Лекция 2

КИНЕМАТИКА

- Абсолютно твердое тело

Абсолютно твердое тело

(Абсолютно) твердое тело – это система материальных точек, расстояние между которыми не меняется в процессе движения.

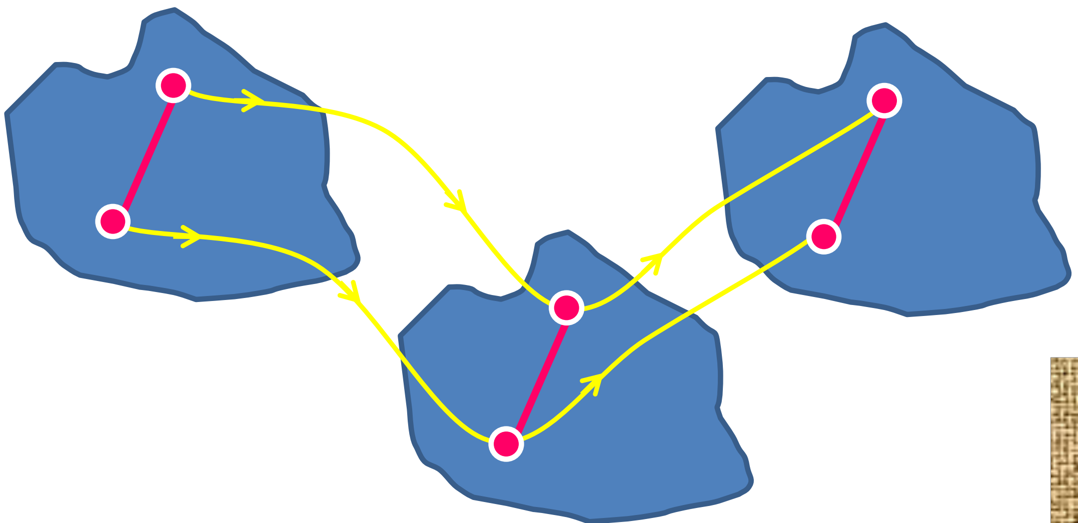
Реальное тело можно считать абсолютно твердым, если в условиях рассматриваемой задачи его деформации пренебрежимо малы.

Виды движения твердого тела

1. Поступательное движение
2. Вращательное движение (вокруг неподвижной оси)
3. Плоско-параллельное (плоское) движение
4. Сферическое движение (движение вокруг неподвижной точки)
5. Общий случай движения твердого тела (свободное движение)

Поступательное движение

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, связанная с телом, во время движения остается параллельной своему первоначальному положению.



Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным.
При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями.

Поступательное движение

Теорема, определяющая свойства поступательного движения:

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Следствие

Изучение поступательного движения абсолютно твердого тела сводится к задаче кинематике материальной точки.

Необходимо задать:

закон движения и положение радиус-вектора в начальный момент времени любой точки.

При поступательном движении общую для всех точек тела скорость называют скоростью движения тела, а ускорение – ускорением движения тела.

Их векторы можно изображать приложенными в любой точке тела.

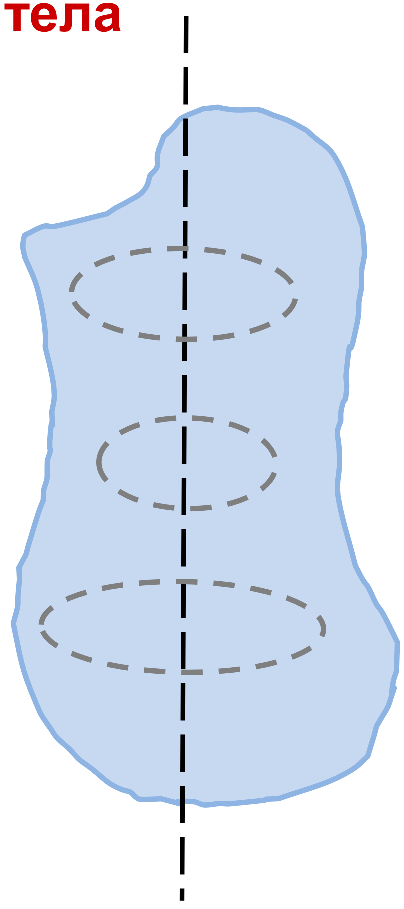
Понятие о скорости и ускорении тела имеют смысл только при поступательном движении. Во всех остальных случаях точки тела движутся с разными скоростями и ускорениями.

Вращательное движение

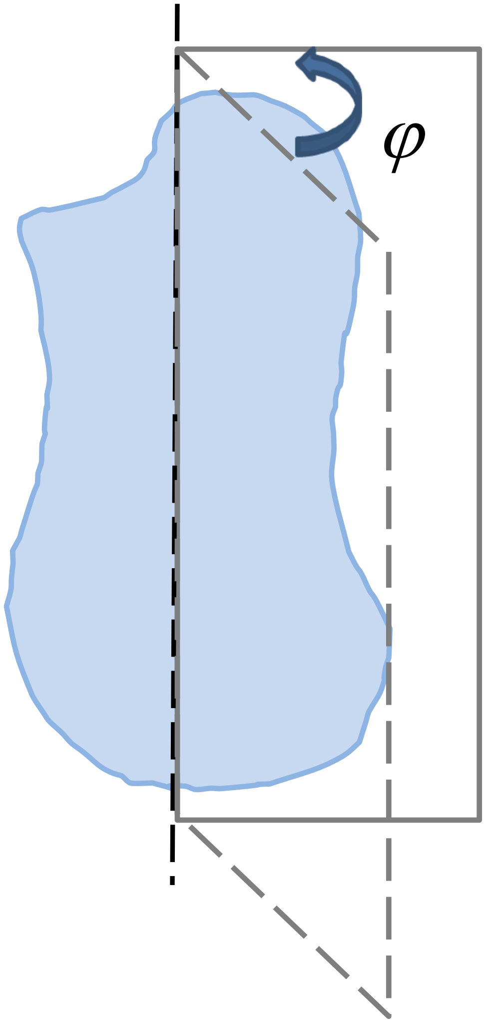
Движение твердого тела с двумя неподвижными точками называется **вращательным движением абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси.**

Прямая, точки которой остаются неподвижными, называется **осью вращения.**

При вращении твердого тела все точки тела описывают окружности, расположенные в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения и с центрами на ней.



Вращательное движение



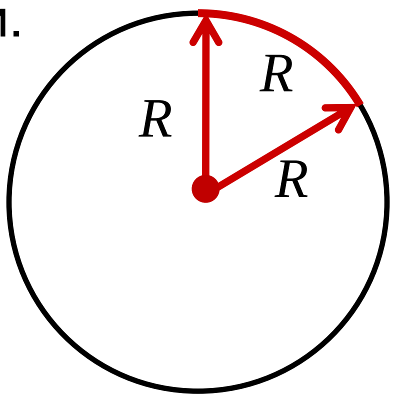
Положение тела однозначно определяется заданием угла поворота

кинематическое уравнение вращательного движения

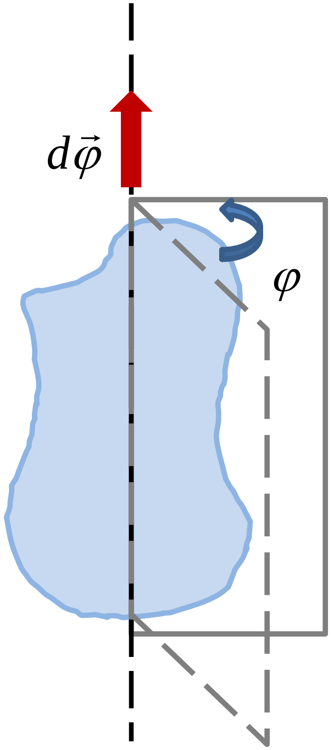
$$\boxed{\varphi = \varphi(t)}$$

За положительное направление вращения обычно принимают направление против часовой стрелки.

Радиан (от лат. radius - луч, радиус, спица колеса) - угол, соответствующий дуге, длина которой равна радиусу окружности.

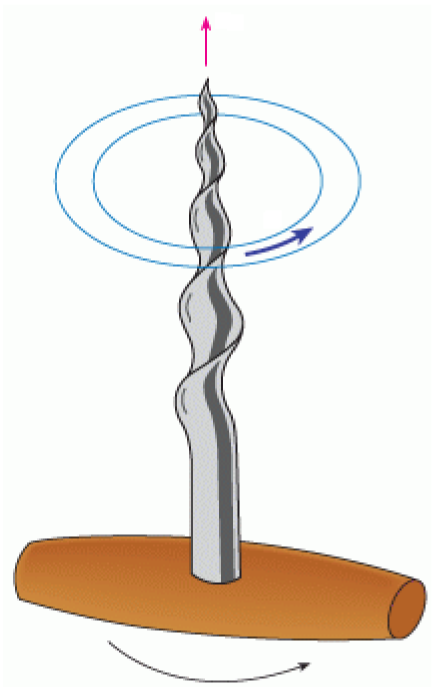


Вращательное движение

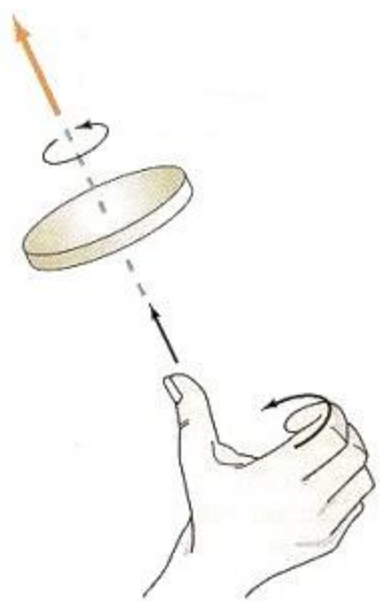


Элементарный угол – векторная величина, модуль которой равен углу поворота, а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта.

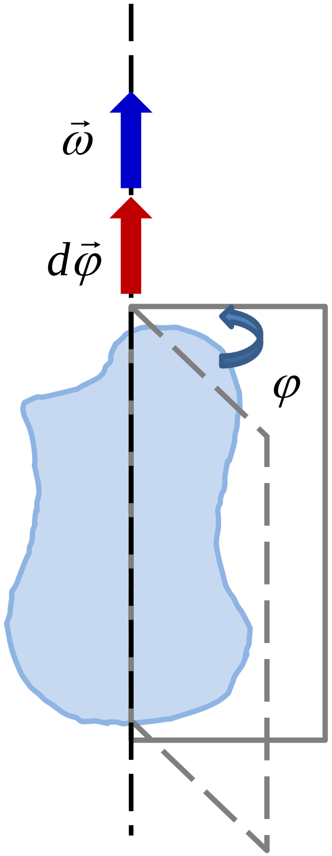
Правило буравчика



Правило правой руки



Вращательное движение



Угловая скорость:

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}}$$

Угловая скорость направлена вдоль оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта.

Если $\boxed{\vec{\omega} = const}$

период - время, за которое тело совершает один оборот, т.е. поворачивается на угол 2π

$$\boxed{T = \frac{t}{N} = \frac{2\pi}{\omega}}$$

частота вращения - число оборотов в единицу времени

$$\boxed{\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{N}{t}}$$

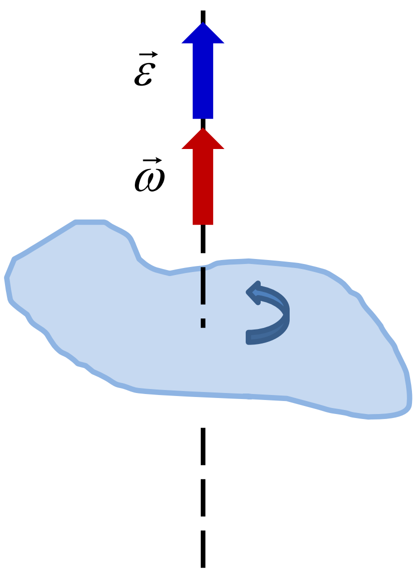
Вращательное движение

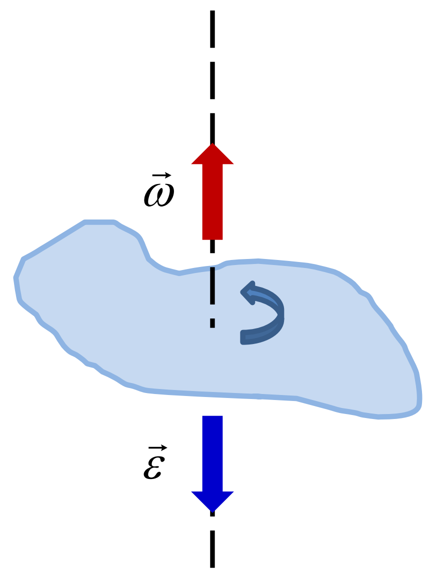
Угловое ускорение:

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}}$$

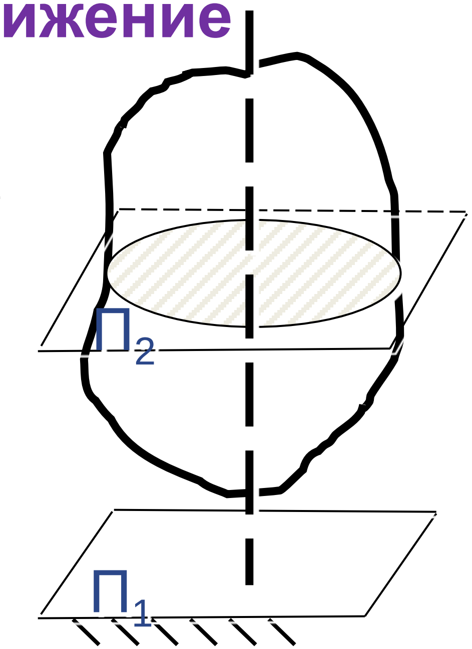
Угловое ускорение направлено вдоль оси вращения в сторону вектора приращения угловой скорости $d\vec{\omega}$.

При ускоренном вращении ускорение и скорость сонаправлены, при замедленном – противонаправлены.





Плоско-параллельное (плоское) движение

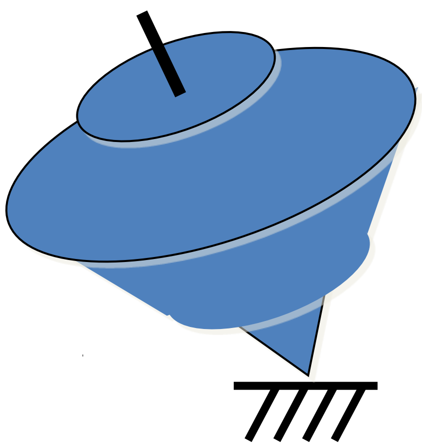


Плоско-параллельным (или плоским) **движением** твердого тела называется движение, при котором все его точки перемещаются параллельно некоторой фиксированной плоскости.

Примеры:
вращательное движение твёрдого тела вокруг оси;
цилиндр, катящийся по плоскости без скольжения.

Сферическое движение твердого тела

Сферическое движение - движение тела, при котором одна его точка остается неподвижной.



Примеры:
волчок; тело, закрепленное шаровым шарниром.

Любое движение можно представить как совокупность двух движений: поступательного вместе с точкой, выбранной за полюс, и вращательного вокруг этого полюса.

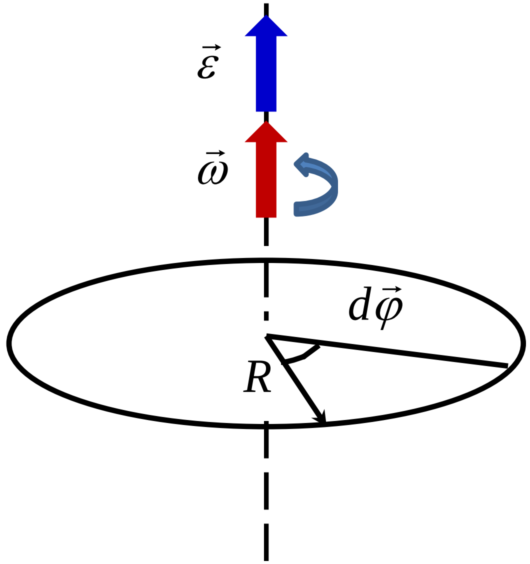
Связь между линейным и угловыми величинами

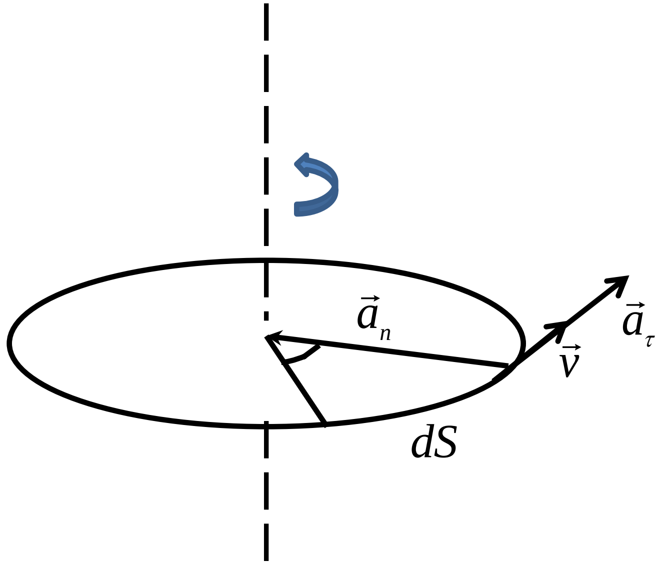
$$\boxed{\vec{v}(t) = [\vec{\omega}(t), \vec{R}]}$$

$$\boxed{\vec{a}_n(t) = \left[\vec{\omega}(t), [\vec{\omega}(t), \vec{R}]\right]}$$

$$\boxed{dS = Rd\varphi}$$

$$\boxed{\vec{a}_\tau(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = [\vec{\varepsilon}(t), \vec{R}]}$$





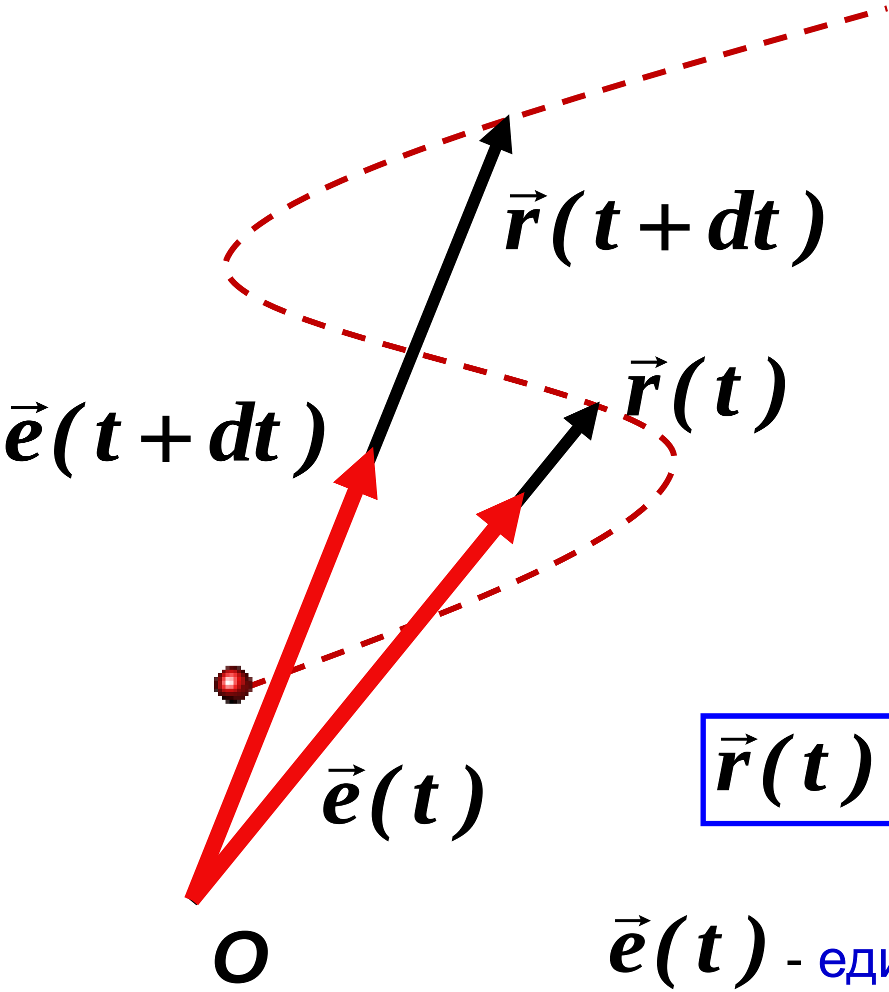
Связь между линейным и угловыми величинами

Прямолинейное движение материальной точки	**Вращательное движение твердого тела**
Пройденный путь S	Угол поворота φ
Скорость $\vec{v}$	Угловая скорость $\vec{\omega}$
Ускорение $\vec{a}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$
Равномерное движение	
$v = const$ $S = vt$	$\omega = const$ $\varphi = \omega t$
Равнопеременное движение	
$a = const$ $v = v_0 \pm at$ $S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varepsilon = const$ $\varphi = \varphi_0 \pm \varepsilon t$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$

КИНЕМАТИКА

Скорость при произвольном движении

Скорость при произвольном движении



$$\boxed{\vec{r}(t) = |\vec{r}(t)| \cdot \vec{e}(t) \equiv r(t) \cdot \vec{e}(t)}$$

$\vec{e}(t)$ - единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора.

Скорость при произвольном движении

$$\boxed{\vec{v}(t)=\frac{dr(t)}{dt}\vec{e}(t)+\left[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)\right]}$$

Вектор скорости в любой точке траектории может быть представлен **в виде суммы двух** компонент:

– ***скорости, направленной вдоль радиус-вектора:***

$$\boxed{\vec{v}_r(t)=\frac{dr(t)}{dt}\vec{e}(t)}$$

(явл. характеристикой прямолинейного движения материальной точки и наз. **скоростью прямолинейного движения**)

– ***скорости, перпендикулярной радиус-вектору:***

$$\boxed{\vec{v}_n(t)=\left[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)\right]}$$

(явл. характеристикой вращательного движения материальной точки и наз. **скоростью вращательного движения**)

Скорость при произвольном движении

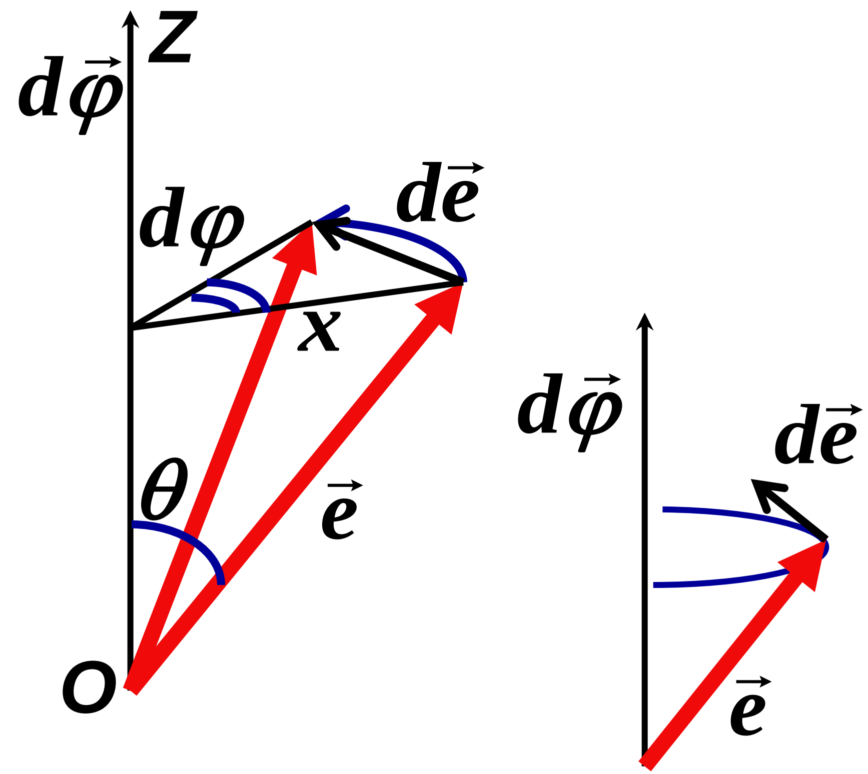
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Векторное произведение:

$$\left| [\vec{a},\vec{b}] \right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$d\vec{e}(t) = \left[d\vec{\varphi}(t),\vec{e}\right] = \left|\vec{e}\right|\sin\theta \; d\varphi$$

$$\frac{d\left|\vec{e}\right|}{dt} = \left|\vec{e}\right|\omega \; \sin\theta$$



$$\boxed{\frac{d\vec{e}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt},\vec{e}\right]} \longrightarrow \boxed{\vec{v}_n(t) = \left[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)\right]}$$

Скорость при произвольном движении

В каждой точке траектории

любое движение материальной точки можно разложить на два движения:
прямолинейное - ***вдоль радиус-вектора*** **(*со скоростью* v_r)**
и **вращательное** - ***относительно начала*** **СО (*со скоростью* v_n)**

КИНЕМАТИКА

Ускорение при произвольном движении

Ускорение при произвольном движении

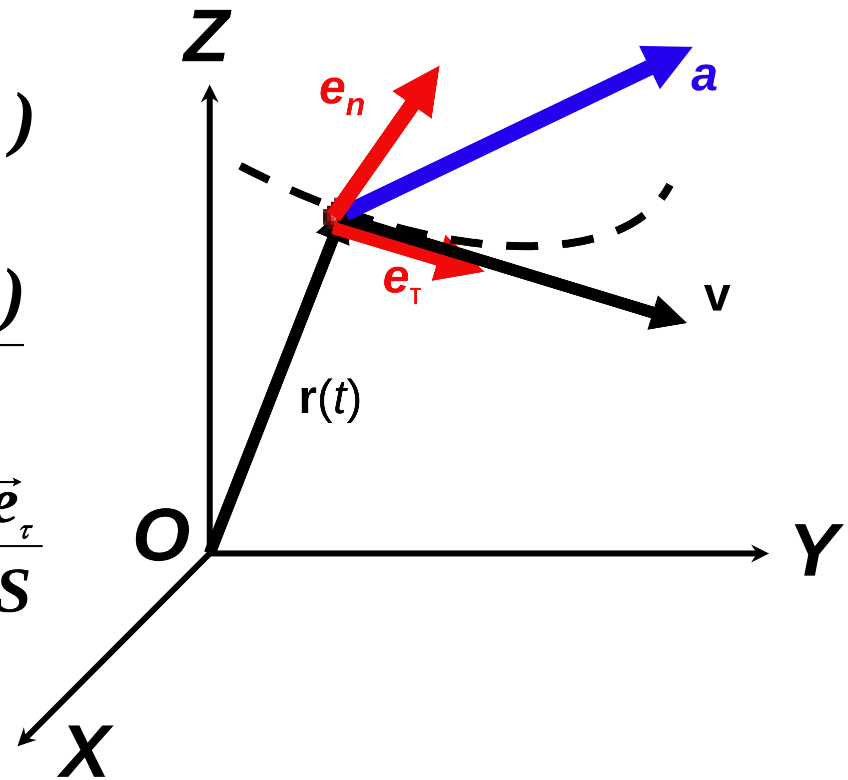
Представим вектор скорости материальной точки в виде

$$\vec{v}(t) = \left|\vec{v}(t)\right| \cdot \vec{e}_\tau(t) = v(t)\vec{e}_\tau(t)$$

Тогда

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}_\tau(t) + v(t)\frac{d\vec{e}_\tau(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\tau(t)}{dt} = \frac{d\vec{e}_\tau}{dt} \cdot \frac{dS}{dS} = \frac{d\vec{e}_\tau}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = v(t)\frac{d\vec{e}_\tau}{dS}$$



Следовательно

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}_\tau + \frac{v(t)^2}{R}\vec{e}_n}$$

Обозначено

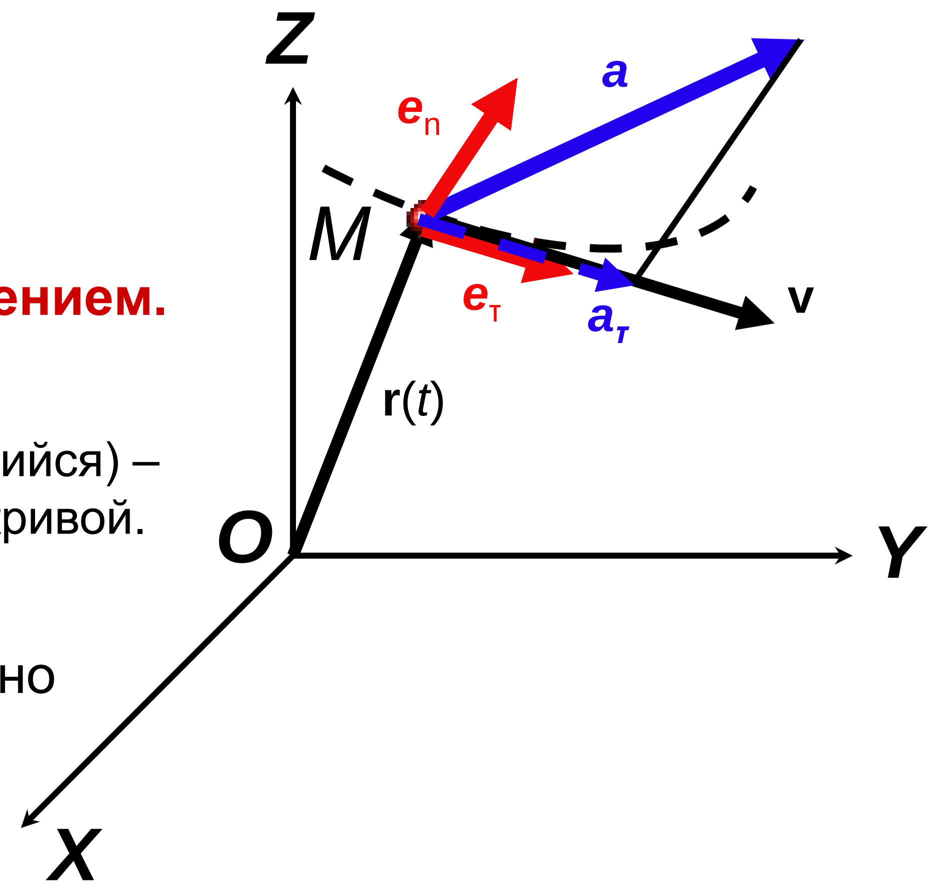
$$R = 1 \Big/ \left|\frac{d\vec{e}_\tau}{dS}\right|$$

$\vec{e}_n$ - единичный вектор, перпендикулярный вектору скорости

Ускорение при произвольном движении

Первое слагаемое обозначают

$$\boxed{\vec{a}_\tau(t) = \frac{dv(t)}{dt}\vec{e}_\tau}$$



и называют **тангенциальным ускорением.**

Тангенциальный (*лат.* tangens – касающийся) – направленный по касательной к данной кривой.

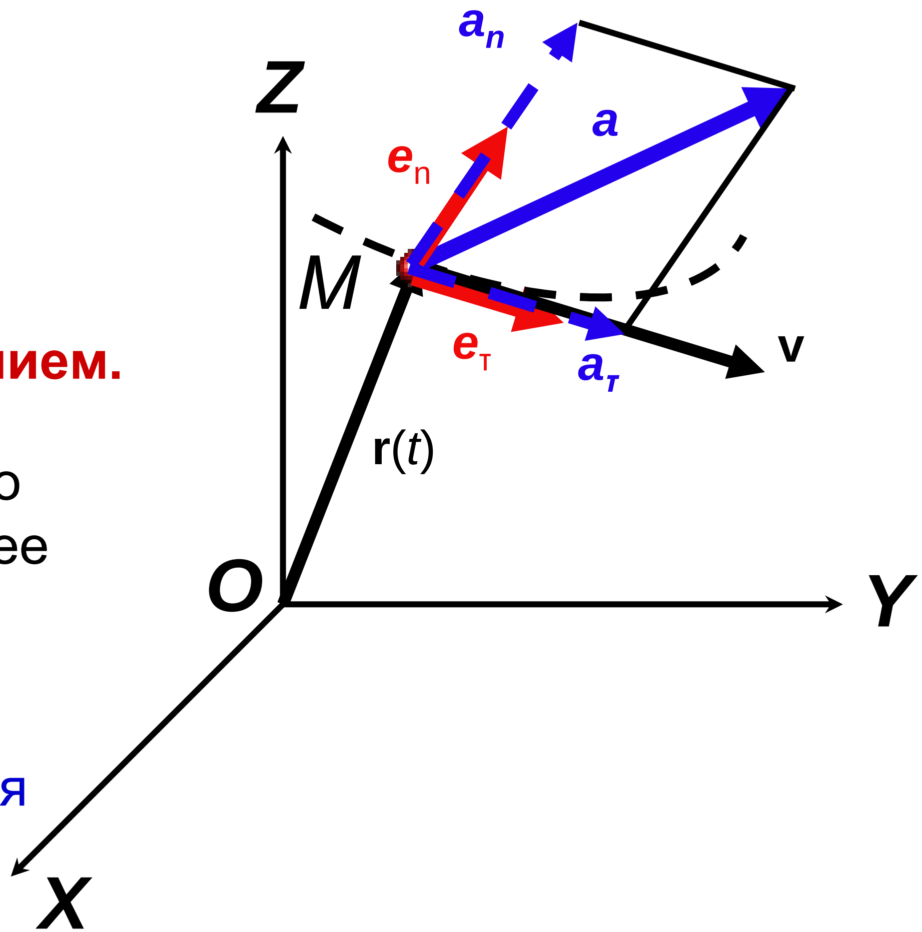
Тангенциальное ускорение направлено по касательной к траектории.

Тангенциальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по величине.

Ускорение при произвольном движении

Второе слагаемое обозначают

$$\boxed{\vec{a}_n(t) = \frac{v(t)^2}{R}\vec{e}_n}$$



и называют **нормальным ускорением.**

Нормальное ускорение направлено по нормали к траектории к центру ее кривизны.

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения скорости по направлению.

При любом движении материальной точки

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{a}_\tau(t) + \vec{a}_n(t)}$$

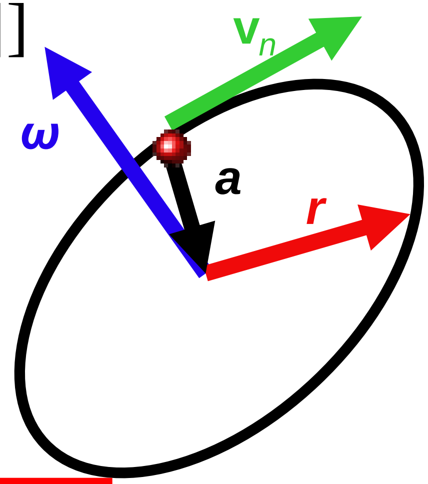
Ускорение при произвольном движении

Смысл величины R.

Движение материальной точки по окружности при ω=const.

$$\vec{v}(t)=\vec{e}(t)\frac{d\left|\vec{r}(t)\right|}{dt}+[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)] \rightarrow \vec{v}(t)=\vec{v}_n(t)=[\vec{\omega}(t),\vec{r}(t)]$$

$$\vec{a}(t)=\frac{d\vec{v}_n}{dt}=\frac{d}{dt}[\vec{\omega},\vec{r}]=\left[\vec{\omega},\frac{d\vec{r}}{dt}\right]=[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}]]$$



Формула BAC-CAB $\quad [\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b})$

$$\vec{a}(t)=\vec{\omega}(\vec{\omega}\vec{r})-\vec{r}\omega^2$$

$$\vec{\omega}\perp\vec{r}\Leftrightarrow(\vec{\omega}\vec{r})=0 \rightarrow \vec{a}(t)=-\vec{r}\omega^2$$

$$|\vec{v}_n|=|\vec{\omega}||\vec{r}| \rightarrow \left|\vec{a}(t)\right|=\frac{\left|\vec{v}_n\right|^2}{\left|\vec{r}\right|}$$

$$\boxed{\vec{a}_n(t)=\frac{\left|\vec{v}(t)\right|^2}{R}\vec{e}_n}$$

При движении материальной точки по окружности величина R совпадает с радиусом окружности,

$$\boxed{R=\left|\vec{r}\right|}$$

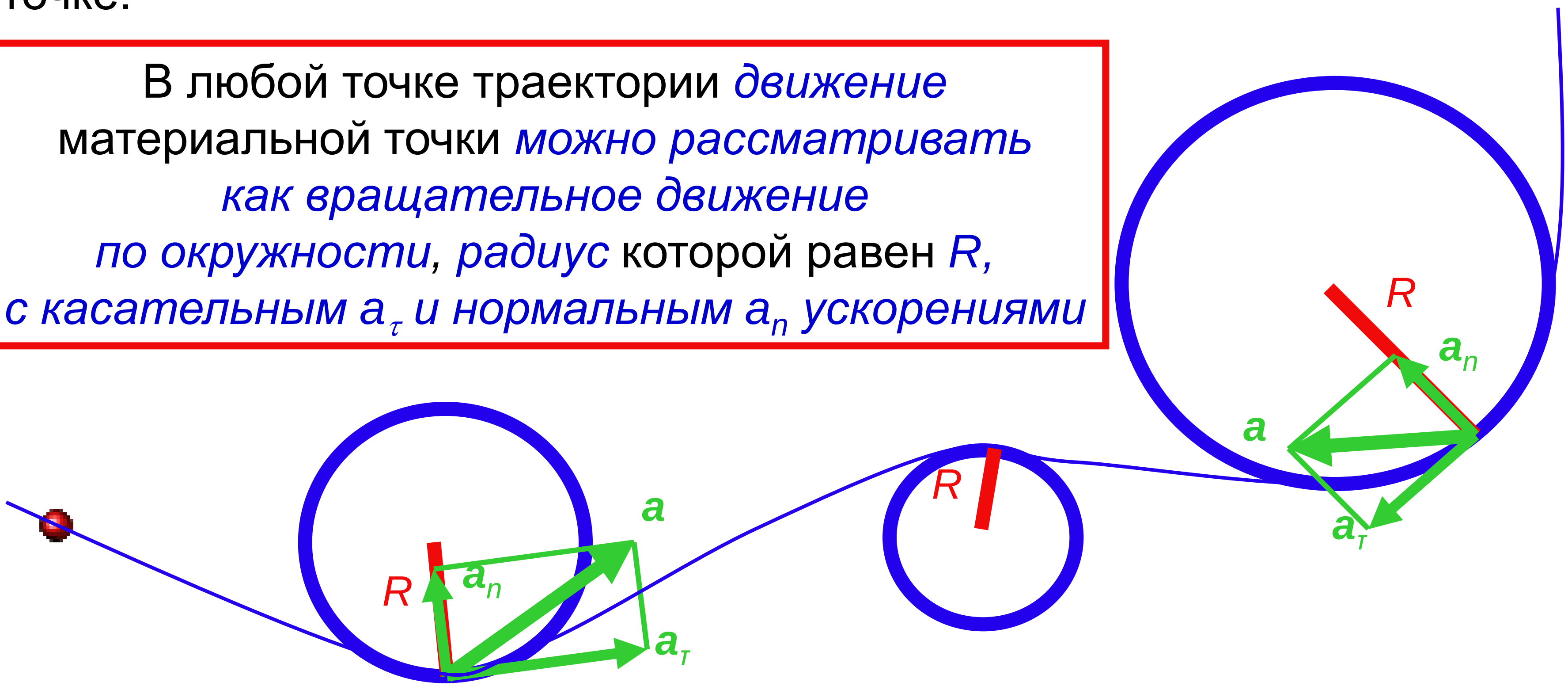
нормальное ускорение называется центростремительным.

Ускорение при произвольном движении

При произвольном движении материальной точки величина R является радиусом некоторой моментальной окружности (т.е. соответствующей данному моменту времени), которая сливается в данном месте с траекторией на бесконечно малом ее участке.

Величина R называется **радиусом кривизны** траектории в данной точке.

В любой точке траектории *движение* материальной точки *можно рассматривать как вращательное движение по окружности, радиус* которой равен *R, с касательным a_τ и нормальным a_n ускорениями*



КИНЕМАТИКА

Некоторые виды движения материальной точки

Лекция 3