Лекция 6. Энергия. Работа. Мощность. Законы сохранения.

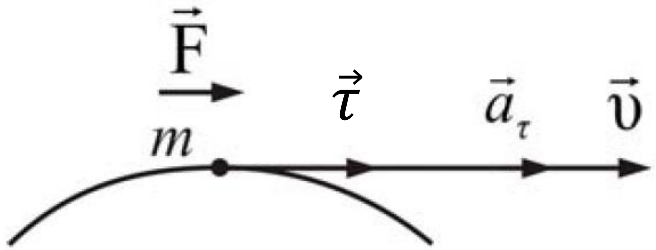
Кинетическая энергия. Работа и мощность

$$\frac{dr}{dt} = v$$

Универсальной количественной мерой движения и взаимодействия всех видов материи является **энергия.**

Кинетическая энергия $E_к$ – физическая скалярная величина, являющаяся мерой механического движения тел.

Пусть тело массы m движется под действием силы $\vec{F}$



$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F},$$ или $$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_\tau$$ $\times v$

получим: $m\upsilon\, d\upsilon = F_\tau\, dr.$ $\quad m\upsilon\, d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right)$, тогда $d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = F_\tau dr.$

Если $\vec{F}^{внеш} = 0$ и $F_\tau = 0$, тогда и $d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = 0.$

Кинетическая энергия

Если $\vec{F}^{\text{внеш}} = 0$ и $F_\tau = 0$, тогда и $d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = 0.$

Функция состояния системы, определяемая только скоростью ее движения, называется **кинетической энергией:**

$$\boxed{E_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2}.}$$

Кинетическая энергия системы есть функция состояния движения этой системы

Кинетическая энергия - величина аддитивная:

$$E_{\text{к}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}.$$

Связь кинетической энергии с импульсом:

$$E_{\text{к}} = \frac{p^2}{2m}.$$

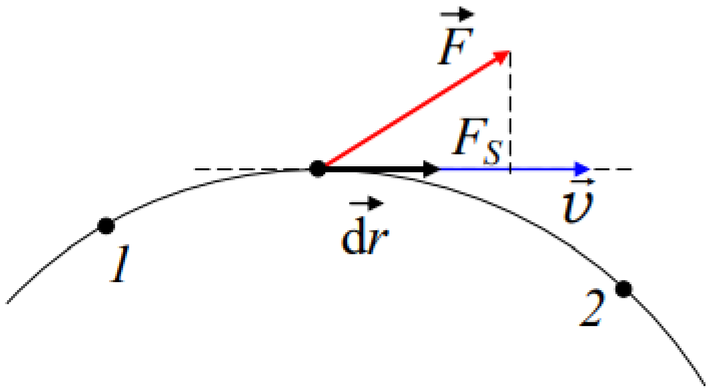
Связь кинетической энергии с работой

Элементарная работа по перемещению тела из одной точки в другую:

$$dA = Fdr,$$

$$A = \int_1^2 Fdr = m\int_1^2 \upsilon d\upsilon = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2},$$

$$\text{или } A = \int_1^2 Fdr = E_{к2} - E_{к1}.$$



Работа силы, приложенной к телу на пути r, численно равна изменению кинетической энергии этого тела:

$$A = \Delta E_к, \text{ или } dE_к = dA.$$

Мощность – Скорость совершения работы (передачи энергии) называется

Связь кинетической энергии с работой

Мощность N – **Мощность** — это физическая величина, которая характеризует скорость выполнения работы или передачи энергии. Она показывает, сколько работы совершается за единицу времени.

Мгновенная мощность $N = \frac{dA}{dt}$, или $N = F\frac{dr}{dt} = F\upsilon$.

Средняя мощность $\langle N \rangle = \frac{A}{\Delta t}$.

Энергия и работа измеряются в СИ в единицах произведения силы на расстояние, т. е. в ньютонах на метр; $1\ \text{Н} \cdot \text{м} = 1\ \text{Дж}$.

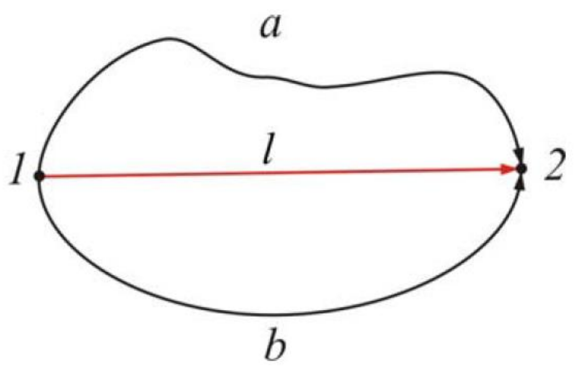
Кроме того, в качестве единицы измерения энергии используется внесистемная единица – электрон-вольт (эВ); 1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Мощность измеряется в ваттах; 1 Вт = 1 Дж/с.

Консервативные силы и системы

Консервативные силы – силы работа которых не зависит от пути, по которому двигалось тело, а зависит от начального и конечного положения тела.

Пусть A – работа консервативных сил по перемещению тела из точки 1 в точку 2.



$$A_{1a2} = A_{1b2} = A_{1l2} = A_{12}.$$

работа консервативных сил вдоль замкнутой кривой равна нулю:

$$\oint_L F\mathrm{d}r = A_{12} + A_{21} = A_{12} - A_{12} = 0\,.$$

L $\oint_L \vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}r$ - циркуляцией вектора F или интеграл по замкнутому контуру.

Следовательно, если циркуляция какого-либо вектора силы равна нулю, то эта сила консервативна.

Консервативные силы и системы

Сила тяжести (гравитация)

Пример: Когда вы поднимаете предмет с пола на стол, работа силы тяжести зависит только от разницы высот (начального и конечного положения), а не от того, по какому пути вы подняли предмет (прямо вверх, по наклонной плоскости или по лестнице).

Сила упругости (пружина)

Пример: Если вы растягиваете или сжимаете пружину, работа силы упругости зависит только от начального и конечного положения пружины, а не от того, как именно вы её деформировали.

Сила гравитации в космосе

Пример: Когда спутник движется по орбите вокруг Земли, работа гравитационной силы зависит только от начальной и конечной точек орбиты, а не от формы орбиты.

Потенциальная энергия

Кинетическая энергия $\vec{E}_к$ – энергия движения.

Потенциальная энергия $\vec{E}_п$ – энергия взаимодействия тел или частиц тела, зависящая от их взаимного расположения.

Работа, совершаемая консервативными силами:

$$A_{12} = E_{п1} - E_{п2},$$

$E_п(x, y, z)$ – функция состояния системы, зависящая только от координат всех тел системы в поле консервативных сил.

$$\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_п.$$

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии!

$E_п$ при гравитационном взаимодействии

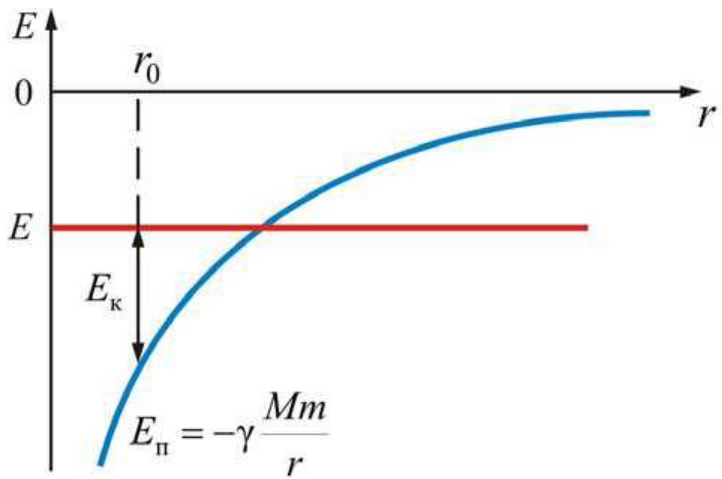
Работа тела при падении $A = mgh$ или $A = E_п - E_{п0}$.

Условились считать, что на поверхности Земли ($h = 0$) $E_{п0} = 0$, тогда $E_п = A$, т. е.

$$E_п = mgh.$$

Для случая гравитационного взаимодействия между массами M и m, находящимися на расстоянии r друг от друга, потенциальную энергию можно найти по формуле:

$$E_п = -\gamma \frac{Mm}{r}$$



Здесь полная энергия: $E = E_к + E_п$.

Кинетическая: $E_к = E - E_п$.

Потенциальная энергия упругой деформации

(пружины, стержня)

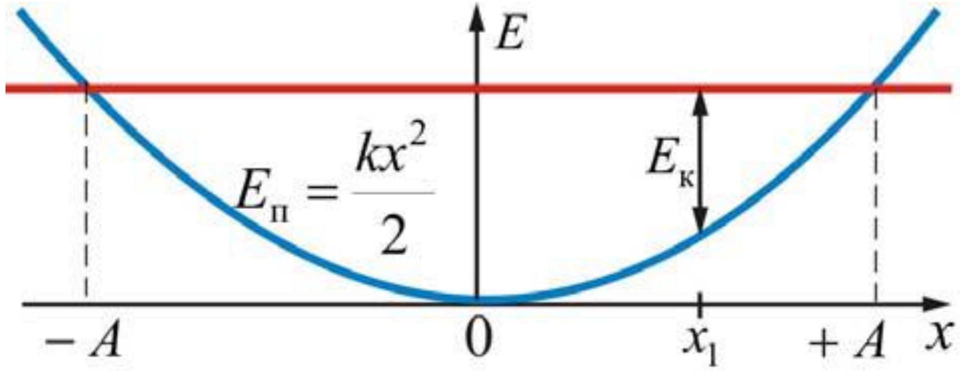
Найдем работу, совершаемую при деформации упругой пружины.

Сила упругости: $F_{\text{упр}} = -kx$, где k – коэффициент упругости.

Элементарная работа $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x = -kx\mathrm{d}x$ - работа совершена над пружиной.

Тогда $A = \int \mathrm{d}A = -\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}$, т. е. $A = E_{\text{п}1} - E_{\text{п}2}$.

Примем $E_{\text{п}2} = 0,\ E_{\text{п}1} = E_{\text{п}}$, тогда $E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}$.



$$E = E_{\kappa} + E_{n}$$

$$E_{\text{к}} = E - E_{\text{п}}.$$

Связь между потенциальной энергией и силой

Потенциальное поле – пространство, в котором действуют консервативные силы, называется.

Между силой $\vec{F}$ и $\vec{E}_{п}$ должна быть связь!

Известно, что $\mathrm{d}A = \vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}$; и $\mathrm{d}A = -\mathrm{d}E_{п}$, следовательно $\vec{\mathrm{F}}\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} = -\mathrm{d}E_{п}$, тогда

$$\vec{\mathrm{F}} = -\frac{\mathrm{d}E_{п}}{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}}.$$

Для компонент силы по осям *x, y, z* можно записать, что

$$F_x = -\frac{\partial E_{п}}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial E_{п}}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial E_{п}}{\partial z}.$$

Так как вектор силы $\vec{\mathrm{F}} = F_x\vec{\mathrm{i}} + F_y\vec{\mathrm{j}} + F_z\vec{\mathrm{k}}$, то получим

$$\vec{\mathrm{F}} = -\left(\frac{\partial E_{п}}{\partial x}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial E_{п}}{\partial y}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial E_{п}}{\partial z}\vec{\mathrm{k}}\right) = -\nabla E_{п} = -\mathrm{grad}E_{п},$$

Связь между потенциальной энергией и силой

Так как вектор силы $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, то получим

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_п}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_п}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_п}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_п = -\mathrm{grad} E_п,$$

где ∇ – оператор Гамильтона (оператор набла), $\boxed{\mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.}$

Градиент – это вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции.

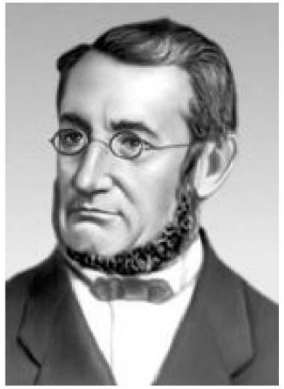
Следовательно, консервативная сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому со знаком минус:

$$\boxed{\vec{F} = -\mathrm{grad} E_п.}$$

Закон сохранения механической энергии

Доказали закон сохранения и превращения энергии:

Дж. Джоуль



Ю. Майер

Г. Гельмгольц

Рассмотрим систему, состоящую из N частиц.

Силы взаимодействия между частицами ($\vec{F}^{\text{внутр}}$) – консервативные.

$$E = K + U_{\text{внутр}} + U_{\text{внеш}} = \text{const}\,.$$

Закон сохранения для механической энергии: полная механическая энергия консервативной системы материальных точек остается постоянной.

Закон сохранения механической энергии

Для замкнутой системы, т. е. для системы, на которую не действуют внешние силы, можно записать:

$$E = K + U_{\text{внутр}} = \text{const}\,,$$

Закон сохранения для полной механической энергии – в замкнутой системе материальных точек, между которыми действуют только консервативные силы полная механическая энергия остается постоянной.

Если в замкнутой системе действуют <u>неконсервативные</u> силы, то полная механическая энергия системы <u>не сохраняется </u>– частично она переходит в другие виды энергии, неконсервативные.

Для системы из *N* материальных точек полная механическая энергия выражается как:

$$E_{\text{полная}} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{m_i v_i^2}{2} + U_i \right),$$

Закон сохранения механической энергии не выполняется:

Диссипативная система – система в которой механическая энергия переходит в другие виды энергии, сам процесс перехода называется **диссипацией энергии**.

Диссипативные силы — это силы, которые вызывают потерю механической энергии в системе, которая переходит в другие, не механические формы энергии, например, в теплоту.

В диссипативной, изолированной от внешнего воздействия системе остается постоянной сумма всех видов энергии – полная энергия (механическая, тепловая + другие формы).

Пример диссипативных сил:

Силы вязкого или сухого трения;
Сила аэродинамического сопротивления воздуха.

Условие равновесия механической системы

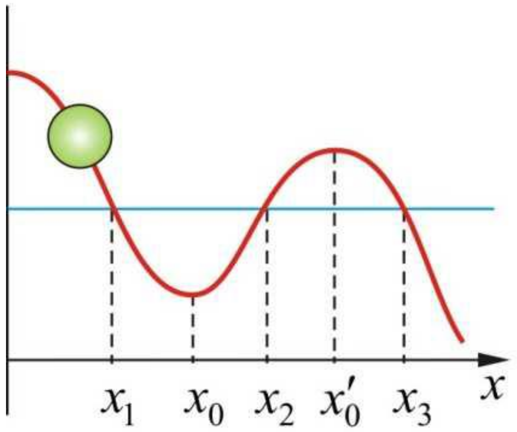
Механическая система будет находиться в равновесии, если на нее не будет действовать сила.

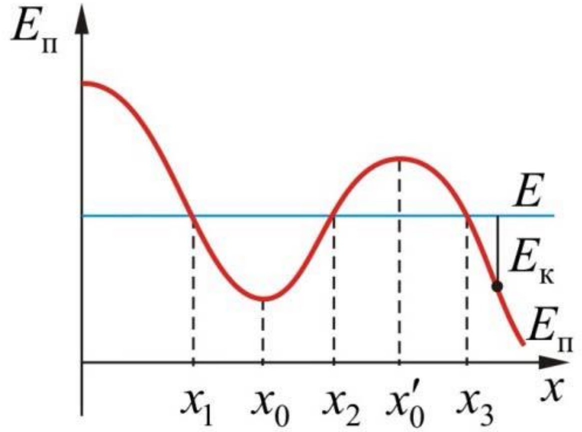
Мерой устойчивости тела в положении равновесия является наименьшее значение работы.

Из двух тел более устойчивым является тело, для выведения которого из положения равновесия требуется совершение большей работы.

Рассмотрим пример:

Пусть шарик, скользит без трения по изогнутой проволоке. Взаимное расположение тел системы может быть определено с помощью координаты x.



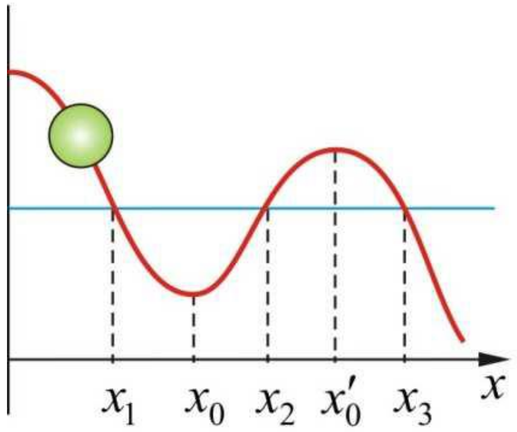


Условие равновесия механической системы

$F_x = 0$ – условие равновесия системы.

$$\left|\vec{\mathrm{F}}_x\right| = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}.$$

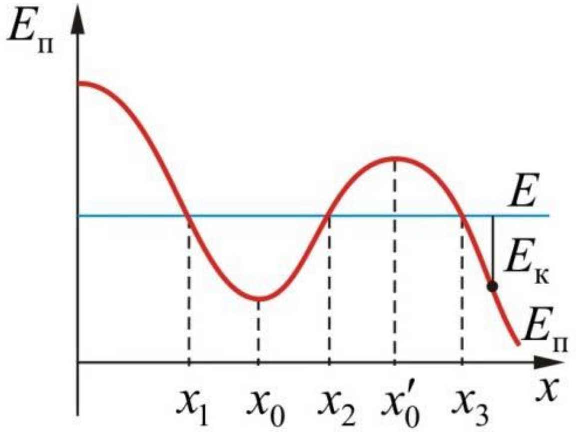
Следовательно, при $\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x} = 0$ система будет находиться в состоянии равновесия.



Именно так находят положение точек экстремума.

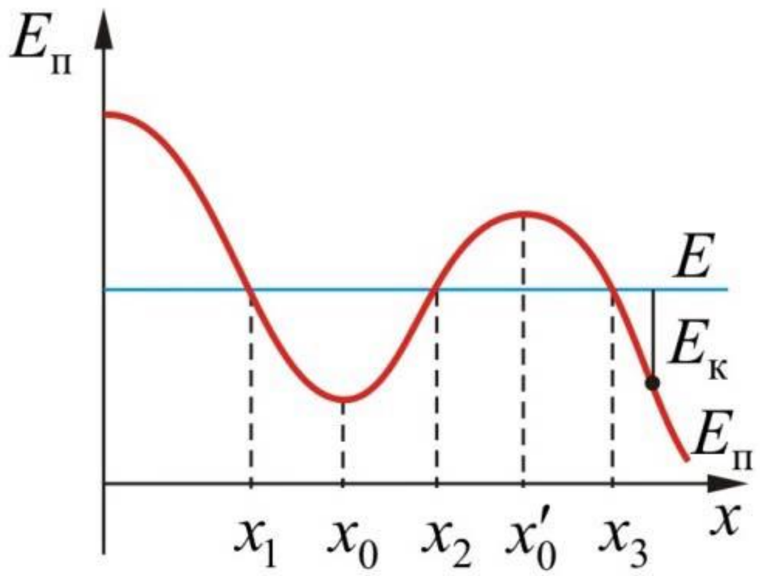
$$\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x} = 0 \text{ при } x = x_0 \text{ и } x = x_0':$$

- при $x_0{}'$ $\mathrm{E}_{\text{п}} = max$ – состояние неустойчивого равновесия;
- при x_0 $\mathrm{E}_{\text{п}} = min$ – система находится в устойчивом равновесии.



Достаточным условием равновесия является равенство минимуму значения $\mathrm{E}_{\text{п}}$.

Условие равновесия механической системы



Потенциальная яма – область между x_1 и x_2.

Потенциальный барьер – область между x_2 и x_3.

Удар

Удар – любое кратковременное взаимодействие тел, результатом которого является значительное изменение скорости их движения.

Центральный удар шаров – это удар, при котором центры масс шаров лежат на одной прямой.

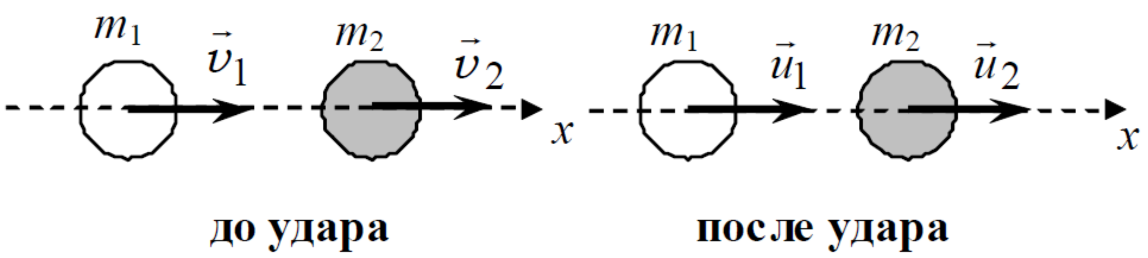
Исследование движения сталкивающихся тел с помощью законов Ньютона достаточно непростая задача (для этого нужно было бы знать, какие силы возникают при соприкосновении тел и как они изменяются в процессе соударения.)

Два сталкивающихся тела, на которые не действуют силы со стороны других тел, представляют собой замкнутую систему, то к ним применим закон сохранения импульса, а во многих случаях – и закон сохранения энергии.

Различают абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.

Абсолютно упругий удар

Абсолютно упругий удар – это удар, при котором механическая энергия системы соударяющихся тел не превращается в другие виды энергии.



Пусть оба шара движутся вдоль оси *x*. Скорости шаров с массами m_1 и m_2 до удара $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после удара $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_1$.

Проекции векторов скорости на ось *x* равны модулям скоростей.

В обоих шарах возникают упругие силы.

<u>Будем считать, что шары образуют замкнутую систему.</u>

Абсолютно упругий удар

Применим к шарам закон сохранения энергии и закон сохранения импульса.

По закону **сохранения кинетической энергии**:

$$\boxed{\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.}$$

Закон сохранения импульса (в проекциях на ось *x*): $\boxed{m_1 \upsilon_1 + m_2 \upsilon_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.}$

$$m_1 \upsilon_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 \upsilon_2^2,$$

$$m_1 \upsilon_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 \upsilon_2,$$

откуда

$$\upsilon_1 + u_1 = u_2 + \upsilon_2.$$

находим скорости шаров после удара:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2 \upsilon_2}{m_1 + m_2}, \qquad u_2 = \frac{(m_2 - m_1)\ \upsilon_2 + 2m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

Абсолютно упругий удар

Проанализируем результат. Рассмотрим частные случаи.

до удара **после удара**

1. Соударения одинаковых шаров: $m_1 = m_2$.

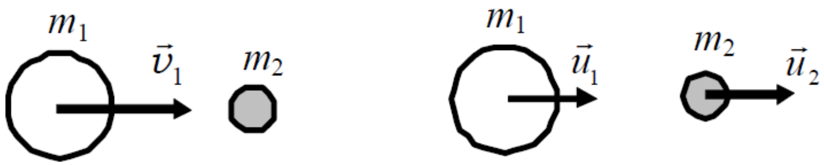
   Скорости шаров после удара: $u_1 = v_2$, $u_2 = v_1$,

то есть шары равной массы обмениваются скоростями.

2. Один шар до удара покоится: $v_2 = 0$, $u_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$, $u_2 = \dfrac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$.

Поведение шаров зависит от соотношения масс:

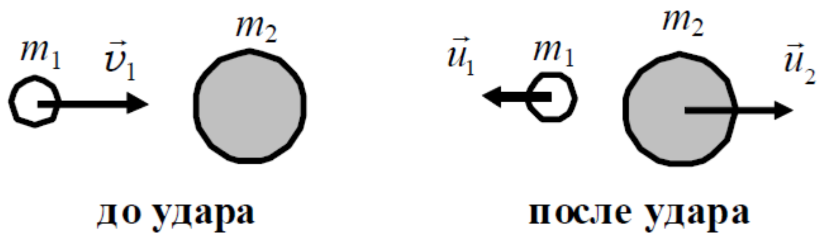
а) $m_1 > m_2$. Первый шар продолжает двигаться в том же направлении, как и до удара, но с меньшей скоростью ($u_1 < v_1$). Второй шар начинает двигаться в том же направлении.



до удара **после удара**

Абсолютно упругий удар

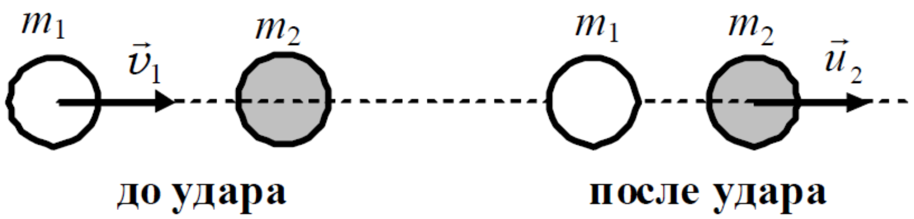
б) $m_1 < m_2$. После удара направление движения первого шара изменится – шар отскакивает обратно. Второй шар движется в ту сторону, в которую двигался первый шар до удара.



Чем больше разница в массах, тем меньшую энергию передает малый шар большому.

При $m_1 << m_2, u_2 = 0.$

в) $m_1 = m_2$. После удара остановится первый шар, а второй будет двигаться с той же скоростью и в том же направлении, в котором двигался первый шар до удара.

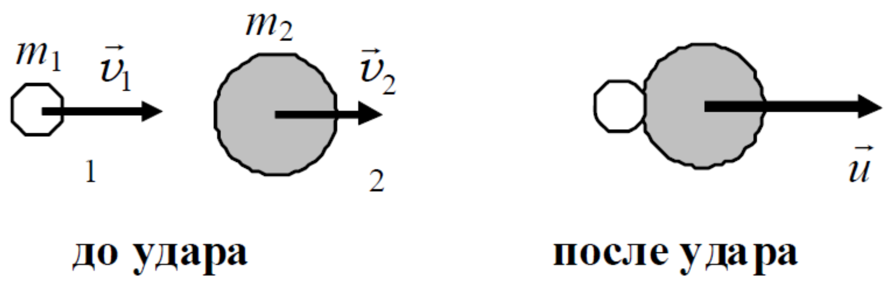


Общая кинетическая энергия тел сохраняется, но распределяется между ними в зависимости от их масс и скоростей.

Абсолютно неупругий удар

Абсолютно неупругий удар – это удар, при котором часть механической энергии системы соударяющихся тел превращается в другие виды энергии.

Имеем шары массами m_1 и m_2, их скорости соответственно равны $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.



В момент удара шары деформируются, и шары после удара двигаются с одинаковой скоростью.

Закон сохранения импульса $\boxed{m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u,}$ где *u* – скорость шаров после удара

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон сохранения кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе не выполняется.

«Потерю» энергии можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара.

$$\Delta E_k = \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}.$$

Абсолютно неупругий удар

«Потерю» энергии можно определить по разности кинетической энергии тел до и после удара.

$$\Delta E_k = \left(\frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2}.$$

$$\Delta E_k = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (\upsilon_1 - \upsilon_2)^2.$$

Часть кинетической энергии превращается в тепловую энергию

Если одно из тел (ударяемое тело) неподвижно, то есть $\vec{v} = 0$. В таком случае формула потери энергии при соударении имеет вид:

$$\Delta E_k = E_1 \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

где $E_1 = \dfrac{m_1 \upsilon_1^2}{2}$ – кинетическая энергия ударяющегося тела.

Абсолютно неупругий удар

ковка, штамповка металла

Для этого необходимо $m_1 << m_2$
(при ковке масса наковальни с куском металла много больше, чем масса молота).

забивание гвоздя

Необходимо что бы потеря энергии на деформацию была наименьшей.
Поэтому масса молотка должна быть, гораздо больше массы гвоздя.

Закон сохранения энергии для неупругого удара:

$$\boxed{E_{\text{кин. до}} = E_{\text{кин. после}} + Q,}$$

Q — энергия, перешедшая в тепло или другие формы.

Уравнение движения тела переменной массы

ракета, реактивный самолет, автомобиль для поливки улицы

Тело с переменной массой – тело масса которого меняется со временем.

Разберем на примере Ракеты

Пусть в момент времени t масса ракеты m, а ее скорость $\vec{v}$. Спустя время dt ее масса уменьшилась на dm и стала равной $m - dm$, а скорость стала равной $\vec{v} + d\vec{v}$. Изменение импульса системы за время dt равно:

$$d\vec{P} = \left[(m - dm)(\vec{v} + d\vec{v}) + dm(\vec{v} + d\vec{v} + \vec{u})\right] - m\vec{v},$$

где $\vec{u}$ – скорость истечения газов относительно ракеты. Раскроем скобки в этом уравнении, получим:

$$d\vec{P} = md\vec{v} + \vec{u}dm.$$

Абсолютно неупругий удар

Так как на ракету действуют внешние силы $\vec{F}$ (сила тяжести, сила сопротивления воздуха), то согласно второму закону Ньютона

$$\vec{F}dt = md\vec{v} + \vec{u}dm \quad \text{или} \quad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

Величина $-\vec{u}\dfrac{dm}{dt} = \vec{F}_P$ называется реактивной силой.

Тогда $\boxed{m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_P}$ – уравнение движения тела с переменной массой (**уравнение Мещерского**).

Будем считать, что внешние силы равны 0 : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}\dfrac{dm}{dt}.$

Если ракета движется прямолинейно, то $v = -u\displaystyle\int\frac{dm}{m} = -u\ln m + C.$

Абсолютно неупругий удар

Если ракета движется прямолинейно, то $$v = -u\int \frac{dm}{m} = -u\ln m + C\,.$$

Пусть в начальный момент времени скорость ракеты равна 0, а масса равна m_0 . Отсюда $C = u \ln m_0$. Следовательно

$$\boxed{v = u\ln\left({}^{m_0}\!/\!{}_{m} \right).}$$

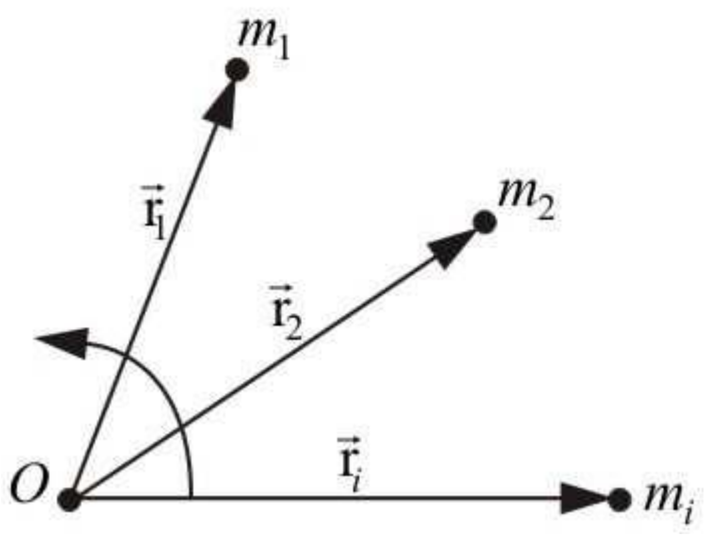
– формула Циолковского

Лекция 7. Динамика вращательного движения

Вращательное движение твердого тела относительно точки

Рассмотрим твердое тело как некую систему, состоящую из n точек (m_1, m_2, … m_n).

$\vec{r}_i$ – радиус-вектор *i*-й точки, проведенный из точки *O* – центра неподвижной инерциальной системы отсчета.
$\vec{F}_i$ – внешняя сила, действующая на *i*-ю точку,
$\vec{F}_{ik}$ – сила действия со стороны *k*-й точки на *i*-ю.



Вращение системы материальных точек вокруг точки О – центра неподвижной инерциальной системы отсчета

Запишем основное уравнение динамики для точки:

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n}\vec{F}_{ik} + \vec{F}_i.$$

Умножим обе части этого уравнения векторно на $\vec{r}_i$

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt}(m_i\vec{\upsilon}_i)\right] = \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Вращательное движение твердого тела относительно точки

$$\left[\vec{r}_i, \frac{d}{dt}\left(m_i\vec{\upsilon}_i\right)\right] = \left[\vec{r}_i, \sum_k \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right] = \sum_k \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right].$$

Момент импульса (количества движения) $\vec{L}_i$ точки относительно точки – Векторное произведение $\vec{r}_i$ точки на ее импульс :

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right], \text{ или } \vec{L} = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right].$$

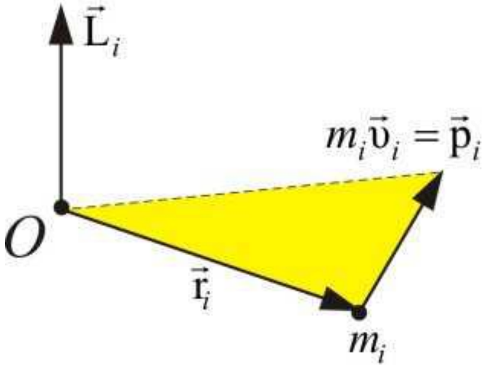
Для материальной точки массой т момент импульса

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \left[\vec{r}, \vec{p}\right].$$

Вращательное движение твердого тела относительно точки

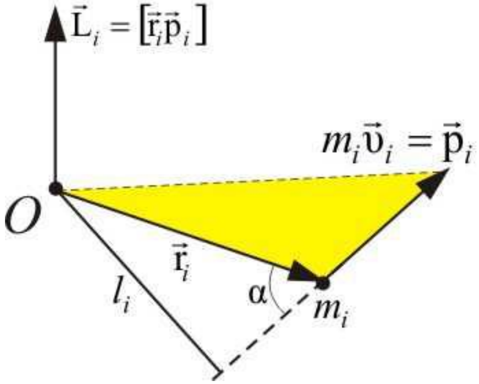
$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i, m_i\vec{\upsilon}_i\right], \text{ или } \vec{L} = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right].$$

Три вектора образуют правую тройку векторов, связанных «правилом буравчика»



Три взаимно перпендикулярных вектора

$$\vec{L} = \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i\right]; \; L_i = p_i r_i$$



Величина момент импульса

$$\left|\vec{L}_i\right| = L_i = p_i r_i \sin\alpha = pl$$

Направление вектора $\vec{L}_i$ ортогонально плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}_i$ и $\vec{p}_i$, а величина этого вектора

$$\left|\vec{L}_i\right| = L_i = p_i r_i \sin\alpha = pl, \quad \text{где} \quad l = r\sin\alpha$$ – плечо импульса