Лекция 8. Теория тяготения Ньютона. Законы Кеплера

Теория тяготения Ньютона

И. Ньютон «Математические начала натуральной философии» 1687 г.

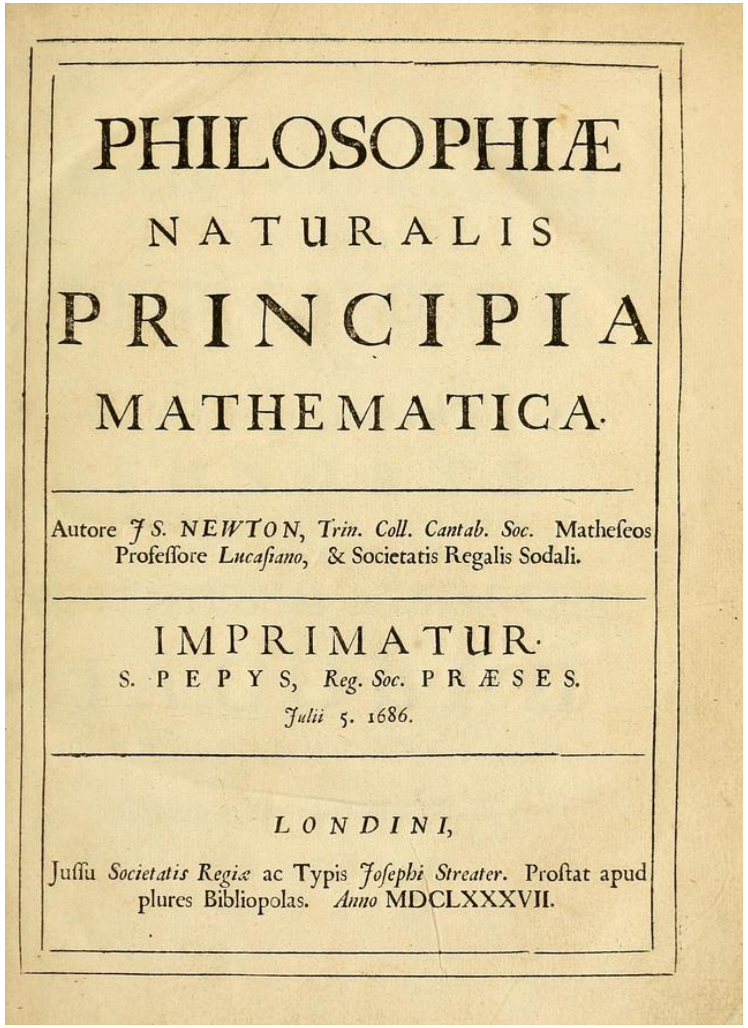
Закон всемирного тяготения: сила, с которой два тела притягиваются друг к другу, пропорциональна произведению масс этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$ – коэффициент пропорциональности,

называемый **гравитационной постоянной**.

Физический смысл гравитационной постоянной заключается в том, что она равна силе в 6,67· 10–11 Н, с которой два тела массой 1 кг каждое, их центры отдалены на расстояние 1 м, взаимно притягиваются друг к другу.


PHILOSOPHIÆ

NATURALIS

PRINCIPIA

MATHEMATICA.

Autore *J. S.* NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

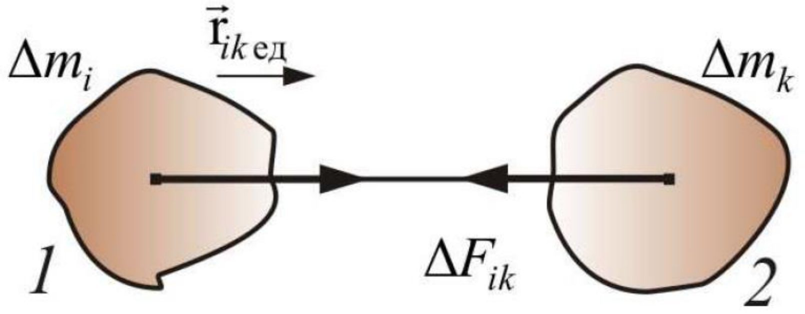
LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Теория тяготения Ньютона

Для определения силы взаимодействия тел, которые не могут рассматриваться как материальные точки, их нужно разбить на элементарные массы Δm, каждую из которых можно было бы принять за материальную точку

Тогда i-я элементарная масса тела 1 притягивается к k-й элементарной массе тела 2 с силой



$$\Delta\vec{F}_{ik} = \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\vec{r}_{ik\,\text{ед}},$$

где $\vec{r}_{ik}$ – единичный вектор (орт), направленный от Δm_i к Δm_k.

$$\vec{F}_{12} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma\frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2}\vec{r}_{ik\,\text{ед}}.$$

Если взаимодействующие тела представляют собой однородные шары, то вычисление последней суммы приводит к следующему результату:

$$\vec{F}_{12} = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_{12},$$

где $\vec{r}$ – расстояние между центрами шаров; $\vec{r}_{12}$ – единичный вектор, направленный от центра шара 1 к центру шара 2.

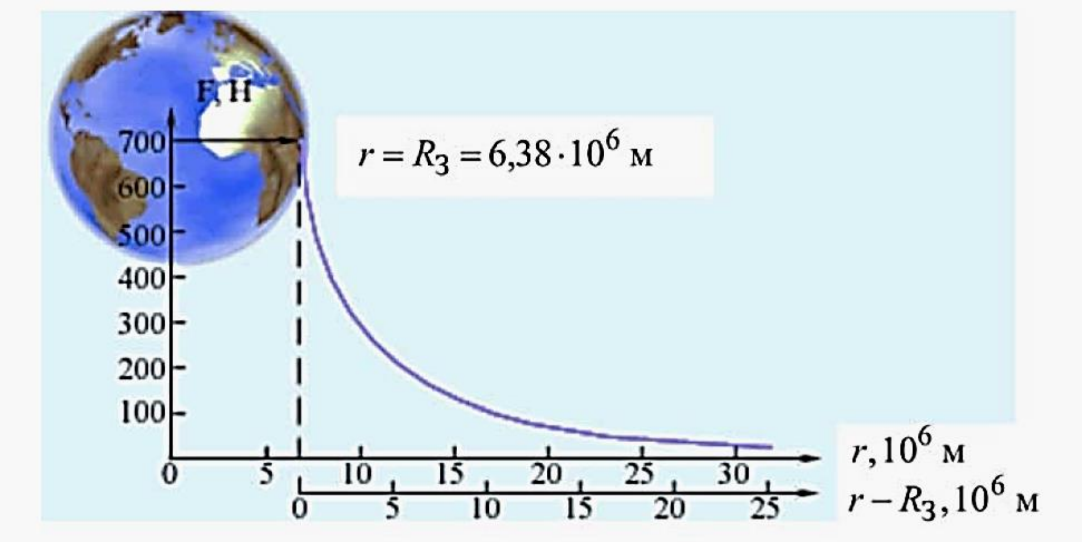
Теория тяготения Ньютона

Если маленькое тело m находится на поверхности большого шара M или близко к ней, то расстояние между центрами масс тел r можно считать равным радиусу большого шара R:

$$r = R.$$

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad \rightarrow \quad F = G\frac{Mm}{R^2}.$$

Сила притяжения убывает обратно пропорционально квадрату расстояния!



Теория тяготения Ньютона

Тяготение (гравитационное взаимодействие): Оно проявляется между телами, удаленными друг от друга.
Тяготение существует и в вакууме.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью поля тяготения (**гравитационного поля**).

Поле – это объективная реальность, посредством которой передается взаимодействие. **Поле**, наряду с веществом, **является одним из видов материи.**

Основное свойство поля тяготения, которое отличает его от других полей, состоит в том, что на любую материальную точку массой m, внесенную в это поле, действует сила притяжения F, пропорциональная m:

$\vec{F} = m\vec{G}$, или $\vec{G} = \dfrac{\vec{F}}{m}$, где $\vec{G}$ – вектор, названный **напряженностью поля тяготения.**

Теория тяготения Ньютона

Поле тяготения является **центральным** и **сферически симметричным.**

Центральное поле – поле во всех его точках вектора напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной и той же точке O, неподвижной относительно какой-либо инерциальной системы отсчета.

Точка O называется центром сил.

Центральное поле называют **сферически симметричным**, если численное значение вектора напряженности зависит только от расстояния r до центра сил O:

$$G = G(r).$$

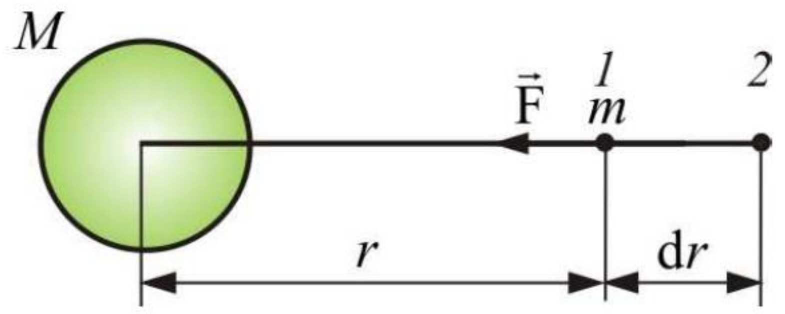
При наложении нескольких полей тяготения:

$$\vec{G} = \sum \vec{G}.$$

Этот принцип вытекает из принципа независимости действия сил и называется принципом суперпозиции (наложения полей).

Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

Силы тяготения являются консервативными - работа в поле этих сил зависит только от начального и конечного положения этих точек.



Определим работу по удалению материальной точки массой m от Земли массой M на расстояние r.

На данную точку в положении 1 действует сила $F = \gamma mM / r^2$, $dA = -\gamma \frac{mM}{r^2} dr$.

Общая работа: $$A = \int_{r_1}^{r_2} dA = -\int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} dr = m\left(\gamma \frac{M}{r_2} - \gamma \frac{M}{r_1}\right).$$

Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

Работа консервативных сил при перемещении точки m вдоль произвольного замкнутого контура L тождественно равна нулю:

$$\oint_L \vec{F}, d\vec{r} \equiv 0 \text{ или } \oint_L \vec{G}, d\vec{r} \equiv 0.$$

$\oint_L \vec{F}, d\vec{r}$ и $\oint_L \vec{G}, d\vec{r}$ – циркуляция соответствующих векторов $\vec{F}$ и $\vec{G}$ вдоль замкнутого контура.

Равенство нулю этих циркулирующих векторов является необходимым и достаточным признаком консервативности силового поля $\vec{F}$.

Работа А, совершенная консервативными силами, равна уменьшению потенциальной энергии системы.

Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

В данном случае работа равна уменьшению потенциальной энергии $\mathrm{E}_{\text{п}}$ материальной точки, перемещающейся в поле тяготения:

$$A_{12} = -\Delta E_{\text{п}} = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}\text{, или } \mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_{\text{п}}.$$

В случае поля тяготения, создаваемого материальной точкой с массой М

$$E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2} = -\gamma m M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

При рассмотрении гравитационного поля Земли:

$$E_{\text{п}} - E_{\text{п}3} = mgR_3^2\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{r}\right).$$

Принято считать, что потенциальная энергия на поверхности Земли равна нулю. При r = 0 в центре Земли

$$E_{\text{п}3} = -\frac{1}{2}mgR_3.$$

Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

Если условиться, что потенциальная энергия точки m стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от источника поля точки M

$$E_{\text{п}} = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

Потенциалом поля тяготения φ — энергетической характеристикой самого поля тяготения.

$$\varphi = \frac{E_{\text{п}}}{m} = -\sum_{i=1}^{n} \gamma \frac{m_i}{r_i},$$

Потенциал – величина скалярная.

Потенциал поля тяготения, создаваемый одной материальной точкой с массой M:

$$\varphi = -\gamma \frac{M}{r}, \quad \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i .$$

Между двумя характеристиками поля тяготения – напряженностью и потенциалом – существует взаимосвязь.

Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

$$\oint_L \vec{F}, d\vec{r} \equiv 0 \text{ или } \oint_L \vec{G}, d\vec{r} \equiv 0.$$

$$E_п = -\gamma \frac{mM}{r}.$$

следует, что $\vec{F} = m\vec{G}$, а $E_п = m\varphi$.

Так как $\vec{F} = -\nabla E_п$

то $m\vec{G} = -m\nabla\varphi$, откуда $\vec{G} = -\nabla\varphi$.

Таким образом, вектор напряженности $\vec{G}$ может быть выражен как градиент скалярной функции гравитационного потенциала φ:

$$\vec{G} = -\mathrm{grad}\varphi,$$

$$\mathrm{grad}\phi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

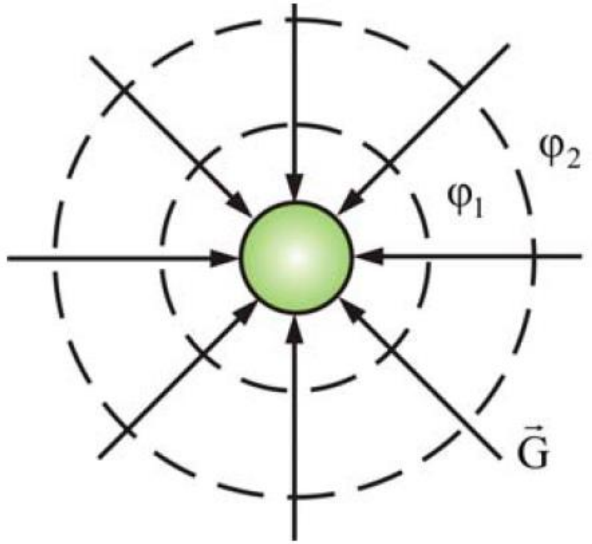
Вектор напряженности $\vec{G}$ направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала.

Работа в поле тяготения. Потенциал поля тяготения

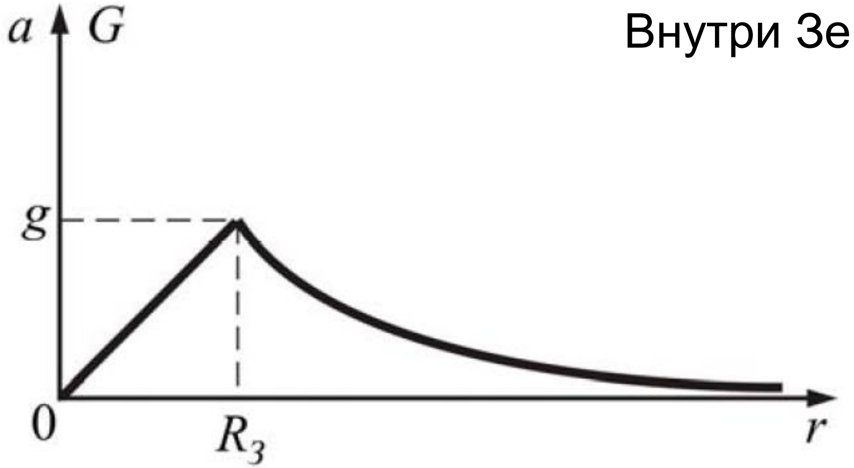
Гравитационное поле в графическом представлении

Вне Земли $a = gR_з^2/r^2$

Внутри Земли $a = gr/R_з$



Линии напряженности G и эквипотенциальные поверхности φ1 и φ2 гравитационного поля



Зависимость напряженности G и ускорения a от расстояния до центра Земли

Эквипотенциальные поверхности – геометрическое место точек с одинаковым потенциалом.

Линии напряженности $\vec{G}$ (силовые линии поля) всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям.

Принцип эквивалентности масс

Не следует ли различать инертную массу $\mathrm{m_{in}}$ и массу гравитационную (или тяготеющую) m_g ?

Всякое тело вблизи поверхности Земли испытывает силу притяжения

$$F = \gamma \frac{m_g M}{R_З^2} = m_g g \, .$$

Под действием этой силы тело приобретает ускорение

$$a = \frac{F}{m_{in}} = \gamma \frac{M}{R_З^2} \frac{m_g}{m_{in}} = g \frac{m_g}{m_{in}} \, .$$

$\mathrm{a} = g$, следовательно, $m_g = \mathrm{m_{in}}$

Тождественность инерциальной и гравитационной масс Эйнштейн положил в основу **общей теории относительности.**

Законы Кеплера. Космические скорости.

Начало XVI в. польский астрономом Н. Коперником (1473–1543).

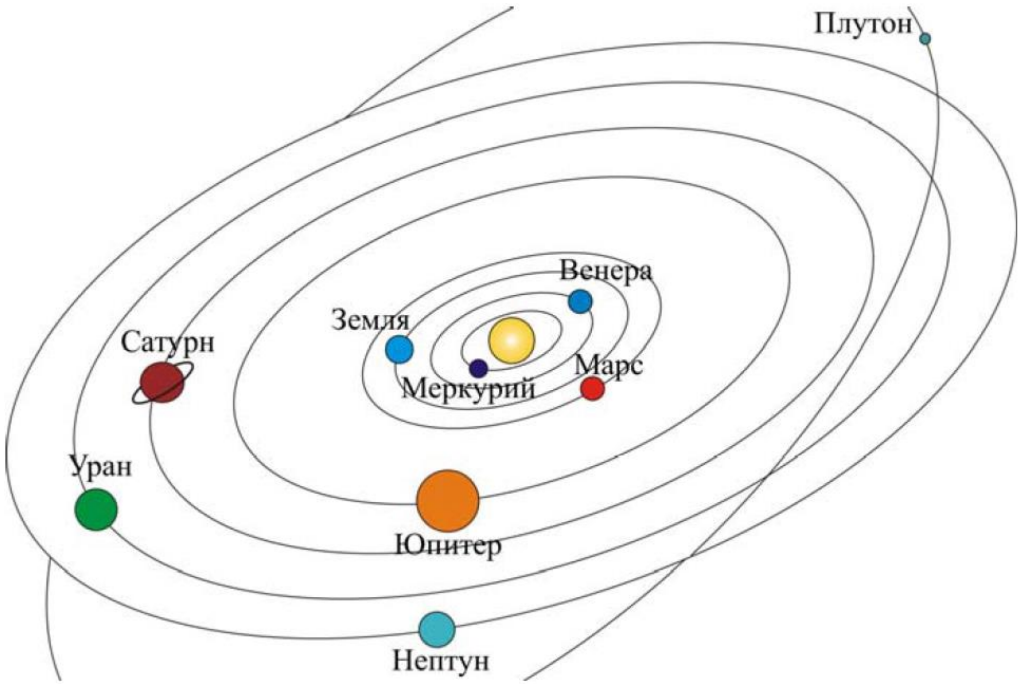
Гелиоцентрическая система, согласно которой движения небесных тел объясняются движением Земли (а также других планет) вокруг Солнца и суточным вращением Земли.

Между 1609 и 1619 годами немецкий математик, астроном, физик Иоганн Кеплер (1571 – 1630).

Получил законы движения планет вокруг Солнца

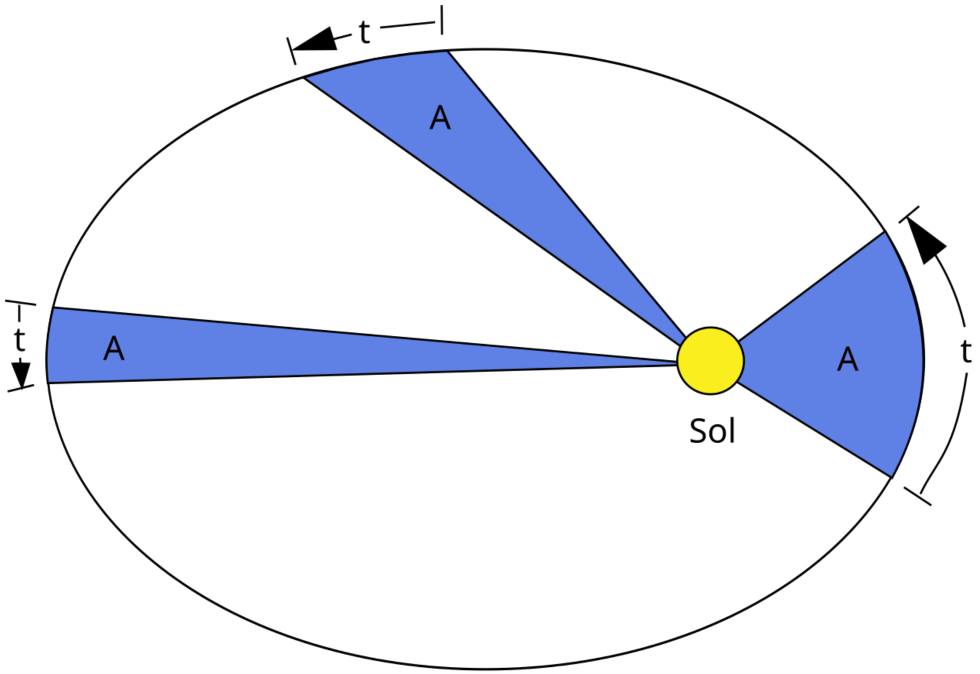
Законы Кеплера. Космические скорости.

Первый закон Кеплера. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которого находится Солнце.



Законы Кеплера. Космические скорости.

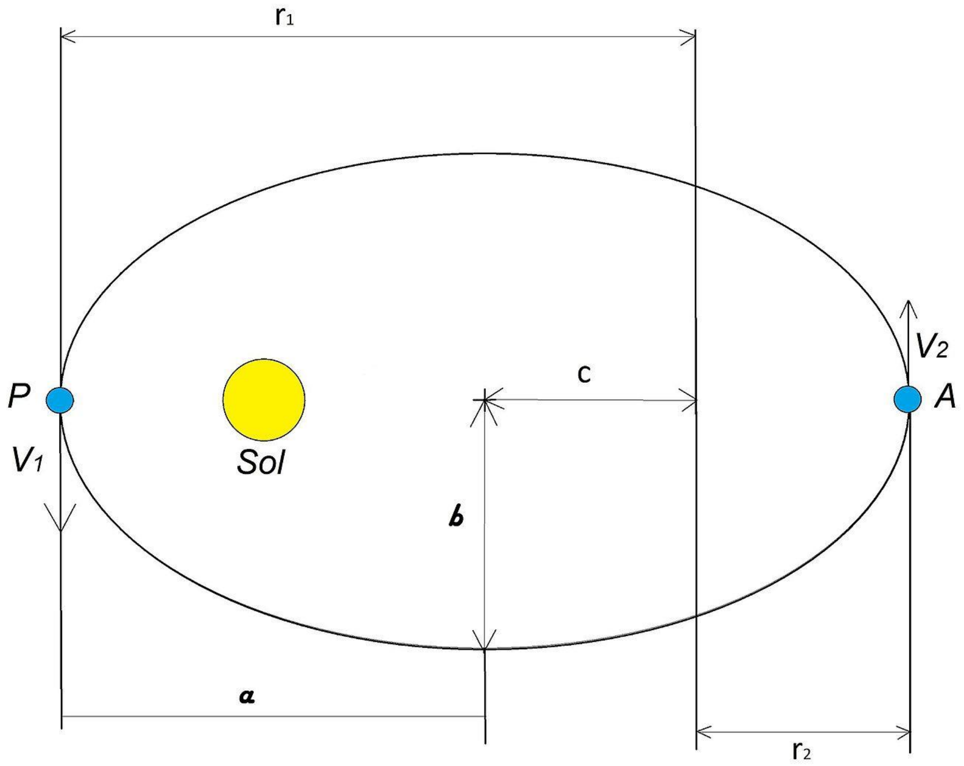
Второй закон Кеплера. Радиус-вектор планеты описывает в равные времена равные площади.



Законы Кеплера. Космические скорости.

Третий закон Кеплера. Квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит:

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3.$$



Законы Кеплера. Космические скорости.

Ньютон решил обратную задачу механики и из законов движения планет получил выражение для гравитационной силы

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

Если тело находится в гравитационном поле, его полная механическая энергия

$$E = E_к + E_п = \frac{m\upsilon^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} = \text{const}.$$

При E < 0 тело не может удалиться от центра притяжения на расстояние $r_0 > r_{max}$. В этом случае небесное тело движется по эллиптической орбите (спутники, планеты Солнечной системы, кометы),

При E = 0 тело движется по параболической траектории. Скорость тела на бесконечности равна нулю.

При E > 0 движение происходит по гиперболической траектории. Тело удаляется на бесконечность, имея запас кинетической энергии.

Законы Кеплера. Космические скорости.

Первой космической скоростью называется скорость движения тела по круговой орбите вблизи поверхности Земли

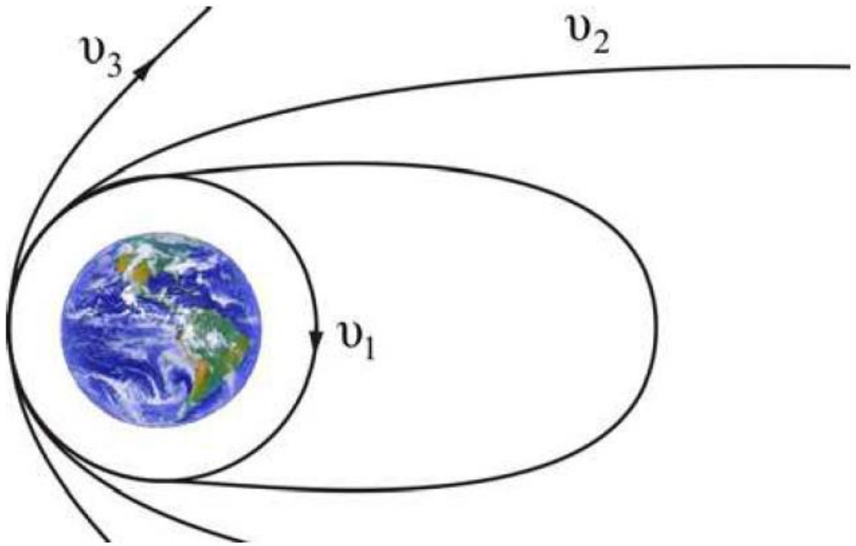
<u>Как получить?</u>

Центробежная сила должна уравновешиваться гравитационной силой:

$$\frac{m\upsilon_1^2}{R_З} = \gamma \frac{Mm}{R_З^2} = gm,$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR_З} \approx 7{,}9 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

где $R_о$ – радиус земной орбиты; $\mathrm{M_C}$ – масса Солнца.



Законы Кеплера. Космические скорости.

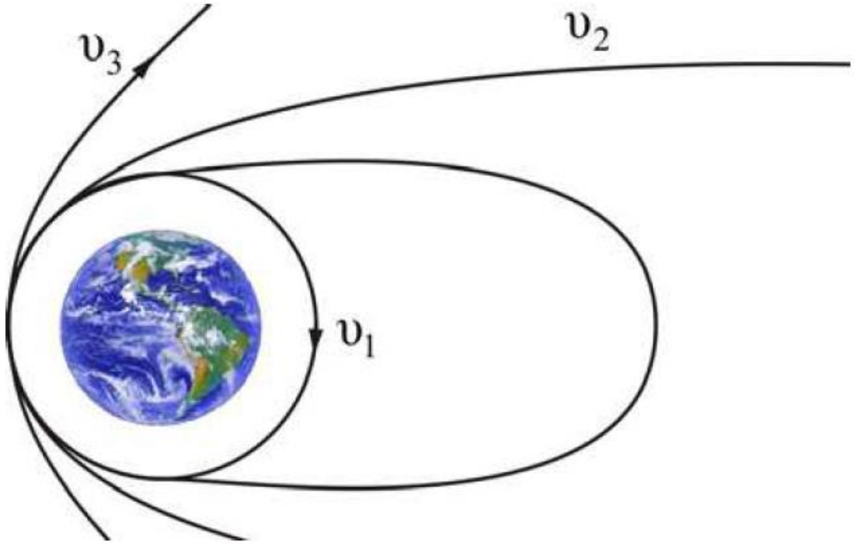
Второй космической скоростью называется скорость движения тела по параболической траектории. Она равна минимальной скорости, которую нужно сообщить телу на поверхности Земли, чтобы оно, преодолев земное притяжение.

<u>Как получить?</u>

Кинетическая энергия тела была не меньше работы по преодолению тяготения Земли:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = \int_R^\infty G\frac{mM}{r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{GmM}{R},$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gR_з} = \sqrt{2}\upsilon_1 \approx 11,2\cdot 10^3 \text{ м/с}.$$



Законы Кеплера. Космические скорости.

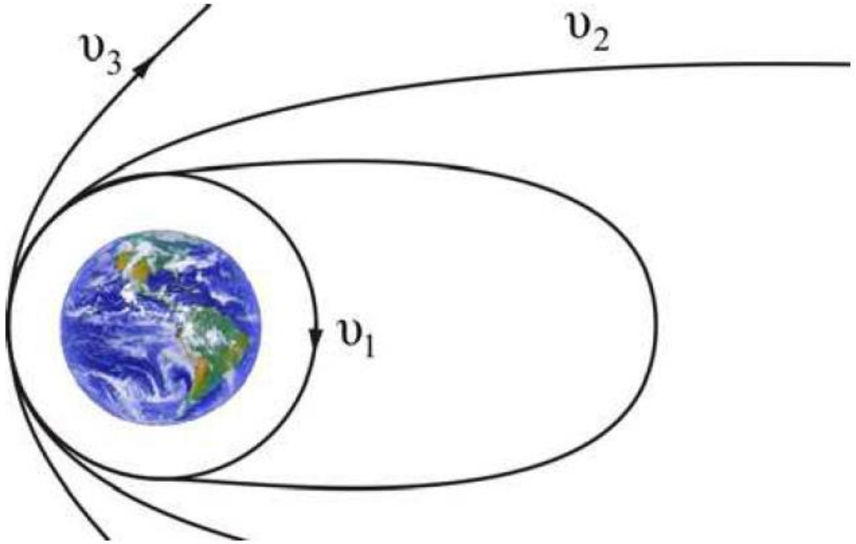
Третья космическая скорость – скорость движения, при которой тело может навсегда покинуть пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца.

<u>Как получить?</u>

из равенства кинетической энергии тела и его потенциальной энергии в поле Солнца при его удалении в бесконечность:

$$\frac{m\upsilon_3^2}{2} = \gamma \frac{mM_C}{R_o},$$

$$\upsilon_3 = \sqrt{\frac{2\gamma M_C}{R_o}} = 42{,}1 \cdot 10^3 \text{ м/с},$$



Законы Кеплера. Космические скорости.

С учетом того, что Земля вращается вокруг своей оси со скоростью 30 км/с, **значения третьей космической скорости зависят от направления запуска ракет** и изменяются в пределах от 16,6 до 73 км/с.

При оптимальном запуске $\upsilon_3 = 16{,}7 \cdot 10^3$ м/с.