Лекция 7. Динамика вращательного движения

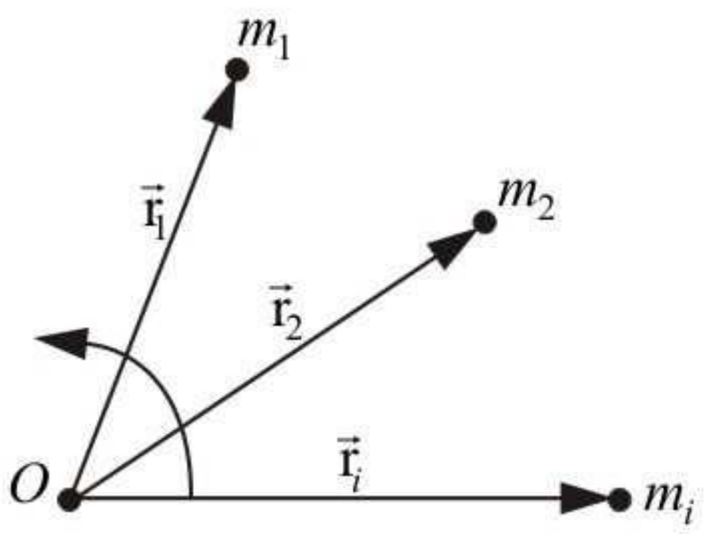
Вращательное движение твердого тела относительно точки

Рассмотрим твердое тело как некую систему, состоящую из n точек (m_1, m_2, … m_n).

$\vec{r}_i$ – радиус-вектор *i*-й точки, проведенный из точки *O* – центра неподвижной инерциальной системы отсчета.

$\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на *i*-ю точку,

$\vec{F}_{ik}$ – сила действия со стороны *k*-й точки на *i*-ю.



Вращение системы материальных точек вокруг точки О – центра неподвижной инерциальной системы отсчета

Запишем основное уравнение динамики для точки:

$$\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \vec{F}_{ik} + \vec{F}_i.$$

Умножим обе части этого уравнения векторно на $\vec{r}_i$

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)\right] = \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Вращательное движение твердого тела относительно точки

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i)\right] = \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right] = \sum_k \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Момент импульса (количества движения) $\vec{L}_i$ точки относительно точки – Векторное произведение $\vec{r}_i$ точки на ее импульс :

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right], \text{ или } \vec{L} = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right].$$

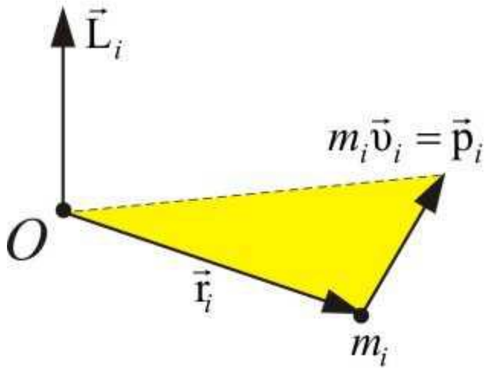
Для материальной точки массой m момент импульса

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right].$$

Вращательное движение твердого тела относительно точки

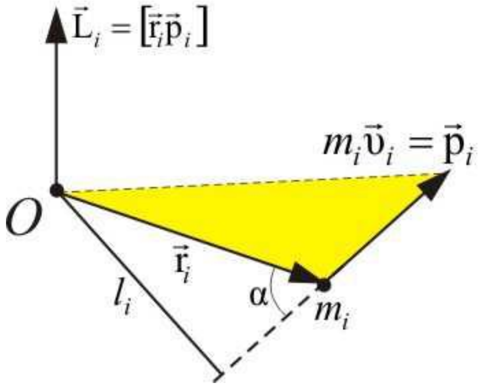
$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right], \text{ или } \vec{L} = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right].$$

Три вектора образуют правую тройку векторов, связанных ≪правилом буравчика≫



Три взаимно перпендикулярных вектора

$$\vec{L} = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right]; \; L_i = p_i r_i$$



Величина момент импульса

$$\left|\vec{L}_i\right| = L_i = p_i r_i \sin\alpha = pl$$

Плечо импульса — это понятие, связанное с вращательным движением. Оно определяется как кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия импульса (или вектора импульса).

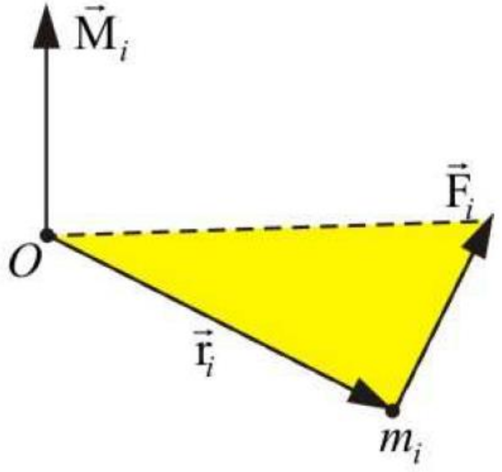
Направление вектора $\vec{L}_i$ ортогонально плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$, а величина этого вектора

$$\left|\vec{L}_i\right| = L_i = p_i r_i \sin\alpha = pl\,, \quad \text{где} \quad l = r\sin\alpha \quad \text{– плечо импульса}$$

Вращательное движение твердого тела относительно точки

Момент силы $\vec{M}_i$ – Векторное произведение $\vec{r}_i$, проведенного в точку приложения силы, на эту силу.

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i].$$

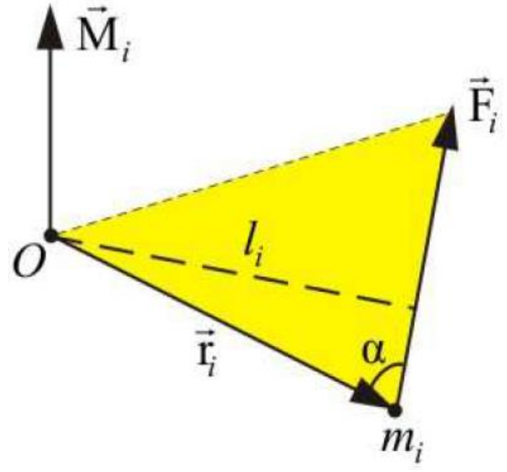


Пусть l_i – плечо силы $\vec{F}_i$, Так как $\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$, то

$$\left|\vec{M}_i\right| = M_i = F_i r_i \sin\alpha = F_i l_i . \qquad \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \vec{M}_i .$$

Запишем систему n уравнений для всех точек системы и сложим их левые и правые части:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \vec{M}_{ik} + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i . \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt},$$



где $\vec{L}$ – момент импульса системы, $\vec{M}$ – результирующий момент всех внешних сил относительно точки O.

Плечо силы — кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы.

Вращательное движение твердого тела относительно точки

Так как $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$, то $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\vec{M}_{ik} = 0.$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}.}$$

– уравнением моментов.

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела, вращающегося вокруг точки.

Сравним с основным уравнением динамики поступательного движения:

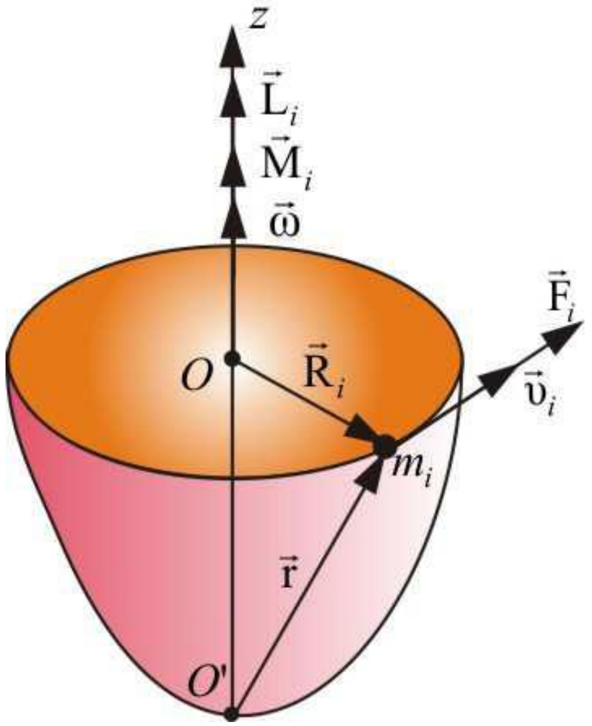
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$$

Вращательное движение твердого тела относительно оси

Пусть некоторое тело вращается вокруг оси z.

Получим уравнение динамики для некоторой точки m_i этого тела, находящегося на расстоянии $\vec{R}_i$ от оси вращения,

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i \text{, или } \frac{d}{dt}[\vec{R}, m_i\vec{\upsilon}] = \vec{M}_i .$$



Поскольку $\vec{\upsilon}_i$ у всех точек разная, введем вектор угловой скорости $\vec{\omega}$,

причем $\vec{\omega} = \frac{v}{R}$. Тогда $\frac{d}{dt}\left(m_i R_i^2 \vec{\omega}\right) = \vec{M}_i$.

Так как тело абсолютно твердое, то в процессе вращения m_i и $\vec{R}_i$ останутся неизменными. Тогда

$$m_i R_i^2 \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_i .$$

Вращательное движение твердого тела относительно точки

Пусть J_i – **момент инерции** точки массой m_i, находящейся на расстоянии $\vec{R}_i$ от оси вращения.

$$\boxed{J_i = m_i R_i^2.}$$

Момент инерции тела служит мерой инертности при вращательном движении, так же как **масса** – мера инертности при поступательном движении.

Момент инерции системы (тела):

$$J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2.$$

Вращательное движение твердого тела относительно точки

В случае непрерывного распределения масс: $$J = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m = \int_0^V \rho R^2 \mathrm{d}V,$$

где ρ – плотность тела; dV – объем малого элемента тела массы dm, отстоящего от оси вращения на расстоянии R.

Просуммировав выражение по всем i –м точкам, получим:

Основное уравнение динамики тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

$$\boxed{J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathrm{M}}, \quad \text{или} \quad J\vec{\varepsilon} = \vec{\mathrm{M}}.}$$

Для момента импульса $\vec{L}$ тела, вращающегося вокруг оси z, имеем:

$$J\mathrm{d}\vec{\omega} = \vec{\mathrm{M}}\mathrm{d}t; \; J\mathrm{d}\vec{\omega} = \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}};$$

$$\vec{\mathrm{L}} = J\vec{\omega}.$$

$\vec{L}$ и $\vec{M}$ – динамические характеристики вращательного движения, направленные всегда вдоль оси вращения.

Моменты инерции некоторых тел.

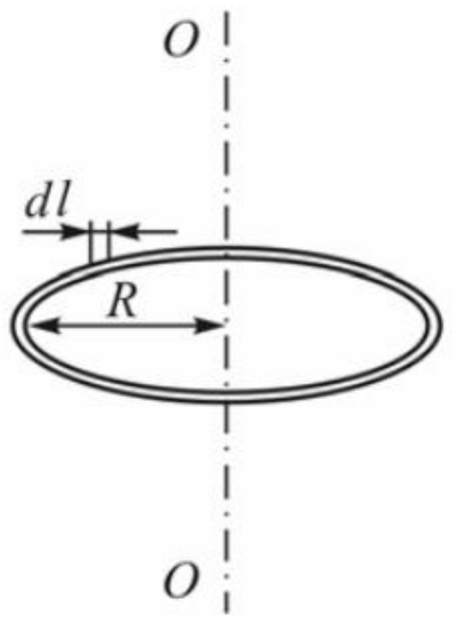
Тонкое кольцо радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр перпендикулярно плоскости кольца.

dl – длинна малых дуговых элементов. Масса элемента dm,

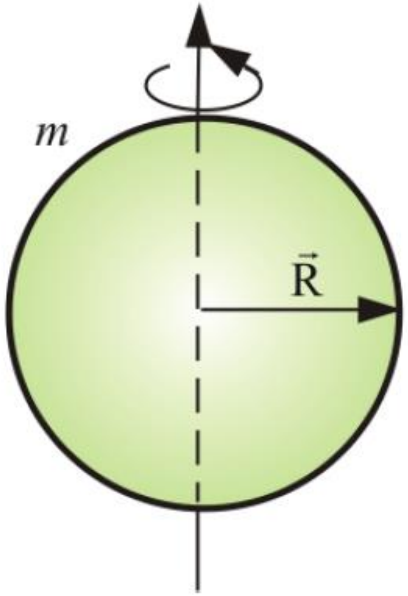
$$dm = \frac{m}{2\pi R} dl.$$

Учтем $J = \int_0^m R^2 \mathrm{d}m$ и проинтегрируем по всей длине окружности $l = 2\pi R$:

$$I = \int_0^{2\pi R} R^2 \frac{m}{2\pi R} dl = mR^2 .$$



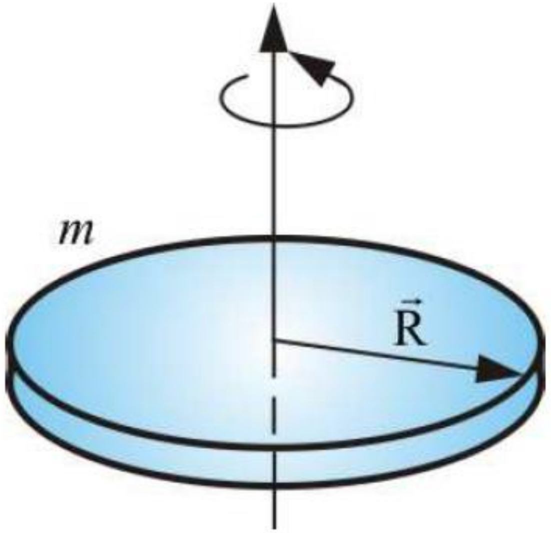
Моменты инерции некоторых тел.



Шар

$k = \frac{2}{5}$; $J_c = \frac{2}{5} mR^2$;

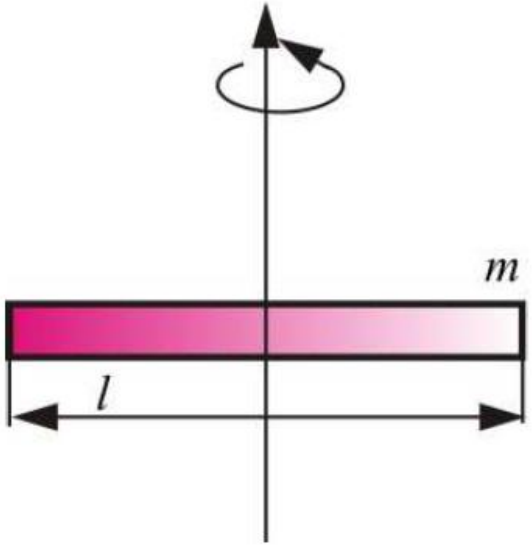
Сфера $J_c = \frac{2}{3} mR^2$;



Диск

$k = \frac{1}{2}$; $J_c = \frac{1}{2} mR^2$;

Обруч $J_c = mR^2$;



Стержень

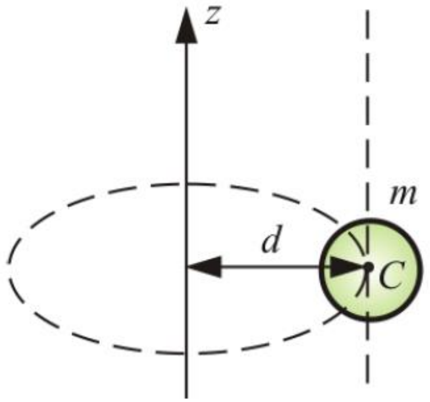
$k = \frac{1}{12}$;

$J_c = \frac{1}{12} ml^2$.

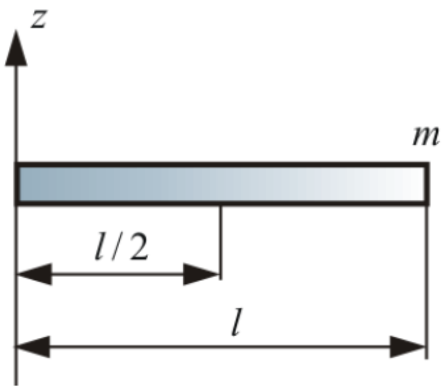
Теорема Гюйгенса-Штейнера

При вычислении момента инерции тела, вращающегося вокруг оси, не проходящей через центр инерции, следует пользоваться теоремой о параллельном переносе осей, или теоремой Гюйгенса-Штейнера

$$J = J_c + md^2 .$$



Теорема Гюйгенса-Штейнера – момент инерции тела J относительно любой оси вращения равен моменту его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.



Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия – величина аддитивная

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}.$$

Если тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью $\vec{\omega}$, то линейная скорость i-й точки $\vec{\upsilon}_i = \vec{\omega} R_i$, R_i – расстояние до оси вращения.

$$K_{\text{вращ}} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i R_i^2 = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Полная кинетическая энергия движущегося твердого тела

$$K_{\text{полн}} = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2}.$$

Здесь J_c – момент инерции относительно мгновенной оси вращения, проходящей через центр инерции.

Закон сохранения момента импульса

Для замкнутой системы тел момент внешних сил М всегда равен нулю

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \equiv 0, \qquad \vec{L} = \text{const},$$

или

$$J\vec{\omega} = \text{const}.$$

Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени.

Аналогично для замкнутой системы тел, вращающихся вокруг оси z,

$$\frac{d\vec{L}_z}{dt} = \vec{M}_z \equiv 0, \quad \text{отсюда} \quad \vec{L}_z = \text{const}, \quad \text{или} \quad J_z\vec{\omega} = \text{const}.$$

Закон сохранения момента импульса является прямым следствием законов Ньютона и изотропности пространства – эквивалентности свойств пространства в различных направлениях.

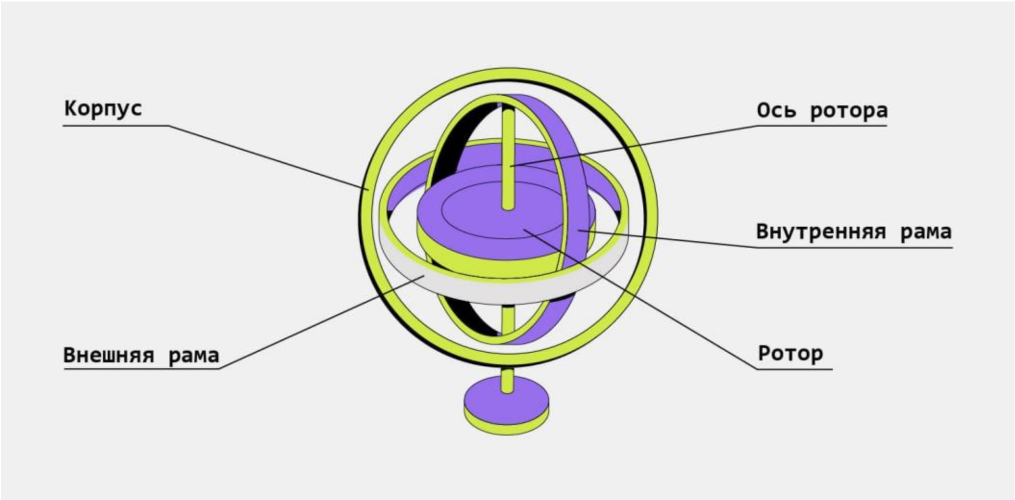
Гироскоп

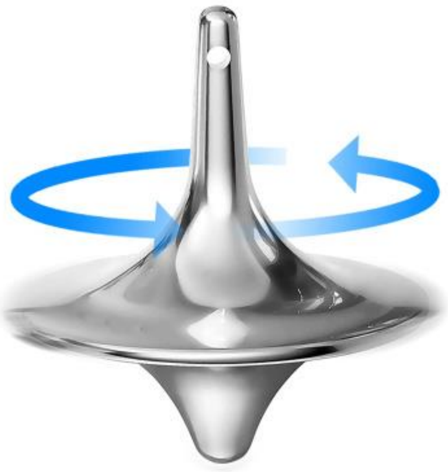
Гироскоп – быстро вращающееся тело, имеющее три степени свободы.

принцип сохранения углового момента: любое вращающееся тело стремится сохранить свою ориентацию в пространстве, то есть держится вертикально.

Первый «настоящий» гироскоп, изобретённый в XVI веке итальянским математиком и физиком Джероламо Кардано.

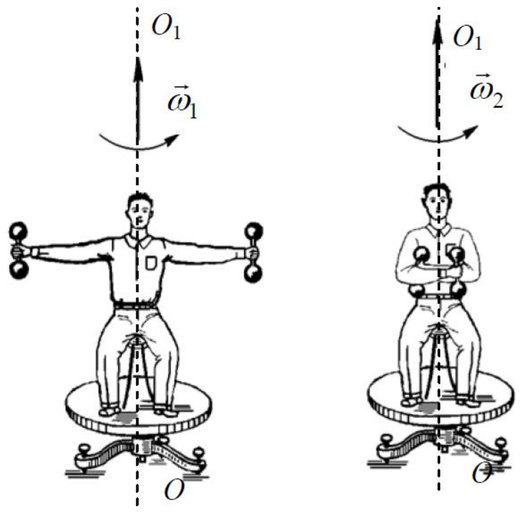
Карданов подвес





Скамья Жуковского

Пример 1: рассмотрим случай вращательного движения человека, находящегося на скамье Жуковского.



Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится.

Пример 2: человек стоит на неподвижной скамье Жуковского и держит в руках ось массивного колеса так, что она является продолжением оси OO_1 вращения скамьи.

Вначале скамья не вращается, поэтому суммарный момент импульса системы равен нулю $0 = L$, после того как колесо раскрутили суммарный момент импульса системы равен сумме моментов импульса колеса и скамьи.

Скамья вращается в противоположном направлении вращению колеса.

Связь между линейными и угловыми величинами

Поступательное движение		Вращательное движение	
Кинематика			
Путь	$s = \int_0^t \upsilon \mathrm{d}t;$ $s = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	Угол поворота	$\varphi = \int_0^t \omega \mathrm{d}t;$ $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$
Скорость	$\upsilon = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t};$ $\upsilon = \upsilon_0 \pm at$	Угловая скорость	$\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t};$ $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$
Ускорение	$a = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
$s = R\varphi;\ \upsilon = R\omega;\ \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n;\ a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};\ a_n = \upsilon^2/R = \omega^2 R;\ a_\tau = R \cdot \varepsilon$			

Связь между линейными и угловыми величинами

Динамика			
Масса	m	Момент инерции	J
Основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$; $m\vec{a}=\vec{F}$	Основное уравнение динамики вращательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$; $J\vec{\varepsilon}=\vec{M}$
Импульс	$\vec{p}=m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$\vec{L}=J\vec{\omega}$
Закон сохранения импульса	$m\vec{\upsilon}=\mathrm{const}$	Закон сохранения момента импульса	$J\vec{\omega}=\mathrm{const}$
Работа	$A=F\cdot s$	Работа вращения	$A=M\cdot\varphi$
Мощность	$N=F\cdot\upsilon$	Мощность	$N=M\cdot\omega$
Кинетическая энергия	$E_к=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{P^2}{2m}$	Кинетическая энергия вращающегося тела	$E_к=\frac{J\omega^2}{2}=\frac{L^2}{2J}$
Энергия тела, катящегося с высоты h		$mgh=\frac{m\upsilon^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2}$	
Потенциальная энергия сжатой пружины		$E_п=\frac{kx^2}{2}$	
Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия		$E_п=\gamma\frac{M\cdot m}{r}$; $E_п=mgh$	