

Лекция 5

Потенциальная энергия частицы в поле

$$F = f(\vec{r}_P)$$

*Поле, остающееся постоянным во времени, называется **стационарным**.*

***Консервативные силы** - силы, работа которых не зависит от формы траектории (зависит только от начальной и конечной точки приложения сил).*

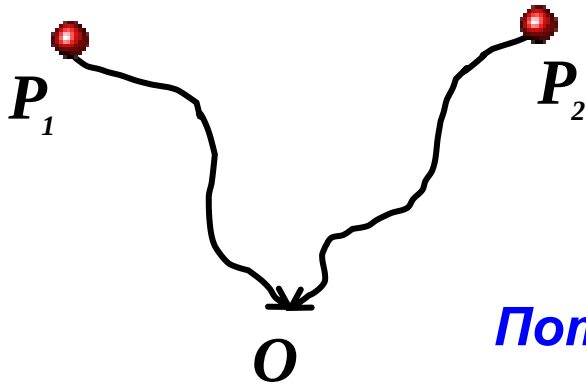
Или

Силы поля являются консервативными, если в стационарном случае их работа на любом замкнутом пути равна нулю.

***Центральные силы** – Силы зависящие только от расстояния между взаимодействующими частицами и направленные по прямой, проходящие через эти частицы.*

Энергия и работа

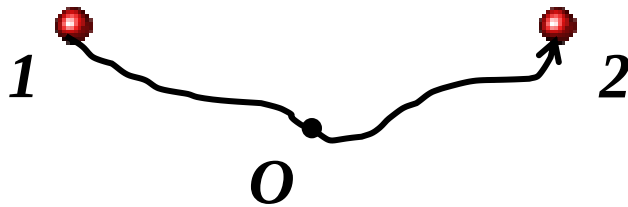
В поле консервативных сил



$$A = f(\vec{r}_P) \quad A = f(\vec{r}_P) \equiv U(\vec{r}_P)$$

$$A_{PO} = \int_P^O (\vec{F}, d\vec{r}) = U(\vec{r}_P) \equiv U_P$$

Потенциальная энергия МТ во внешнем поле



$$A_{12} = A_{1O} + A_{O2}$$

$$A_{1O} = \int_1^O (\vec{F}, d\vec{r}) = U_1$$

$$A_{O2} = -A_{2O} = -\int_2^O (\vec{F}, d\vec{r}) = -U_2$$

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

Энергия и работа

$$X_2 - X_1 = \Delta X \quad - \text{приращение}$$

$$X_1 - X_2 = -\Delta X \quad - \text{убыль}$$

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

Работа консервативных сил не зависит от траектории движения МТ и равна убыли потенциальной энергии МТ в данном силовом поле.

$$A_{12} = \frac{\kappa r_1^2}{2} - \frac{\kappa r_2^2}{2}$$

$$U = \frac{\kappa r^2}{2}$$

$$A_{12} = \frac{\beta}{r_1} - \frac{\beta}{r_2}$$

$$U = \frac{\beta}{r}$$

$$\beta = -Gm_1m_2$$

$$\beta = kq_1q_2$$

$$A_{12} = mg(z_1 - z_2)$$

$$U = mgz$$

Потенциальная энергия МТ в гравитационном поле отрицательна.

Энергия и работа

Полной механической энергией MT в силовом поле называется сумма ее потенциальной и кинетических энергий:

$$E = K + U$$

Полная механическая энергия MT в поле **консервативных сил сохраняется**, т.е. не меняется со временем:

$$E = \text{const}$$

– закон сохранения полной механической энергии.

$$A_{12} = K_2 - K_1$$

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Энергия и работа

Диссипативные силы – силы, при действии которых на механическую систему ее полная механическая энергия убывает, переходя в другие формы энергии, например, теплоту.

Приращение полной механической энергии ΔE равно сумме работ неконсервативных сил:

$$\Delta E = A_{12}^{\text{неконс}} + A_{12}^{\text{конс}} \longrightarrow A_{12}^{\text{конс}} = -\Delta U$$

$$\longrightarrow \Delta K = A_{12}^{\text{неконс}} - \Delta U$$

$$\Delta(K + U) = \Delta E_{\text{мех}} = A_{12}^{\text{неконс}} \longrightarrow E_2 - E_1 = A_{12}^{\text{неконс}}$$

– **закон сохранения полной механической энергии.**

если $\Delta E_{\text{мех}} = 0$

$$E_{\text{мех}} = K + U = \text{const}$$

Энергия и работа

Гироскопические силы – силы, зависящие от скоростей $\mathbf{MT}$ и действующие всегда перпендикулярно им.

Сила Лоренца

Работа гироскопических сил равна нулю при любом перемещении $\mathbf{MT}$.

Энергия и работа

потенциальная энергия МТ во внешнем поле.

$$A_{12} = U_1 - U_2$$

Внутренняя потенциальная энергия системы МТ или энергия взаимодействия - U

Система МТ, которые взаимодействуют центральными силами:

Для системы из 2 МТ: $\delta A_{12} = F_1 dr_1' \longrightarrow \delta A_{12} = -dU_{12}$
 $A_{12} = -\Delta U_{12}$

Для системы из 3 МТ: $A = \Delta(U_{12} + U_{23} + U_{13}) = -\Delta U_{\text{собр}}$

Каждой конфигурации системы МТ присуще свое значение внутренней потенциальной энергии и работа всех внутренних сил при изменении этой конфигурации равна убыли внутренней энергии системы.

$$A_{\text{внут}} = U^1_{\text{собр}} - U^2_{\text{собр}} = -\Delta U_{\text{собр}}$$

Энергия и работа

консервативными называют силы, зависящие только от конфигурации системы и суммарная работа которых не зависит от «пути» перехода, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы.

Внутренняя потенциальная энергия системы МТ не аддитивна:

$$U_{\text{cob}} = \sum U_n + U_{\text{вз}}$$

$$W = U_{\text{cob}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_i$$

U_i – потенциальная энергия взаимодействия i -той МТ со всеми остальными точками системы.

Энергия и работа

Энергия никогда не создается и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую

– универсальный закон сохранения энергии

Однородность времени означает, что если в два любых момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то начиная с этих моментов все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.

Потенциальная энергия – это мера движения тел, зависящая от взаимного расположения тел в системе и от их положений во внешнем силовом поле.

ДИНАМИКА

Энергия и сила

Энергия и сила

Сила – мера механического воздействия на тело со стороны других тел или полей.

Энергия – мера движения и взаимодействия всех видов материи.

$$A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

При элементарном перемещении $d\vec{r}$ $\delta A = -dU$

$-dU$ – убыль потенциальной энергии в направлении перемещения $d\vec{r}$

$$\delta A = (\vec{F}, d\vec{r}) = F_s ds \quad F_s ds = -dU$$

$$F_s = -\frac{\partial U}{\partial s}$$

Проекция силы поля в данной точке на направление перемещения совпадает с производной потенциальной энергии по данному направлению с обратным знаком.

Частная производная берется по определенному направлению.

Энергия и сила

Пусть $d\vec{r} \parallel OX \rightarrow d\vec{r} = \vec{i} \cdot dx \rightarrow (\vec{F}, d\vec{r}) = (\vec{F}, \vec{i}) dx = F_x dx$

F_x – Проекция вектора $\vec{F}$ на орт $\vec{i}$

$$F_x dr = -dU$$

$$\rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{Аналогично} \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\rightarrow \vec{F} = \vec{i} \cdot F_x + \vec{j} \cdot F_y + \vec{k} \cdot F_z$$

или

$$\vec{F} = -\left(\vec{i} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

В общем случае

$$d\vec{r} = \vec{i} \cdot dx + \vec{j} \cdot dy + \vec{k} \cdot dz$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$$

Энергия и сила

Градиент скалярной функции U

$$\overrightarrow{grad} = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U$$

$$\overrightarrow{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Оператор – это некое правило, согласно которому данной функции ставится в соответствие другая функция.

$$\overrightarrow{grad} \equiv \vec{\nabla}$$

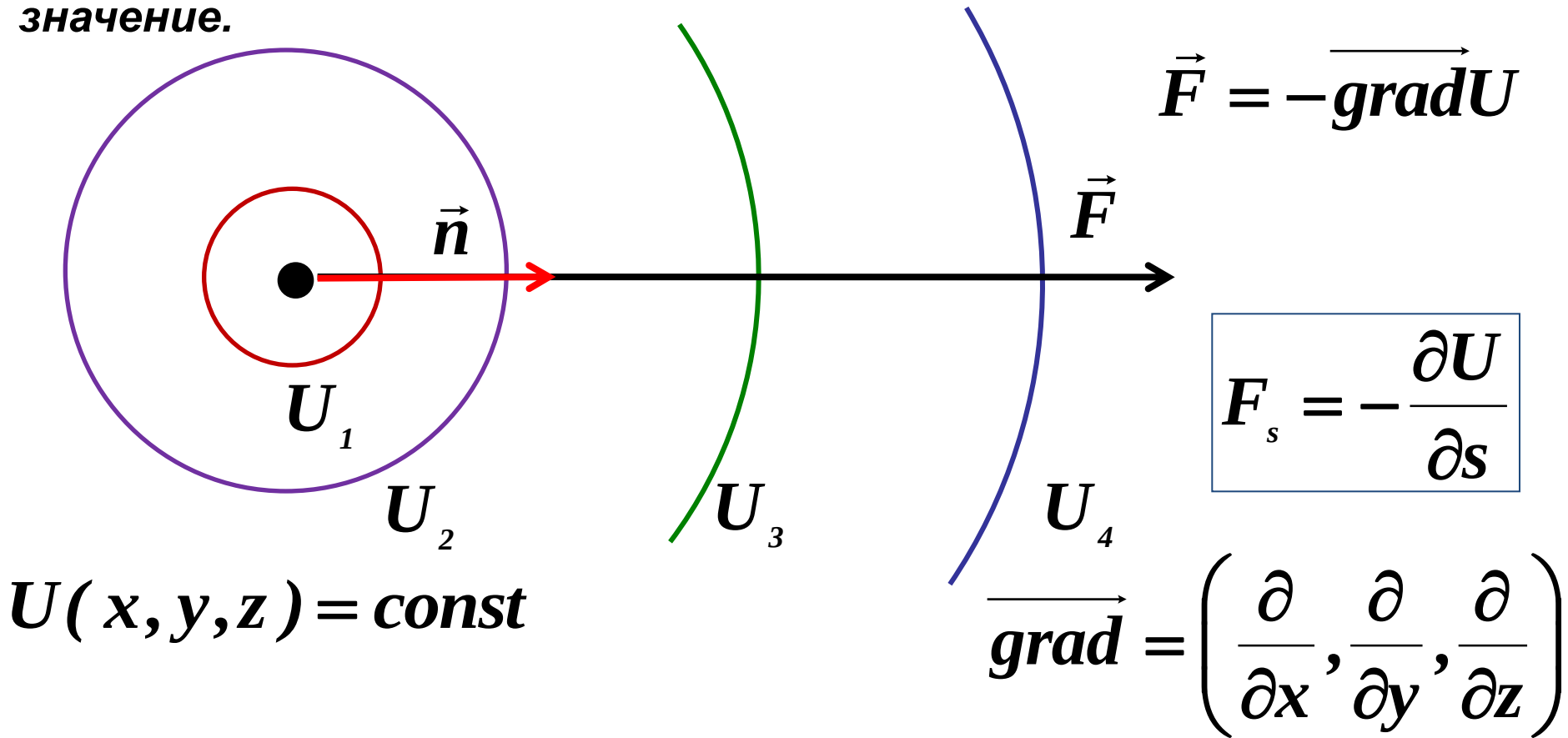
$$\vec{\nabla} = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

∇ – *набла*

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Энергия и сила

Эквипотенциальная поверхность – это поверхность, во всех точках которой потенциальная энергия имеет одно и тоже значение.



Градиент – это вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности в сторону быстрого роста функции, модуль которого равен скорости ее изменения в этом направлении.

Консервативные и потенциальные поля

Поле называется **потенциальным**, если его можно описать с помощью функции

$$\Phi = \Phi(x, y, z, t)$$

градиент которой определяет силу в каждой точке поля:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \Phi$$

Функция Φ называется **потенциальной функцией**.

Если потенциальная функция явно не зависит от времени, т.е.:

$$\Phi = \Phi(x, y, z)$$

то поле является стационарным, силы – консервативными, а потенциальная функция называется **потенциальной энергией**:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Поле консервативных сил является частным случаем потенциального силового поля.

Если поле потенциально, то оно обязательно консервативно.

Консервативное поле не обязательно является потенциальным.

ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика поступательного движения АТТ

Динамика поступательного движения АТТ

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}$$

Поскольку закон динамики поступательного движения АТТ совпадает с аналогичным уравнением для МТ, то

описание динамики поступательного движения АТТ сводится к описанию динамики МТ.

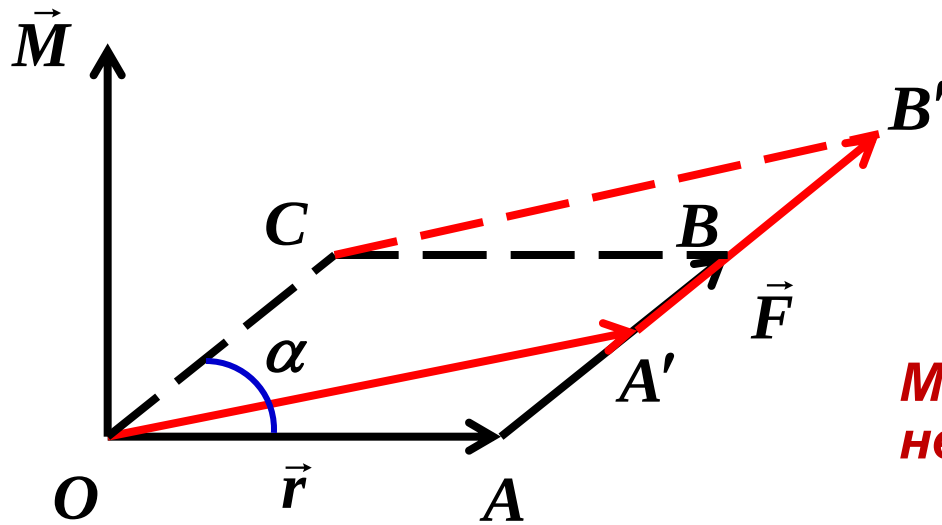
При поступательном движении АТТ можно рассматривать как систему МТ и считать массу тела сосредоточенной в одной точке, к которой приложены все внешние силы (центр масс системы).

ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика вращательного движения АТТ

**Момент силы и момент импульса
относительно неподвижной точки**

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки



**Момент силы относительно
неподвижной точки:**

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

Свойства:

- момент не изменится, если точку приложения силы перенести в любую другую точку, расположенную на линии действия силы.
- если линия действия силы проходит через точку O , то момент силы равен нулю.

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

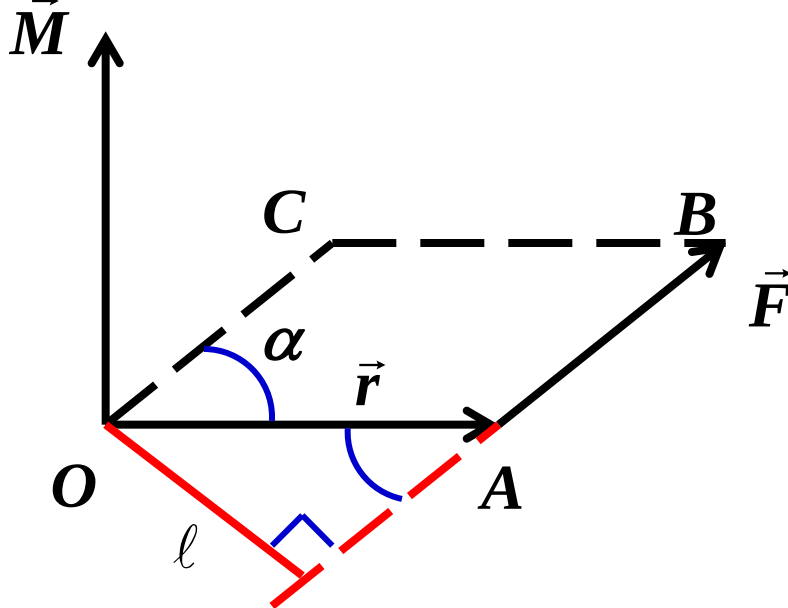
– момент равнодействующей двух или нескольких сил относительно одной неподвижной точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

$$[\vec{r}, \vec{F}] = [\vec{r}, \vec{F}_1] + [\vec{r}, \vec{F}_2]$$

– дистрибутивное
(распределительное) свойство

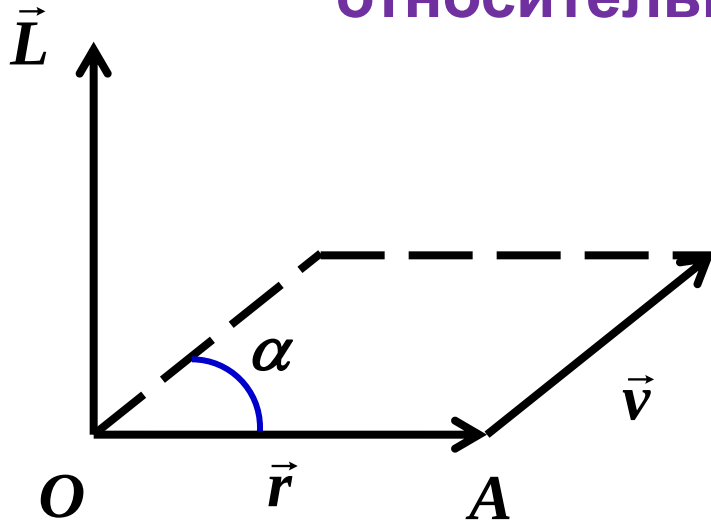


Плечо силы – кратчайшее
расстояние от неподвижной
точки до линии действия силы:

$$\ell = r \sin \alpha$$

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

*Момент импульса относительно
неподвижной точки:*



$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

Дифференцируем по времени $\rightarrow$

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$\rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right]$$

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p} \right] = [\vec{v}, m\vec{v}] = 0$$

$$\left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt} \right] = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$$

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad \text{Уравнение моментов}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$$

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$$

Производная по времени момент импульса $\vec{L}$ относительно неподвижного начала равна моменту силы $\vec{M}$ относительно того же начала.

Для системы MT :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}$$

Производная по времени момент импульса системы MT относительно неподвижного начала равна геометрической сумме моментов всех внешних сил относительно того же начала.

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

Пусть

$$\vec{M}^{\text{внеш}} = 0 \quad \boxed{\vec{L} = \sum \vec{L}_i(t) = \text{const}}$$

Если момент внешних сил относительно неподвижного начала равен нулю, то момент импульса системы МТ относительно того же начала остается постоянным во времени

– закон сохранения момента импульса.

***Изотропность пространства** означает, что протекание физических явлений в замкнутой системе не изменяется при ее повороте в пространстве.*

Лекция 6