)$$

достигает экстремума на кривых $\vec{q} = \vec{q}(t)$, *то кривые удовлетворяют системе уравнений*

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k'} = 0, \quad q_k(t_0) = q_k^0, \quad q_k(t_1) = q_k^1, \quad k = \overline{1, n}. \qquad (39.3)$$

Система уравнений (39.3) *называется системой уравнений Эйлера–Лагранжа или Лагранжа.*

◊ Систему уравнений Эйлера–Лагранжа (39.3) можно записать в векторном виде

$$\mathcal{L}'_{\vec{q}} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}'_{\vec{q}\,'} = 0, \qquad \vec{q}(t_0) = \vec{q}_0, \quad \vec{q}(t_1) = \vec{q}_1.$$

Пример 39.1. Найти общее решение уравнений Эйлера–Лагранжа для *гармонического осциллятора* — одномерной механической системы с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L}(x, x', t) = \frac{m(x')^2}{2} - \frac{kx^2}{2}, \qquad (39.4)$$

где m, k – положительные постоянные.

Решение. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'} = mx', \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -kx.$$

Тогда при $n = 1$ система уравнений (39.3) примет вид

$$mx'' + kx = 0.$$

Общее решение этого уравнения хорошо известно:

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$, а C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 39.2. Записать уравнение Эйлера–Лагранжа для нерелятивистской классической частицы во внешнем потенциальном поле $U(\vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Решение. Функция Лагранжа такой системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{x}\,', t) = \frac{m(\vec{x}\,')^2}{2} - U(\vec{x}, t), \tag{39.5}$$

где m — масса частицы.

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}}, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}\,'} = m\vec{x}\,'.$$

Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$m\vec{x}\,'' = -\frac{\partial U(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \tag{39.6}$$

и совпадут с уравнениями Ньютона.

Пример 39.3. Записать уравнение движения для нерелятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Решение. Функция Лагранжа такой системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{x}\,', t) = \frac{m(\vec{x}\,')^2}{2} + \frac{e}{c}\langle \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t), \vec{x}\,' \rangle - e\Phi(\vec{x}, t), \tag{39.7}$$

где $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$; e и m — заряд и масса частицы соответственно; c — скорость света в вакууме; $\Phi(\vec{x}, t)$ и $\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)$ — скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля.

Найдем частную производную

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = \frac{e}{c}\operatorname{grad}\langle \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t), \vec{x}\,' \rangle - e \operatorname{grad} \Phi(\vec{x}, t). \tag{39.8}$$

С учетом известной формулы векторного анализа

$$\operatorname{grad}\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{A}, \nabla \rangle \vec{B} + \langle \vec{B}, \nabla \rangle \vec{A} + \vec{B} \times \operatorname{rot} \vec{A} + \vec{A} \times \operatorname{rot} \vec{B}, \tag{39.9}$$

где $\times$ обозначает векторное произведение векторов, из формулы (39.8) получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = \frac{e}{c}\langle \vec{x}\,', \nabla \rangle \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) + \frac{e}{c}\vec{x}\,' \times \operatorname{rot} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) - e\nabla\Phi(\vec{x}, t) \tag{39.10}$$

и для частных производных по переменным $\vec{x}\,'$ найдём

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}\,'} = m\vec{x}\,' + \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t).$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}\,'} = \frac{d}{dt}\Big[m\vec{x}\,' + \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\Big] = m\vec{x}\,'' + \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \langle \vec{x}\,', \nabla \rangle \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t). \tag{39.11}$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}\,'} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{x}} = m\vec{x}\,'' + \frac{e}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{e}{c}\vec{x}\,' \times \operatorname{rot} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t) + e\nabla\Phi(\vec{x}, t) = 0.$$

Обозначим через

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \operatorname{rot} \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t), \quad \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \tag{39.12}$$

напряженности магнитного и электрического поля соответственно. Тогда уравнения Эйлера–Лагранжа примут вид

$$m\vec{x}\,'' = e\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{e}{c}\vec{x}\,' \times \vec{H}(\vec{x},t). \tag{39.13}$$

Уравнения (39.13) называются (нерелятивистскими) уравнениями Лоренца, а выражение, стоящее в их правой части, — силой Лоренца.

Для системы N материальных точек с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L}(\vec{q},\vec{q}\,',t) = \frac{m(\vec{q}\,')^2}{2} - V(\vec{q}), \qquad \vec{q} = (q_1,\ldots,q_{3N}),$$

где $V(\vec{q})$ — потенциальная энергия, уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$m\vec{q}\,'' = -\frac{\partial V}{\partial \vec{q}}$$

и, следовательно, совпадают с уравнениями Ньютона.

По аналогии с рассмотренным примером величины $\partial\mathcal{L}/\partial q'_j$, $j=\overline{1,n}$, называют обобщенными импульсами и обозначают

$$p_j = \frac{\partial\mathcal{L}(\vec{q},\vec{q}\,',t)}{\partial q'_j}, \qquad j=\overline{1,n}, \tag{39.14}$$

а величины $\partial\mathcal{L}/\partial q_j = F_j$ — обобщенными силами.

♦ Переменные $z = (\vec{q},\vec{p})$ называют *каноническими*, а величины q_j и p_j — *сопряженными друг другу.* $2n$-мерное пространство $\mathbb{R}^{2n}_z = \mathbb{R}^n_q \times \mathbb{R}^n_p$ называют *фазовым.*

Во многих задачах теоретической и математической физики оказывается полезным гамильтонов формализм, основанный на описании механической системы в канонических переменных и уравнении Эйлера–Лагранжа в так называемой канонической форме.

Рассмотрим обобщенные импульсы p_j (39.14) этой системы. Будем предполагать, что систему уравнений (39.14) можно разрешить относительно обобщенных скоростей $\vec{q}\,' = \vec{q}\,'(\vec{p},\vec{q},t)$.

Из теоремы о неявных функциях следует, что систему уравнений (39.14) можно разрешить относительно $\vec{q}\,'$ (по крайней мере, локально), если

$$\det\left\|\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial q'_i\partial q'_j}\right\| \neq 0. \tag{39.15}$$

♦ Функция, задаваемая равенством

$$\mathcal{H}(\vec{p},\vec{q},t) = \big[\langle\vec{q}\,',\vec{p}\rangle - \mathcal{L}(\vec{q},\vec{q}\,',t)\big]\Big|_{\vec{q}\,'=\vec{q}\,'(\vec{p},\vec{q},t)}, \tag{39.16}$$

называется *функцией Гамильтона, отвечающей функции Лагранжа* $\mathcal{L}(\vec{q},\vec{q}\,',t)$. Переход от переменных $\vec{q}\,',\vec{q}$ и функций $\mathcal{L}(\vec{q},\vec{q}\,',t)$ к переменным $\vec{p},\vec{q}$ и функции $\mathcal{H}(\vec{p},\vec{q},t)$ по правилу (39.14) и (39.16) называется преобразованием Лежандра.

Теорема 39.2. *Система уравнений Эйлера–Лагранжа* (39.3) *эквивалентна системе* $2n$ *уравнений первого порядка*

$$\vec{p}\,' = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{q}}, \qquad \vec{q}\,' = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vec{p}} \tag{39.17}$$

или в координатной форме

$$p'_j = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j}, \qquad q'_j = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j}, \quad j=\overline{1,n},$$

где $\mathcal{H}(\vec{p},\vec{q},t)$ *– функция Гамильтона* (39.16). *Система* (39.17) *называется системой Гамильтона, или канонической формой системы уравнений Эйлера–Лагранжа.*

$\Diamond$ Отметим, что для двумерного вектора $z = (\vec{p}, \vec{q}) \in \mathbb{R}^{2n}$ система Гамильтона (39.17) примет вид

$$\dot{z} = J\mathcal{H}_z(z,t), \tag{39.18}$$

где J — единичная симплектическая матрица

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_{n\times n} \\ \mathbb{I}_{n\times n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 39.4. Найти функцию Гамильтона гармонического осциллятора (см. пример 39.1).

Решение. Найдем обобщенный импульс

$$p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'} = mx'.$$

Следовательно, $x' = p/m$. Тогда функция Гамильтона имеет вид

$$\mathcal{H}(p,x,t) = [px' - \mathcal{L}(x,x',t)]\Big|_{x'=p/m}.$$

Окончательно получим

$$\mathcal{H}(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \qquad k > 0, \quad m > 0. \tag{39.19}$$

Пример 39.5. Найти функцию Гамильтона классической системы с функцией Лагранжа (39.5)

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{x}\,', t) = \frac{m(\vec{x}\,')^2}{2} - U(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^4. \tag{39.20}$$

Решение. По определению,

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \big\{\langle\vec{p}, \vec{x}\,'\rangle - \mathcal{L}(\vec{x}, \vec{x}\,', t)\big\}\Big|_{\vec{x}\,'=\vec{x}\,'(\vec{x},\vec{p},t)},$$

где $\vec{x}\,'(\vec{x}, \vec{p}, t)$ неявно определяется уравнением

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{x}\,'} = m\vec{x}\,' = \vec{p}.$$

Следовательно, $\vec{x}\,' = \vec{p}/m$. Окончательно получим

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{x}, t). \tag{39.21}$$

Пример 39.6. Найти функцию Гамильтона нерелятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле.

Решение. Функция Лагранжа системы имеет вид

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{x}\,', t) = \frac{m(\vec{x}\,')^2}{2} + \frac{e}{c}\langle\vec{x}\,', \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\rangle + e\Phi(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} \in \mathbb{R}^3. \tag{39.22}$$

Обобщенный импульс системы определяется соотношением

$$\vec{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{x}\,'} = m\vec{x}\,' + \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t).$$

Следовательно,

$$\dot{\vec{x}} = \frac{1}{m}\Big[\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\Big] = \frac{1}{m}\vec{\mathcal{P}}, \tag{39.23}$$

где $\vec{\mathcal{P}}$ — кинетический импульс системы. Тогда

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \Big\{\langle\vec{p}, \vec{x}\,'\rangle - \frac{m(\vec{x}\,')^2}{2} + \frac{e}{c}\langle\vec{x}\,', \vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t)\rangle + e\Phi(\vec{x}, t)\Big\}\Big|_{\vec{x}\,'=\vec{\mathcal{P}}/m}.$$

Окончательно получим

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{x}, t) = \frac{\vec{\mathcal{P}}^2}{2m} + e\Phi(\vec{x}, t), \qquad \vec{\mathcal{P}} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{\mathcal{A}}(\vec{x}, t). \tag{39.24}$$

Наряду с системой Гамильтона (39.18) в механике используется так называемая система в вариациях. Поясним происхождение названия «система в вариациях». Для этого зафиксируем произвольное решение

$$Z(t, z_0) = (\vec{P}(t, z_0), \vec{X}(t, z_0)), \quad z_0 = (\vec{p}_0, \vec{x}_0) \in \mathbb{R}^{2n}_{px}, \quad t \in \mathbb{R},$$

канонической системы Гамильтона (39.18) с начальными условиями

$$\vec{p}(0, z_0) = \vec{p}_0, \quad \vec{x}(0, z_0) = \vec{x}_0.$$

Точка $z_0 = (\vec{p}_0, \vec{x}_0)$ определяет начальное положение классической частицы в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}_{px} = \mathbb{R}^n_p \times \mathbb{R}^n_x$ системы (39.18). В $2n$-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{2n}_a$ с координатами

$$a = (\vec{W}, \vec{Z}), \quad \vec{W} = (W_1, \ldots, W_n), \quad \vec{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n)$$

запишем систему в вариациях. Для этого линеаризуем систему Гамильтона (39.18) в окрестности кривой $z = Z(t, z_0)$, т.е. решение системы (39.18) будем искать в виде

$$Z^{(1)}(t) = Z(t, z_0) + \delta z(t), \quad \delta z(t) = \varepsilon a(t), \quad \varepsilon \ll 1. \tag{39.25}$$

Подставив (39.25) в (39.18) и отбросив слагаемые $\sim \varepsilon^2$, получим систему уравнений (39.26).

Тогда для определения $2n$-вектора $a(t)$ получим систему уравнений

$$\dot{a} = J\mathcal{H}_{zz}(t)a, \tag{39.26}$$

которая играет ключевую роль при исследовании устойчивости классической траектории и при построении асимптотических решений некоторого класса уравнений в частных производных с малыми параметрами.

40. Дифференциальные уравнения в экономических моделях

Основу экономической теории составляют экономические законы, выраженные в виде количественных соотношений между величинами, характеризующими экономическую систему или процесс. Такие законы дают возможность исследовать реальные экономические системы на основе математических моделей. Построение и изучение этих моделей составляет предмет математической экономики, которая рассматривает экономику как сложную динамическую систему.

Для изучения математических моделей экономики, помимо экономической науки, необходимо владеть математическими методами, среди которых аппарат дифференциальных уравнений играет важную роль. Экономические закономерности, как правило, представляют собой сложные нелинейные соотношения между экономическими величинами, явный вид которых непосредственно установить затруднительно. При наличии устойчивой закономерности малые изменения величин можно приближённо заменить дифференциалами. Тогда нелинейные соотношения между величинами, соответственно, заменяются более простыми линейными соотношениями между величинами и их производными. Эти соотношения представляют собой дифференциальные уравнения, с помощью которых строится математическая модель экономической системы или процесса. В виде дифференциальных уравнений записываются соотношения между экономическими переменными, такими как цены, заработная плата, капитал, процентная ставка и др. Рассмотрим некоторые примеры.

40.1. Равновесная цена в модели Вальраса

Рассмотрим процесс, в ходе которого предложение и спрос уравновешиваются. Предполагается, что при любой цене, если спрос превышает предложение, то цена будет расти, если предложение превышает спрос, то цена будет падать. Обозначим цену через p; величины спроса и предложения, соответственно, через $D(p,\alpha)$, $S(p)$; α — параметр, соответствующий экзогенным (внешним) факторам. Тогда изменение цены при изменении времени t можно описать следующим соотношением:

$$\frac{dp}{dt} = D(p,\alpha) - S(p).$$

Что можно увидеть из этого соотношения? Например, поставим вопрос о том, существует ли равновесная цена, не изменяющаяся со временем. Её следует определять из условия

$$\frac{dp}{dt} = 0,$$

откуда

$$D(p,\alpha) - S(p) = 0.$$

Пусть p_0 есть решение данного уравнения. Разложим правую часть $D(p,\alpha) - S(p)$ в окрестности значения $p = p_0$, тогда изменение цены p при малом отклонении от равновесной цены $p = p_0$ будет определяться уравнением

$$\frac{dp}{dt} = (D_p - S_p)(p - p_0),$$

где опущены слагаемые выше первой степени величины $p - p_0$ и обозначено $D_p = \partial D(p,\alpha)/\partial p|_{p=p_0}$, $S_p = \partial S(p)/\partial p|_{p=p_0}$. Решение последнего уравнения даётся выражением

$$p(t) = p_0 + [p(0) - p_0]\exp[(D_p - S_p)t].$$

Пусть $D_p - S_p < 0$. Тогда, если начальная цена $p(0)$ отличалась от равновесной p_0, то при $t \to \infty$ имеет место предел $p(t) \to p_0$, т.е. в процессе обращения товара на рынке его цена будет приближаться к равновесной. В этом случае можно сказать, что равновесная цена устойчива. Очевидно, что с увеличением цены падает спрос ($D_p < 0$) и увеличивается предложение, т.е. $S_p > 0$. В этих условиях существует равновесная цена. Данная модель предсказывает рост предложения при росте спроса на данный товар, выраженного в виде роста цены на товар.

Если $D_p - S_p > 0$, то цена $p(t)$ будет отклоняться от равновесной в ту или другую сторону. В этом случае равновесная цена неустойчива. В соответствии с положениями экономической теории, при неустойчивой цене данная модель не даёт разумных предсказаний.

40.2. Модель Р. Со́лоу

Рассмотрим упрощённую экономическую модель Р. Со́лоу, в которой экономическая система производит один универсальный продукт [14]. Этот продукт может потребляться и инвестироваться в производство. Такая модель отображает важнейшие макроэкономические аспекты процесса воспроизводства.

Обозначим через X валовый общественный продукт, I — объём инвестиций, L — число занятых в производстве, K — объём производственных фондов, C — объём фондов непроизводственного потребления. Будем считать все величины зависящими от непрерывного времени t, которое измеряется в годах. Это представляется оправданным, так как, например, число занятых $L(t)$ можно установить в любой день, а фонды $K(t)$ определить посредством инвентаризации. Обозначим через ν годовой темп прироста числа занятых в производстве, тогда

$$\frac{dL}{dt} = \nu L$$

и, следовательно, $L(t) = L_0 e^{\nu t}$, где $L_0 = L(0)$ есть начальное условие. Износ и инвестиции за год обозначим, соответственно, μK и I. Тогда прирост фондов за время Δt есть

$$\Delta K = -\mu K \Delta t + I \Delta t,$$

откуда в пределе $\Delta t \to 0$ имеем $dK/dt = -\mu K + I$, $K(0) = K_0$. В модели Со́лоу предполагается, что промежуточный продукт пропорционален валовому и равен aX. Инвестиция $I = \rho(1-a)X$. Годовой выпуск определяется линейно-однородной производственной функцией $X = F(K, L)$ заданного вида (линейная однородность означает: $F(qK, qL) = qF(K, L)$). Тогда модель Со́лоу в абсолютных показателях записывается в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K + \rho(1-a)F(K, L), \tag{40.1}$$

причём непроизводственные фонды $C = (1-\rho)(1-a)F(K, L)$. Введём относительные показатели

$$k = \frac{K}{L} \text{ – фондовооружённость,}$$
$$x = \frac{X}{L} \text{ – производительность труда,}$$
$$c = \frac{X}{L} \text{ – среднее потребление на одного занятого}$$
$$\text{(среднедушевое потребление).}$$

Подставим в уравнение (40.1) $K = Lk$, $L = L_0 e^{\nu t}$ и учтём свойство линейной однородности производственной функции $F(K, L)$, положив $F(K, L)/L = F(K/L, 1) = F(k, 1) = f(k)$. Тогда уравнение (40.1) примет вид

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho(1-a)f(k), \quad \lambda = \mu + \nu, \quad k(0) = k_0, \quad k_0 = K_0/L_0. \tag{40.2}$$

Уравнение (40.2) описывает модель Со́лоу в удельных показателях.

Данная модель позволяет проанализировать различные предельные режимы экономики, включая устойчивый рост, а также рассмотреть задачу о переходе к устойчивому росту.

40.3. Модель управления ресурсами

Рассмотрим задачу управления ресурсами на примере модели, предложенной К. Кларком для анализа управления рыболовством [8, 26]. Обозначим общий объём популяции рыб через $x(t)$, а норму отлова через $h(t)$. Пусть естественный прирост популяции описывается функцией $F(x)$, тогда баланс изменения популяции можно записать в виде следующего соотношения:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - h(t). \tag{40.3}$$

Обозначим через E трудовые затраты на единичный отлов, так что норма отлова пропорциональна трудовым затратам и природным запасам:

$$h = Ex. \tag{40.4}$$

В данной модели, несмотря на её простоту, уже содержатся нетривиальные выводы. Например, можно найти равновесную численность популяции x^*. Положив $dx(t)/dt = 0$, для x^* получим уравнение

$$F(x^*) = Ex^*.$$

Тогда поддерживаемый объём улова Y задаётся выражением $Y = Ex^*$. Кривая воспроизводства $F(x)$ может иметь нелинейный вид, определяемый условиями существования популяции. Воспроизводство популяции предполагает возрастание функции $F(x)/x$ в некотором интервале $0 < x < K^*$. Для биологических популяций характерно, что для малых x, например в интервале $0 < x < K_0 < K^*$, воспроизводство невозможно. Функция $F(x)/x$ в этой области убывает и описывает критическое (отрицательное) воспроизводство. K_0 называют минимальным уровнем жизнеспособности популяции.

Параметр E в данной модели является управляющим, он посредством трудовых затрат регулирует уровень величины Y при равновесном воспроизводстве. Модель позволяет обнаружить, что при определённом значении E воспроизводство популяции нарушается, что приводит к ее исчезновению.

40.4. Модель деловых циклов Калдора

Рассмотрим экономическую модель, характеристиками которой являются национальный доход y, расходы на потребление C, объём инвестиций I, денежный ресурс (капитал) k, уровень благосостояния w, «замещение» инвестиций I_0.

Обозначим через α параметр, характеризующий темп изменения национального дохода и называемый коэффициентом адаптации. Величина I_0 характеризует в совокупности снижение инвестиционных возможностей экономики, связанных с насыщением потребности в инвестициях, ограничениями, предусмотренными законодательством, и т.п. Эта величина может рассматриваться как объём инвестиций, направленных на цели, не связанные с производством.

Балансовые уравнения модели можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = \alpha[C(y, w) + I(y, k) - y], \tag{40.5}$$

$$\frac{dk}{dt} = I(y, k) - I_0. \tag{40.6}$$

Функцию $C(y, w)$, описывающую расходы на потребление, выбираем в виде

$$C(y, w) = C(w)y + D(w), \tag{40.7}$$

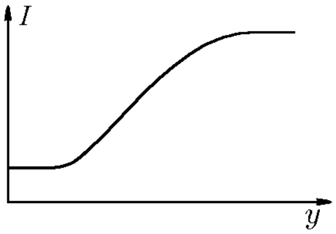


Рис. 42

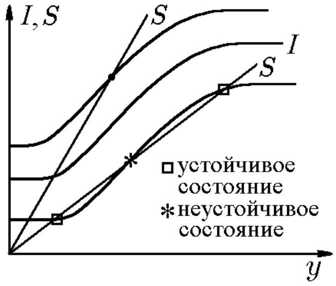


Рис. 43

где $C(w)$ и $D(w)$ — некоторые функции. Сбережения составляют величину

$$S(y, w) = y - C(y, w). \tag{40.8}$$

Предположим, что объём инвестиций возрастает с ростом y и убывает с ростом k (рис. 42).

Система уравнений (40.5), (40.6) имеет стационарные решения, которые определяются соотношениями

$$S(y, w) = I(y, k), \qquad I(y, k) = I_0. \tag{40.9}$$

В предположении (40.7) сбережения $S(y, w)$ зависят от национального дохода y линейно (см. (40.8)). Из рис. 43 видно, что в зависимости от угла наклона прямой $S(y, w)$ возможны либо одно, либо три стационарных состояния. В последнем случае одно (внутреннее) состояние неустойчиво, а два других устойчивы.

Модель экономики, допускающая несколько стационарных состояний, представляет интерес с точки зрения управления. Такая модель позволяет описать возможные переходы между стационарными состояниями посредством изменения значений параметров системы.

40.5. Упрощённая модель делового цикла Кейнса

Рассмотрим динамическую модель экономической системы, в которой y обозначает национальный доход, x — процентную ставку, $I(y, x)$ — функцию спроса на инвестиции ($\partial I/\partial y > 0$, $\partial I/\partial x < 0$), $S(y, x)$ — функцию сбережений ($\partial S/\partial y > 0$, $\partial S/\partial x > 0$), $L(y, x)$ — суммарный спрос на деньги ($\partial L/\partial y > 0$, $\partial L/\partial x < 0$), L_S — предложение денег (постоянная величина), α_1, α_2 — параметры, выражающие реакцию агентов на отклонение системы от состояния равновесия. Упрощённая модель делового цикла, предложенная Кейнсом [13], описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \alpha_1\{I(y, x) - S(y, x)\}, \\ \frac{dx}{dt} &= \alpha_2\{L(y, x) - L_S\}. \end{aligned} \tag{40.10}$$

Модель согласована с известными закономерностями: превышение спроса на инвестиции над сбережениями приводит к возрастанию дохода и наоборот. Кроме того, если спрос на деньги выше, чем их предложение, то ставка прибыли растёт. Условия, налагаемые на функцию I: $\partial I/\partial y > 0$, $\partial I/\partial x < 0$, означают, что инвестиции находятся в прямой зависимости от объёма выпуска продукции и в обратной от процентной ставки. Рост национального дохода или процентной ставки будет побуждать население увеличивать сбережения ($\partial S/\partial y > 0$, $\partial S/\partial x > 0$). При росте производства или уменьшении процентной ставки спрос на деньги возрастает. В основе модели лежат линейные (пропорциональные) зависимости между основными экономическими величинами, описывающими процесс. Несмотря на простоту, модель Кейнса (40.10) достаточно содержательна. Она описывает, в частности, состояние равновесия, а также экономические циклы.

40.6. Динамический выбор вида транспорта

Рассмотрим модель одной транспортной задачи, в которой в каждый момент времени должно быть выполнено определённое количество перевозок D, распределённое между несколькими видами транспорта. Для простоты положим, что речь идёт о двух видах транспорта, например муниципальном транспорте и маршрутных такси. При желании можно увеличить число видов транспорта и усложнить условия перевозок. Пусть x_i, $i = 1, 2$, обозначает количество перевозок, выполняемых i-м видом транспорта в момент времени t

$$x_1(t) + x_2(t) = D. \tag{40.11}$$

Потребитель осуществляет перераспределение объёмов перевозок между различными видами транспорта за счёт выбора. Обозначим через $D_i - x_i$ изменение количества перевозок, осуществляемых i-м видом транспорта за единичный интервал времени в момент времени t за счёт выбора вида транспорта, так что

$$x_i(t + \Delta t) - x_i(t) = (D_i - x_i)\Delta t.$$

С другой стороны,

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + \frac{dx_i(t)}{dt}\Delta t + o(\Delta t),$$

откуда следует

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = D_i - x_i(t). \tag{40.12}$$

Обозначим через $A_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, предпочтительность i-го вида транспорта, так что

$$D_i(x) = \frac{DA_i(x_1, x_2)}{A_1(x_1, x_2) + A_2(x_1, x_2)}. \tag{40.13}$$

Динамика определяется конкретным видом функций $A_i(x_1, x_2)$. Определим предпочтительность i-го вида транспорта через скорость перевозки v_i, положив

$$A_i = v_i. \tag{40.14}$$

Предположим далее, что вследствие износа муниципального транспорта и ограниченных инвестиций скорость перевозок этим видом транспорта снижается при увеличении нагрузки на него, тогда как скорость перевозки маршрутными такси первоначально повышается за счёт притока инвестиций, а затем снижается вследствие перегрузки транспортных магистралей. Эти тенденции отражаются соотношениями

$$v_1 = \frac{1}{a + bx_1}, \quad v_2 = \frac{px_2^n}{c + qx_2^r}. \tag{40.15}$$

Подставив (40.13), (40.14), (40.15) в (40.12), получим следующую систему уравнений, описывающую динамику перевозок:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{D(a + bx_1)^{-1}}{(a + bx_1)^{-1} + px_2^n(c + qx_2^r)^{-1}} - x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{Dpx_2^n(c + qx_2^r)^{-1}}{(a + bx_1)^{-1} + px_2^n(c + qx_2^r)^{-1}} - x_2. \end{aligned} \tag{40.16}$$

Системы (40.10), (40.16) являются частными случаями системы

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2; \alpha_1, \ldots, \alpha_k), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2; \alpha_1, \ldots, \alpha_k),\end{aligned} \tag{40.17}$$

в которой x_1, x_2 являются динамическим переменными, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — параметрами.

40.7. Модель Гудвина

Рассмотрим одну из интересных с точки зрения математики моделей классовых отношений рабочих и капитала — модель Гудвина.

Обозначим через L численность рабочих, через w зарплату рабочего. Рабочие тратят весь свой доход wL на потребление. Обозначим через Y произведённый продукт. Капиталисты накапливают доход в объёме $Y - wL$. Предположим, что цена потребительских товаров нормирована на единицу. Обозначим через K суммарный капитал; $a = Y/L$ — производительность труда на одного рабочего, возрастающую с показателем g, $a = a_0 e^{gt}$. Введём также следующие обозначения: $k = K/Y$ — коэффициент капиталоёмкости продукции; $N = N_0 e^{nt}$ — предложение на рынке рабочей силы (здесь n — показатель роста предложения рабочей силы); $y = w/a$ — доля затрат на оплату труда; $x = L/N$ — коэффициент занятости.

Уравнения модели записываются в виде [8]

$$\frac{dx}{dt} = x\Big[\frac{1}{k}(1 - y) - (g + n)\Big], \tag{40.18}$$

$$\frac{dy}{dt} = y\Big[\frac{1}{w}\frac{dw}{dt} - \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\Big]. \tag{40.19}$$

В линейном приближении для логарифмической производной зарплаты рабочего

$$\frac{1}{w}\frac{dw}{dt} = -r + bx$$

уравнения (40.18), (40.19) примут вид

$$\frac{dx}{dt} = x\Big(\frac{1}{k} - g - n - \frac{1}{k}y\Big), \tag{40.20}$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-g - r + bx). \tag{40.21}$$

Обозначив

$$\alpha = \frac{1}{k}, \quad y_1 = 1 - \frac{g + n}{k}, \quad x_1 = \frac{g + r}{b},$$

запишем уравнения (40.20), (40.21) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(y_1 - y), \tag{40.22}$$

$$\frac{dy}{dt} = by(x - x_1). \tag{40.23}$$

Положим

$$u = \frac{x}{x_1}, \quad v = \frac{y}{y_1}, \quad \tau = \alpha t, \quad \sigma = \frac{b}{\alpha}$$

и получим уравнения модели Гудвина [8]

$$\frac{du}{d\tau} = u(1 - v), \tag{40.24}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = \sigma v(u - 1). \tag{40.25}$$

Покажем, что система (40.24), (40.25) может быть записана в виде

$$\frac{du}{dt} = -Q\frac{\partial H}{\partial v}, \tag{40.26}$$

$$\frac{dv}{dt} = Q\frac{\partial H}{\partial u}, \tag{40.27}$$

где $Q = uv$, а

$$H = v - \ln v - \sigma(u - \ln u), \tag{40.28}$$

и соответственно

$$\frac{\partial H}{\partial v} = -\frac{1}{v} + 1, \qquad \frac{\partial H}{\partial u} = \sigma\Big(\frac{1}{u} - 1\Big). \tag{40.29}$$

Нетрудно видеть, что функция H вида (40.28) постоянна на решениях системы (40.24), (40.25) и, следовательно, является интегралом этой системы. Перейдём к переменным p, q по правилу

$$q = \ln u, \qquad p = \ln v. \tag{40.30}$$

Тогда функция (40.28) примет вид

$$H = e^p - p + \sigma(e^q - q), \tag{40.31}$$

а систему (40.26), (40.27) можно записать как

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial q} = \sigma(e^q - 1), \tag{40.32}$$

$$\frac{dq}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p} = 1 - e^p. \tag{40.33}$$

Если в системе (40.32), (40.33) перейти к переменным u, v по формулам (40.30), то получим уравнения (40.24), (40.25). Уравнения (40.32), (40.33) называют канонической гамильтоновой формой уравнений (40.24), (40.25).

Система (40.32), (40.33) имеет колебательные решения, частота которых возрастает с увеличением параметра σ.

41. Дифференциальные уравнения в моделях роста биологических популяций

В основе математической теории биологических популяций лежат закономерности роста численности отдельного биологического вида (роста биомассы) подобно тому, как в физике элементарным объектом изучения является материальная точка. Моделей динамики биологических популяций строятся при целом ряде упрощающих предположений о структуре популяции, о характере её взаимодействия с окружающей средой и другими популяциями, о трофической (пищевой) иерархии, о конкуренции за пищевые ресурсы (лимитирующий субстрат) и др.

41.1. Модель Мальтуса

Простейшей и первой из моделей «непрерывного роста» является модель Мальтуса (1798 г.). В ней рассматривается однородная популяция в условиях неограниченных ресурсов питания и ареала обитания. Предполагается также, что размножение популяции происходит непрерывно. Такие предположения оправданы для многочисленных популяций, размножение в которых происходит на малых временных интервалах. Примерами могут служить простейшие популяции вирусов и бактерий. К числу таких популяций относятся также популяции простейшие грибов, выращиваемых в специальных биотехнологических культиваторах, на этапе, когда истощение ресурсов не происходит, например пенициллиновые грибки, дрожжевые и т.п. Динамика численности такой популяции описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \tag{41.1}$$

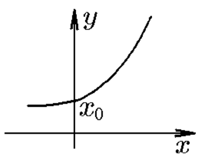


Рис. 44

где x — численность (биомасса) популяции; λ — темп её роста, значение которого определяется биологической природой популяции. Решением уравнения (41.1) является функция

$$x(t) = x(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}, \tag{41.2}$$

график которой изображен на рис. 44. Формула (41.2) носит название мальтусовского закона роста численности популяции, величину λ называют также мальтусовским параметром. Формула (41.2) показывает, что в рассматриваемых условиях численность популяции неограниченно растет по экспоненциальному закону. В природе такая ситуация реализуется редко: в случаях избытка пищевых ресурсов или на небольших интервалах времени, когда ограничения в пищевых ресурсах ещё не сказываются на процессе роста численности.

41.2. Логистическая модель Ферхюльста

Модель Мальтуса можно усложнить, если считать, что численность популяции ограничивается за счёт естественной убыли. Простейшая модель динамики популяции, численность которой стабилизируется на некотором устойчивом уровне, описывается с помощью логистического уравнения Ферхюльста (1838 г.)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x - \delta x^2 \tag{41.3}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{k}\right). \tag{41.4}$$

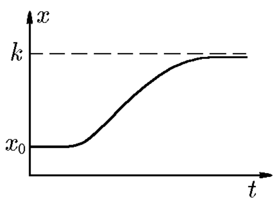


Рис. 45

При малых значениях x слагаемое δx^2 в уравнении (41.3) мало и рост популяции характеризуется мальтусовским законом (41.2). С возрастанием t и, соответственно, численности x роль слагаемого δx^2 в уравнении (41.3) становится существенной и способствует снижению численности $x(t)$. Величина δx^2 пропорциональна количеству встреч между особями популяции, а его отрицательный вклад в производную dx/dt объясняется конкуренцией внутри популяции за пищевые ресурсы, за место в пространственном размещении популяции и т.д.

Уравнение (41.4) также легко интегрируется:

$$x(t) = \frac{x_0 k e^{rt}}{k - x_0 + x_0 e^{rt}}. \tag{41.5}$$

График функции (41.5) приведен на рис. 45.

Более детальное исследование логистического закона поведения популяции можно найти в специальной литературе (см., например, [20]).

41.3. Вольтерровская модель типа «хищник–жертва»

В естественных условиях популяции, населяющие общий ареал, могут взаимодействовать различными способами, обусловленными их биологическим существованием. Последствия этих взаимодействий могут быть различными. В теории биологических популяций межвидовые взаимодействия классифицируются [20].

Рассмотрим модель популяции, в которой взаимодействие относится к типу «хищник–жертва» или «паразит–хозяин», при которых увеличение численности одного вида (хищники) ведёт к уменьшению численности другого вида (жертвы). Математическая модель взаимодействия хищник–жертва разработана известным итальянским математиком Вито Вольтерра. В этой модели предполагается, что увеличение численности хищников, а также уменьшение численности жертв пропорционально вероятности встречи особей обоих видов, т.е. произведению численностей взаимодействующих видов. То же предположение справедливо и для учёта конкуренции — взаимного отрицательного влияния подсистем.

Система дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие двух биологических видов, запишется так:

$$\frac{dx_1}{dt} = C_1x_1 - a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2, \tag{41.6}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = C_2x_2 - a_{21}x_1x_2 - a_{22}x_2^2. \tag{41.7}$$

Здесь x_1 — численность хищников, x_2 — численность жертв. Слагаемые $a_{ii}x_i^2$, $i = 1, 2$, описывают внутривидовую конкуренцию, линейные слагаемые C_ix_i соответствуют свободному размножению видов. Коэффициенты $a_{ij} > 0$. Если $C_i > 0$, то численность i-го вида растет, если $C_i < 0$, вид i вымирает. Межвидовое взаимодействие характеризуется коэффициентами a_{12} и a_{21}.

Модель Вольтерра может описывать не только систему «хищник–жертва», но и систему двух конкурирующих видов. Для этого следует положить $a_{12} < 0$.

Модель Вольтерра — базовая модель, играющая в математической экологии такую же роль, как модель гармонического осциллятора в динамике материальной точки.

В зависимости от соотношения параметров модели C_i, a_{ij} система (41.6), (41.7) имеет решения различных видов, в числе которых есть и периодические решения. Детальный анализ решений системы (41.6), (41.7) можно найти, например, в [20].

41.4. Модель Моно непрерывного культивирования микроорганизмов

Производство биомассы микроорганизмов является основным биотехнологическим процессом. Математические модели микробиологических популяций используются в разработке технологий культивирования биомассы. Существуют несколько способов культивирования, одним из которых является непрерывное культивирование. При любом способе в культиватор помещают некоторое количество культуры — «затравку» биомассы, необходимые питательные вещества и создают необходимые температурные условия, после чего популяция развивается по своим биологическим законам. При непрерывном культивировании питательные вещества добавляются непрерывно, а часть произведённой биомассы выводится из процесса в качестве полезной продукции. Параметры технологического процесса должны обеспечивать стабильное производство.

В математических моделях непрерывного культивирования состояние системы задаётся концентрацией производимой биомассы x и концентрацией субстрата S.

Балансовое уравнение, описывающее концентрацию микроорганизмов, имеет вид [20]

$$\frac{dx}{dt} = x(\mu - \nu), \tag{41.8}$$

где функция μ описывает размножение популяции и может зависеть от x и концентрации субстрата S, а также от параметров среды; функция ν характеризует скорость вымывания биомассы из культиватора. Рост биомассы без учёта вымывания ($\nu = 0$) задаётся уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \mu x. \tag{41.9}$$

Определение явного вида функции $\mu(x, S)$ является предметом отдельных исследований. Если питательные вещества поступают в неограниченном объёме, то биомасса экспоненциально растет. Если же рост популяции чем-либо лимитирован, то величина μ будет уменьшаться. Для микробиологических популяций установлено, что функцию μ определяет концентрация субстрата S. Наиболее известной является модель, предложенная Моно, в которой предполагается, что

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mu_m S}{K_s + S} x. \tag{41.10}$$

Формула Моно $\mu(x, S) = \mu_m S/(K_s + S)$ позволяет учитывать насыщение скорости роста культуры при увеличении S_0. Параметр μ_m есть максимальная скорость роста биомассы; K_s — константа, равная концентрации субстрата, при которой скорость роста культуры равна половине максимальной. Скорость роста биомассы определяется скоростью переработки питательного субстрата с помощью ферментов.

Экспериментально установлено, что скорость переработки субстрата биомассой определяется выражением

$$\frac{1}{x}\frac{dS}{dt} = -\frac{kE_0 S}{K_m + S}, \tag{41.11}$$

которое называется формулой Михаэлиса–Ментена.

Наиболее распространённым типом непрерывных культиваторов биомассы является так называемый хемостат, в котором скорость протока (удаления) произведённой биомассы задаётся технологическими условиями.

Простейшие уравнения, описывающие культивацию биомассы в хемостате, имеют следующий вид:

$$\frac{dx}{dt} = \mu(S)x + D'(x); \tag{41.12}$$

$$\frac{dS}{st} = -\alpha\mu(S)x - D'(S^0 - S); \tag{41.13}$$

$$\mu(S) = \frac{\mu_S S}{K_S + S}. \tag{41.14}$$

Здесь S^0 — концентрация субстрата, поступающего в культиватор; D' — скорость протока биомассы; коэффициент α показывает, какая часть субстрата идёт на производство биомассы. Выражение $-\alpha\mu(S)x$ описывает количество субстрата, поглощённого в единицу времени клетками культуры; величина $D'x$ — отток биомассы; $D'S$ — приток клеток культуры в культиватор; $-D'S^0$ — отток использованного субстрата из культиватора. Скорость роста биомассы μ берется в соответствии с формулой Моно.

Уравнения (41.12)–(41.14) являются базовыми в технологиях производства микробиологических культур. Введём безразмерные концентрации

$$x' = \frac{\alpha x}{K_m}, \quad y = \frac{S}{K_m}, \quad y_0 = \frac{S^0}{K_m} \tag{41.15}$$

и безразмерные время $t' = t\mu_m$ и скорость протока $D = D'/\mu_m$ и запишем систему (41.12)–(41.14) в виде

$$\frac{dx'}{dt'} = \mu(y)x' - Dx'; \tag{41.16}$$

$$\frac{dy}{dt'} = -\mu(y)x' + D(y_0 - y); \tag{41.17}$$

$$\mu(y) = \frac{y}{1+y}. \tag{41.18}$$

В практических приложениях важное значение имеют стационарные решения системы (41.16)–(41.18) и их устойчивость.

Приложение А
Линейные нормированные пространства

А1. Линейные операторы

А1.1. Основные понятия и определения

♦ Линейным оператором $\widehat{A}$, действующим в линейном пространстве $\mathcal{L}$ (или преобразованием пространства $\mathcal{L}$ [9]) над числовым полем $\mathcal{K}$, называется правило, по которому каждому элементу $\vec{x} \in \mathcal{L}$ сопоставляется определённый элемент $\vec{y} \in \mathcal{L}$:

$$\vec{y} = \widehat{A}\vec{x}, \tag{А1.1}$$

причём для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}$ и любого $\alpha \in \mathcal{K}$ справедливо

$$\widehat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \widehat{A}\vec{x}_1 + \widehat{A}\vec{x}_2;$$
$$\widehat{A}(\alpha\vec{x}_1) = \alpha\widehat{A}\vec{x}_1.$$

Пример А1.1. Показать, что оператор, который любому $\vec{x} \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие нулевой вектор:

$$\hat{0}\vec{x} = \vec{0},$$

является линейным.

Решение. По определению,

$$\widehat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \hat{0}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \vec{0} = \hat{0}\vec{x}_1 + \hat{0}\vec{x}_2 = \widehat{A}\vec{x}_1 + \widehat{A}\vec{x}_2 = \widehat{A}\alpha\vec{x}_1 = \hat{0}\alpha\vec{x}_1 = \alpha\vec{0} = \alpha\widehat{A}\vec{x}_1.$$

Пример А1.2. Показать, что оператор $\widehat{A}$, который любой $\vec{x} \in \mathcal{L}$ переводит в вектор $\beta\vec{x}$, где $\beta \in \mathcal{K}$ – фиксированное число, является линейным, т.е. $\widehat{A}\vec{x} = \beta\vec{x}$.

Решение. Действительно,

$$\widehat{A}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \beta(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \beta\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 = \widehat{A}\vec{x}_1 + \widehat{A}\vec{x}_2,$$
$$\widehat{A}\alpha\vec{x} = \beta\alpha\vec{x} = \alpha\beta\vec{x} = \alpha\widehat{A}\vec{x}.$$

Такой оператор называется *оператором подобного растяжения*, или *оператором подобия.*

♦ Пусть $\vec{x}, \vec{y} \in \mathcal{L}$. Выберем в пространстве $\mathcal{L}$ базис $\vec{e}_j$, $j = \overline{1,n}$. Оператор P, который любому вектору

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j$$

ставит в соответствие вектор $\vec{y} = \sum\limits_{j=1}^{k} x^j \vec{e}_j$, $k < n$, называется *оператором проектирования на подпространство*, натянутое на векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$.

◊ Очевидно, что оператор проектирования линеен.

♦ Оператор, ставящий в соответствие произвольному вектору $\vec{x} \in \mathcal{L}$ этот же самый вектор, называется *тождественным* и обозначается $\widehat{E}\vec{x} = \vec{x}$.

◊ Пусть $\mathcal{L}$ – линейное пространство; $\vec{e}_j$ – его базис; $\widehat{A}$ – линейный оператор, действующий в $\mathcal{L}$. Так как $\widehat{A}\vec{e}_j$, $j = \overline{1,n}$, – вектор пространства $\mathcal{L}$, то каждый из них можно разложить единственным образом по векторам базиса:

$$\widehat{A}\vec{e}_j = \sum_{l=1}^{n} a_j^l \vec{e}_l, \qquad j = \overline{1,n}. \tag{А1.2}$$

Матрица $A = \|a_j^l\|$ называется матрицей линейного оператора $\widehat{A}$ в базисе $\vec{e}_j$, $j = \overline{1,n}$.

Возьмем произвольный вектор $\vec{x} \in \mathcal{L}$ и разложим его по базису $\vec{e}_j$:

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j.$$

Тогда

$$\vec{x} = \widehat{A}\vec{x} = \widehat{A}\sum_{j=1}^{n} x^j \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x^j \widehat{A}\vec{e}_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x^j a_j^l \vec{e}_l.$$

Обозначив координаты вектора $\vec{y} = \widehat{A}\vec{x}$ через y^j, запишем

$$y^l = \sum_{j=1}^{n} a_j^l x^j. \tag{А1.3}$$

В матричной форме это соотношение запишется в виде

$$Y = AX, \tag{А1.4}$$

где A — матрица линейного оператора $\widehat{A}$; $X = \|x^l\|$ и $Y = \|y^l\|$ — матрицы-столбцы, составленные из координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ в базисе $\vec{e}_j$.

$\Diamond$ Таким образом, каждому оператору $\widehat{A}$ соответствует (в фиксированном базисе) квадратная матрица $A = \|a_j^l\|$.

Пусть, наоборот, задана некоторая матрица A. Определим оператор $\widehat{A}$ формулами (А1.4), т.е. положим $\widehat{A}\vec{x} = \vec{y}$, где координаты вектора $\vec{y}$ вычисляются по координатам вектора $\vec{x}$ по формулам (А1.4) при фиксированном базисе. Легко проверить, что такой оператор линеен и каждому $\vec{x} \in \mathcal{L}$ ставит в соответствие $\vec{y} \in \mathcal{L}$.

Таким образом, соотношение (А1.3) даёт общий вид линейного оператора в конечномерном пространстве.

Пример А1.3. Найти матрицу оператора, переводящего векторы $\vec{x}_1 = (1, 0, -1)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, -2)$ и $\vec{x}_3 = (1, 1, 1)$ в векторы $\vec{y}_1(0, 1, -1)$, $\vec{y}_2 = (1, 0, 2)$, $\vec{y}_3 = (0, 0, -1)$.

Решение. Используя (А1.3) и согласно условию задачи, имеем соотношения

$$\vec{y}_1 = Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = AX_1 = A\vec{x}_1 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\vec{y}_2 = Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = AX_2 = A\vec{x}_2 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$\vec{y}_3 = Y_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = AX_3 = A\vec{x}_3 = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые с помощью матриц

$$\mathcal{Y} = (Y_1\ Y_2\ Y_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \tag{А1.5}$$

$$\mathcal{X} = (X_1\ X_2\ X_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{А1.6}$$

можно записать одним матричным соотношением

$$\mathcal{Y} = A\mathcal{X},$$

откуда

$$A = \mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1}. \tag{А1.7}$$

Поскольку, согласно (А1.5), $\det \mathcal{X} = 4 \neq 0$, обратная матрица $\mathcal{X}^{-1}$ существует. Вычислив её:

$$\mathcal{X}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

и подставив в (А1.7), с учётом (А1.5) найдём

$$A = \mathcal{Y}\mathcal{X}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

◊ На практике приходится решать следующие задачи, связанные с линейными операторами:

1) установить, является ли данное преобразование линейным;

2) найти матрицу линейного оператора в заданном базисе.

Итак, мы установили соответствие между линейными операторами, действующие в линейном пространстве $\mathcal{L}$, с фиксированным базисом и квадратными матрицами. Легко проверить, что это соответствие является взаимно однозначным.

Пример А1.4. Найти матрицу нулевого оператора.

Решение. Ясно, что $A = 0_{3\times3}$.

А1.2. Действия над линейными операторами

♦ Операторы $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$, действующие в пространстве $\mathcal{L}$, называются равными, если для любого $\vec{x} \in \mathcal{L}$ справедливо $\widehat{A}\vec{x} = \widehat{B}\vec{x}$.

Очевидно, что матрицы A, B равных операторов равны, так как

$$\sum_{l=1}^{n} a_j^l \vec{e}_l = \sum_{l=1}^{n} b_j^l \vec{e}_l.$$

♦ Суммой двух линейных операторов называется оператор $\widehat{C} = \widehat{A} + \widehat{B}$, действующий по правилу

$$\widehat{C}\vec{x} = (\widehat{A}\vec{x} + \widehat{B}\vec{x}) = \widehat{A}\vec{x} + \widehat{B}\vec{x}.$$

♦ Произведением линейного оператора $\widehat{A}$ на число $\lambda \in \mathcal{K}$ называется оператор $\widehat{B} = \lambda\widehat{A}$, действующий по правилу

$$\widehat{B}\vec{x} = (\lambda\widehat{A})\vec{x} = \lambda\widehat{A}\vec{x}.$$

♦ Произведением двух линейных операторов $\widehat{A}\widehat{B} = \widehat{C}$ называется линейный оператор, действующий по правилу

$$\widehat{C}\vec{x} = \widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}).$$

Например,

$$\begin{gathered} \widehat{C}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \widehat{A}(\widehat{B}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)) = \\ = \widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}_1 + \widehat{B}\vec{x}_2) = \widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}_1) + \widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}_2) = \widehat{C}\vec{x}_1 + \widehat{c}\vec{x}_2, \\ \widehat{C}\lambda\vec{x} = \widehat{A}(\widehat{B}\lambda\vec{x}) = \widehat{A}\lambda(\widehat{B}\vec{x}) = \lambda\widehat{A}(\widehat{B}\vec{x}) = \lambda\widehat{C}\vec{x}. \end{gathered}$$

◊ Легко проверить, что если $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ — линейные операторы, то $\widehat{A} + \widehat{B}$, $\lambda\widehat{A}$ и $\widehat{A}\widehat{B}$ — тоже линейные операторы.

◊ При сложении двух операторов их матрицы складываются. При перемножении двух операторов их матрицы перемножаются.

Нетрудно показать, что множество всех линейных операторов образует линейное пространство относительно операций сложения и умножения на число.

А2. Метрические и нормированные пространства

Фундаментальным в анализе является предельный переход (сходимость). Для одних и тех же математических объектов в различных задачах вводятся разные понятия предела. Например, для последовательности функций $f_n(x)$ вводятся поточечная сходимость, равномерная, в среднем, и др. Общим для всех определений предела является неограниченное «сближение» элементов f_n и f при $n \to \infty$. В зависимости от того, как определено понятие «близости» расстояния между элементами, получаются разные определения предела.

В связи с этим разумно аксиоматизировать понятие расстояния между элементами произвольного множества и получить *общие свойства предельного перехода*, отвлекаясь от специфики элементов множества.

А2.1. Определения и примеры

⧫ Вещественная функция
$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}^1$$
называется *метрикой* на множестве X (или расстоянием между $x, y \in X$) и обозначается через $\rho(x, y)$, если она удовлетворяет следующим условиям:
1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ (условие положительности);
2) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (условие равенства нулю);
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (условие симметричности);
4) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).
Условия 1–4 иногда называют аксиомами метрики.

⧫ Пара $\langle X, \rho\rangle$, состоящая из множества X и заданной на нем метрики ρ, называется *метрическим пространством.*

◊ В случае, когда из контекста ясно, о какой метрике идёт речь, метрическое пространство $\langle X, \rho\rangle$ часто обозначается тем же символом, что и множество X.

Приведём несколько примеров метрических пространств.

Пример А2.1. Показать, что функция $\rho(\vec{x}, \vec{y})$, отображающая пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}$ по правилу
$$\text{а)}\quad \rho_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}; \tag{А2.1}$$
$$\text{б)}\quad \rho_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \tag{А2.2}$$
является метрикой, а n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ — метрическим.

Решение. а) Очевидно, что функция $\rho(\vec{x}, \vec{y})$ удовлетворяет первым трём условиям метрики. Проверим выполнение четвёртого. Неравенство треугольника следует из неравенства Коши–Буняковского
$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \tag{А2.3}$$
Заметим, что
$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}.$$
Тогда, согласно теореме косинусов, эта функция удовлетворяет и четвёртому условию.

Для случая б) решение аналогично.

Пример А2.2. Показать, что функция
$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$
определённая на множестве «изолированных» точек X, является метрикой.

Решение. Решить самостоятельно.

Пример A2.3. Показать, что функция

$$\rho(x,y) = |x-y|,$$

определённая на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}^1$, является метрикой, а само $\mathbb{R}^1$ — метрическим пространством.

Решение. Решить самостоятельно.

Пример A2.4. Показать, что на множестве непрерывных на $[a,b]$ функций функция

$$\rho(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - y(t)| \tag{A2.4}$$

является метрикой.

Решение. Из условия $\rho(x,y) = 0$ с очевидностью следует, что $x(t) = y(t)$. Кроме того, из определения модуля следует, что эта функция симметрична, т.е. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$. Проверим выполнение неравенства треугольника. Заметим, что

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|.$$

Следовательно,

$$\rho(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)| \leqslant$$
$$\max_{t\in[a,b]} |x(t) - z(t)| + \max_{t\in[a,b]} |z(t) - y(t)| = \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Таким образом, функция (A2.4) является метрикой, а пространство $\mathcal{C}([a,b])$ – метрическим.

Пример A2.5. Показать, что сходимость в пространстве $\mathcal{C}[a,b]$ эквивалентна равномерной сходимости на $[a,b]$.

Решение. Рассмотрим последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n(t) \in [a,b]$, такую, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_0(t)|,$$

где $x_0(t) \in \mathcal{C}[a,b]$. Тогда, по определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что

$$\max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \qquad t \in [a,b],$$

т.е. последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $x_0(t)$ равномерно. Справедливо и обратное: если $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $x(t)$ равномерно, то

$$\rho(x_n, x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и требовалось показать.

Пример A2.6. Показать, что функция $\rho(x,y)$, отображающая множество $L_p[a,b]$ в $\mathbb{R}^1$ по правилу

$$\rho_p(x,y) = \left(\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^p dt\right)^{1/p}, \tag{A2.5}$$

является метрикой. Здесь $L_p[a,b]$ — множество всех вещественных функций, определённых на $[a,b]$, для которых

$$\int\limits_a^b |x(t)|^p dt < \infty, \qquad p > 0. \tag{A2.6}$$

Решение. Решить самостоятельно.

$\lozenge$ Часто множества $\mathcal{C}[0,1]$ и $L_p[0,1]$ обозначают $\mathcal{C}$ и L_p.

$\blacklozenge$ Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство. Тогда любое его подмножество $A \subset X$, которое также является метрическим пространством $\langle A, \rho\rangle$, называется *подпространством* пространства $\langle X, \rho\rangle$.

$\blacklozenge$ Биекция, отображающая метрическое пространство $\langle X, \rho\rangle$ на метрическое пространство $\langle Y, \alpha\rangle$ ($h : \langle Y, \rho\rangle$) и сохраняющая метрику:

$$\rho(x, y) = \alpha(h(x), h(y)),$$

называется *изометрией.*

$\blacklozenge$ *Нормой в* L называют функционал $p(x)$, удовлетворяющий условиям (аксиомам нормы):

1. $p(x) \geqslant 0$ ($p = 0 \Leftrightarrow x = 0$);
2. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in L$ (аксиома треугольника);
3. $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ для всех α.

Норму элемента $x \in L$ обозначают $\|x\|$.

$\lozenge$ Всякое нормированное пространство становится метрическим, если ввести расстояние по формуле

$$\rho(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x - y\|.$$

Это означает, что все свойства, доказанные для метрических пространств, справедливы и для нормированных пространств.

В частности, автоматически переносится важнейшее понятие сходимости.

$\blacklozenge$ Последовательность x_n сходится к x по норме, если

$$\|x_n - x\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Важнейшим классом линейных нормированных пространств являются полные пространства.

$\blacklozenge$ Линейное нормированное полное пространство называется *банаховым* (типа B или B-пространством).

B-пространства — важнейший тип пространств. Например, в B-пространствах развита теория уравнений (интегральных и др.)

Это связано с тем, что рассматриваемые уравнения решаются итерационными методами и вопрос о сходимости итерационной процедуры легче всего исследовать в полном пространстве.

А2.2. Сходимость в метрическом пространстве

Понятие расстояния между элементами множества позволяет перенести в метрические пространства важнейшие понятия классического анализа.

$\blacklozenge$ Множество элементов метрического пространства X, удовлетворяющих условию

$$S(a, r) = \{x | x \in X, \rho(a, x) < r\},$$

называется *открытым шаром* с центром в a и радиусом r, а множество элементов, удовлетворяющих условию

$$S[a, r] = \{x | x \in R, \rho(a, x) \leqslant r\},$$

— *замкнутым шаром.*

$\blacklozenge$ Открытый шар с центром в $x_0 \in X$ и радиусом ε называется ε-*окрестностью* точки x_0 и обозначается

$$S(x_0, \varepsilon) \equiv O_\varepsilon(x_0).$$

$\blacklozenge$ Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если существуют такие $r < \infty$ и $a \in X$, что

$$M \subset S(a, r).$$

♦ Точка $x_0 \in M$ называется *изолированной* точкой множества M, если существует ε-окрестность точки x_0 ($O_\varepsilon(x_0)$), которая не содержит элементов множества M, отличных от x_0:

$$M \cap O_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}.$$

♦ Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой* множества $M \subset X$, если любая её ε-окрестность содержит по крайней мере один элемент множества M, отличный от x_0.

♦ Точка x_0 называется *внутренней точкой* множества M, если существует ε-окрестность точки x_0, целиком лежащая в M ($S(x_0, \varepsilon) \subset M$).

♢ Предельная точка множества M может принадлежать или не принадлежать M.

♦ Множество M называется *замкнутым множеством*, если оно содержит все свои предельные точки.

♦ Множество $[M]$, содержащее множество M и все его предельные точки, называется *замыканием множества M*.

Операция перехода от множества M к множеству $[M]$ называется *операцией замыкания.*

Теорема А2.1. *Операция замыкания обладает свойствами:*
1) $M \subset [M]$*;*
2) $[[M]] = [M]$*;*
3) *Если* $M_1 \subset M_2$*, то* $[M_1] \subset [M_2]$*;*
4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Доказательство. 1. Справедливость первого утверждения следует непосредственно из определения.

2. Рассмотрим произвольный элемент x из $[[M]]$: ($x \in [[M]]$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_1 \in [M]$, что $x_1 \in O_\varepsilon(x)$. Обозначим $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1)$ и рассмотрим окрестность $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Тогда для любого $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ справедливо

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, x_1) + \rho(x, x_1) < \varepsilon_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Следовательно, $z \in O_\varepsilon(x)$.

Для любого $x \in [M]$ существует такое $x_2 \in M$, что $x_2 \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Таким образом, из того, что $x \in [M]$, следует, что $[[M]] \subset [M]$, что и требовалось доказать.

Утверждения 3 и 4 доказываются аналогично.

♢ Множество $[M]$ состоит из:
а) изолированных точек множества M;
б) предельных точек множества M, принадлежащих M;
в) предельных точек множества M, не принадлежащих M.

Перейдём к определению сходимости элементов метрического пространства.

♦ Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ – последовательность элементов множества X. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ называется *сходящейся по метрике* к элементу x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что для всех $n > N_\varepsilon$ справедливо $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Элемент x_0 называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ и обозначается

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0. \tag{А2.7}$$

Свойство 1. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность элементов множества X, сходящаяся к $x_0 \in X$. Тогда
1) предел последовательности единствен;
2) любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к x_0;
3) множество $\{x_1, x_2, \dots\}$, состоящее из элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, ограничено.

Доказательство. 1. Предположим противное:

$$x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0, \qquad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0,$$

причём существует такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(x_0, y_0) > \varepsilon$. По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что для всех $n > N_\varepsilon$ справедливо

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \rho(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, согласно неравенству треугольника,

$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_n, y_0) < \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Доказательство утверждений 2 и 3 дословно повторяет доказательство соответствующих утверждений классического анализа.

Определим теперь важную для дальнейшего изложения характеристику множества — его *плотность*.

Пусть A и B — два множества в метрическом пространстве X.

♦ Множество A называют *плотным* в множестве X, если его замыкание также принадлежит множеству X: $[A] \supset X$.

Множество A называется *всюду плотным* в X, если $[A] = X$.

Пример А2.7. Показать, что множество рациональных чисел всюду плотно в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ (на числовой прямой).

Решение. По определению, множество действительных чисел является объединением множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел, причём всякое иррациональное число есть предел некоторой последовательности рациональных чисел. Таким образом, иррациональные числа являются предельными числами рациональных, откуда и следует справедливость утверждения.

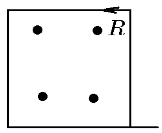


Рис. 46

♦ Множество A *нигде не плотно* в X, если оно не плотно ни в одном шаре $B \subset X$.

Например, если R — квадрат, а A — несколько изолированных точек, то A нигде не плотно в R.

♦ Пространство, в котором имеется счётное, всюду плотное множество, называют *сепарабельным*.

◊ Можно показать, что пространство X будет сепарабельным, если в пространстве X существует такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что для любого $x_0 \in X$ найдётся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к x_0.

А2.3. Открытые и замкнутые множества

♦ Множество $M \subset R$ называется *замкнутым*, если $[M] = M$.

Иначе: множество M замкнуто, если оно содержит все свои предельные точки.

Из любого множества M можно получить замкнутое множество с помощью операции замыкания.

Приведём без доказательства основные свойства замкнутых множеств.

Свойство 1. *Пересечение любого числа и сумма любого конечного числа замкнутых множеств замкнуты.*

♦ Элемент $x \in F$ называется *внутренней точкой* множества F, если он принадлежит F вместе с некоторой окрестностью.

♦ Множество, все точки которого являются внутренними, называется *открытым.*

Свойство 2. Если дополнение $R\backslash M$ замкнуто, то множество $M \subset R$ открыто. Справедливо и обратное: если множество $M \subset R$ открыто, то дополнение $R\backslash M$ замкнуто.

Свойство 3. Сумма любого (конечного или бесконечного) числа и пересечение любого конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

А2.4. Полные метрические пространства

Пусть $R =< X, \rho >$ — метрическое пространство.

♦ Последовательность $\{x_n\} \subset R$ *фундаментальна* (*типа Коши*), если для всех $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что $\rho(x_{n'}, x_{n''}) < \varepsilon$ при $n', n'' > N_\varepsilon$.

Свойство 1. *Сходящаяся последовательность фундаментальна.*

Действительно, в силу неравенства

$$\rho(x_m, x_l) \leqslant \rho(x_m, x) + \rho(x, x_l) < 2\varepsilon$$

из сходимости последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \to x$ следует, что $\rho(x_m, x_l) \to 0$ при $m, n \to \infty$.

♦ Пространство R, в котором всякая фундаментальная последовательность сходится, называется *полным.*

Теорема А2.2 (о вложенных шарах). *Пространство R полно в том и только том случае, если в нем всякая последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустые пересечения.*

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть R полно и $S_1[x_1, r_1] \supset S_2[x_2, r_2] \supset ...$ — последовательность замкнутых шаров, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Последовательность центров шаров $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, так как $\rho(x_n, x_m) < r_n$, если $m > n$, и $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу полноты R существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in R$.

Произвольный шар S_n содержит все точки $\{x_i\}, i > n$. Следовательно, x_0 — предельная точка S_n (в любой ε-окрестности $O_\varepsilon(x_0) \notin x_i, i > N_\varepsilon$, но, с другой стороны, $x_i \in S_n, i > n \Rightarrow O_\varepsilon(x_0) \notin x_i, x_i \in S_n$ при $i > \max\{n, N_\varepsilon\}$). В силу замкнутости шаров $S_n, x_0 \in S_n$ для любого n, следовательно

$$x_0 \in \bigcap_n S_n.$$

2. Достаточность. Пусть всякая последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю ($r_n \to 0$), имеет непустое пересечение. Рассмотрим некоторую фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ и докажем её сходимость в R. Для любого $\varepsilon > 0$ существует N_ε, такое, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, если $n, m > N_\varepsilon$. Пусть $\varepsilon = 1/2$. Существует n_1 такое, что $\rho(x_n, x_{n_1}) < 1/2$ для всех $n > n_1$. Окружим x_{n_1} шаром радиуса 1: $S_1[x_{n_1}, 1]$.

Пусть $\varepsilon = 1/2^2$. Существует n_2 такое, что $\rho(x_n, x_{n_2}) < 1/2^2$ для всех $n > n_2$. Окружим x_{n_2} шаром $S_2[x_{n_2}, \frac{1}{2}](\subset S_1)$ и т.д.

Мы получили последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю:

$$S_1\Big[x_{n_1}, \frac{1}{2^1}\Big] \supset S_2\Big[x_{n_2}, \frac{1}{2^2}\Big] \supset \ldots \supset S_k\Big[x_{n_k}, \frac{1}{2^k}\Big] \supset \ldots$$

Существует x, принадлежащее всем шарам: $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k$. Так как $\rho(x_0, x_{n_k}) < 1/2^k$, то

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}.$$

Но последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, и поскольку $x_{n_k} \to x$, то $x_n \to x$. Действительно,

$$\rho(x_n, x) \leqslant \rho(x_n, x_{n_k}) + \rho(x_{n_k}, x).$$

Переходя здесь к пределу $n, n_k \to \infty$, получим

$$x_{n_k} \to x \Rightarrow x_n \to x.$$

◊ R — полное пространство; $F \subset R$ замкнуто в R, тогда и F — полное пространство. Действительно, всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\} \subset F$ сходится: $x_n \to x \in R$. Но x — предельная точка множества F, следовательно, $x \in F$ и F полно.

А2.5. Пополнение метрических пространств

Свойство полноты является важнейшей характеристикой метрического пространства. Большинство теорем анализа содержит предельный переход элементов пространства, причём факт сходимости проверяется на основе некоторого признака. Естественно, чтобы выполнялся один из наиболее универсальных признаков — признак сходимости Коши.

Если пространство R не полно, то его всегда можно включить (единственным с точностью до изометрии) способом в некоторое полное пространство.

Интуитивно ясно, что нужно сделать: включить в R пределы фундаментальных последовательностей. Трудность состоит в том, как определить предел последовательности, если этот элемент не находится в R.

Эту трудность удаётся обойти так же, как в теории чисел вводятся иррациональные числа (именно как последовательности рациональных дробей).

Пусть R — метрическое пространство.

♦ Полное метрическое пространство R^* назовем *пополнением* R, если

1. $R \subset R^*$ (подпространство);
2. $[R] = R^*$ (R всюду плотно в $\mathbb{R}^*$).

А3. Сжимающие отображения

Вопрос о существовании и единственности решений уравнения $\widehat{A}x = x$, $x \in R$, можно сформулировать как вопрос о существовании и единственности неподвижной точки отображения вида $\widehat{A} : R \to R$.

Среди критериев существования и единственности неподвижной точки отображений простейшим является принцип сжимающих отображений.

♦ Оператор $\widehat{A}$, действующий в метрическом пространстве R по правилу $\widehat{A} : R \to R$, называется *сжимающим отображением* (*сжатием*), если существует $\alpha < 1$ такое, что для всех $x, y \in R$ справедливо неравенство

$$\rho(\widehat{A}x, \widehat{A}y) \leqslant \alpha\rho(x, y) \tag{А3.1}$$

(т.е не зависит от x и y).

Свойство 1. *Сжимающее отображение непрерывно.*

Действительно, для любой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящейся к x_0, в силу (А3.1) справедливо $\widehat{A}x_n \to \widehat{A}x_0$.

♦ Точка x называется *неподвижной точкой* отображения $\widehat{A}$, если

$$\widehat{A}x = x, \tag{А3.2}$$

т.е. это решение уравнения (А3.2).

Теорема А3.1 (принцип сжимающих отображений). *Всякое сжимающее отображение, определённое в полном метрическом пространстве R, имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть $\widehat{A} : R \to R$, $\widehat{A}$ — сжатие. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in R$ и составим последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_0,\ x_1 = Ax_0,\ x_2 = Ax_1,\ \ldots,\ x_n = ax_{n-1},\ \ldots$$

Изучим свойства последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Действительно, при $m > n$ запишем

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(\widehat{A}^n x_0, \widehat{A}^m x_0) \leqslant \alpha^n \rho(x_0, \widehat{A}^{m-n} x_0) \leqslant$$

$$\begin{aligned}&\leqslant \alpha^n\{\rho(x_0,x_1)+\rho(x_1,x_2)+\ldots+\rho(x_{m-n-1},x_{m-n})\}\leqslant\\&\leqslant \alpha^n\{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-n-1}\}\rho(x_0,x_1)=\\&=\alpha^n\rho(x_0,x_1)\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha}\leqslant\alpha^n\rho(x_0,x_1)\frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}\qquad (A3.3)$$

Следовательно, при $\alpha<1$ функция $\rho(x_n,x_m)\to 0$, $m,n\to\infty$.

2. В полном пространстве R фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предел:

$$x=\lim_{n\to\infty}\widehat{A}^n x_0=\lim_{n\to\infty}x_n. \qquad (A3.4)$$

В силу непрерывности оператора $\widehat{A}$:

$$\widehat{A}x=\lim_{n\to\infty}\widehat{A}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x,$$

что и требовалось доказать.

3. Покажем, что неподвижная точка единственна. Предположим противное — пусть существует две неподвижные точки x и y:

$$\widehat{A}x=x,\quad \widehat{A}y=y.$$

Тогда

$$\rho(\widehat{A}x,\widehat{A}y)=\rho(x,y)\leqslant\alpha\rho(x,y),\quad \alpha<1.$$

Следовательно, $\rho(x,y)=0$ и $x=y$.

Следствие А3.1.1. Справедлива оценка

$$\rho(x_n,x)\leqslant\alpha^n\rho(x_0,x_1)\frac{1}{1-\alpha}. \qquad (A3.5)$$

Действительно, из формулы (А3.3) следует

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\alpha^n\rho(x_0,x_1)\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha}.$$

Перейдя к пределу при $m\to\infty$, в силу непрерывности ρ и (А3.4) получим (А3.5).

◊ Формула (А3.5) даёт оценку точности n-го приближения. Быстрота сходимости зависит от выбора начальных $x\in R$.

◊ В определении (А3.3) независимость α от x,y существенна. Нельзя условие (А3.1) заменить более слабым:

$$\rho(\widehat{A}x,\widehat{A}y)<\rho(x,y),\quad x,y\in R,\quad x\neq y. \qquad (A3.6)$$

Задания для самоконтроля

Теоретические вопросы

1. Как составить дифференциальное уравнение однопараметрического семейства кривых? Как возникают дифференциальные уравнения при математическом моделировании реальных процессов? Проиллюстрировать примерами.
2. Чем отличаются обыкновенные дифференциальные уравнения от уравнений в частных производных? Что такое порядок и степень дифференциального уравнения? Всякое ли дифференциальное уравнение имеет степень?
3. Что называется решением (интегральной кривой) дифференциального уравнения? Чем отличаются общее решение и общий интеграл уравнения? Можно ли из общего решения получить частное и особое решения? Могут ли уравнения иметь решения, не относящиеся ни к частным, ни к особым? Могут ли частные решения лежать на линиях экстремумов интегральных кривых?
4. Как по виду дифференциального уравнения 1-го порядка определить наклон интегральной кривой в заданной точке? Могут ли интегральные кривые уравнения $y' = f(x, y)$ иметь изломы, пересекаться между собой или касаться друг друга?
5. Что такое изоклины дифференциального уравнения? Как с их помощью построить поле направлений и интегральные кривые?
6. При каких условиях задача Коши для уравнения $y' = f(x, y)$ имеет решение и при каких условиях это решение единственно? Что такое общее решение в форме Коши?
7. Как интегрируются уравнения с разделяющимися переменными? Что означает «проинтегрировать уравнение в квадратурах»? Какие уравнения с помощью замены искомой функции и независимой переменной можно свести к уравнению с разделяющимися переменными?
8. Какие уравнения называются автономными? Как построить общее решение автономного уравнения с помощью сдвига? Как найти стационарные точки автономного уравнения и определить их тип? Как по стационарным точкам двух автономных уравнений установить качественную эквивалентность их решений? Как качественно можно охарактеризовать устойчивость решения автономного уравнения?
9. Какие дифференциальные уравнения 1-го порядка называются однородными и обобщенно-однородными? Каковы особенности изоклин однородного дифференциального уравнения? Как однородные уравнения можно свести к уравнениям с разделяющимися переменными? Какими заменами обобщенно-однородные уравнения можно свести или к однородным уравнениям, или к уравнениям с разделяющимися переменными?
10. Какое уравнение называется линейным уравнением 1-го порядка? Как найти общее решение однородного линейного уравнения? Может ли график такого решения пересечь ось Ox?
11. Что имеют общего и чем различаются методы Лагранжа и Бернулли для нахождения общего решения неоднородного линейного уравнения? При каких условиях и в каком интервале начальных условий задача Коши для линейного уравнения имеет единственное решение? Может ли линейное уравнение иметь особые решения?
12. Что такое функция Коши линейного уравнения и как с её помощью записать общее решение в форме Коши?
13. Какие уравнения заменой искомой функции и(или) независимой переменной можно свести к линейным?
14. Какой заменой уравнение Бернулли сводится к линейному? Как проинтегрировать уравнение Бернулли методом Бернулли? Для каких уравнений Бернулли нулевое решение будет частным, а для каких особым?
15. Какой заменой уравнение Дарбу можно свести к уравнению Бернулли? Какой заменой уравнение Риккати сводится к линейному? При каких условиях специальное уравнение Риккати интегрируется в квадратурах?

16. Какие уравнения называются уравнениями в полных дифференциалах? Как проинтегрировать уравнения в полных дифференциалах?
17. Что такое интегрирующий множитель? При каком условии интегрирующий множитель порождает особые решения? Как найти интегрирующий множитель, зависящий только от x или только от y и, например, от их суммы $x+y$?
18. В чём состоит основное различие полей направлений дифференциальных уравнений $y' = f(x,y)$ и $F(x,y,y') = 0$? Могут ли интегральные кривые последнего уравнения иметь изломы, пересекаться между собой или касаться друг друга?
19. Как найти дискриминантную кривую дифференциального уравнения? При каких условиях дискриминантная кривая представляет особое решение? Всегда ли огибающая семейства интегральных кривых является особым решением? Как поставить задачу Коши для уравнения $F(x,y,y') = 0$? В каком смысле понимается единственность решения в этом случае?
20. Как с помощью параметра проинтегрировать уравнения 1-го порядка, разрешённые относительно искомой функции? Как найти общее решение уравнения Лагранжа в параметрической форме?
21. Какой особенностью обладает уравнение Клеро при нахождении его общего решения? Как получить параметрическую форму особого решения уравнения Клеро?
22. Как введением параметра проинтегрировать уравнения 1-го порядка, разрешённые относительно аргумента искомой функции? Как записать общий интеграл неполного дифференциального уравнения, содержащего только производную искомой функции? Как проинтегрировать неполное уравнение, не содержащее явно искомую функцию?
23. Записать общий вид дифференциального уравнения n-го порядка. Всегда ли это уравнение можно разрешить относительно старшей производной? Сформулировать задачу Коши для него. Какой геометрический и физический смысл имеет задача Коши для уравнений 2-го порядка? При каких условиях задача Коши для уравнения n-го порядка имеет решение? При каких условиях задача Коши имеет единственное решение? Как для уравнения n-го порядка определяется общее решение в форме Коши?
24. Для уравнения $y^{(n)} = f(x)$ записать общее решение и общее решение в форме Коши. Как понизить порядок и проинтегрировать дифференциальное уравнение n-го порядка, не содержащее явно искомую функцию и младшие производные до $(k-1)$-го порядка включительно $(k < n)$?
25. В чём особенность замены, понижающей порядок дифференциального уравнения, не содержащего явно независимую переменную?
26. Как проинтегрировать уравнение, однородное относительно неизвестной функции и её производных?
27. Как установить, что дифференциальное уравнение является уравнением в полных производных и понизить его порядок?
28. Как от общего вида линейного уравнения n-го порядка перейти к его канонической форме? К какой области начальных условий решение задачи Коши для линейного уравнения является единственным? Имеет ли линейное уравнение особые решения? Как записать линейное уравнение с помощью линейного дифференциального оператора?
29. В чём смысл принципа суперпозиции для линейного уравнения? Какие критерии существуют для исследования линейной зависимости системы функций?
30. Если система функций независима на некотором промежутке, следует ли из этого их независимость на любом отрезке из этого промежутка? Что можно сказать о линейной зависимости системы функций, если их вронскиан равен нулю? Что в аналогичной ситуации можно сказать о системе функций, являющихся решениями некоторого линейного уравнения?
31. Что такое фундаментальная система решений однородного линейного уравнения? Сколько фундаментальных систем решений может иметь линейное уравнение? Может ли вронскиан фундаментальной системы решений хотя бы в одной точке обращаться в нуль? Может ли фундаментальная система решений содержать нулевые

решения? Как по линейно независимой системе функций найти дифференциальное уравнение, для которого она является фундаментальной системой решений? Какая фундаментальная система решений называется нормированной в заданной точке? Что такое фундаментальная матрица и матрицант системы дифференциальных уравнений?

32. Как построить фундаментальную систему решений, нормированную в точке x_0, с помощью фундаментальной матрицы? Как по фундаментальной системе решений линейного однородного уравнения записать его общее решение? Как с помощью фундаментальной системы решений, нормированной в точке x_0, записать общее решение в форме Коши? В каком случае это будет решением задачи Коши для линейного уравнения?
33. Как, зная одно частное решение линейного уравнения, понизить его порядок? Как, зная одно частное решение линейного уравнения 2-го порядка, получить его общее решение? Что такое инвариант уравнения 2-го порядка? В каком случае два линейных уравнения можно привести к одному каноническому виду?
34. Можно ли найти общее решение неоднородного линейного уравнения, если известны фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения и только одно частное решение неоднородного? Сколько уравнений содержит вспомогательная система, возникающая при решении неоднородного линейного уравнения методом Лагранжа? Как определить функцию Коши линейного уравнения и как с её помощью записать частное решение неоднородного уравнения и его общее решение в форме Коши?
35. В какой области определено общее решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами (стационарного)? Какова степень произвола при выборе начальных данных задачи Коши для линейного стационарного уравнения? Как для линейного стационарного уравнения записать фундаментальную матрицу, нормированную в точке $x = x_0$, если известна фундаментальная матрица, нормированная в точке $x = 0$?
36. Что такое квазиполином, и какой квазиполином называется приведённым? Как записываются характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного стационарного уравнения? Как записать факторизацию ЛСД-оператора, если известны нули характеристического многочлена (корни характеристического уравнения)? Каким приведённым квазиполиномом записывается общее решение стационарного уравнения? Как можно записать этот квазиполином в вещественной форме при наличии комплексных характеристических корней? Как нормировать фундаментальную систему решений линейного стационарного уравнения в точке $x = 0$?
37. Что такое стационарное решение и точка покоя уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами? Как определить характер точки покоя? Какой вид имеют фазовые портреты для седла, узла, фокуса и центра? Что такое прямая покоя линейного стационарного уравнения?
38. В чём заключается особенность метода Лагранжа применительно к стационарному линейному уравнению? Какая из функций нормированной фундаментальной системы решений играет роль функции Коши для неоднородного линейного стационарного уравнения?
39. Для какого вида неоднородностей используется метод неопределённых коэффициентов? В каком виде записывается квазиполином с неизвестными коэффициентами для нахождения частного решения неоднородного уравнения, если характеристические корни являются показателями экспонент квазиполиномов, представляющих эти неоднородности?
40. Как от общего вида системы дифференциальных уравнений перейти к её канонической форме? Что называется порядком системы дифференциальных уравнений? Как от канонической форме системы перейти к её нормальной форме, а от нормальной формы — к симметричной?
41. Какая система называется автономной? Всегда ли нормальную систему можно свести к автономной?

42. Какую геометрическую задачу можно сопоставить нормальной системе дифференциальных уравнений? Что называется решением (интегральной кривой) системы дифференциальных уравнений? В каких пространствах задаются интегральная кривая и фазовая траектория?
43. Как формулируется задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений? При каких условиях она имеет решение и когда это решение будет единственным?
44. Что такое общий интеграл и общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений? Что такое первый интеграл и сколько независимых первых интегралов может иметь нормальная система?
45. В чём заключается суть метода исключения для нормальной системы? Что такое метод интегрируемых комбинаций? Сколько независимых первых интегралов определяет общее решение нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений?
46. Какой общий вид имеет линейная система дифференциальных уравнений в нормальной форме? В каком смысле задача Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений имеет единственное решение?
47. Какие решения однородной системы линейных уравнений называются линейно независимыми? Что такое фундаментальная система решений? При каких условиях данная система решений является фундаментальной?
48. Что такое фундаментальная матрица системы? Какая фундаментальная матрица называется матрицантом в точке $x = x_0$? Как записать общее решение в форме Коши с помощью фундаментальной матрицы? Когда это решение будет определять решение задачи Коши?
49. Можно ли найти общее решение неоднородной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, если известна фундаментальная матрица однородной системы и только одно частное решение неоднородной?
50. Описать метод Лагранжа нахождения общего решения неоднородной системы линейных уравнений.
51. Как методом Коши найти общее решение неоднородной системы в форме Коши? Когда это решение будет представлять решение задачи Коши?
52. Как системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами интегрируются операторным (символическим) методом?
53. В чём заключается особенность метода исключения для систем с постоянными коэффициентами?
54. Как методом Эйлера проинтегрировать систему с постоянными коэффициентами, имеющую а) различные вещественные или комплексные корни; б) кратные корни, геометрическая кратность которых меньше алгебраической? Как в подобных случаях проинтегрировать систему уравнений матричным методом?
55. Как найти частное решение неоднородной системы с постоянными коэффициентами методом неопределённых коэффициентов?

Индивидуальные задания

Вариант № 1

1.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$(x-a)^2+y^2=1$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

1.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$2(y+y')=x+2.$$

1.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ (x^3+2x)y^2dy=x\,dx;\quad 2.\ \ dy=\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}dx;\quad 3.\ \ \frac{y'}{\operatorname{tg} y}=x\cos^2 y;$$
$$4.\ \ y'x^2e^y=e^{-y},\ y(1)=0;\quad 5.\ \ 2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0,\ y(0)=2.$$

1.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ x^2y'-y^2=2x^2;\quad 2.\ \ xy'=y(\ln y-\ln x);\quad 3.\ \ xy\,dy-y^2dx=(x+y)^2e^{-y/x}dx;$$
$$4.\ \ y'=\frac{x+2y-3}{4x-y-3};\quad 5.\ \ (y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0,\ y(0)=1.$$

1.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y'+2xy=xe^{-x^2};\quad 2.\ \ 2y\,dx+(y^2-6x)dy=0;\quad 3.\ \ xy'=y+x^2\cos x;$$
$$4.\ \ (x^2-1)y'-xy=x^3-x,\ y(2)=1{,}5;\quad 5.\ \ y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x,\ y(0)=1.$$

1.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y'=x^3y^3-xy;\quad 2.\ \ xy+2y=x^5y;\quad 3.\ \ 2(xy'+y)=y^2\ln x,\ y(1)=2.$$

1.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \Big(y+\frac{2}{x^2}\Big)dx+\Big(x+\frac{3}{y^2}\Big)dy=0;\quad 2.\ \ \frac{3x^2+y}{y^2}dx=\frac{2x^3+xy+2y^3}{y^3}dy.$$

1.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2+y^2+2x)dx+2y\,dy=0.$$

1.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ xy'-xe^{x/y}=2;\quad 2.\ \ xy\,dx+(x+1)dy=0;\quad 3.\ \ xy'+3xy^3=2y;$$
$$4.\ \ dy+(3y-e^{3x})dx=0;\quad 5.\ \ (x^3+y^2)dx+2xy\,dy=0.$$

1.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ (xy^2+x)dx+(y^3-x^3y^3)dy=0;\quad 2.\ \ xy'+y=y^2;\quad 3.\ \ (y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0;$$
$$4.\ \ y'=\frac{y}{x}(1+\ln y-\ln x);\quad 5.\ \ xe^{y^2}dx+(x^2ye^{y^2}+\operatorname{tg}^2 y)dy=0.$$

1.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{2x^2}{1+x^2},\ y(0)=\frac{2}{3};\quad 2.\ \ 3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2},\ y(0)=1;$$
$$3.\ \ y\,dx=(3y\cos 2y-2y^2\sin 2y-x)dy,\ y(16)=\pi.$$

1.12. Решить уравнения

$$1.\ \ y = x + y' - \ln y';\quad 2.\ \ x[(y')^2 - 1] = 2y';\quad 3.\ \ y = xy' - (y')^2.$$

1.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ \ y'' + 2xy' = 0;\quad 2.\ \ (y-1)y'' = 2(y')^2;$$
$$3.\ \ y''' + 3y'y'' = 0;\quad 4.\ \ yy'' = 2x(y')^2,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 0{,}5.$$

1.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ \ y'' - 2y' + 4y = 0;\quad 2.\ \ y'' + 6y' + 9y = 0;\quad 3.\ \ y'' + 4y = 0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

1.15. Решить задачу Коши

$$1.\ \ 3y'' - 2y' - 8y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2;\quad 2.\ \ y'' + y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

1.16. Найти общее решение уравнения

$$2y'' + y' - y = f(x),$$

если

$$1.\ \ f(x) = 3x^2 - 1;\quad 2.\ \ f(x) = 3e^{-x};\quad 3.\ \ f(x) = 2\sin x;\quad 4.\ \ f(x) = e^x\cos 2x.$$

1.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{2},\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

методами Лагранжа и Коши.

1.18. Найти общее решение

$$1.\ \ y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x;\quad 2.\ \ y^{(4)} - y''' = 5(x+2)^3;$$
$$3.\ \ (4x+3)^2y'' + (4x+3)y' - 16y = 0;\quad 4.\ \ x^2y'' - 3xy' + 3y = -\ln x.$$

1.19. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного касательной, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная единице.

1.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y,\\ y' = 8x + 2y.\end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

1.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -4x + y,\\ y' = -6x + y + \dfrac{1}{1+e^{2t}}.\end{cases}$$

1.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ -2 & 1 & 4\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1 = 1,\\ \lambda_2 = 3,\\ \lambda_3 = 5;\end{matrix}\qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -4 & -4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1 = -2,\\ \lambda_2 = -2,\\ \lambda_3 = 2.\end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

1.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' - y'' + y' + x - 3y = 0,$$
$$4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0.$$

Вариант № 2

2.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ae^{x/a}$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

2.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' = 3y.$$

2.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ e^y(1+y') = 1;\quad 2.\ \ y' = 10^{x+y};\quad 3.\ \ y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2};$$
$$4.\ \ \sin x\cos y\,dx = \sin y\cos x\,dy,\ y(0) = \frac{\pi}{4};\quad 5.\ \ y' = \frac{1}{3x+y},\ y(0) = 1.$$

2.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y' = x/y + y/x;\quad 2.\ \ y' = 2xy/(x^2-y^2);\quad 3.\ \ x\,dy = (xe^{y/x}+y)dx;$$
$$4.\ \ (2x-2)dy = (x+2y-3)dx;\quad 5.\ \ (xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = y^2,\ y(1) = 0.$$

2.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' + x^2y = x^2;\quad 2.\ \ y\,dx - (3x+1+\ln y)dy = 0;\quad 3.\ \ y' - 4x = 2y;$$
$$4.\ \ x(x+1)y' = x(x+1) + y,\ y(1) = 0;\quad 5.\ \ y' + x/y = \sin x,\ y(\pi) = 1/\pi.$$

2.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ 3x\,dy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)dx;\quad 2.\ \ y' - 2xy^3 = y;$$
$$3.\ \ 2y' + y\cos x = y^{-1}(1+\sin x)\cos x,\ y(0) = 1.$$

2.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0;\quad 2.\ \ e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

2.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

2.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ (x^2+y^2)dy - 2xy\,dx = 0;\quad 2.\ \ 2y' - xy^2 = 2xy;\quad 3.\ \ xy' - x^3 = y;$$
$$4.\ \ y' - y\operatorname{tg} x + y^2\sin x = 0;\quad 5.\ \ e^y dx = (y^3 - xe^y)dy = 0.$$

2.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0;\quad 2.\ \ y' - y = y^3;$$
$$3.\ \ (y^4 - 2x^2y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0;\quad 4.\ \ y' = \frac{x}{y}2^{y/x} + \frac{y}{x};$$
$$5.\ \ \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big)dx + \Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\Big)dy = 0.$$

2.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y' + \frac{9y}{2x} = x^2,\ y(1) = 1;\quad 2.\ \ dx + (xy - y^3)dy = 0,\ y(-1) = 0;$$
$$3.\ \ y' + 4x^3y = 4y^2e^{x^4}(1-x^3),\ y(0) = -1.$$

2.12. Решить уравнения

$$1.\ \ x=(y')^3+y';\quad 2.\ \ 2xy-y=y'\ln yy';\quad 3.\ \ y+xy'=4\sqrt{y'}.$$

2.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ \ y'''=\sin 3x;\qquad 2.\ \ xy''=y'\ln\frac{y'}{x};\quad 3.\ \ yy''+(y')^2=1;$$

$$4.\ \ y'y'''=2(y'')^2;\quad 5.\ \ 2y'''-3(y')^2=0,\ y(0)=-3,\ y'(0)=1,\ y''(0)=-1.$$

2.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ \ y''-4y'=0;\quad 2.\ \ y''+8y'=16y;\quad 3.\ \ y''-6y'+9y=0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x=0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

2.15. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y''+4y=0,\ y(1)=0,\ y'(1)=2;\quad 2.\ \ y''+2y'=0,\ y(\pi/3)=1,\ y'(\pi/3)=0,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

2.16. Найти общее решение уравнения

$$y''-4y'+4y=f(x),$$

если

$$1.\ \ f(x)=2(\sin 2x+1);\quad 2.\ \ f(x)=3e^{-2x};\quad 3.\ \ f(x)=x^2-1;\quad 4.\ \ f(x)=e^{-x}\cos 2x.$$

2.17. Найти решение задачи Коши

$$y''+3y'+2y=\frac{e^{-x}}{2+e^{-x}},\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=0,$$

методами Лагранжа и Коши.

2.18. Найти общее решение

$$1.\ \ y'''-64y'=128\cos x-64e^{8x};\quad 2.\ \ y^{(4)}-6y'''+9y''=3x-1;$$

$$3.\ \ (2x+1)^2y''-2(2x+1)y'+4y=0;\quad 4.\ \ x^2y''+xy'+4y=10x.$$

2.19. Моторная лодка движется в спокойной воде со скорость 12 км/ч. На полном ходу её мотор был выключен. Через $t=10$ с скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Считая, что сила сопротивления воды движению лодки пропорциональна её скорости, найти скорость лодки через 1 мин после остановки мотора.

2.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}x'=4x-2y,\\ y'=8x+4y.\end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

2.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases}x'=-x+y,\\ y'=x+y+4t^2e^{t^2}.\end{cases}$$

2.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,'=A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A=\begin{pmatrix}4&1&0\\1&4&0\\-1&2&5\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=3,\\ \lambda_2=5,\\ \lambda_3=5;\end{matrix}\qquad 2)\ \ A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=0,\\ \lambda_2=0,\\ \lambda_3=1.\end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

2.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&x''-x+2y''-2y=0,\\ &x''+x'-2x+2y''+y'-y=0.\end{aligned}$$

Вариант № 3

3.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 + y^2 = ax$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

3.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$yy' + x = 0.$$

3.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}dy = x\,dx; \quad 2.\ y^2y' = 1 + 2x; \quad 3.\ \frac{xy'}{1+y^2} = \frac{\ln^2 x}{\operatorname{arctg} y};$$

$$4.\ y'\sin x = y\ln y,\ y(\pi/2) = 1; \quad 5.\ y'(y+x) = 1,\ y(0) = 1.$$

3.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ y' = y^2/x^2 - 2; \quad 2.\ x\,dy - y\,dx = y\,dy; \quad 3.\ (x-y)dy = (x+y)dx;$$

$$4.\ (x+y-2)dy = (2y-2)dx; \quad 5.\ \frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{x} - \frac{\sqrt{y-x}}{2y-x},\ y(1) = 1.$$

3.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ y' + y\operatorname{ctg} x = \sin x; \quad 2.\ xy' - x^2\cos x = y; \quad 3.\ y' + x = y;$$

$$4.\ y' + x^2 = 3y/x,\ y(2) = 6; \quad 5.\ y' - \frac{y}{x} = -\frac{2\ln x}{x};\ y(1) = 1.$$

3.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ 2xyy' - y^2 + x = 0; \quad 2.\ y\,dx - \Big(x - \frac{1}{2}x^3y\Big)dy = 0; \quad 3.\ 3(xy' + y) = y^2\ln x,\ y(1) = 3.$$

3.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}; \quad 2.\ (1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx = (1 - y\sqrt{x^2+y^2})dy.$$

3.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$y(1+xy)dx - x\,dy = 0.$$

3.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ y' = y(y^3\cos x + \operatorname{tg} x); \quad 2.\ (6xy + y^2)dx = (2x^2 - y^2)dy; \quad 3.\ yy' = \frac{1-2x}{y};$$

$$4.\ xy' - e^{2x} = 3xy; \quad 5.\ \Big(y + \frac{4}{x^3}\Big)dx + (x - \ln y)dy = 0.$$

3.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ (y^4+1)x\,dx - y(1+x^2)dy = 0; \quad 2.\ (1-x^2)y' - xy = xy^2; \quad 3.\ y' = \frac{xy - y^2}{x^2 - 2xy};$$

$$4.\ e^{x/y}dx - \frac{x}{y}\Big(e^{x/y} + \frac{y}{x}\Big)dy = 0; \quad 5.\ \Big(xy^2 + \frac{x^2}{y^2}\Big)dx + \Big(x^2y - \frac{2x^3}{3y^3}\Big)dy = 0.$$

3.11. Решить задачу Коши

$$1.\ y' + \frac{y}{x} = \sin x,\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}; \quad 2.\ (104y^3 - x)dy = 4y\,dx,\ y(8) = 1;$$

3. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1+\sin x),\ y(0)=1.$

3.12. Решить уравнения

1. $y'(x-\ln y')=1$; 2. $(y')^2-(y')^3=y^2$; 3. $(y')^3=3(xy'-y)$.

3.13. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $xy^{(4)}=1$; 2. $yy''-y'(1+y')=0$; 3. $y''=xy'+y+1$;

4. $y''=xy'+y+1$; 5. $y''\cos y+(y')^2\sin y=0,\ y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=2.$

3.14. Найти общее решение уравнения

1. $y''+y'-2y=0$; 2. $y''-9y=0$; 3. $y''-2y'+y=0$;

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x=0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

3.15. Решить задачу Коши

1. $y''-5y'+4y=0,\ y(2)=5,\ y'(2)=8$; 2. $y''+3y'+2y=0,\ y\Big(\dfrac{\pi}{6}\Big)=1,\ y'\Big(\dfrac{\pi}{6}\Big)=-1,$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

3.16. Найти общее решение уравнения

$$y''-2y'+2y=f(x),$$

если

1. $f(x)=2x$; 2. $f(x)=(x-1)e^{3x}$; 3. $f(x)=2\cos 2x$; 4. $f(x)=2e^x\sin x$.

3.17. Найти решение задачи Коши

$$y''+9y=\frac{9}{\sin 3x},\quad y\Big(\frac{\pi}{6}\Big)=4,\ y'\Big(\frac{\pi}{6}\Big)=\frac{3\pi}{2},$$

методами Лагранжа и Коши.

3.18. Найти общее решение

1. $y'''+4y''=\operatorname{sh}4x$; 2. $y^{(4)}+y'''=12x+6$;

3. $(x+3)^2y''+(x+3)y'+y=0$; 4. $x^2y''-6y=12\ln x$.

3.19. Найти кривые, обладающие следующим свойством: отрезок оси абсцисс, отсекаемый касательной и нормалью, проведённой из произвольной точки кривой, равен двум.

3.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=9x-5y,\\ y'=5x+y.\end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

3.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x'=-x+y,\\ y'=-\dfrac{5}{4}x+y+\dfrac{1}{\cos t/2}.\end{cases}$$

3.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,'=A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A=\begin{pmatrix}6&-2&-1\\-1&5&-1\\1&-2&4\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=3,\\ \lambda_2=5,\\ \lambda_3=7;\end{matrix}\qquad 2)\ \ A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=0,\\ \lambda_2=1,\\ \lambda_3=1.\end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

3.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&x''+3y''-x=0,\\ &x''+x'-x+3y''+3y'-2y=0.\end{aligned}$$

Вариант № 4

4.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax + a^2$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

4.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y(y' + x) = 1.$$

4.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ x^2y' = \sin\Big(\frac{1}{x}\Big)\operatorname{tg} y;\quad 2.\ \ xy' + y^2 = y;\quad 3.\ \ \frac{y'}{\cos(x^2)} = x\operatorname{sh} y;$$
$$4.\ \ y^2xy' = \ln x,\ y(1) = 3;\quad 5.\ \ y' = \sqrt{2x + y - 3},\ y(0) = 4.$$

4.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2};\quad 2.\ \ y^2 + x^2y' = xyy';\quad 3.\ \ x\,dy = y\ln\frac{y}{x}dx;$$
$$4.\ \ (9x - y - 8)dy = (x + 7y - 8)dx;\quad 5.\ \ (y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(0) = 1.$$

4.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' = 1 + x + y;\quad 2.\ \ (1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2;\quad 3.\ \ y' = 2y + e^{3x};$$
$$4.\ \ y' - \frac{1}{\cos x} = y\operatorname{tg} x,\ y(0) = 0;\quad 5.\ \ y' + \frac{(1 - 2x)y}{x} = 1,\ y(1) = 1.$$

4.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' + y = xy^3;\quad 2.\ \ xy^2dy = (1 - xy^3)dx;\quad 3.\ \ y' + xy = (1 + x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 1.$$

4.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0;\quad 2.\ \ \frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0.$$

4.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 + y)dx - x\,dy = 0.$$

4.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ (2y^2 + 3xy)dx = (4xy - x^2)dy;\quad 2.\ \ xy\,dx + (x + 1)dy = 0;$$
$$3.\ \ (2x + e^{x/y})dx + \Big(1 - \frac{x}{y}\Big)e^{x/y}dy = 0;\quad 4.\ \ 3xy' = \cos x + 2xy;$$
$$5.\ \ y' + 4y\cos x - 8xe^{-x}y^{3/2} = 0.$$

4.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ (1 + y^2)dx - 2y(1 + x)^2dy = 0;\quad 2.\ \ (1 + e^x)yy' = e^x;\quad 3.\ \ y\,dx + 2(\sqrt{xy} - x)dx = 0;$$
$$4.\ \ xy' - y = x\Big(1 + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\Big);\quad 5.\ \ \frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0.$$

4.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y' - \frac{y}{x + 2} = x^2 + 2x,\ y(-1) = \frac{3}{2};\quad 2.\ \ xy' - y = -y^2\ln x,\ y(1) = 1;$$
$$3.\ \ (\cos 2y\cos^2 y - x)dy = \operatorname{ctg} y\,dx,\ y\Big(\frac{1}{4}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

4.12. Решить уравнения

$$1.\ (y'+1)^3=(y'-y)^2;\quad 2.\ x=y'\sqrt{(y')^2+1};\quad 3.\ y=2xy'-4(y')^3.$$

4.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ y'''=\sin 2x+e^{3x};\qquad 2.\ xy''-y'=0;\quad 3.\ y''=\frac{1}{\sqrt{y}};$$

$$4.\ (y-1)y''-2(y')^2=0,\quad 5.\ x^2y''-3xy'=\frac{6y^2}{x^2}-4y,\ y(1)=1,\ y'(1)=4.$$

4.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ 2y''+y'-y=0;\quad 2.\ y''+2y'+5y=0;\quad 3.\ y''-4y'+4y=0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x=0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

4.15. Решить задачу Коши

$$1.\ y''+y'-2y=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=3;\quad 2.\ y''-9y=0,\ y\Big(\frac{\pi}{3}\Big)=y'\Big(\frac{\pi}{3}\Big)=1,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

4.16. Найти общее решение уравнения

$$y''+y'-6y=f(x),$$

если

$$1.\ f(x)=2x^2+1;\quad 2.\ f(x)=xe^{2x};\quad 3.\ f(x)=3\sin 2x;\quad 4.\ f(x)=2e^{2x}\cos 2x.$$

4.17. Найти решение задачи Коши

$$y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}},\quad y(0)=\ln 14,\ y'(0)=\ln 8,$$

методами Лагранжа и Коши.

4.18. Найти общее решение

$$1.\ y'''+6y''+9y'=(16x+24)e^{x};\quad 2.\ y^{(4)}+2y'''+y''=x^2+x-1;$$
$$3.\ (x-1)^3y'''+(x-1)y'-y=0;\quad 4.\ x^2y''+xy'-y=4x.$$

4.19. Скорость обесценивания оборудования вследствие износа пропорциональна в каждый момент времени его фактический стоимости. Если начальная стоимость оборудования S_0, какова будет его стоимость по истечении t лет?

4.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}x'=9x-4y,\\ y'=8x+y.\end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

4.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases}x'=-6x+y,\\ y'=-12x+y+\dfrac{1}{1+e^{2t}}.\end{cases}$$

4.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,'=A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A=\begin{pmatrix}4&-2&-1\\-1&3&-1\\1&-2&2\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=1,\\ \lambda_2=3,\\ \lambda_3=5;\end{matrix}\qquad 2)\ \ A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&1&2\\1&5&-2\\2&-2&2\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=1,\\ \lambda_2=1,\\ \lambda_3=0.\end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

4.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x''+4x'-2x-2y'-y=0,$$
$$x''-4x'-y''+2y'+2y=0.$$

Вариант № 5

5.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

5.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

5.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ xy\,dx + (x+1)dy = 0; \quad 2.\ \ y' - xy^2 = 2xy; \quad 3.\ \ y' = 3y^{2/3};$$
$$4.\ \ y - xy' = 2(1+x^2y'),\ y(1) = 1; \quad 5.\ \ y' = \frac{2}{x+2y} - 3,\ y(0) = 0{,}5.$$

5.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y'\operatorname{tg}\frac{y-2x}{x+1} = \frac{y+2}{x+1}; \quad 2.\ \ xyy' = x^2+y^2; \quad 3.\ \ xy' - xe^{y/x} = y;$$
$$4.\ \ y' = \frac{x+y-2}{3x-y-2}; \quad 5.\ \ (y^2-x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(0) = 1.$$

5.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' - y = e^x; \quad 2.\ \ 2xy' - y = x\ln x; \quad 3.\ \ (y'-y)x = (1+x^2)e^x;$$
$$4.\ \ xy' - 2y + x^2 = 0,\ y(1) = e; \quad 5.\ \ y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x,\ y(\pi/2) = 0.$$

5.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' + 2xy = 2x^3y^3; \quad 2.\ \ (1+x^2)dy = (xy + x^2y^2)dx;$$
$$3.\ \ 2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1},\ y(0) = 1.$$

5.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (x^3 - 3xy^2 + 2)dx - (3x^2y - y^2)dy = 0; \quad 2.\ \ x\,dx + y\,dy = \frac{x\,dx - y\,dy}{x^3+y^2}.$$

5.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x\cos y - y\sin x)dx + (x\sin y + y\cos x)dy = 0.$$

5.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ y' - \frac{y^3}{\sin x} = y\operatorname{tg} x; \quad 2.\ \ (2x+y)dx = (3x-y)dy; \quad 3.\ \ y' = \sqrt{\frac{2-y^2}{2+x^2}};$$
$$4.\ \ y' - \operatorname{tg} x = y\operatorname{ctg} x; \quad 5.\ \ (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0.$$

5.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ 3e^x\operatorname{tg} y\,dx + \frac{1+e^x}{\cos^2 y}dy = 0; \quad 2.\ \ y(1+x^2)y' = 1+y^2; \quad 3.\ \ x\,dy = y\Big(1+\ln\frac{x}{y}\Big)dx;$$
$$4.\ \ y^2 - 4xy + 4x^2y' = 0; \quad 5.\ \ [\sin 2x - 2\cos(x+y)]dx - 2\cos(x+y)dy = 0.$$

5.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y' + \frac{y}{x} = x^2\operatorname{arctg} x,\ y(1) = 0; \quad 2.\ \ xy' + y = xy^2,\ y(1) = 2;$$
$$3.\ \ (y^4e^y + 3x)dy = y\,dx,\ y(0) = 1.$$

5.12. Решить уравнения

$$1.\ \ y' = e^{xy'/y}; \quad 2.\ \ y = xy' - 2x^2(y')^3; \quad 3.\ \ 2xy' - y = \ln y'.$$

5.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ \ y'' = \frac{1}{x} + 3; \quad 2.\ \ (1+x^2)y'' = 2xy'; \quad 2y(y'' - 2y) = 3(y')^2;$$

$$4.\ \ 5(y''')^2 - 3y''y^{(4)} = 0; \quad 4.\ \ y''' = 3yy',\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 4{,}5.$$

5.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ \ 2y'' + 5y' = 0; \quad 2.\ \ y'' - 4y' + 13y = 0; \quad 3.\ \ y'' + 6y' - 6y = 0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

5.15. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y'' + 3y' = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3; \quad 2.\ \ y'' + 49y = 0,\ y\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = 1,\ y'\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = 2,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

5.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = f(x),$$

если

$$1.\ \ f(x) = x^2 + 4; \quad 2.\ \ f(x) = x^2 \sin 3x; \quad 3.\ \ f(x) = xe^{-x}; \quad 4.\ \ f(x) = 2e^{-x}\cos 3x.$$

5.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{\pi^2}y = \frac{1}{\pi^2\cos(x/\pi)}, \quad y\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = 2,\ y'\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = 0,$$

методами Лагранжа и Коши.

5.18. Найти общее решение

$$1.\ \ y''' - y'' - 4y' + 4y = (7x - 6)e^x; \quad 2.\ \ y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3;$$
$$3.\ \ x^2y''' - 3xy'' + 3y' = 0; \quad 4.\ \ x^2y'' + xy' + y = x.$$

5.19. Найти кривые, обладающие следующим свойством: если через любую точку кривой провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:2.

5.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 4x - 4y, \\ y' = 8x - 4y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

5.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = -x + 2y + 5e^t \sin t. \end{cases}$$

5.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = -1; \end{matrix} \qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = 1. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

5.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' + 2x' + x + 3y'' + y' + y = 0,$$
$$x'' + 4x' - x + 3y'' + 2y' - y = 0.$$

Вариант № 6

6.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^2$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

6.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = x - e^y.$$

6.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y'(x^2 + y^2x^2) = \cos\frac{1}{x}y;\quad 2.\ \ y' + \sqrt{\frac{1-x}{1-y}} = 0;\quad 3.\ \ y'x^2y + 1 = x^2;$$

$$4.\ \ y' = \frac{2x+2y-1}{x+y},\ y(1) = 0;\quad 5.\ \ yxy' = \ln^2 x,\ y(1) = 2.$$

6.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ (x^2 + xy)y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2;\quad 2.\ \ x(y' + e^{y/x}) = y;$$

$$3.\ \ y^2 dx + x^2 dy = xy\, dy;\quad 4.\ \ xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2},\ y(2) = 1;$$

$$5.\ \ y' - \frac{x+3y+4}{3x-6},\ y(1) = 2.$$

6.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' - e^{3x} = 2y;\quad 2.\ \ y' + 2xy = 2xe^{-x^2};\quad 3.\ \ dy = \Big(\frac{3y}{x} + x\Big)dx;$$

$$4.\ \ y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2},\ y(0) = \frac{2}{3};\quad 5.\ \ x(dy - y\, dx) = e^x dx,\ y(1) = e.$$

6.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ xy^2y' + xy^3 = 1;\quad 2.\ \ x\, dy + 2y\, dx = x^5y^2 dx;\quad 3.\ \ y' + 2y\operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x,\ y(1) = 1/\operatorname{sh} 1.$$

6.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{x\, dy}{x^2+y^2} - \Big(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\Big)dx = 0;\quad 2.\ \ x^y \ln x y' + yx^{y-1} = 0.$$

6.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + x\cos y)dx = 0.$$

6.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ (3y^3 + x^2y)dx = (8x^3 - 2xy^2)dy;\quad 2.\ \ 2x\cos^2 y\, dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0;$$

$$3.\ \ xy\, dx + (x+1)dy = 0;\quad 4.\ \ xy' = 2y + x^3\cos 3x;\quad 5.\ \ y' + 3x^3y^4 = x^2y.$$

6.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ (y + y\ln x)dx + (x - xy)dy = 0;\quad 2.\ \ yy' + x = 1;\quad 3.\ \ xy' = y\ln\frac{y}{x};$$

$$4.\ \ (x^2 + y^2)dx + 2xy\, dy = 0;\quad 5.\ \ 3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0.$$

6.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ \operatorname{ch} y\, dx = (1 + x\operatorname{sh} y)dy,\ y(1) = \ln 2;\quad 2.\ \ y' + xy = -x^3,\ y(0) = 3;$$

$$3.\ \ 2(y' + y) = xy^2,\ y(0) = 2.$$

6.12. Решить уравнения

$$1.\ \ y = (y')^2 + (y')^3;\quad 2.\ \ y = \ln(1+y');\quad 3.\ \ 2(y')^2(y - xy') = 1.$$

6.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ \ y'' = \operatorname{arctg} 3x;\qquad 2.\ \ x^2y'' + xy' - 1 = 0;$$
$$3.\ \ xy'' = 2yy' - y';\quad 4.\ \ y''y^3 + 4 = 0,\ y(0) = -1,\ y'(2) = -2.$$

6.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ \ y'' - 4y' + 3y = 0;\quad 2.\ \ y'' - 8y' + 16y = 0;\quad 3.\ \ y'' - 2y' + 10y = 0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

6.15. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y'' + 4y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2;\quad 2.\ \ y'' + 2y' = 0,\ y(2) = y'(2) = 1,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

6.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = f(x),$$

если

$$1.\ \ f(x) = 4\cos 2x;\quad 2.\ \ f(x) = 3x^2 + x;\quad 3.\ \ f(x) = e^x(x+2);\quad 4.\ \ f(x) = e^{-x}\sin 2x.$$

6.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x,\quad y(1) = 1,\ y'(1) = 3,$$

методами Лагранжа и Коши.

6.18. Найти общее решение

$$1.\ \ y''' - 3y' - 2y = -4xe^x + \sin 3x;\quad 2.\ \ y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x;$$
$$3.\ \ x^2y'' + xy' + y = 0;\quad 4.\ \ xy'' - xy' + y = 2x.$$

6.19. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой жидкости, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя толщиной 3 м поглощается половина первоначального количества света, то какая часть этого света дойдёт до глубины 15 м?

6.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 4x - 5y, \\ y' = 5x - 4y. \end{cases}\quad .$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

6.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = x - 6y + \dfrac{1}{1-e^t}, \\ y' = x - 4y. \end{cases}$$

6.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 3, \\ \lambda_2 = 5, \\ \lambda_3 = 7; \end{matrix}\qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 6, \\ \lambda_3 = 6. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

6.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &x'' - 2y'' + 2x = 0, \\ &x'' + 3x' + 2x + y'' - 2y' - 8y = 0. \end{aligned}$$

Вариант № 7

7.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 + y^2 = a^2$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

7.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' + y = 0.$$

7.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ (x+1)yy' + 3 = 2y;\quad 2.\ \ x\operatorname{tg} y y' - x^2 = 1;\quad 3.\ \ xy'y + 1 = x^3;$$
$$4.\ \ y' = 5^{x-y},\ y(0) = 1;\quad 5.\ \ y' = \cos(y - x),\ y(\pi) = \pi.$$

7.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y' = \frac{y}{x} + \sin\Big(\frac{y}{x}\Big);\quad 2.\ \ \frac{x}{y}dy = \ln\Big(\frac{y}{x}\Big)dx;\quad 3.\ \ y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3};$$
$$4.\ \ y' = \frac{x - y}{x + y},\ y(2) = 1;\quad 5.\ \ y' = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2},\ y(1) = 1.$$

7.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y};\quad 2.\ \ y' - y\operatorname{ctg} x = \sin x;\quad 3.\ \ y' = x + y;$$
$$4.\ \ xy' + x = 2y,\ y(1) = 2;\quad 5.\ \ \operatorname{ch} x\, dx = (1 + \operatorname{sh} x)dy,\ y(1) = \ln 2.$$

7.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y + y' = x\sqrt{y};\quad 2.\ \ (1 + x^2)dy - xy\, dx = x^2y^2dx;$$
$$3.\ \ y' - y\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3}y^4\sin x,\ y(0) = 1.$$

7.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ e^{-x}dy = (ye^{-x} - 2x)dx;\quad 2.\ \ (3x^2 + 6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2)dy = 0.$$

7.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

7.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ y' - y\cos x = xe^{-x^2};\quad 2.\ \ yx^{y-1}dx = -x^y\ln x\, dy;\quad 3.\ \ y'\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 1;$$
$$4.\ \ xy' + y - x^2y^2 = 0;\quad 5.\ \ (8x - y - 7)y' = x + 6y - 7.$$

7.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ e^{-x}(1 - x)dx - \operatorname{tg} y\, dy = 0;\quad 2.\ \ x^2y' + y^2 = y;\quad 3.\ \ (2x - y)dx + (x + y)dy = 0;$$
$$4.\ \ xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y;\quad 5.\ \ \Big(y^2 + \frac{y}{\cos^2 x}\Big)dx + (2xy + \operatorname{tg} x)dy = 0.$$

7.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y' - y\cos x = -\sin 2x,\ y(0) = 3;\quad 2.\ \ 2(xy' + y) = y^2\ln x,\ y(1) = 2;$$
$$3.\ \ (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0,\ y(-1/2) = 1.$$

7.12. Решить уравнения

$$1.\ \ (y')^4-(y')^2=y^2;\quad 2.\ \ 2xy'-y=y'\ln(yy');\quad 3.\ \ y=2xy'+\frac{1}{(y')^2}.$$

7.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$\begin{array}{ll} 1.\ \ y'''=\cos 2x; & 2.\ \ xy''=\sqrt{1+(y')^2}; \\ 3.\ \ yy''+(y')^2=(y')^3; & 4.\ \ y''=8\sin^3 y\cos y,\ y(1)=\pi/2,\ y'(1)=2. \end{array}$$

7.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ \ y''-5y'+6y=0;\quad 2.\ \ y''-4y'+5y=0;\quad 3.\ \ 4y''-6y'+9y=0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x=0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

7.15. Решить задачу Коши

$$1.\ \ 2y''+y'-y=0,\ y(1)=y'(1)=1;\quad 2.\ \ y''+2y'+5y=0,\ y(1)=1,\ y'(1)=2,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

7.16. Найти общее решение уравнения

$$2y''-7y'+6y=f(x),$$

если

$$1.\ \ f(x)=3e^{2x};\quad 2.\ \ f(x)=3x^2+1;\quad 3.\ \ f(x)=e^{2x}\sin 3x;\quad 4.\ \ f(x)=(x+1)e^{x}.$$

7.17. Найти решение задачи Коши

$$y''-2y'+y=\frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}},\quad y(1)=2,\ y'(1)=1,$$

методами Лагранжа и Коши.

7.18. Найти общее решение

$$\begin{array}{c} 1.\ \ y'''-4y''+5y'-2y=21e^{2x}+\cos 2x;\quad 2.\ \ y^{(4)}-3y'''+3y''-y'=2x; \\ 3.\ \ (x+1)^2y''+(x+1)y'-y=0;\quad 4.\ \ x^2y''-2xy'+2y=2x^3-x. \end{array}$$

7.19. Найти кривые, касательные к которым в любой точке образуют с полярным радиусом и полярной осью равные углы.

7.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=2x-2y, \\ y'=10x-2y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

7.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x'=x-6y+\dfrac{1}{1+e^{2t}}, \\ y'=x-4y. \end{cases}$$

7.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,'=A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 6 & -7 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{array}{l} \lambda_1=-1, \\ \lambda_2=-2, \\ \lambda_3=-3; \end{array}\qquad 2)\ \ A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{array}{l} \lambda_1=2, \\ \lambda_2=3+i, \\ \lambda_3=3-i. \end{array}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

7.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{c} x''+5x'+2y''+y=0, \\ 3x''+5x+y'+3y=0. \end{array}$$

Вариант № 8

8.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax + b$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

8.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x+y}.$$

8.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ (2x + xy)dy - (y - x^2y)dx = 0; \quad 2.\ \ y' = e^{x-y}; \quad 3.\ \ y^2xy' = (\ln x)^2;$$
$$4.\ \ y' = \sqrt{4x + 2y - 1},\ y(1) = 1; \quad 5.\ \ yx^2y' = e^{1/x},\ y(1) = 0.$$

8.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y; \quad 2.\ \ (2xy + y^2)dx = (x^2 - y^2)dy; \quad 3.\ \ y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right);$$
$$4.\ \ y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}; \quad 5.\ \ (x^2 - 3y^2)dx + 2xy\,dy = 0,\ y(2) = 1.$$

8.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' - \frac{1}{\cos x} = y \operatorname{tg} x; \quad 2.\ \ y + y' \ln^2 y = (x + 2\ln y)y'; \quad 3.\ \ dy + 3y\,dx = e^{2x}dx;$$
$$4.\ \ y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1,\ y(1) = 1; \quad 5.\ \ y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy,\ y(\pi/8) = 2.$$

8.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' + \frac{2y}{x} = \frac{1\sqrt{y}}{\cos^2 x}; \quad 2.\ \ dy + \frac{y}{x}dx = -xy^2dx; \quad 3.\ \ xy' + y = y^2 \ln x,\ y(1) = 1.$$

8.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{1}{y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}}\right)dy = 0; \quad 2.\ \ (2x^3 - xy^2)dx = (x^2y - 2y^3)dy.$$

8.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(xy - x^2)y' + (y^2 - 3xy - 2x^2) = 0.$$

8.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ (\sin x + ye^x)dx + (\cos y + e^x)dy = 0; \quad 2.\ \ y' - xe^{3x} = 8y; \quad 3.\ \ y' + y^3 \cos x = y \operatorname{tg} x;$$
$$4.\ \ xy' = y + \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{y}\right); \quad 5.\ \ \operatorname{tg} x \cos y\,dx - (x^3 + 1)y^2dy = 0.$$

8.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ \operatorname{arctg} x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0; \quad 2.\ \ y' \sin x = y\sqrt{\ln y};$$
$$3.\ \ (x + y)dx - (x + y)dy = 0; \quad 4.\ \ x^2y' = y^2 + xy;$$
$$5.\ \ \frac{y}{x^2} \cos \frac{x}{y} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y\right)dy = 0.$$

8.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ (x + \ln y)dy - y\,dx = 0,\ y(2) = 1; \quad 2.\ \ y' - 3x^2y = (x^3 + 1)y^2,\ y(0) = 0;$$
$$3.\ \ y' - y = xy^2,\ y(0) = 1.$$

8.12. Решить уравнения

$$1.\ \ (y')^3 + y^2 = xyy'; \quad 2.\ \ y = 2xy' + y^2y'; \quad 3.\ \ xy' - y = \ln y'.$$

8.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ \ y^{(5)} = e^{ax}; \qquad 2.\ \ xy''' + y'' = 1 + x;$$
$$3.\ \ yy'' + (y')^2 = 1; \quad 4.\ \ y^4 - y^3y'' = 1,\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = 1/\sqrt{2}.$$

8.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ \ 2y'' - 3y' + y = 0; \quad 2.\ \ y'' + 6y' + 9y = 0; \quad 3.\ \ y'' - 4y' + 14y = 0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

8.15. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y'' - 2y' + 10y = 0,\ y(2) = 1,\ y'(2) = 2; \quad 2.\ \ y'' - 5y' + 4y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

8.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = f(x),$$

если

$$1.\ \ f(x) = 2\sin x; \quad 2.\ \ f(x) = 10e^{2x}; \quad 3.\ \ f(x) = 2x^3 - 30; \quad 4.\ \ f(x) = 2e^x \cos\frac{x}{2}.$$

8.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad y(\pi/4) = 1,\ y'(\pi/4) = 2,$$

методами Лагранжа и Коши.

8.18. Найти общее решение

$$1.\ \ y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 16e^{-x} + \sin 3x; \quad 2.\ \ y^{(5)} - y^{(4)} = 2x + 3;$$
$$3.\ \ (x+1)^3y''' + 2(x+1)^2y'' - (x+1)y' + y = 0; \quad 4.\ \ x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 3x.$$

8.19. Пуля, двигаясь со скоростью $v_0 = 400$ м/с, входит в достаточно толстую стену. Сопротивление стены сообщает пуле отрицательное ускорение, пропорциональное квадрату её скорости с коэффициентом пропорциональности $k = 7$ м$^{-1}$. Найти скорость пули через 0,001 с после вхождения в стену.

8.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 10x - y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

8.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = 2x - y + t^2. \end{cases}$$

8.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 1; \end{matrix} \qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 3i, \\ \lambda_3 = -3i. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

8.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' + 2x' + x + y'' + y' + 2y = 0,$$
$$x'' + x' + 2x + y'' + 3y = 0.$$

Вариант № 9

9.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = e^x(ax+b)$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

9.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$x^2 + y^2y' = 1.$$

9.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ \frac{\sin y}{\cos x}dy = x\,dx;\quad 2.\ \ (\ln y)^2y' = y(1+x^2);\quad 3.\ \ y'\operatorname{tg} x = \sqrt{4-y^2};$$
$$4.\ \ xy\,dx = (x+3)dy,\ y(3)=1;\quad 5.\ \ y'-y = 2x-3,\ y(1)=2.$$

9.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ x\,dy - y\cos\Bigl(\ln\frac{y}{x}\Bigr)dx = 0;\quad 2.\ \ y(x-y)dx = xy\,dy;\quad 3.\ \ xy' = y + x\operatorname{tg}\frac{y}{x};$$
$$4.\ \ 3y' = \frac{x^2}{y^2} + 10\frac{y}{x} + 10;\quad 5.\ \ xy' + y\Bigl(1+\ln\frac{y}{x}\Bigr) = 0,\ y(1)=e.$$

9.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ xy' = y + x^2\cos x;\quad 2.\ \ xy' + x^2 + xy = y;\quad 3.\ \ y\,dx - dy = y^2dx + x\,dy;$$
$$4.\ \ y' = y\operatorname{tg} x + \cos x,\ y(0)=0;\quad 5.\ \ (xy+\sqrt{y})dy + y^2dx = 0\ y(-1/2)=4.$$

9.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y'+4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y};\quad 2.\ \ dy = (y^2e^x-y)dx;\quad 3.\ \ xy'-y = -y^2(\ln x+2)\ln x,\ \ y(1)=1.$$

9.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0;\quad 2.\ \ 2x^3y\,dy = -(3x^2y^2+7)dx.$$

9.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$xy' + (\sin y - 3x^2\cos y)\cos y = 0.$$

9.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ 2y\,dx + (y^2-6x)dy = 0;\quad 2.\ \ y^2 - xyy' = x^2y';\quad 3.\ \ xy' = y^2 - y;$$
$$4.\ \ (\sin x + 5)dy + y\cos x\,dx = 0;\quad 5.\ \ y'x^y\ln x = -yx^{y-1}.$$

9.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ y' = e^{6x+y} + e^{6x-y};\quad 2.\ \ 1+\ln\frac{y}{x} + \ln^2\frac{y}{x} = \frac{x}{y}y';\quad 3.\ \ (x+6\sqrt{x^2+y^2})y' = y;$$
$$4.\ \ \frac{\operatorname{ctg} y}{\cos^2 x}dx + \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y}dy;\quad 5.\ \ x\,dx + y\,dy + \frac{x\,dy + y\,dx}{x^2+y^2} = 0.$$

9.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2,\ y(0)=1;\quad 2.\ \ (13y^2-x)dy = 4y\,dx,\ y(5)=1;$$
$$3.\ \ dy + 2x\,dx = (x-1)y^2e^{x^2}dx,\ y(0)=1.$$

9.12. Решить уравнения

1. $x[(y')^2 - e^{2y}] = -2y'$; 2. $y = (y'-1)e^{y'}$; 3. $y = xy' + \cos y'$.

9.13. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y''' = (y'')^2$; 2. $(y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0$;

3. $xy'' - y' = x^2yy'$; 4. $\dfrac{y''}{y} = 2yy'(1+y^2),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

9.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ y'' - 2y' - 3y = 0;\quad 2.\ y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = 0;\quad 3.\ y'' + 4y' + 13y = 0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

9.15. Решить задачу Коши

1. $3y''-4y'+3y = 0,\ y(0{,}5) = 1,\ y'(0{,}5) = 2$; 2. $y''-4y'+5y = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$,

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

9.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = f(x),$$

если

1. $f(x) = 3x^3 - x - 1$; 2. $f(x) = 3\cos 2x$; 3. $f(x) = xe^{2x}$; 4. $f(x) = e^{2x}\sin 2x$.

9.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1},\quad y(1) = e,\ y'(1) = 2e,$$

методами Лагранжа и Коши.

9.18. Найти общее решение

1. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = xe^x + e^{2x}$; 2. $y^{(4)} + 7y''' + 4y'' = x - x^2$;

3. $(x+1)^3y''' + (x+1)y' - y = 0$; 4. $(3x+2)^2y'' + 7(3x+2)y' = -63x + 18$.

9.19. Нормаль AB к некоторой кривой пересекает ось Ox в точке B. Доказать, что если абсцисса точки B вдвое больше абсциссы точки A, то кривая является равнобочной гиперболой.

9.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x - 2y, \\ y' = 8x + y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

9.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = x - 10y + \operatorname{ctg} 3t, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

9.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = -2; \end{matrix}\qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 3. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

9.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &x'' - x' + 6x + y'' - y' + 2y = 0, \\ &2x'' + x' + 3x + y'' + y = 0. \end{aligned}$$

Вариант № 10

10.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = a\sin(x+b)$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

10.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = \frac{y-3x}{x+3y}.$$

10.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ xy^2y' = \ln x;\quad 2.\ \ \frac{\sin y}{1+x^2}y' = 1;\quad 3.\ \ \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}} + x = 2;$$
$$4.\ \ (x+2y)y' = 1,\ y(0) = -1;\quad 5.\ \ (xy^2+x)dx + (x^2y - y)dy = 0,\ y(0) = 1.$$

10.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' = y + \sqrt{x^2+y^2};\quad 2.\ \ (2x-y+1)dx = (2x+y-1)dy;\quad 3.\ \ xy' = y(\ln y - \ln x);$$
$$4.\ \ xy' = y + \frac{y}{\sin(y/x)},\ y(e) = \pi e;\quad 5.\ \ (xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = x,\ y(1) = 0.$$

10.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' - e^x(x^2+1) = \frac{2y}{x+1};\quad 2.\ \ (1+y^2)dx = (\operatorname{arctg} y - x)dy;\quad 3.\ \ y' + y = \sin x;$$
$$4.\ \ y\,dx + (2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y)dy = 0,\ y(3/2) = \pi/4;$$
$$5.\ \ y' - y\operatorname{tg} x = \cos^{-1} x,\ y(0) = 0.$$

10.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' = y(y^3\cos x + \operatorname{tg} x);\quad 2.\ \ dy - y\operatorname{ctg} x\,dx = \frac{y^3}{\sin x}dx;\quad 3.\ \ 2(xy'+y) = y^2\ln x,\ y(1) = 0{,}5.$$

10.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ x\,dx + y\,dy = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2};\quad 2.\ \ 3x^2(1+\ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy.$$

10.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$2xy\,dy = (x^2+y^2)dx.$$

10.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ y' = 5^{x+y};\quad 2.\ \ x\,dy - x^2dy = 3y\,dx;\quad 3.\ \ (8x^2y^2+1)dx + \left(\frac{16}{3}x^3y + 1\right)dy = 0;$$
$$4.\ \ xyy' - x^2 = y^2;\quad 5.\ \ y\,dx + (x + x^3y)dy = 0.$$

10.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ y(x+2)dx + x^2(y-1)dy = 0;\quad 2.\ \ \sqrt{1+\cos 2x} + (1+\sin y)y' = 0;$$
$$3.\ \ y' - \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{y}{x};\quad 4.\ \ (x+e^y)dx + (\cos y + xe^y)dy = 0;\quad 5.\ \ (\sqrt{xy} - x)dy = -y\,dx.$$

10.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ dx = (\sin y + 3x)dy,\ y(e^{\pi/2}) = \pi/2;\quad 2.\ \ y' + y = (x^2+8)e^{2x}y^2,\ y(0) = 1;$$
$$3.\ \ y' + \frac{xy}{2(1-x^2)}y = \frac{x}{2},\ y(0) = \frac{2}{3}.$$

10.12. Решить уравнения

1. $x = 2y' - \ln y'$; 2. $(y')^2 - 2xy' = x^2 - 4y$; 3. $xy'(y' + 2) = y$.

10.13. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y'''[1 + (y')^2] = 3y'(y'')^2$; 2. $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$;

3. $\dfrac{(y'')^2 - y'y'''}{(y')^2} = 0$; 4. $y'' \cos y + (y')^2 \sin y - y' = 0,\ y(-1) = \dfrac{\pi}{6},\ y'(-1) = 2$.

10.14. Найти общее решение уравнения

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$; 2. $4y'' - 4y' + 5y = 0$; 3. $16y'' - 24y' + 9y = 0$;

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

10.15. Решить задачу Коши

1. $y'' + 4y = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2,\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$; 2. $2y'' - 3y' + y = 0,\ y(2) = -1,\ y'(2) = 1$,

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

10.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = f(x),$$

если

1. $f(x) = x^2 + 2x + 3$; 2. $f(x) = 2x^2e^x$; 3. $f(x) = x \sin 2x$; 4. $f(x) = e^x \cos 2x$.

10.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' - y' = e^{2x} \cos(e^x), \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 2,$$

методами Лагранжа и Коши.

10.18. Найти общее решение

1. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x + 2 \sin 2x$; 2. $3y^{(5)} - y^{(4)} = 3x + 4$;

3. $x^2y''' - 2y' = 0$; 4. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 2x + \dfrac{1}{x}$.

10.19. Материальная точка массой $m = 1$ г движется прямолинейно. На неё действует в направлении движения сила, пропорциональная времени, протекшему с момента, когда скорость точки была равна нулю, с коэффициентом пропорциональности $k_1 = 2$ г·см/с^2. Кроме того, точка испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости движения, с коэффициентом пропорциональности $k_2 = 3$ г/с. Найти скорость точки через 3 с после начала движения.

10.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x - 5y, \\ y' = 5x - 3y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

10.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = x - 17y + \operatorname{ctg} 4t, \\ y' = x - y. \end{cases}$$

10.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -2, \\ \lambda_3 = 5; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 0. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

10.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &5x'' + 5x + 3y'' + 3y + 8z'' + 8z = 0, \\ &x'' + 4x + 3y'' + 12y + 3z'' + 12z = 0, \\ &x'' - 2x - 2y'' - 11y - 9z. \end{aligned}$$

Вариант № 11

11.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^2 + bx + c$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

11.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

11.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ xyy' = 1 - x^2; \quad 2.\ \ yy' = \frac{1-2x}{y}; \quad 3.\ \ 2x^2y' = \operatorname{tg}(y-x) + 2x^2;$$
$$4.\ \ y'\sin x = y\ln y,\ y(\pi/2) = e; \quad 5.\ \ (x+2y)y' = 1,\ y(0) = -1.$$

11.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ (x^2+y^2)y' = 2xy; \quad 2.\ \ 3x^4y^2dy = (4x^6 - y^6)dx; \quad 3.\ \ xy' + \frac{x^3}{y^2} = y;$$
$$4.\ \ (y+2)dx - (2x+y-4)dy,\ y(1) = 1; \quad 5.\ \ y' - \frac{x}{y} = \frac{y}{x},\ y(=1) = 0.$$

11.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' + 2xy = xe^{-x^2}; \quad 2.\ \ y = x(y' - \cos x); \quad 3.\ \ y' + \operatorname{tg} y = \frac{x}{\cos y},\ (\sin y = z);$$
$$4.\ \ y' + y\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x},\ y(0) = 0; \quad 5.\ \ (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx,\ y(-1/2) = 1.$$

11.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y + y' = x\sqrt{y}; \quad 2.\ \ dy + \frac{2y}{x}dx = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}; \quad 3.\ \ xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x,\ y(1) = 1.$$

11.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (e^y + ye^x + 3)dx = (2 - xe^y - e^x)dy; \quad 2.\ \ y^x\ln y\,dx = -xy^{x-1}dy.$$

11.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$2xy\,dy = (x^2 + y^2)dx.$$

11.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ y' - y + y^2\cos x; \quad 2.\ \ y'(y^2 - x) = 1; \quad 3.\ \ y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{y^2};$$
$$4.\ \ (2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0; \quad 5.\ \ \frac{1}{y'} + (2-x)\ln x = x(e^{-2x} + e^{x^2/2}).$$

11.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ x(y+1)dx - (x^2+1)y\,dy = 0; \quad 2.\ \ y' = 3x^2y - x^2; \quad 3.\ \ y' = \frac{y}{x} + e^{y/x};$$
$$4.\ \ (x^2 + 2xy - y^2)dx = (y^2 + 2x - x^2)dx; \quad 5.\ \ \Big(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\Big)dx - \frac{2x}{y}\cos\frac{2x}{y}dx = 0.$$

11.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y' + \frac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 0; \quad 2.\ \ y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2,\ y(0) = 1;$$

3. $y^2dx + (x + e^{1/y})dy = 0,\ y(1) = 2.$

11.12. Решить уравнения

$$1.\ \ y = (y' - 1)e^{y'};\quad 2.\ \ x = y'\cos y';\quad 3.\ \ y = xy' + y' + \sqrt{y'}.$$

11.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ \ y''' \sin^4 x = \sin 2x;\qquad 2.\ \ xy''' + y'' + x = 0;$$

$$3.\ \ yy'' - (y')^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}};\quad 4.\ \ y''y^3 + 49 = 0,\ y(3) = -7,\ y'(3) = -1.$$

11.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ \ 6y'' + y' - y = 0;\quad 2.\ \ 4y'' - 8y' + 5y = 0;\quad 3.\ \ 9y'' + 6y' + y = 0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

11.15. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y''-2y'+10y = 0,\ y(\pi/4) = 1,\ y'(\pi/4) = 2;\quad 2.\ \ y''-4y'+3y = 0,\ y(2) = 1,\ y'(2) = 2,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

11.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' - 3y = f(x),$$

если

$$1.\ \ f(x) = 2x^3+4;\quad 2.\ \ f(x) = (x-1)\sin x;\quad 3.\ \ f(x) = (x^2-1)e^{-3x};\quad 4.\ \ f(x) = e^{-3x}\cos x.$$

11.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x},\quad y(1) = 1,\ y'(1) = 3,$$

методами Лагранжа и Коши.

11.18. Найти общее решение

$$1.\ \ y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x + \sin x;\quad 2.\ \ y^{(4)} + 2y''' + y'' = 4x^2;$$
$$3.\ \ (x + 3)^2y'' + (x + 3)y' + y = 0;\quad 4.\ \ x^4y''' + 2x^3y'' = 1.$$

11.19. Доказать, что кривая, все нормали которой проходят через одну и ту же фиксированную точку, есть окружность.

11.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 5x - 4y, \\ y' = 8x - 3y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

11.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -2x + y + \operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

11.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 0; \end{matrix}\qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 19 & -9 & -6 \end{pmatrix}\ \begin{matrix} \lambda_1 = -3, \\ \lambda_2 = -3, \\ \lambda_3 = -3. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

11.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' - 3y'' - y' + x' + x - 2y = 0,$$
$$2x'' - 4y'' + x' + 2x - 5y = 0.$$

Вариант № 12

12.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$(x-a)^2+(y-b)^2=1$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

12.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y'=(y-1)x.$$

12.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ xy'+y=y^2;\quad 2.\ \ y'+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}=0;\quad 3.\ \ y'\ln^2(y-x)=(y-x)+\ln^2(y-x);$$

$$4.\ \ (1+x^2)y'=1+y^2,\ y(0)=1;\quad 5.\ \ y'+\sin(x+y)=\sin(x-y),\ y(\pi/4)=\pi/4.$$

12.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y'-\frac{y^2}{x^2}=2;\quad 2.\ \ (x+y-1)^2dx=2(y+2)^2dy;\quad 3.\ \ xy'=\cos(\ln y-\ln x);$$

$$4.\ \ (xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=x,\ y(1)=0;\quad 5.\ \ (y+\sqrt{x^2+y^2})dx-x\,dy=0,\ y(1)=0.$$

12.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ (1+x^2)y'=2xy+(1+x^2)^2;\quad 2.\ \ (1+y^2)\frac{dx}{dy}=\operatorname{arctg}y-x;\quad 3.\ \ (xy'-1)\ln x=2y;$$

$$4.\ \ xy'+y-e^x=0,\ y(1)=1;\quad 5.\ \ 2(y^3-y+xy)dy=dx,\ y(0)=\pi.$$

12.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ \frac{dx}{x-x^3y/2}+\frac{dy}{y}=0;\quad 2.\ \ y'-2xy^3=y;\quad 3.\ \ xy'+y=2y^2\ln x,\ y(1)=\frac{1}{2}.$$

12.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \sin(x+y)dx+x\cos(x+y)(dx+dy)=0;\quad 2.\ \ \frac{x\,dy}{x^2+y^2}+\Big(1-\frac{y}{x^2+y^2}\Big)dx=0.$$

12.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$x\,dy=(1+xy)dx.$$

12.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ xyy'+x^2=1;\quad 2.\ \ y'\cos x+y\sin y=1;\quad 3.\ \ (y^2-6x)dy+2y\,dx=0;$$

$$4.\ \ xy'-3y=2\sqrt{x^2+y^2};\quad 5.\ \ xy^2y'+xy^3=1-\sin x.$$

12.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ (xy^2+x)dx+(y^3-x^3y^3)dy=0;\quad 2.\ \ xy'+y=y^2;\quad 3.\ \ (y^2-3x^2)dy+2xy\,dx=0;$$

$$4.\ \ (2y^2-xy)dx=(x^2-xy+y^2)dy;\quad 5.\ \ (3x^2+4y^2)dx+(8xy+e^y)dy=0.$$

12.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y'+y\cos x=\frac{\sin 2x}{2},\ y(0)=0;\quad 2.\ \ 2(xy'+y)=xy^2,\ y(1)=2;$$

$$3.\ \ y^2dx+(xy-1)dy=0,\ y(1)=e.$$

12.12. Решить уравнения

1. $y' - \sin y' = 0$; 2. $y = \frac{1}{2}(y')^2 + \ln y'$; 3. $y = 2xy' - (y')^2$.

12.13. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y^{(4)} = x^2$; 2. $y^{(4)} \operatorname{cth} 2x = 2y''$;

3. $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$; 4. $y'' = 50\sin^3 y \cos y,\ y(1) = \frac{\pi}{2},\ y'(1) = 5$.

12.14. Найти общее решение уравнения

1. $9y'' - 6y' + y = 0$; 2. $6y'' - y' - y = 0$; 3. $4y'' - 16y' + 17 = 0$;

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

12.15. Решить задачу Коши

1. $4y'' - 6y' + 9y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2$; 2. $y'' - 4y' + 5y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$,

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

12.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 4y' - 5y = f(x),$$

если

1. $f(x) = 3x^2$; 2. $f(x) = 2xe^{-x}$; 3. $f(x) = 2\sin 5x - 3\cos 5x$; 4. $f(x) = e^{5x}\cos x$.

12.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,$$

методами Лагранжа и Коши.

12.18. Найти общее решение

1. $y''' + y'' + y' + y = \cos 2x + (8x + 4)e^x$; 2. $y^{(4)} + y''' = 6x - 1$;

3. $(x + 1)^2 y'' + (x + 1)y' + y = 0$; 4. $x^2 y'' + xy' - y = -\ln(x + 1)$.

12.19. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива она равна m. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха, если скорость истечения продуктов горения из ракеты равна v, а начальная скорость ракеты равна нулю (формула Циолковского).

12.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = 5x - 5y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

12.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -5x + y + \operatorname{ctg} 2t. \end{cases}$$

12.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 3; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\ \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2 + i, \\ \lambda_3 = 2 - i. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

12.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &2x'' + x' - 3x + 4y'' + y' - 3y = 0, \\ &x'' + x' - 2x + 2y'' + y' - y = 0. \end{aligned}$$

Вариант № 13

13.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = a\cos(x+b)$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

13.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = y - x^2.$$

13.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y'\operatorname{ctg} x + y = 2;\quad 2.\ \ y'xe^y = e^{-y};\quad 3.\ \ y' = 3\cos^2(x+y);$$
$$4.\ \ (1+e^x)yy' = e^x,\ y(0)=1;\quad 5.\ \ y' = \Big(\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x+y}\Big)\Big/\Big(\frac{1}{x} - \frac{x}{(x+y)y}\Big),\ y(2)=2.$$

13.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}(y/x)};\quad 2.\ \ x\,dy = 2(y - \sqrt{xy})dx;\quad 3.\ \ y' = \frac{xy + y^2e^{-x/y}}{x^2};$$
$$4.\ \ 3y\sin\Big(\frac{3x}{y}\Big)dx + \Big[y - 3x\sin\Big(\frac{3x}{y}\Big)\Big]dy = 0,\ y(1)=\frac{1}{2};\quad 5.\ \ y' = \frac{3y+3}{2x+y-1},\ y(1)=1.$$

13.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ (xy'-1)\ln x = 2y;\quad 2.\ \ y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x;\quad 3.\ \ y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2};$$
$$4.\ \ y'\sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x,\ y(0)=0;\quad 5.\ \ 2y\sqrt{y}\,dx - (6x\sqrt{y}+7)dy = 0,\ y(-4)=1.$$

13.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y'+4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y};\quad 2.\ \ \frac{dy}{y^2e^x - y} = dx;\quad 3.\ \ 2y'+3y\cos x = \frac{e^{2x}(2+3\cos x)}{y},\ y(0)=1.$$

13.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (2x + ye^{xy})dx + (1 + xe^{xy})dy = 0;\quad 2.\ \ \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}.$$

13.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(y\cos y + x\sin y)dx = (y\sin y - x\cos y)dy.$$

13.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ 3xy' - 2y\ln\frac{x}{y} = 0;\quad 2.\ \ y' = 3xy^{2/3};\quad 3.\ \ (x+y)dy = (2x-2y)dx;$$
$$4.\ \ xy' + x^2 + xy = y;\quad 5.\ \ dy = (y^2e^x - y)dx.$$

13.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ xy\,dx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}\,dy = 0;\quad 2.\ \ (1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy;$$
$$3.\ \ \Big(x - y\cos\frac{y}{x}\Big)dx - x\cos\frac{y}{x}dy = 0;\quad 4.\ \ xy + y^2 = 2(x^2+xy)y';$$
$$5.\ \ (3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$$

13.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y' - \frac{y}{1+x} = (1+x)e^x,\ y(0)=1;\quad 2.\ \ 2(y'+xy) = (1+x)e^{-x}y^2,\ y(0)=2;$$

3. $(x\cos^2 y - y^2)dy = y\cos^2 y\,dx,\ y(\pi) = \pi/4.$

13.12. Решить уравнения

1. $y' = \operatorname{arctg}\left[\dfrac{y}{(y')^2}\right]$; 2. $x = 2(\ln y' - y')$; 3. $y = \dfrac{1}{2}(xy' + y'\ln y')$.

13.13. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y^{(4)} = \dfrac{1}{x^2}$; 2. $(1+x^2)y'' + 2xy' = x^2$;

3. $xyy'' - x(y')^2 - yy' = 0$; 4. $y^3y'' = 4(y''-1),\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$.

13.14. Найти общее решение уравнения

1. $4y'' - 9y' + 2y = 0$; 2. $y'' - 8y' + 16y = 0$; 3. $4y'' - 4y' + 37y = 0$;

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

13.15. Решить задачу Коши

1. $2y'' - 3y' + y = 0,\ y(3) = 2,\ y'(3) = 1$; 2. $y'' - 4y' + 13y = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1,\ y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 3,$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

13.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + y = f(x),$$

если

1. $f(x) = x^3 + 6$; 2. $f(x) = (x+1)e^x$; 3. $f(x) = 4\cos x$; 4. $f(x) = e^x \sin\dfrac{x}{2}$.

13.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}, \quad y(1) = 0{,}5,\ y'(1) = 2,$$

методами Лагранжа и Коши.

13.18. Найти общее решение

1. $y''' - 4y'' + 4y' = \sin x + (x-1)e^x$; 2. $y^{(4)} - y''' = 2e^x$;

3. $(x+2)^2y'' - (x+2)y' + 2y = 0$; 4. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 5x^2y'' - xy' = x^2$.

13.19. Найти кривую, у которой точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и начала координат.

13.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = 5x - 2y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

13.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = x + 6y + \dfrac{1}{\sqrt{1 - e^{2t}}}, \\ y' = x - 4y. \end{cases}$$

13.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1; \end{matrix}$ 2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{matrix} \lambda_1 = 1 + i, \\ \lambda_2 = 1 - i, \\ \lambda_3 = -1. \end{matrix}$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

13.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} 2x'' + x' - 2x + 6y'' + 3y' - 2y = 0, \\ x'' + x' - x + 3y'' + 3y' - 2y = 0. \end{aligned}$$

Вариант № 14

14.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = ax^3$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

14.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$yy' = -\frac{x}{2}.$$

14.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ y - xy' = 2(1 + x^2y');\quad 2.\ \ (xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0;\quad 3.\ \ y' = \frac{x+y+1}{\sqrt{x+y}-1};$$

$$4.\ \ \sin x \cos y\, dx = \sin y \cos x\, dy,\ y\Bigl(\frac{\pi}{4}\Bigr) = \frac{\pi}{3};\quad 5.\ \ xy' = \frac{x+1}{(y-x)^3} + x,\ y(1) = 2.$$

14.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ x\,dy - y\,dx = y\,dy;\quad 2.\ \ (x^2 + 2xy)dx + (y^2 + 2xy)dy = y^2dx + x^2dy,\ y(1) = -1;$$

$$3.\ \ y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg}\frac{y-2x}{x+1};\quad 4.\ \ xy' = y - xe^{y/x},\ y(1) = 1;$$

$$5.\ \ (2x-2)dy = (x+y-2)dx,\ y(1) = 0{,}5.$$

14.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y'\sin x - y\cos x = 1;\quad 2.\ \ y' - \frac{2}{x}y = \frac{e^x(x-2)}{x};\quad 3.\ \ e^{-y}y' - e^{-y} = e^x\ (e^{-y} = z);$$

$$4.\ \ \operatorname{ch} y\, dx = (1 + x\operatorname{sh} y)dy,\ y(1) = \ln 2;\quad 5.\ \ y' + \frac{n}{x}y = \frac{1}{x^n},\ y(1) = 0,\ n = \mathrm{const}\,.$$

14.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ y' = y(y^3\cos x + \operatorname{tg} x);\quad 2.\ y' = \frac{x(x^2+y^2-1)}{2y(x^2-1)};\quad 3.\ 2(y' + yx) = (x-1)e^xy^2,\ y(0) = 2.$$

14.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (\arcsin x + 2xy)dx + (x^2 + 1 + \operatorname{arctg} y)dy = 0;\quad 2.\ \ ye^xdx + (y + e^x)dy = 0.$$

14.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2\cos x - y)dx + x\,dy = 0.$$

14.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ \sqrt{y^2+1}dx = xy\,dy;\quad 2.\ \ (x-2)dy + (4-x-y)dx = 0;\quad 3.\ \ 2(y^3 - x + xy)dy = dx;$$

$$4.\ \ \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}y' + \sqrt{y^2+1} = x^2+1;\quad 5.\ \ \frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - \Bigl(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\Bigr)dy = 0.$$

14.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ \ln\cos y\,dx + x\operatorname{tg} y\,dy = 0;\quad 2.\ \ x\sin\frac{y}{x}y' + x = y\sin\frac{y}{x};$$

$$3.\ \ \Bigl(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\Bigr)dx + \Bigl(y - \frac{2y}{x}\Bigr)dy = 0;\quad 4.\ \ y^2y' = 1 - 2x;$$

$$5.\ \ (3x^2y - 4xy^2)dx + (x^3 + 12y^3)dy = 0.$$

14.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y' - \frac{y}{x} = x\sin x,\ y(\pi/2) = 1; \quad 2.\ \ 3(xy' + y) = y^2\ln x,\ y(1) = 3;$$

$$3.\ \ e^{y^2}(dx - 2xy\,dy) = y\,dy,\ y(0) = 0.$$

14.12. Решить уравнения

$$1.\ \ x = e^{2y'}[2(y')^2 - 2y' + 1]; \quad 2.\ \ y = y'\ln y'; \quad 3.\ \ y = xy' + \sqrt{4 + (y')^2}.$$

14.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ \ y^{(4)} = \sin 2x; \qquad 2.\ \ y'''\operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0;$$

$$3.\ \ xy'' = 2yy' - y'; \quad 4.\ \ 2(y')^2 = (y-1)y'',\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1.$$

14.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ \ 3y'' - 10y' + 3y = 0; \quad 2.\ \ 9y'' - 24y' + 16y = 0; \quad 3.\ \ 4y'' - 24y' + 37y = 0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

14.15. Решить задачу Коши

$$1.\ 4y''+12y'+9y = 0,\ y(0{,}5) = y'(0{,}5) = 1; \quad 2.\ y''+4y'+13y = 0,\ y\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = 1,\ y'\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = \pi,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

14.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 6y = f(x),$$

если

$$1.\ \ f(x) = 2x^2 + 1; \quad 2.\ \ f(x) = x^2e^{2x}; \quad 3.\ \ f(x) = 3\sin x; \quad 4.\ \ f(x) = 2e^{2x}\cos 2x.$$

14.17. Найти решение задачи Коши

$$x^3(y'' - y) = x^2 - 2, \quad y(2) = 2,\ y'(2) = 1,$$

методами Лагранжа и Коши.

14.18. Найти общее решение

$$1.\ \ y''' - 36y' = \sin x + 2e^{6x}; \quad 2.\ \ y^{(4)} + y''' = x;$$

$$3.\ \ (x+1)^3y'' + 3(x+1)^2y' + (x+1)y = 6\ln(x+1).$$

14.19. Найти форму зеркала, отражающего все лучи, которые выходят из одной точки, параллельно данному направлению.

14.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 8x + 3y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

14.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = y + \dfrac{1}{2 + 4e^{-t}}. \end{cases}$$

14.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 = -2, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 6; \end{matrix} \qquad 2)\ \ A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 1, \\ \lambda_3 = 1. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

14.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' - 4x' - y'' + 2y' + 2y = 0,$$
$$2x'' - y'' - 2x + y = 0.$$

Вариант № 15

15.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$y = (x-a)^3$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

15.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y' = 2 + y^2.$$

15.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{(x+y)y}\right)dy = \left(\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x+y}\right)dx;\quad 2.\ y'xy = x^2+1;\quad 3.\ xy' - y = \sqrt{x^2-y^2};$$

$$4.\ y'\sin x = y\ln y,\ y(\pi/2) = 1;\quad 5.\ xy' = \cos(x-y)+x,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

15.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \sqrt{x^2-y^2} = xy' - y;\quad 2.\ xy' = y\sin(\ln y - \ln x);\quad 3.\ y^2 + x^2y' = xyy';$$

$$4.\ (2x-4y+6)+(x+y-3)y' = 0,\ y(0) = 3;\quad 5.\ \frac{dx}{x^2-xy+y^2} = \frac{dy}{2y^2-xy},\ y(0) = 1.$$

15.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ y' + \frac{y}{x} = 2\ln x + 1;\quad 2.\ xy' = e^x + xy;\quad 3.\ 3y'+1 = -e^{x+3y}\ (e^{-3y} = z);$$

$$4.\ 2y^2dx + (x+e^{1/y})dy = 0,\ y(2) = 1;\quad 5.\ y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x,\ y(e) = \frac{e^2}{2}.$$

15.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ y' + 2xy = 2(xy)^3;\quad 2.\ xy' + y = 2y'x^2y\ln y;\quad 3.\ x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy,\ y(1/2) = 2.$$

15.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ (1+x\sqrt{x^2+y^2})dx + (\sqrt{x^2+y^2}-1)y\,dy = 0;\quad 2.\ e^y + (xe^y - 2y)y' = 0.$$

15.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$y\,dx - x\,dy + \ln x\,dx = 0.$$

15.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ (x^2-1)y' + 2xy^2 = 0;\quad 2.\ (6x-y-5)dy + (5-x-4y)dx = 0;$$

$$3.\ y^2(y^2+4)dx + 2xy(y^2+4)dy = 2dy;\quad 4.\ (x+1)(y'+y^2) = -y;$$

$$5.\ \frac{1}{y} - y'\frac{x+y^2}{y^2} = 0.$$

15.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \sin x\sin y\,dy = \cos x\cos y\,dx;\quad 2.\ xy' - y = x\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{x};\quad 3.\ y' + xy = xy^3;$$

$$4.\ 2x - 1 - \frac{y}{x^2} = \left(2y - \frac{1}{x}\right)y';\quad 5.\ (x^2+y^2)dx + xy\,dy = 0.$$

15.11. Решить задачу Коши

$$1.\ y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x,\ y(\pi/4) = 1/2;\quad 2.\ 2(4y^2-x)dy = dx,\ y(0) = 0;$$

$$3.\ y' + 4x^{-1}y = 4x^5e^{-4x}y^2,\ y(0) = 1.$$

15.12. Решить уравнения

$$1.\ (y')^3 - xy^4y' - y^5 = 0; \quad 2.\ x^3(y')^2 + x^2yy' + 2 = 0; \quad 3.\ y = \left(\frac{1}{x} + y'\right) + y'.$$

15.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ y^{(4)} = \cos 2x; \qquad 2.\ xy''' + y'' = x + 1;$$
$$3.\ 3(y')^2 = 4yy'' + y^2; \quad 4.\ y'' + 2\sin x \cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

15.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ 3y'' + 8y' - 3y = 0; \quad 2.\ 9y'' + 24y' + 16y = 0; \quad 3.\ 4y'' + 24y' + 37y = 0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

15.15. Решить задачу Коши

$$1.\ y'' + 5y' + 6y = 0,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 1; \quad 2.\ 4y'' - 4y' + 5y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

15.16. Найти общее решение уравнения

$$2y'' - 4y' + 4y = f(x),$$

если

$$1.\ f(x) = \cos 2x + 1; \quad 2.\ f(x) = 5e^{2x}; \quad 3.\ f(x) = x^2 - x; \quad 4.\ f(x) = e^{-x}\sin 2x.$$

15.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2,$$

методами Лагранжа и Коши.

15.18. Найти общее решение

$$1.\ y''' + 9y'' = \operatorname{ch} 2x; \quad 2.\ y^{(4)} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$$

15.19. Найти кривую, зная, что треугольник, образованный нормалью к ней и осями координат, равновелик треугольнику, образованному осью Ox, касательной и нормалью к этой же кривой.

15.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x - 5y, \\ y' = 5x - 5y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

15.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -10x + y + \operatorname{ctg} 3t. \end{cases}$$

15.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2, \\ \lambda_3 = 10; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \ \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

15.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' + 4x' - x + 3y'' + 2y' - y = 0,$$
$$3x'' + 6y'' + 6x' + 3y' = 0.$$

Вариант № 16

16.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x^2 - a^2y - 2y = 0$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

16.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y'(x^2 + 2) = y.$$

16.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ (x^3 + 2x)y^2dy = x\,dx; \quad 2.\ \ y' = 10^{x+y}; \quad 3.\ \ \frac{xy'}{1+y^2} = \frac{\ln^2 x}{\operatorname{arctg} y};$$
$$4.\ \ (9x - y - 8)dy = (x + 7y - 8)dx; \quad 5.\ \ (y^2 - x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(0) = 1.$$

16.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ x^2y' - y^2 = 2x^2; \quad 2.\ \ (x - y)dy = (x + y)dx; \quad 3.\ \ y' = 2xy/(x^2 - y^2);$$
$$4.\ \ (9x - y - 8)dy = (x + 7y - 8)dx; \quad 5.\ \ y' = \frac{y^2 + 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2},\ y(1) = 1.$$

16.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y' - x = \frac{2xy}{x^2 - 1}; \quad 2.\ \ dy + 3y\,dx = e^{2x}dx; \quad 3.\ \ y' - \frac{y}{x} = -\frac{2\ln x}{x};\ y(1) = 1;$$
$$4.\ \ y' = \frac{y^2}{x + y}; \quad 5.\ \ \operatorname{ch} y\,dx = (x + \operatorname{sh} y)dy,\ y(1) = \ln 2.$$

16.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' - 2xy^3 = y; \quad 2.\ \ xy^2dy = (1 - xy^3)dx; \quad 3.\ \ 2(xy' + y) = y^2\ln x,\ y(1) = 2.$$

16.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}; \quad 2.\ \ \Big(y + \frac{2}{x^2}\Big)dx + \Big(x + \frac{3}{y^2}\Big)dy = 0.$$

16.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2y\,dy = 0.$$

16.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ (x^2 + y^2)dy - 2xy\,dx = 0; \quad 2.\ \ 2y' - xy^2 = 2xy; \quad 3.\ \ xy' - x^3 = y;$$
$$4.\ \ y' - y\operatorname{tg} x + y^2\sin x = 0; \quad 5.\ \ e^y dx = (y^3 - xe^y)dy = 0.$$

16.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ 3e^x\operatorname{tg} y\,dx + \frac{1 + e^x}{\cos^2 y}dy = 0; \quad 2.\ \ y(1 + x^2)y' = 1 + y^2; \quad 3.\ \ x\,dy = y\Big(1 + \ln\frac{x}{y}\Big)dx;$$
$$4.\ \ y^2 - 4xy + 4x^2y' = 0; \quad 5.\ \ [\sin 2x - 2\cos(x + y)]dx - 2\cos(x + y)dy = 0.$$

16.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ (x + \ln y)dy - y\,dx = 0,\ y(2) = 1; \quad 2.\ \ y' - 3x^2y = (x^3 + 1)y^3,\ y(0) = 0;$$
$$3.\ \ y' - y = xy^2,\ y(0) = 1.$$

16.12. Решить уравнения

1. $y = (y'-1)e^{y'}$; 2. $x = y'\cos y'$; 3. $y = xy' + y' + \sqrt{y'}$.

16.13. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $xy^{(4)} = 1$; 2. $yy'' - y'(1+y') = 0$; 3. $y'' = xy' + y + 1$;

4. $y'' = xy' + y + 1$; 5. $y''\cos y + (y')^2\sin y = 0,\ y(-1) = \dfrac{\pi}{6},\ y'(-1) = 2.$

16.14. Найти общее решение уравнения

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$; 2. $y'' + 3y' + \dfrac{9}{4}y = 0$; 3. $y'' + 4y' + 13y = 0$;

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

16.15. Решить задачу Коши

1. $2y'' + y' - y = 0,\ y(1) = y'(1) = 1$; 2. $y'' + 2y' + 5y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2$,

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

16.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' + y' - 6y = f(x),$$

если

1. $f(x) = 2x^2 + 1$; 2. $f(x) = xe^{2x}$; 3. $f(x) = 3\sin 2x$; 4. $f(x) = 2e^{2x}\cos 2x$.

16.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 3,$$

методами Лагранжа и Коши.

16.18. Найти общее решение

1. $y''' + 6y'' + 9y' = (x+1)e^{2x} + \cos x$; 2. $y^{(5)} - y^{(4)} = 2x + e^{2x}$;

3. $\Big(x + \dfrac{1}{2}\Big)^2 y'' - 2\Big(x + \dfrac{1}{2}\Big)y' + 2y = 0{,}4$; 4. $x^3y'' - x^2y' + 3xy + 16\ln x = 0$.

16.19. Две жидкости массами x и y подвергаются дистилляции. Известно, что в любой момент времени отношение масс испарённых жидкостей пропорционально отношению масс, находящихся ещё в жидком состоянии. Определить зависимость между x и y.

16.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 5x - 2y, \\ y' = 10x + y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

16.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x + y + \dfrac{1}{1 - e^{-t}}. \end{cases}$$

16.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 3. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

16.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &x'' + 4x' - x + 3y'' + 2y' - y = 0, \\ &2x'' + 3x' + 4x + y'' - 4y' - 8y = 0. \end{aligned}$$

Вариант № 17

17.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$ay - \sin ax = 0$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

17.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$y'(x+y) = y.$$

17.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}dx;\quad 2.\ \ y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2};\quad 3.\ \ y'\operatorname{tg}\frac{y-2x}{x+1} = \frac{y+2}{x+1};$$
$$4.\ \ y' = \sqrt{2x+y-3},\ y(0)=4;\quad 5.\ \ y'\sin x = y\ln y,\ y(\pi/2)=e.$$

17.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x};\quad 2.\ \ xy' = y(\ln y - \ln x);\quad 3.\ \ \frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{x} - \frac{\sqrt{y-x}}{2y-x},\ y(1)=1;$$
$$4.\ \ (y^2-x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(0)=1;\quad 5.\ \ (y^2-3x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(0)=1.$$

17.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ y\,dx - (3x+1+\ln y)dy = 0;\quad 2.\ \ y' + y\operatorname{ctg}x = \sin x;\quad 3.\ \ y' + \operatorname{tg}y = \frac{x}{\cos y};$$
$$4.\ \ \frac{dx}{x+y^2} + 2y\,dy = 0,\ y(2)=1;\quad 5.\ \ (x^2-1)y' - xy = x^3 - x,\ y(2)=1{,}5.$$

17.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ xy + 2y = x^5y^2;\quad 2.\ \ (1+x^2)dy = (xy + x^2y^2)dy;$$
$$3.\ \ 2y' + y\cos x = y^{-1}(1+\sin x)\cos x,\ y(0)=1.$$

17.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0;\quad 2.\ \ \left[x - \frac{y}{(x+2y)^2}\right]dx + \frac{x\,dy}{(x+2y)^2} = 0.$$

17.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$y(1+xy)dx - x\,dy = 0.$$

17.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ xy' - xe^{x/y} = 2;\quad 2.\ \ xy\,dx + (x+1)dy = 0;\quad 3.\ \ xy' + 3xy^3 = 2y;$$
$$4.\ \ dy + (3y - e^{3x})dx = 0;\quad 5.\ \ (x^3+y^2)dx + 2xy\,dy = 0.$$

17.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0;\quad 2.\ \ y' - y = y^3;$$
$$3.\ \ (y^4 - 2x^2y)dx + (x^4 - 2xy^3)dy = 0;\quad 4.\ \ y' = \frac{x}{y}2^{y/x} + \frac{y}{x};$$
$$5.\ \ \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$$

17.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y' - \frac{2}{x+1}y = e^x(x+1)^2,\ y(0)=1;\quad 2.\ \ (13y^2 - x)dy = 4y\,dx,\ y(5)=1;$$

$$3.\ \ dy + 2xy\,dx = xy^2 e^{x^2} dx,\ y(0) = 1.$$

17.12. Решить уравнения

$$1.\ \ y' - \sin y' = 0;\quad 2.\ \ y = \frac{1}{2}(y')^2 + \ln y';\quad 3.\ \ y = 2xy' - (y')^2.$$

17.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ \ y'' = \frac{1}{x} + 3;\quad 2.\ \ (1+x^2)y'' = 2xy';\quad 2y(y'' - 2y) = 3(y')^2;$$

$$4.\ \ 5(y''')^2 - 3y''y^{(4)} = 0;\quad 4.\ \ y''' = 3yy',\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 4{,}5.$$

17.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ \ y'' - 2y' - 2y = 0;\quad 2.\ \ y'' + 6y' + 9y = 0;\quad 3.\ \ y'' + 4y = 0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

17.15. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y'' + 4y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 2;\quad 2.\ \ y'' + 2y' = 0,\ y(2) = y'(2) = 1,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

17.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' - 3y = f(x),$$

если

$$1.\ f(x) = 2x^3+4;\quad 2.\ f(x) = (x-1)\sin x;\quad 3.\ f(x) = (x^2-1)e^{-3x};\quad 4.\ f(x) = e^{-3x}\cos x.$$

17.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}},\quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,$$

методами Лагранжа и Коши.

17.18. Найти общее решение

$$1.\ \ y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^x;\quad 2.\ \ y^{(5)} + y^{(4)} = x + e^{-2x};$$

$$3.\ \ (x+4)^2 y'' - 4(x+4)y' + 6y = 0;\quad 4.\ \ x^2 y'' + xy' + 4y = x + 1.$$

17.19. Найти кривые, у которых площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина, равная трем.

17.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y, \\ y' = 5x - 4y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

17.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x + y + \dfrac{1}{1+e^{-t}}. \end{cases}$$

17.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ \ A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 3, \\ \lambda_3 = 5; \end{matrix}\qquad 2)\ \ A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = -7, \\ \lambda_2 = 7, \\ \lambda_3 = 7. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

17.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &3x'' + 5x + y' + 3y = 0, \\ &4x'' + 5x' + 5x + 3y' + 4y = 0. \end{aligned}$$

Вариант № 18

18.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x - ay^2 - by - c = 0$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

18.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0.$$

18.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}dx;\quad 2.\ \ y' + \sin\frac{x+y}{2} = \sin\frac{x-y}{2};\quad 3.\ \ xy\,dx + (x+1)dy = 0;$$
$$4.\ \ y' = \sqrt{2x+y-3},\ y(0) = 4;\quad 5.\ \ y'\sin x = y\ln y,\ y(\pi/2) = e.$$

18.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ y^2 + x^2y' = xyy';\quad 2.\ \ xyy' = x^2 + y^2;\quad 3.\ \ xy\,dy - y^2dx(x+y)^2e^{-y/x}dx;$$
$$4.\ \ (x+y-2)dy = (2y-2)dx;\quad 5.\ \ (xy'-y)\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 2x,\ y(1) = 0.$$

18.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ (1+y^2)\frac{dy}{dx} = \operatorname{arctg} y - x;\quad 2.\ \ y' + x^2y = x^2;\quad 3.\ \ e^{-y}y' - e^{-y} = e^x\ (e^{-y} = z);$$
$$4.\ \ y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x,\ y(0) = 1;\quad 5.\ \ (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx,\ y(-1/2) = 1.$$

18.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ y' = x^3y^3 - xy;\quad 2.\ \ 3x\,dy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)dx;\quad 3.\ \ 3(xy'+y) = y^2\ln x,\ y(1) = 3.$$

18.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ (1 + x\sqrt{x^2+y^2})dx = (1 - y\sqrt{x^2+y^2})dy;\quad 2.\ \ \frac{1+xy}{x^2y}dx + \frac{1-xy}{xy^2}dy = 0.$$

18.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0.$$

18.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ y' = y(y^3\cos x + \operatorname{tg} x);\quad 2.\ \ (6xy + y^2)dx = (2x^2 - y^2)dy;\quad 3.\ \ yy' = \frac{1-2x}{y};$$
$$4.\ \ xy' - e^{2x} = 3xy;\quad 5.\ \ \left(y + \frac{4}{x^3}\right)dx + (x - \ln y)dy = 0.$$

18.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ (xy^2 + x)dx + (y^3 - x^3y^3)dy = 0;\quad 2.\ \ xy' + y = y^2;\quad 3.\ \ (y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0;$$
$$4.\ \ y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x);\quad 5.\ \ xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y)dy = 0.$$

18.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ y' - y\cos x = -\sin 2x,\ y(0) = 3;\quad 2.\ \ 2(xy'+y) = y^2\ln x,\ y(1) = 2;$$
$$3.\ \ (2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0,\ y(-1/2) = 1.$$

18.12. Решить уравнения

1. $(y'+1)^3=(y'-y)^2$; 2. $x=y'\sqrt{(y')^2+1}$; 3. $y=2xy'-4(y')^3$.

18.13. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y''=\operatorname{arctg}3x$; 2. $x^2y''+xy'-1=0$;
3. $xy''=2yy'-y'$; 4. $y''y^3+4=0,\ y(0)=-1,\ y'(2)=-2$.

18.14. Найти общее решение уравнения

1. $2y''+5y'=0$; 2. $y''-4y'+13y=0$; 3. $y''+6y'-6y=0$;

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x=0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

18.15. Решить задачу Коши

1. $y''-2y'+10y=0,\ y(2)=1,\ y'(2)=2$; 2. $y''-5y'+4y=0,\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$,

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

18.16. Найти общее решение уравнения

$$y''-4y'+4y=f(x),$$

если

1. $f(x)=3x^3-x-1$; 2. $f(x)=3\cos 2x$; 3. $f(x)=xe^{2x}$; 4. $f(x)=e^{2x}\sin 2x$.

18.17. Найти решение задачи Коши

$$y''+y=\frac{1}{\sin x},\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=1,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2,$$

методами Лагранжа и Коши.

18.18. Найти общее решение

1. $y'''-25y'=25(\sin 5x+\cos 5x)-50e^{5x}$; 2. $y^{(4)}+y'''=e^x+6x$;
3. $(x-2)^3y'''+(x-2)y'-y=0$; 4. $x^2y''+xy'+y=\ln x^2$.

18.19. В момент времени $t=0$ имеется x_0 первичного радиоактивного вещества с постоянной распада λ_1, в процессе распада которого образуется вторичное радиоактивное вещество с постоянной распада $\lambda_2\neq\lambda_1$. Определить количество нераспавшихся к моменту времени t веществ.

18.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=x-y,\\ y'=x+y.\end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

18.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x'=-x+y,\\ y'=-17x+y+\operatorname{ctg}4t.\end{cases}$$

18.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,'=A\vec{x}$, где

$$1)\ A=\begin{pmatrix}1&10&3\\2&1&2\\3&10&1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=-4,\\ \lambda_2=-2,\\ \lambda_3=9;\end{matrix}\qquad 2)\ A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&3&-4\\4&6&-8\\2&3&-4\end{pmatrix},\ \begin{matrix}\lambda_1=0,\\ \lambda_2=0,\\ \lambda_3=1.\end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

18.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}&x''+x'+2x+y''+3y=0,\\ &2x''+3x'+3x+2y''+y'+5y=0.\end{aligned}$$

Вариант № 19

19.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий
$$(x-a)^2+by^2=1$$
и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

19.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения
$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

19.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными
$$1.\ \ y'=3y^{2/3};\quad 2.\ \ xy'+y^2=y;\quad 3.\ \ \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}dy=x\,dx;$$
$$4.\ \ y'=\frac{1}{3x+y},\ y(0)=1;\quad 5.\ \ y'x^2e^y=e^{-y},\ y(1)=0.$$

19.4. Решить однородные уравнения
$$1.\ \ x\,dy=y\ln\frac{y}{x}dx;\quad 2.\ \ y'=\frac{y^2}{x^2}-2;\quad 3.\ \ x\,dy=(xe^{y/x}+y)dx;$$
$$4.\ \ y'=\frac{x+2y-3}{4x-y-3};\quad 5.\ \ (y^2-x^2)dy+2xy\,dx=0,\ y(0)=1.$$

19.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
$$1.\ \ y'-4x=2y;\quad 2.\ \ y'+2xy=xe^{-x^2};\quad 3.\ \ 2y\,dx+(y^2-6x)dy=0;$$
$$4.\ \ y'+x^2=3y/x,\ y(2)=6;\quad 5.\ \ (xy+\sqrt{y})dy+y^2dx=0\ y(-1/2)=4.$$

19.6. Решить уравнение Бернулли
$$1.\ \ y'+y=xy^3;\quad 2.\ \ y\,dx-\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0;$$
$$3.\ \ 2y'-3y\cos x=-e^{-2x}(2+3\cos x)y^{-1},\ y(0)=1.$$

19.7. Решить уравнение в полных дифференциалах
$$1.\ \ x\,dx+y\,dy=\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2};\quad 2.\ \ e^{-x}dy=(ye^{-x}-2x)dx.$$

19.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения
$$(x^2+y)dx-x\,dy=0.$$

19.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:
$$1.\ \ y'-\frac{y^3}{\sin x}=y\operatorname{tg}x;\quad 2.\ \ (2x+y)dx=(3x-y)dy;\quad 3.\ \ y'=\sqrt{\frac{2-y^2}{2+x^2}};$$
$$4.\ \ y'-\operatorname{tg}x=y\operatorname{ctg}x;\quad 5.\ \ (2xy+\sqrt{y})dy+2y^2dx=0.$$

19.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений
$$1.\ \ (y^4+1)x\,dx-y(1+x^2)dy=0;\quad 2.\ \ (1-x^2)y'-xy=xy^2;\quad 3.\ \ y'=\frac{xy-y^2}{x^2-2xy};$$
$$4.\ \ e^{x/y}dx-\frac{x}{y}\left(e^{x/y}+\frac{y}{x}\right)dxdy=0;\quad 5.\ \ \left(xy^2+\frac{x^2}{y^2}\right)dx+\left(x^2y-\frac{2x^3}{3y^3}\right)dy=0.$$

19.11. Решить задачу Коши
$$1.\ \ y'+\frac{2x}{1+x^2}y=\frac{2x^2}{1+x^2},\ y(0)=\frac{2}{3};\quad 2.\ \ 3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2},\ y(0)=1;$$

3. $y\,dx = (3y\cos 2y - 2y^2\sin 2y - x)dy,\ y(16) = \pi.$

19.12. Решить уравнения

1. $(y')^4 - (y')^2 = y^2$; 2. $2xy' - y = y'\ln(yy')$; 3. $y = 2xy' + \dfrac{1}{(y')^2}$.

19.13. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y''' = \sin 3x$; 2. $xy'' = y'\ln\dfrac{y'}{x}$; 3. $yy'' + (y')^2 = 1$;

4. $y'y''' = 2(y'')^2$; 5. $2y''' - 3(y')^2 = 0,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1.$

19.14. Найти общее решение уравнения

1. $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2. $y'' - 8y' + 16y = 0$; 3. $y'' - 2y' + 10y = 0$;

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

19.15. Решить задачу Коши

1. $3y''-4y'+3y = 0,\ y(0{,}5) = 1,\ y'(0{,}5) = 2$; 2. $y''-4y'+5y = 0,\ y\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1,\ y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 2$,

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

19.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = f(x),$$

если

1. $f(x) = 2\sin x$; 2. $f(x) = 10e^{2x}$; 3. $f(x) = 2x^3 - 30$; 4. $f(x) = 2e^x\cos\dfrac{x}{2}$.

19.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}, \quad y(1) = 0{,}5,\ y'(1) = 2,$$

методами Лагранжа и Коши.

19.18. Найти общее решение

1. $y''' - y = 3x^2 - 2x + 1$; 2. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = e^{2x} - 3 + x$;

3. $(x + 10)^2 y''' - 2(x + 10)y' = 0$; 4. $xy'' - xy' + y = 2\ln x$.

19.19. Найти кривую, которая имеет следующее свойство: отрезок оси Ox от начала координат до пересечения с касательной к этой кривой в любой точке пропорционален ординате этой точки.

19.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x - 3y, \\ y' = 3x + y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

19.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = -2x + y + 18t. \end{cases}$$

19.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -6 & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 2, \\ \lambda_3 = 3; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 8 \\ 4 & -7 & 4 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = -9, \\ \lambda_2 = -9, \\ \lambda_3 = 9. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

19.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' - x' + 6x + y'' - y' + 2y = 0,$$
$$3x'' + 2y'' + 9x + 2y = 0.$$

Вариант № 20

20.1. Найти дифференциальное уравнение семейства линий

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

и отметить, если возможно, свойство линий, определяемых полученным уравнением.

20.2. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения

$$xy' = 2y.$$

20.3. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

$$1.\ \ \frac{y'}{\cos(x^2)} = x \operatorname{sh} y; \quad 2.\ \ e^y(1 + y') = 1; \quad 3.\ \ y^2 y' = 1 + 2x;$$
$$4.\ \ 2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0,\ y(0) = 2; \quad 5.\ \ y - xy' = 2(1 + x^2 y'),\ y(1) = 1.$$

20.4. Решить однородные уравнения

$$1.\ \ x\,dy - y\,dx = y\,dy; \quad 2.\ \ xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad 3.\ \ y' = \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x}\right);$$
$$4.\ \ (2x - 2)dy = (x + 2y - 3)dx; \quad 5.\ \ (y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0,\ y(0) = 0.$$

20.5. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

$$1.\ \ xy' - x^2 \cos x = y; \quad 2.\ \ y' = 2y + e^{3x}; \quad 3.\ \ 2xy' - y = x \ln x;$$
$$4.\ \ 2(y^3 - y + xy)dy = dx,\ y(0) = \pi; \quad 5.\ \ y' + x/y = \sin x,\ y(\pi) = 1/\pi.$$

20.6. Решить уравнение Бернулли

$$1.\ \ 2xyy' - y^2 + x = 0; \quad 2.\ \ y' + 2xy = 2x^3 y^3; \quad 3.\ \ y' + xy = (1 + x)e^{-x} y^2,\ y(0) = 1.$$

20.7. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$1.\ \ \frac{3x^2 + y}{y^2}dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3}dy; \quad 2.\ \ e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$$

20.8. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(xy - x^2)y' + (y^2 - 3xy - 2x^2) = 0.$$

20.9. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

$$1.\ \ y' - y \cos x = xe^{-x^2}; \quad 2.\ \ yx^{y-1}dx = -x^y \ln x\,dy; \quad 3.\ \ y' \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 1;$$
$$4.\ \ xy' + y - x^2 y^2 = 0; \quad 5.\ \ (8x - y - 7)y' = x + 6y - 7.$$

20.10. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

$$1.\ \ (1 + y^2)dx - 2y(1 + x)^2 dy = 0; \quad 2.\ \ (1 + e^x)yy' = e^x; \quad 3.\ \ y\,dx + 2(\sqrt{xy} - x)dx = 0;$$
$$4.\ \ xy' - y = x\left(1 + \operatorname{tg}\frac{y}{x}\right); \quad 5.\ \ \frac{1 + xy}{x^2 y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0.$$

20.11. Решить задачу Коши

$$1.\ \ \operatorname{ch} y\,dx = (1 + x \operatorname{sh} y)dy,\ y(1) = \ln 2; \quad 2.\ \ y' + xy = -x^3,\ y(0) = 3;$$
$$3.\ \ 2(y' + y) = xy^2,\ y(0) = 2.$$

20.12. Решить уравнения

$$1.\ \ y = x + y' - \ln y'; \quad 2.\ \ x[(y')^2 - 1] = 2y'; \quad 3.\ \ y = xy' - (y')^2.$$

20.13. Решить уравнения, понизив их порядок

$$1.\ y''' = (y'')^2; \qquad 2.\ (y'')^2 - 2y'y''' + 1 = 0;$$

$$3.\ xy'' - y' = x^2yy'; \quad 4.\ \frac{y''}{y} = 2yy'(1+y^2),\ y(0)=0,\ y'(0)=1.$$

20.14. Найти общее решение уравнения

$$1.\ y'' - 4y' = 0; \quad 2.\ y'' + 8y' = 16y; \quad 3.\ y'' - 6y' + 9y = 0;$$

нормировав фундаментальную систему решений в точке $x = 0$, записать общее решение в форме Коши; определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

20.15. Решить задачу Коши

$$1.\ y'' + 3y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3; \quad 2.\ y'' + 49y = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2,$$

используя ненормированную и нормированную фундаментальные системы решений.

20.16. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = f(x),$$

если

$$1.\ f(x) = x^2 + 2x + 3; \quad 2.\ f(x) = 2x^2e^x; \quad 3.\ f(x) = x\sin 2x; \quad 4.\ f(x) = e^x\cos 2x.$$

20.17. Найти решение задачи Коши

$$y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4,\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2},$$

методами Лагранжа и Коши.

20.18. Найти общее решение

$$1.\ y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39; \quad 2.\ y^{(4)} + 2y''' + y'' = 6x - \sin x;$$

$$3.\ (x-1)^2y''' - 4(x-1)y'' + 4y' = 0; \quad 4.\ x^2y'' - 4xy' + 6y = -\frac{x^2+1}{x}.$$

20.19. Электрическая цепь состоит из ключа и последовательно соединённых емкости C и индуктивности L. В момент времени $t = 0$ ключ замыкается. Найти закон изменения напряжения на емкостном элементе, если первоначально он был заряжен до напряжения E.

20.20. Решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = -x + 4y. \end{cases}$$

Найти фундаментальную матрицу системы, определить характер точки покоя и схематически изобразить её фазовый портрет.

20.21. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = x + 2e^t. \end{cases}$$

20.22. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) системы дифференциальных уравнений $\vec{x}\,' = A\vec{x}$, где

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 1; \end{matrix} \qquad 2)\ A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -1, \\ \lambda_3 = 1. \end{matrix}$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

20.23. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &6x'' + 3x + y'' - 8y + 8z'' - z = 0, \\ &2x'' + 2x + y'' + y + 3z'' + 3z = 0, \\ &x'' - 2x - 2y'' - 11y - 9z = 0. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Арнольд В.И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 368 с.
2. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. I: *Основы комплексного анализа. Элементы вариационного исчисления и теории обобщённых функций.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 672 с.
3. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. II, ч. 1: *Специальные функции.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 352 с.
4. Багров В.Г., Белов В.В., Задорожный В.Н., Трифонов А.Ю. *Методы математической физики.* Т. II, ч. 2: *Уравнения математической физики.* — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 646 с.
5. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Теория функций комплексного переменного.* — М.: Наука, 1981. — 448 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах.* Т. 2. — М.: Наука, 1980. — 366 с.
7. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* — М.: Наука, 1967. — 472 с.
8. Занг В.-Б. *Синергетическая экономика.* — М.: Мир, 1999. — 335 с.
9. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов: Линейная алгебра.* — Томск: Изд-во ТПУ, 2007.
10. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов: Аналитическая геометрия.* — Томск: Изд-во ТПУ, 2007.
11. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов: Ряды.* — Томск: Изд-во ТПУ, 2006.
12. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* — М.: Наука, 1971. — 266 с.
13. Кейнс Дж. *Избранные произведения.* — М.: Экономика, 1993.
14. Колемаев В. А. *Математическая экономика.* — М.: Изд. объединение «ЮНИТИ», 1998. — 240 с.
15. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. *Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* — М.: Наука, 1978. — 288 с.
16. Лизоркин П.И. *Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа.* — М.: Наука, 1981. — 384 с.
17. Матвеев Н.М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.* — М.: Высш. школа, 1962. — 656 с.
18. Матвеев Н.М. *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* — СПб.: Лань, 2002. — 431 с.
19. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1984. – 296 с.
20. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. *Математические модели биологических продуционных процессов.* — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 392 с.
21. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи.* — М.: Высш. школа, 1989. — 383 с.
22. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* — М.: ГИТТЛ, 1952. — 470 с.
23. Федорюк М.В. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* — М.: Наука, 1985. — 448 с.
24. Филипов А.Ф. *Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* — Ижевск: Ижевская республиканская типография, 2000. — 176 с.
25. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* — М.: Наука, 1969. — 424 с.
26. Clark C.W. *Mathematical bioeconomics.* — New York: Wiley, 1976.

Учебное издание

ЗАДОРОЖНЫЙ Валерий Николаевич
ЗАЛЬМЕЖ Владимир Феликсович
ТРИФОНОВ Андрей Юрьевич
ШАПОВАЛОВ Александр Васильевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА для технических университетов Часть V. Дифференциальные уравнения

Учебное пособие

Технический редактор *В.Н. Романенко*
Компьютерная верстка *В.Н. Романенко*

Набор и верстка выполнены на компьютерной технике
в издательской системе *TEX – LATEX*
с использованием семейства шрифтов Computer Modern

Подписано к печати . .2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать . Усл.печ.л. . Уч.-изд.л. .
Заказ . Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru