Теория оценки погрешности

Доцент ИШФВП к.ф.-м.н. Аслаповская Юлия Сергеевна

Теория оценки погрешности

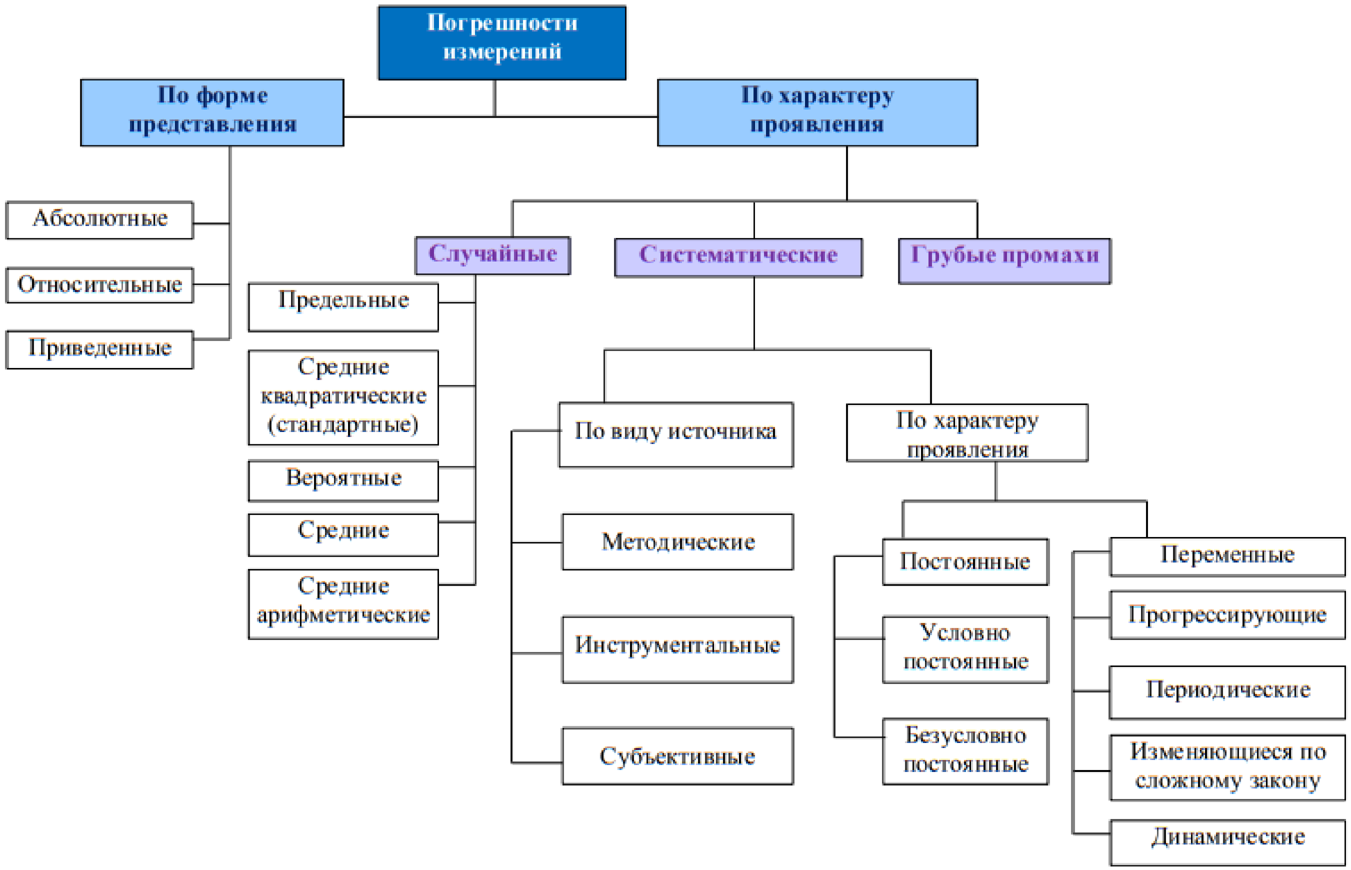
НЕ существует абсолютно точного значения величины!

Понятие «точность измерения», т.е. степень приближения результатов измерений к некоторому действительному значению, используется для качественного сравнения измерительных операций.

Н.С. Кравченко, О.Г. Ревинская
МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ В УЧЕБНОМ ЛАБОРАТОРНОМ ПРАКТИКУМЕ
Издательство тпу

Теория оценки погрешности

Понятие «точность измерения», т.е. степень приближения результатов измерений к некоторому действительному значению, используется для качественного сравнения измерительных операций.



Теория оценки погрешности

Обозначим через X результат измерения некоторой физической величины, а через X_0 – ее истинное значение, которое всегда неизвестно человеку, проводящему эксперимент.

Погрешность измерения – это отклонение результата измерений x от истинного 0 x (действительного) значения измеряемой величины

Теория оценки погрешности

В зависимости от формы представления различают **абсолютную**, **относительную** и **приведенную** погрешности измерений.

Систематические погрешности – это погрешности, при которых разность между истинным и измеренным значениями физической величины сохраняет свою величину и знак от опыта к опыту при равноточных измерениях.

- несовершенство используемой измерительной аппаратуры,
- несовершенство настройки измерительной аппаратуры;
- несовершенство используемого метода измерений;
- несовершенство навыков экспериментатора;
- несовершенство условий опыта;
- однотипное влияние окружающей среды.

Теория оценки погрешности

Случайные погрешности – это погрешности, при которых величина и (или) знак разности между истинным и измеренным значениями физической величины изменяются от опыта к опыту при измерениях, выполненных одинаковым образом и при одинаковых условиях.

- случайные вибрации отдельных частей прибора,
- кратковременные случайные изменения в окружающей среде (температурные, оптические, электрические, магнитные воздействия, изменение влажности, колебание воздуха),
- трение,
- физиологическое изменение органов чувств экспериментатора (например, утомление) и множество других причин, которые практически невозможно исключить.

Измерения бывают прямые и косвенные.

Случайная погрешность многократных измерений

Обозначим через x1, x2, …, x_n результаты отдельных измерений, а через $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$, …, $\Delta_n x$ – отклонения результатов измерений от истинного значения $x_0 = \overline{x}$:

$$\begin{array}{lcl} \Delta_1 x = \overline{x} - x_1, & & x_1 = \overline{x} - \Delta_1 x, \\ \Delta_2 x = \overline{x} - x_2, & & x_2 = \overline{x} - \Delta_2 x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{или} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta_n x = \overline{x} - x_n, & & x_n = \overline{x} - \Delta_n x,. \end{array}$$

Величина $\widetilde{x}$ – называется **средним арифметическим** $\widetilde{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}$ или $\widetilde{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Для конечного количества измерений n согласно теории вероятности и математической статистики среднеквадратичное отклонение □ ~ среднего арифметического значения n измерений.

Случайная погрешность многократных измерений

Для конечного количества измерений n согласно теории вероятности и математической статистики среднеквадратичное отклонение $\tilde{\sigma}$ среднего арифметического значения n измерений можно записать:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{(\tilde{x} - x_1)^2 + (\tilde{x} - x_2)^2 + \ldots + (\tilde{x} - x_n)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (\tilde{x} - x_i)^2}{n(n-1)}},$$

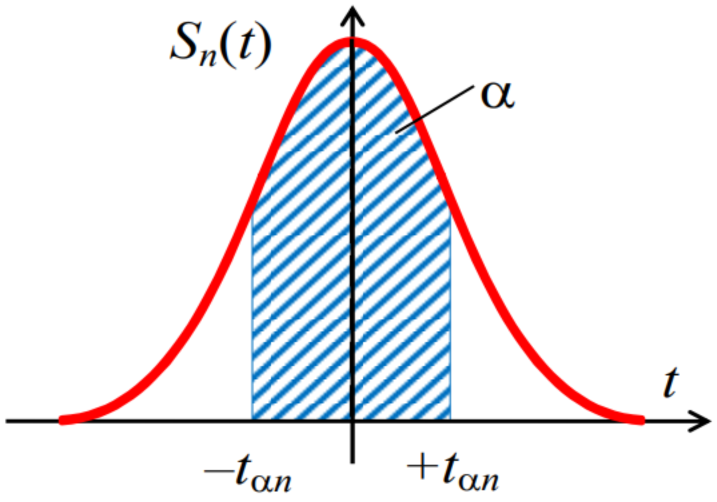
т.к. $\bar{x} = \tilde{x}, \quad при \quad n \to \infty.$

Результаты серии измерений можно записать $x = \tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}$ с доверительной вероятностью α.

Доверительным называется интервал значений , в который попадает истинное значение измеряемой величины с заданной вероятностью.

Закона Стьюдента

При числе измерений $2 \le n \le 10$ доверительный интервал $\Delta\tilde{x}$ определяется с помощью **распределения Стьюдента.**



Коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$ рассчитан на основе

Закона Стьюдента – это закон распределения ошибок измерений нормальных (Гауссовских) случайных величин.

Количество измерений n	Доверительная вероятность α, %			
	90	95	99	99,9
2	6,31	12,71	63,66	636,62
3	2,92	4,30	9,92	31,60
4	2,35	3,18	5,84	12,92
5	2,13	2,78	4,60	8,61
6	2,02	2,57	4,03	6,87
7	1,94	2,45	3,71	5,96
8	1,89	2,36	3,50	5,41
9	1,86	2,31	3,36	5,04
10	1,83	2,26	3,25	4,78
15	1,76	2,14	2,98	4,14
20	1,73	2,09	2,86	3,88
∞	1,645	1,960	2,577	3,292

Коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$

Случайную погрешность найдем как:

$$\Delta\tilde{x} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}.$$

Случайная погрешность многократных измерений

Вывод:

1. Вычислить среднее арифметическое значение результатов измерений $\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

2. Вычислить среднеквадратичное отклонение

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{(\tilde{x}-x_1)^2 + (\tilde{x}-x_2)^2 + \ldots + (\tilde{x}-x_n)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}-x_i)^2}{n(n-1)}} .$$

3. Выбрать доверительную вероятность $\alpha = 0{,}95$ (для большинства лабораторных работ в курсе общей физики).

4. По таблице определить коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$.

5. Определить доверительный интервал (абсолютную случайную погрешность серии многократных равноточных измерений)

$$\Delta\tilde{x}_{СЛ} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma}.$$

6. Записать результат в виде:

$x = \tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}_{СЛ}$ с доверительной вероятностью α.

Теория оценки погрешности

Погрешность однократных измерений При единичных (однократных) измерениях также существует определенная вероятность получить неточный результат. Эта вероятность связана, в частности, с точностью используемых измерительных приборов. В этом случае результат однократных измерений – это случайная величина подчиняется **равномерному распределению** (зависит от **параметра равномерного распределения d**).

Равномерное распределение непрерывной случайной величины.

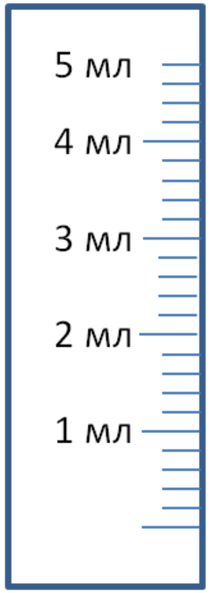
Самостоятельно! (см. слайд №2)

Способы определения приборных ошибок

Погрешность однократных измерений определяется характеристиками приборов используемых в эксперименте.

Цена деления прибора (Ц) – значение измеряемой величины, соответствующее самому малому делению шкалы.

Класс точности прибора (К) – значение приведенной погрешности для наибольшего и (или) наименьшего значений, которые можно измерить данным прибором



$$\text{цена деления} = \frac{(5-4)\ \text{мл}}{5} = 0{,}2\ \text{мл}$$

Либо $Ц = \frac{П}{С}$, где П – предел измерений, С – Общее количество делений. В итоге $Ц = \frac{5 мл}{25} = 0{,}2 мл$

Способы определения приборных ошибок

- Точность измерения (цена деления) указана непосредственно на приборе. Параметр равномерного распределения равен точности прибора d=Ц.
- На приборе указан класс точности прибора. Приборная погрешность рассчитается по формуле: $\delta x = \dfrac{K \cdot П}{100}$.

Параметр равномерного распределения равен погрешности прибора $d = \delta x$.

Погрешность прямых равноточных измерений

- Если на приборе не указаны ни точность измерения, ни класс точности:

  Приборы дискретного действия. Например, электронные часы, секундомеры, цифровые измерители напряжений, счетчики импульсов и т.п. Такие приборы являются приборами дискретного действия, и их абсолютная погрешность равна цене деления прибора, следовательно d = Ц.

- Стрелка может занимать любое положение на шкале. Например, линейки, рулетки, стрелочные весы, термометры и т.п. В этом случае абсолютная приборная ошибка равна половине цены деления шкалы, следовательно d=Ц/2.

Погрешность прямых равноточных измерений

Вывод:

Пусть мы имеем результаты прямых измерений величины х в виде $x_1, \ x_2, \ x_3, \ \cdots x_n,$

1. По результатам измерений величины x определяется среднее арифметическое значение для n измерений

$$\tilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,.$$

2. Вычисляется среднеквадратичное отклонение результатов измерений от среднего арифметического значения

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x} - x_i)^2}{n(n-1)}} \,.$$

3. Для доверительной вероятности α (например, для $\alpha = 0{,}95$) и количества измерений n по табл. 2 определяется коэффициент Стьюдента $t_{\alpha n}$ (стр. 29).

4. Рассчитывается длина доверительного интервала (абсолютная случайная погрешность) для многократных измерений

$$\Delta\tilde{x}_{СЛ} = t_{\alpha n}\tilde{\sigma} \,.$$

Погрешность прямых равноточных измерений

Вывод:

5. Оценивается длина доверительного интервала (абсолютная случайная погрешность) однократных измерений

$$\Delta\tilde{x}_{ОИ} = \alpha \cdot d,$$

где d – параметр равномерного распределения, связанный с ценой деления и (или) классом точности измерительного прибора (стр. 45). Если параметр равномерного распределения зависит от значения измеряемой величины, то в качестве этого значения используется $\tilde{x}$.

6. Определяется общая абсолютная погрешность серии измерений (доверительный интервал)

$$\Delta\tilde{x} = \sqrt{\Delta\tilde{x}^2_{СЛ} + \Delta\tilde{x}^2_{ОИ}}.$$

7. Окончательный результат записывается в виде

$x = \tilde{x} \pm \Delta\tilde{x}$ с доверительной вероятностью α.

8. Оценивается относительная погрешность результата измерений

$$\delta = \frac{\Delta\tilde{x}}{\tilde{x}} \cdot 100\%.$$

Относительная погрешность позволяет сравнивать неточности измерений разных по значению и (или) по размерности физических величин.

Погрешности косвенных измерений

Косвенные измерения – величина не измеряемая напрямую с прибора, а вычисляемая по результатам прямых измерений других величин.

Пусть при косвенных измерениях значение некоторой величины y находят следующим образом

$y = f(x_1, x_2, \cdots x_m)$, где $x_1, x_2, \cdots x_m$ – некоторые независимые величины.

Должны получить: $y = \tilde{y} \pm \Delta\tilde{y}.$

$\tilde{y} = f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots \tilde{x}_m)$ – значение средней величины

Погрешность косвенного измерения y –

$$\Delta\tilde{y} = \tilde{y}\sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \tilde{x}_1}\right)^2 \Delta\tilde{x}_1^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \tilde{x}_2}\right)^2 \Delta\tilde{x}_2^2 + \cdots \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \tilde{x}_m}\right)^2 \Delta\tilde{x}_m^2} =$$

$$= \tilde{y}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial \ln f}{\partial \tilde{x}_i}\right)^2 \Delta\tilde{x}_i^2}.$$

Вывод

Правила округления

Все цифры от 1 до 9 и нуль, если он стоит в середине или в конце числа, называются значащими

6100	– четыре значащих цифры,
$6{,}1\times10^3$	– две,
0,00209	– три,
2,39	– три,
2,3900	– пять,

Округление значений, непосредственно измеренных в эксперименте, не допускается.

Правила округления

- Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не изменяется.
- Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.
- когда первая из отбрасываемых цифр 5, а за ней есть одна или несколько цифр, отличных от нуля, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

Например:

число 35,856 можно получить: 36; 35,9; 35,86. 3.

- Отброшенные цифры в целой части числа заменяются нулями.

Например:

число 358,56 можно получить: 358,6 359; 360; 400.

Правила округления

При подсчете значения косвенного измерения без учета погрешности, записываем как минимум 4 знака после запятой, не забывая правильно округлить.

$$x = 7{,}2569$$

Запись окончательного результата измерений с учетом погрешности измерений

1. Величину абсолютной погрешности (доверительного интервала) округляют до второй (слева направо) значащей цифры, <u>если первая из них единица</u>, и до первой значащей цифры во всех остальных случаях.
2. Результат измерений (среднее арифметическое значение величины, полученное в результате прямых или косвенных измерений) округляют до того же разряда, что и абсолютная погрешность.

Например: $x = 13{,}828$

$\Delta x = 0{,}045$

С учетом погрешности

$(x \pm \Delta x)$

$(13{,}83 \pm 0{,}04)$ *ед.изм.*

Графическое представление результатов эксперимента

Правила построения графиков

1. Графики занимают как минимум половина тетрадной страницы с помощью линейки и карандаша либо с помощью специальных компьютерных программ.
2. На координатных осях должны быть указаны обозначения (наименования) откладываемых величин и единицы их измерения.
3. Начало координат выбирают таким образом, чтобы площадь графика была использована максимально. Поэтому оно (начало координат) может не совпадать с нулевым значением на одной или обоих координатных осях.
4. Экспериментальные точки изображаются четко и крупно в виде точек, крестиков, квадратов, ромбов и т.п.
5. Масштабные деления на координатных осях следует наносить равномерно. Координаты экспериментальных точек на осях не указывают, и линии, определяющие эти координаты, не проводят.

Графическое представление результатов эксперимента

Правила построения графиков

6. Масштаб выбирают таким образом, чтобы:
   a. Кривая, изображающая график зависимости, была максимально растянута вдоль обеих осей.
   b. Положение любой точки можно было определить легко и быстро.

Если требуется нанести на график погрешность:

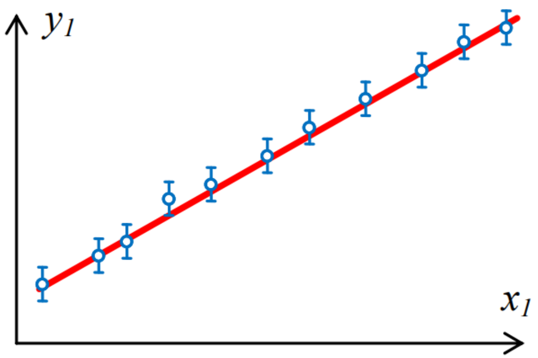


Рис. 13. График зависимости $y_1 = F_1(x_1)$

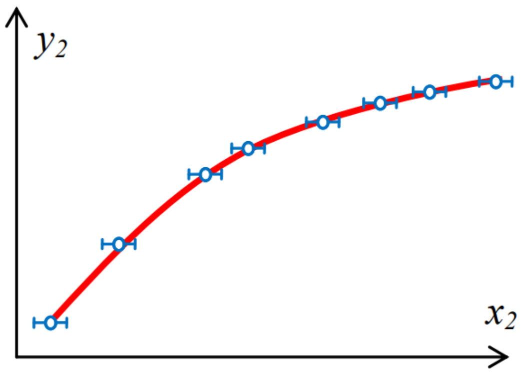
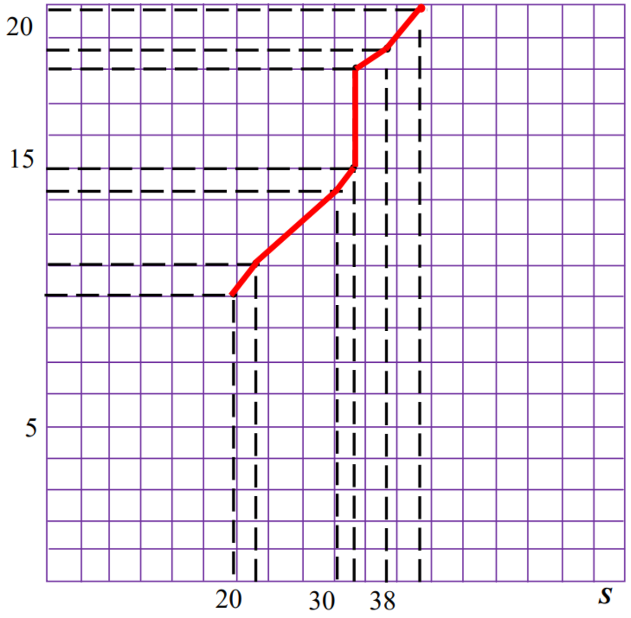


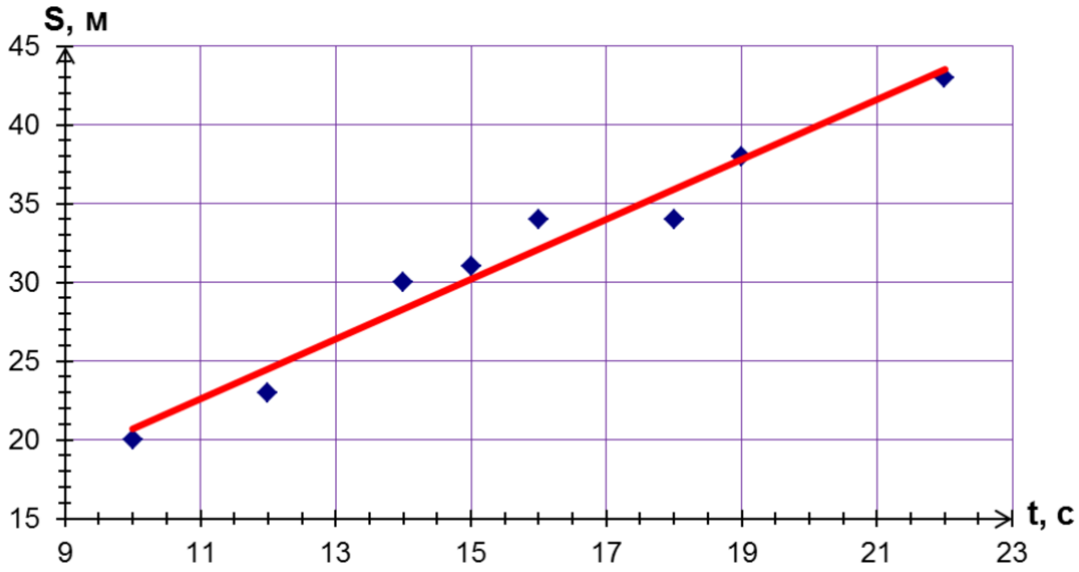
Рис. 14. График зависимости $y_2 = F_2(x_2)$

Типичные ошибки при построении графиков

Результаты измерения длины пути S и времени t

t, с	10	12	14	15	16	18	19	22
S, м	20	23	30	31	34	34	38	43

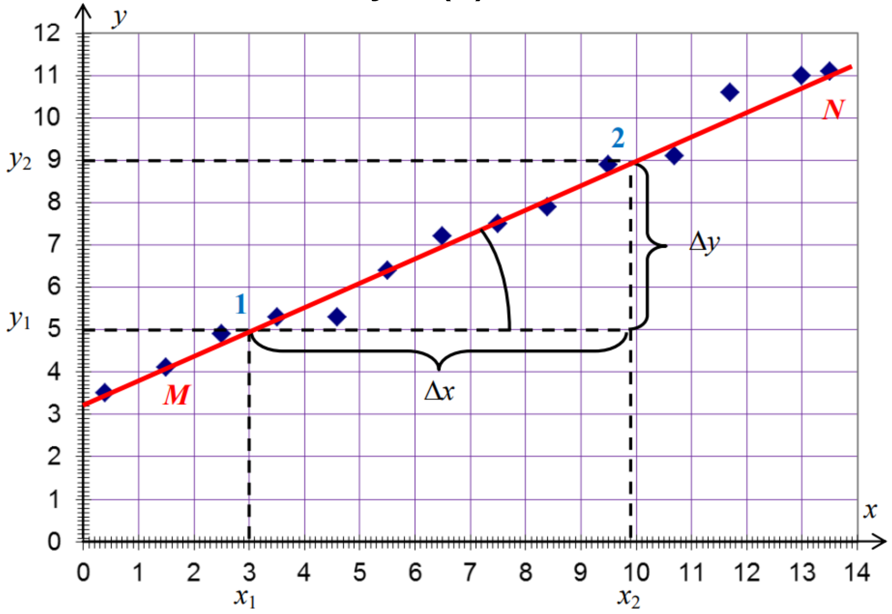




Графическое представление результатов эксперимента

Правила построения графиков

y=f(x)



Например, получены в результате измерений значения величин x и y.

x	0,4	**1,5**	2,5	3,5	4,6	5,5	6,5	7,5	8,4	9,5	10,7	11,7	13	**13,5**
y	3,5	**4,1**	4,9	5,3	5,3	6,4	7,2	7,5	7,9	8,9	9,1	10,6	11	**11,1**

1) Необходимо найти параметр А по наклону прямой y=f(x).

$$A = tg\alpha, \qquad tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

По графику

$$\Delta y = 9 - 5 = 4$$
$$\Delta x = 10 - 3 = 7$$

$$tg\alpha = \frac{4}{7} = 1{,}3333$$

$$A = 1{,}333$$

2) Необходимо по наклону прямой y=f(x) с помощью соотношения 1 определить параметр А.

$$A = 2\sqrt{\frac{C}{B}}\sqrt{\frac{K}{I}}, \; если \; \boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \sqrt{\frac{C}{B}} \qquad или \qquad A = \frac{\sqrt{K}\,2\Delta y}{\Delta x\sqrt{I}}.$$